ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

Intégration d'une différentielle totale binaire à quatre variables indépendantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 509-520
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__509_0>

INTÉGRATION

D'UNE

DIFFÉRENTIELLE TOTALE BINAIRE

A QUATRE VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

I. Le problème suivant me semble emprunter quelque intérêt à l'importance des cas plus simples que j'ai traités récemment [1], ainsi qu'à la nature des calculs exigés par sa résolution; d'ailleurs, je ne serais pas étonné si des considérations du même genre, ou connexes, venaient un jour à jouer un rôle utile dans la théorie des équations aux dérivées partielles :

Étant données six fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z, t, savoir

$$(1)\qquad \begin{cases} A(x,y,z,t), & B, \quad C, \\ U, & V, \quad W, \end{cases}$$

intégrer la différentielle totale binaire

$$\begin{aligned} &A\,\eth[y,z] + B\,\eth[z,x] + C\,\eth[x,y] \\ &+ U\,\eth[x,t] + V\,\eth[y,t] + W\,\eth[z,t], \end{aligned}$$

---

(1) *Sur la théorie des intervalles binaires et des intégrales doubles* (*Ann. de l'Éc. Normale*, 3e série, t. XVI; avril 1899).

Interprétation nouvelle de la condition requise pour qu'une intégrale double, prise sur une plaque de surface, ne dépende que du bord de celle-ci (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 10 avril 1899).

c'est-à-dire trouver une paire u, v de fonctions de x, y, z, t dont les déterminants différentiels pris par rapport à y, z, à z, x, ..., à z, t reproduisent respectivement les six fonctions (1).

II. Si les fonctions données (1) sont toutes identiquement nulles, l'une des fonctions inconnues est nécessairement composée de l'autre, et la solution du problème s'obtient en prenant simplement, pour u, v, deux fonctions composées, à composantes arbitraires, d'une même fonction simple de x, y, z, t, également arbitraire.

Nous excepterons donc ce cas désormais; puis nous nous procurerons quelques facilités en introduisant les notations

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathbf{H}_{yz} = \mathbf{A}, & \ldots, \quad \mathbf{H}_{zt} = \mathbf{W}, \\ \mathbf{H}_{zy} = -\mathbf{A}, & \ldots, \quad \mathbf{H}_{tz} = -\mathbf{W}, \end{cases}$$

d'où les relations

$$(3)\qquad \pm \mathbf{H}_{yz} = \mp \mathbf{H}_{zy}, \quad \ldots, \quad \pm \mathbf{H}_{zt} = \mp \mathbf{H}_{tz},$$

dont nous ferons un usage continuel dans les transformations ultérieures, ainsi qu'en écrivant généralement

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u, v \\ y, z \end{Bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \frac{du}{dz} & \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dz} & \frac{dv}{dt} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u, v \\ z, t \end{Bmatrix};$$

moyennant tout quoi, les équations du problème prennent les formes

$$(5)\qquad \begin{cases} \begin{Bmatrix} u, v \\ y, z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_{yz}, & \begin{Bmatrix} u, v \\ z, x \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_{zx}, & \begin{Bmatrix} u, v \\ x, y \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_{xy}, \\ \begin{Bmatrix} u, v \\ x, t \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_{xt}, & \begin{Bmatrix} u, v \\ y, t \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_{yt}, & \begin{Bmatrix} u, v \\ z, t \end{Bmatrix} = \mathbf{H}_{zt}, \end{cases}$$

auxquelles les relations (3), (4) assurent une exactitude indépendante de la manière dont les lettres x, y, z, t peuvent être permutées dans les notations.

III. En ajoutant membre à membre, après les avoir multipliées par $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dt}$ précédées de signes convenables, les trois équations du groupe (5) dont les seconds membres ont pour indices les couples zt, ty, yz, en exécutant ensuite toutes les permutations circulaires des quatre lettres x, y, z, t dans les notations de la nouvelle équation ainsi obtenue, puis en recommençant les mêmes opérations avec les dérivées de v substituées à celles de u, on constatera tout d'abord que les fonctions cherchées u, v satisfont l'une et l'autre aux quatre mêmes équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, à la même fonction inconnue ϑ,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{rrrrl} & \mathrm{H}_{zt}\dfrac{d\vartheta}{dy} & +\mathrm{H}_{ty}\dfrac{d\vartheta}{dz} & +\mathrm{H}_{yz}\dfrac{d\vartheta}{dt} & =0,\\ \mathrm{H}_{tz}\dfrac{d\vartheta}{dx} & & +\mathrm{H}_{xt}\dfrac{d\vartheta}{dz} & +\mathrm{H}_{zx}\dfrac{d\vartheta}{dt} & =0,\\ \mathrm{H}_{yt}\dfrac{d\vartheta}{dx} & +\mathrm{H}_{tx}\dfrac{d\vartheta}{dy} & & +\mathrm{H}_{xy}\dfrac{d\vartheta}{dt} & =0,\\ \mathrm{H}_{zy}\dfrac{d\vartheta}{dx} & +\mathrm{H}_{xz}\dfrac{d\vartheta}{dy} & +\mathrm{H}_{yx}\dfrac{d\vartheta}{dz} & & =0, \end{array}\right.$$

et qu'en conséquence les solutions du problème sont nécessairement comprises parmi les paires d'intégrales particulières de ce système. Nous avons donc à discuter et à intégrer ces équations.

IV. Le déterminant des coefficients des dérivées de ϑ,

$$(7)\qquad \Theta = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{H}_{zt} & \mathrm{H}_{ty} & \mathrm{H}_{yz}\\ \mathrm{H}_{tz} & 0 & \mathrm{H}_{xt} & \mathrm{H}_{zx}\\ \mathrm{H}_{yt} & \mathrm{H}_{tx} & 0 & \mathrm{H}_{xy}\\ \mathrm{H}_{zy} & \mathrm{H}_{xz} & \mathrm{H}_{yx} & 0 \end{vmatrix}$$

jouit de la propriété évidente qu'en transposant dans les indices deux quelconques des lettres x, y, z, t on obtient la notation d'un autre déterminant redevenant identique à lui par des transformations laissant intacts sa valeur et son signe. Car la transposition de x, t, par exemple, dans les indices, produit le même effet dans le Tableau (7) que si, après y avoir transposé les deux colonnes ne contenant pas H_{xt}, H_{tx}, puis les deux lignes où les mêmes éléments ne figurent pas non plus, on lui faisait exécuter une demi-révolution autour de sa diagonale principale.

Un calcul direct donnant :

1° Pour le mineur complémentaire au premier élément de la diagonale principale, l'expression

$$H_{yx}H_{zx}H_{tx} + H_{xy}H_{xz}H_{xt} \tag{8}$$

que les relations (3) réduisent à o;

2° Pour celui de H_{zt}, l'expression

$$H_{tz}H_{xy}H_{yx} - H_{yt}H_{zx}H_{yx} - H_{zy}H_{xt}H_{xy}$$

que les mêmes relations permettent d'écrire

$$(H_{yz}H_{xt} + H_{zx}H_{yt} + H_{xy}H_{zt})H_{xy}, \tag{9}$$

on trouve, par de simples transpositions de lettres, dont chacune, en vertu des mêmes relations, laisse le binôme (8) identiquement nul en changeant simplement le signe du trinôme entre parenthèses dans l'expression ci-dessus (9), que les divers éléments du déterminant (7) ont pour mineurs complémentaires les produits de ce trinôme,

$$H_{yz}H_{xt} + H_{zx}H_{yt} + H_{xy}H_{zt},$$

par les éléments semblablement placés dans le Tableau

$$\begin{array}{cccc} o, & H_{xy}, & H_{xz}, & H_{xt}, \\ H_{yx}, & o, & H_{yz}, & H_{yt}, \\ H_{zx}, & H_{zy}, & o, & H_{zt}, \\ H_{tx}, & H_{ty}, & H_{tz}, & o; \end{array}$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\mathfrak{D} = (H_{yz}H_{xt} + H_{zx}H_{yt} + H_{xy}H_{zt})^2.$$

Si l'on a $\mathfrak{D} \neq o$, le problème est impossible; car alors les équations (6) donnent forcément

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} = \frac{du}{dt} = \frac{dv}{dx} = \ldots = \frac{dv}{dt} = o,$$

d'où

$$\left\{ \begin{matrix} u, v \\ y, z \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u, v \\ z, x \end{matrix} \right\} = \ldots = \left\{ \begin{matrix} u, v \\ y, t \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u, v \\ z, t \end{matrix} \right\} = o,$$

tandis que, par hypothèse, les seconds membres des équations proposées (5) ne sont pas tous $=0$.

Une première condition de possibilité consiste donc dans l'existence préalable, entre les données (2), *de la relation*

$$\mathrm{H}_{yz}\mathrm{H}_{xt}+\mathrm{H}_{zx}\mathrm{H}_{yt}+\mathrm{H}_{xy}\mathrm{H}_{zt}=0, \tag{10}$$

que nous supposerons désormais avoir lieu.

V. Comme alors, et cela d'après leur nature reconnue ci-dessus, les mineurs du troisième ordre du déterminant (7) sont tous nuls aussi, les équations (6) se réduisent à deux d'entre elles au plus, même à deux précisément; car nous supposons essentiellement $\neq 0$ une des fonctions (2) au moins (II), et deux équations du système (6) sont évidemment distinctes quand la valeur numérique commune aux deux coefficients dont les indices de chacun ne sont que ceux de l'autre transposés, ne s'y réduit pas à o. Nous fixerons les idées en supposant qu'il en est ainsi pour les deux premières, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{H}_{zt}(=-\mathrm{H}_{tz})\neq 0, \tag{11}$$

et il nous restera simplement à intégrer les équations différentielles partielles

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{z}}{dx}&=-\frac{\mathrm{H}_{xt}}{\mathrm{H}_{tz}}\frac{d\mathfrak{z}}{dz}-\frac{\mathrm{H}_{zx}}{\mathrm{H}_{tz}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt},\\ \frac{d\mathfrak{z}}{dy}&=-\frac{\mathrm{H}_{yt}}{\mathrm{H}_{tz}}\frac{d\mathfrak{z}}{dz}-\frac{\mathrm{H}_{zy}}{\mathrm{H}_{tz}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt},\end{aligned}\right. \tag{12}$$

formant un système immédiat, aux variables principales x, y, aux variables paramétriques z, t, que, moyennant les relations (3), chacune des transpositions (x, y), (z, t) laisse invariable.

En outre, ces équations n'ont d'intégrales ni exceptionnelles, ni singulières, parce que $\mathfrak{z}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dy}$ n'entrent ni dans leur condition de passivité, ni dans les relations à établir entre x, y, z, t, $\mathfrak{z}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dz}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ pour que leurs seconds membres cessent d'être fonctions olotropes de ces sept quantités; nous n'avons donc à nous préoccuper que de leurs intégrales ordinaires.

VI. Les équations (12) rentrant précisément dans une classe de systèmes dont j'ai exécuté l'intégration ([1]), la méthode à suivre pour procéder à cette recherche conduit à écrire tout d'abord le système auxiliaire d'équations différentielles totales

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{H_{xt}}{H_{tz}}, & \frac{dt}{dx} &= \frac{H_{zx}}{H_{tz}}, \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{H_{yt}}{H_{tz}}, & \frac{dt}{dy} &= \frac{H_{zy}}{H_{tz}}, \end{aligned}\right.$$

maintenant aux fonctions inconnues z, t des deux variables indépendantes x, y, et à construire leurs conditions de passivité qui coïncident toujours avec celles du système originaire (12).

A cet effet, on formera l'expression ultime de $\frac{d^2 z}{dy\,dx}$, tirée de la première équation de la première colonne du système (13), en différentiant cette équation par rapport à y et rééliminant $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dt}{dy}$, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} H_{tz}\frac{d^2 z}{dy\,dx} &+ \frac{H_{xt}}{H_{tz}}\left(\frac{\partial H_{tz}}{\partial y} + \frac{H_{yt}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{tz}}{\partial z} + \frac{H_{zy}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{tz}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial H_{xt}}{\partial y} + \frac{H_{yt}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{xt}}{\partial z} + \frac{H_{zy}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{xt}}{\partial t}; \end{aligned}$$

on formera ensuite celle de $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ tirée de la seconde équation de la même colonne, en permutant simplement les lettres x, y dans les notations de la relation précédente, ce qui donnera

$$\begin{aligned} H_{tz}\frac{d^2 z}{dx\,dy} &+ \frac{H_{yt}}{H_{tz}}\left(\frac{\partial H_{tz}}{\partial x} + \frac{H_{xt}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{tz}}{\partial z} + \frac{H_{zx}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{tz}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial H_{yt}}{\partial x} + \frac{H_{xt}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{yt}}{\partial z} + \frac{H_{zx}}{H_{tz}}\frac{\partial H_{yt}}{\partial t}, \end{aligned}$$

et, en soustrayant membre à membre cette nouvelle relation de la pré-

---

([1]) *Extension de la méthode de Jacobi pour intégrer une seule équation aux dérivées partielles, à une seule fonction inconnue dont les dérivées y entrent linéairement, au cas d'un système passif d'équations de cette sorte en nombre quelconque* (*Ann. de l'Éc. Normale,* 3e série, t. VII; juillet 1890).

cédente, cela sous l'hypothèse

$$\frac{d^2 z}{dy\,dx} = \frac{d^2 z}{dx\,dy},$$

on obtiendra la condition de passivité unique du système (13) qui correspond à sa première colonne, dont nous multiplierons les deux membres par $H_{tz}^2 (\neq 0)$,

$$\begin{aligned} &H_{xt}\left(H_{tz}\frac{dH_{tz}}{dy} + H_{yt}\frac{dH_{tz}}{dz} + H_{zy}\frac{dH_{tz}}{dt}\right) - H_{yt}\left(H_{tz}\frac{dH_{tz}}{dx} + H_{xt}\frac{dH_{tz}}{dz} + H_{zx}\frac{dH_{tz}}{dt}\right) \\ &= H_{tz}\left(H_{tz}\frac{dH_{xt}}{dy} + H_{yt}\frac{dH_{xt}}{dz} + H_{zy}\frac{dH_{xt}}{dt}\right) - H_{tz}\left(H_{tz}\frac{dH_{yt}}{dx} + H_{xt}\frac{dH_{yt}}{dz} + H_{zx}\frac{dH_{yt}}{dt}\right). \end{aligned}$$

Dans le premier membre, ce qui provient des seconds termes des deux parenthèses s'évanouit; ce qui provient des troisièmes se réduit à $H_{xy}H_{tz}\frac{dH_{zt}}{dt}$ en vertu de la relation fondamentale (10) [et de (3) toujours], et tous les termes deviennent divisibles par $H_{tz} (\neq 0)$. Ces diverses observations permettent d'écrire facilement la condition précédente sous la forme

$$\begin{aligned} &H_{xt}\left(\frac{dH_{zt}}{dy} + \frac{dH_{ty}}{dz}\right) + H_{yt}\left(\frac{dH_{xt}}{dz} + \frac{dH_{tz}}{dx}\right) + H_{zt}\left(\frac{dH_{yt}}{dx} + \frac{dH_{tx}}{dy}\right) \\ &\quad = H_{yz}\frac{dH_{xt}}{dt} + H_{zx}\frac{dH_{yt}}{dt} + H_{xy}\frac{dH_{zt}}{dt}, \end{aligned}$$

puis, en l'ajoutant membre à membre avec le résultat de la différentiation de l'identité (10) par rapport à t, sous celle-ci, maintenant définitive,

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &H_{xt}\left(\frac{dH_{yz}}{dt} + \frac{dH_{zt}}{dy} + \frac{dH_{ty}}{dz}\right) \\ &+ H_{yt}\left(\frac{dH_{zx}}{dt} + \frac{dH_{xt}}{dz} + \frac{dH_{tz}}{dx}\right) \\ &+ H_{zt}\left(\frac{dH_{xy}}{dt} + \frac{dH_{yt}}{dx} + \frac{dH_{tx}}{dy}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

La permutation des lettres z, t dans les notations de cette première condition de passivité procure la dernière, qui correspond à la seconde colonne du Tableau (13),

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &H_{xz}\left(\frac{dH_{yt}}{dz}+\frac{dH_{tz}}{dy}+\frac{dH_{zy}}{dt}\right)\\ &+H_{yz}\left(\frac{dH_{tx}}{dz}+\frac{dH_{xz}}{dt}+\frac{dH_{zt}}{dx}\right)\\ &+H_{tz}\left(\frac{dH_{xy}}{dz}+\frac{dH_{yz}}{dx}+\frac{dH_{zx}}{dy}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Une deuxième condition de possibilité consiste donc dans l'existence, entre les données, des relations (14), (15) *que nous supposerons encore avoir lieu;* mais il arrive qu'elles sont entraînées par les dernières que nous rencontrerons bientôt (VII, *inf.*).

Sous cette nouvelle condition, les équations différentielles auxiliaires (13) possèdent des équations intégrales générales de la forme

$$\mu(x, y, z, t) = M, \qquad \nu(x, y, z, t) = N,$$

où μ, ν, M, N représentent deux certaines fonctions de x, y, z, t et deux constantes arbitraires, et, d'après ma méthode d'intégration mentionnée ci-dessus, les équations (12), partant (6), ont, pour intégrale générale,

$$\omega = \Omega(\mu, \nu),$$

où Ω est la caractéristique d'une composante arbitraire à deux places.

VII. En nommant donc Υ, Φ deux composantes de cette nature, encore inconnues, la paire de fonctions que nous cherchons ne peut être que de la forme

$$(16)\qquad u = \Upsilon(\mu, \nu), \qquad v = \Phi(\mu, \nu),$$

et, en posant, pour abréger,

$$\Theta(\mu, \nu) = \left\{\begin{matrix}\Upsilon, \Phi\\ \mu, \nu\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix}\Upsilon^{(1,0)} & \Upsilon^{(0,1)}\\ \Phi^{(1,0)} & \Phi^{(0,1)}\end{vmatrix},$$

sa substitution dans les équations du problème (5) conduira aux six nouvelles

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\Theta\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ y, z\end{matrix}\right\} = H_{yz}, \quad \Theta\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ z, x\end{matrix}\right\} = H_{zx}, \quad \Theta\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ x, y\end{matrix}\right\} = H_{xy},\\ &\Theta\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ x, t\end{matrix}\right\} = H_{xt}, \quad \Theta\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ y, t\end{matrix}\right\} = H_{yt}, \quad \Theta\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ z, t\end{matrix}\right\} = H_{zt}. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant on ajoute membre à membre, après les avoir différentiées par rapport à y, z, t et multipliées par des facteurs ± 1 convenablement choisis, celles de ces dernières équations où les indices des seconds membres sont z et t, t et y, y et z respectivement, il restera simplement

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Theta}{dy} & \frac{d\Theta}{dz} & \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{d\mu}{dy} & \frac{d\mu}{dz} & \frac{d\mu}{dt} \\ \frac{d\nu}{dy} & \frac{d\nu}{dz} & \frac{d\nu}{dt} \end{vmatrix} = \frac{dH_{zt}}{dy} + \frac{dH_{ty}}{dz} + \frac{dH_{yz}}{dt},$$

parce que le multiplicateur de Θ dans le résultat se réduit en fait à o. *D'où, en poursuivant par permutations d'indices, les quatre conditions de possibilité*

$$(18) \quad \begin{cases} \phantom{\frac{dH_{tz}}{dx} +} \frac{dH_{zt}}{dy} + \frac{dH_{ty}}{dz} + \frac{dH_{yz}}{dt} = 0, \\ \frac{dH_{tz}}{dx} \phantom{+ \frac{dH_{tx}}{dy}} + \frac{dH_{xt}}{dz} + \frac{dH_{zx}}{dt} = 0, \\ \frac{dH_{yt}}{dx} + \frac{dH_{tx}}{dy} \phantom{+ \frac{dH_{xt}}{dz}} + \frac{dH_{xy}}{dt} = 0, \\ \frac{dH_{zy}}{dx} + \frac{dH_{xz}}{dy} + \frac{dH_{yx}}{dz} \phantom{+ \frac{dH_{xy}}{dt}} = 0, \end{cases}$$

parce que, Θ étant une fonction composée finie de μ, ν, les quatre déterminants du Tableau

$$\begin{matrix} \frac{d\Theta}{dx}, & \frac{d\Theta}{dy}, & \frac{d\Theta}{dz}, & \frac{d\Theta}{dt}, \\ \frac{d\mu}{dx}, & \frac{d\mu}{dy}, & \frac{d\mu}{dz}, & \frac{d\mu}{dt}, \\ \frac{d\nu}{dx}, & \frac{d\nu}{dy}, & \frac{d\nu}{dz}, & \frac{d\nu}{dt}, \end{matrix}$$

se réduisent tous à o identiquement.

VIII. Dans le cas le plus général qui nous occupe, où les fonctions données (2) ne sont pas toutes $= 0$, la réalisation des conditions (10) et (18) assure, *à elle seule*, la possibilité du problème, et nous sommes nantis actuellement des moyens de le résoudre.

Car, en raisonnant toujours sur l'existence de l'inégalité (11), la condition (10) réduit les quatre équations aux dérivées partielles (6) au système (12) n'en comprenant plus que deux; les conditions de passivité (14), (15) des équations différentielles totales auxiliaires (13) sont entraînées par les identités (18), et l'intégration générale de ce système auxiliaire fournira les fonctions simples $\mu(x, y, z, t)$, $\nu(x, y, z, t)$ de l'alinéa VI.

Si maintenant on résout chacune des six équations (17) par rapport à une inconnue T écrite dans toutes à la place de Θ, on trouvera six fonctions de $x, y\ z, t$, forcément identiques entre elles. Effectivement, μ, ν, intégrales particulières évidentes de la première équation (6), donnent

$$\mathrm{H}_{zt}\frac{d\mu}{dy} + \mathrm{H}_{ty}\frac{d\mu}{dz} + \mathrm{H}_{yz}\frac{d\mu}{dt} = 0,$$

$$\mathrm{H}_{zt}\frac{d\nu}{dy} + \mathrm{H}_{ty}\frac{d\nu}{dz} + \mathrm{H}_{yz}\frac{d\nu}{dt} = 0,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{H}_{zt}}{\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ z, t\end{matrix}\right\}} = \frac{\mathrm{H}_{ty}}{\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ t, y\end{matrix}\right\}} = \frac{\mathrm{H}_{yz}}{\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ y, z\end{matrix}\right\}},$$

puis, de même,

$$\ldots = \frac{\mathrm{H}_{zx}}{\left\{\begin{matrix}\mu, \nu\\ z, x\end{matrix}\right\}} = \ldots,$$

et la fonction $\mathrm{T}(x, y, z, t)$ ainsi obtenue est certainement exprimable en fonction composée finie de μ, ν seulement, car en la substituant à Θ, dans les équations (17), alors toutes satisfaites, puis en recommençant les raisonnements de l'alinéa précédent, on trouvera, moyennant les conditions (18), que tous les déterminants du Tableau

$$\begin{matrix}
\dfrac{d\mathrm{T}}{dx}, & \dfrac{d\mathrm{T}}{dy}, & \dfrac{d\mathrm{T}}{dz}, & \dfrac{d\mathrm{T}}{dt}, \\[2ex]
\dfrac{d\mu}{dx}, & \dfrac{d\mu}{dy}, & \dfrac{d\mu}{dz}, & \dfrac{d\mu}{dt}, \\[2ex]
\dfrac{d\nu}{dx}, & \dfrac{d\nu}{dy}, & \dfrac{d\nu}{dz}, & \dfrac{d\nu}{dt},
\end{matrix}$$

sont identiquement nuls, tandis que ceux de ses deux dernières lignes ne peuvent l'être tous.

On aura ainsi

$$T(x, y, z, t) = \Theta(\mu, \nu),$$

où Θ est une composante maintenant connue; et le calcul des composantes Υ, Φ des formules (16) n'exigera plus que l'intégration de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Upsilon}{d\mu} & \frac{d\Upsilon}{d\nu} \\ \frac{d\Phi}{d\mu} & \frac{d\Phi}{d\nu} \end{vmatrix} = \Theta(\mu, \nu),$$

c'est-à-dire celle d'une différentielle binaire à deux variables seulement, problème qui a été résolu au n° 21 de mon Mémoire *Sur la théorie des intervalles binaires*, etc., cité au début de celui-ci.

IX. La condition (10) est purement *algébrique*, n'exprimant pas autre chose au fond que l'existence de quelque Tableau de fonctions de x, y, z, t, à quatre colonnes et à deux lignes, dont les déterminants (non différentiels) reproduisent identiquement les fonctions données (2).

Si l'on en fait abstraction, et si, par une induction fort plausible, on généralise les résultats obtenus, pour les cas de deux et trois variables, dans mes Mémoires rappelés au commencement de celui-ci, pour le cas de quatre variables dans ce qui précède, les observations suivantes, applicables aux différentielles totales ordinaires (primaires), s'étendent d'elles-mêmes aux différentielles binaires :

Aucune condition d'intégrabilité ne s'impose, quand le nombre h des variables ne surpasse pas la valeur minimum η pour laquelle on peut écrire la différentielle (on a $\eta = 1$ pour les différentielles primaires, et $\eta = 2$ pour les différentielles binaires).

Pour $h = \eta + 1$, une seule condition d'intégrabilité intervient.

Pour $h \geqq \eta + 1$, une condition se forme, comme dans le cas précédent, pour chaque combinaison de $\eta + 1$ variables, réalisable parmi les h à considérer, ce qui élève leur nombre total à $\frac{h(h-1)\ldots(h-\eta)}{1.2\ldots(\eta+1)}$.

Les mêmes règles subsistent vraisemblablement pour les différentielles ternaires, etc., dont je dirai peut-être un mot dans une autre occasion.

X. De même que les $\frac{h(h-1)}{1.2}$ équations différentielles, aux h fonctions inconnues H_x, H_y, H_z, ...,

$$\frac{dH_x}{dy} = \frac{dH_y}{dx}, \qquad \frac{dH_x}{dz} = \frac{dH_z}{dx}, \qquad \frac{dH_y}{dz} = \frac{dH_z}{dy}, \qquad \ldots,$$

ont pour intégrales générales les dérivées premières par rapport à x, y, z, ... d'une même fonction arbitraire de ces h variables, les conditions (18), envisagées comme équations différentielles partielles entre les six fonctions inconnues H_{zt}, ... des quatre variables x, y, z, t, ont pour intégrales générales évidentes les déterminants différentiels, convenablement formés, d'une paire arbitraire de fonctions de ces mêmes variables.

FIN DU TOME XVI DE LA TROISIÈME SÉRIE.