C. BOURLET

Sur certaines équations analogues aux équations différentielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 333-375

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__333_0>

SUR CERTAINES ÉQUATIONS

ANALOGUES AUX

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. C. BOURLET.

Dans un Mémoire paru en avril-mai 1897 dans ce Recueil (¹), j'ai défini une catégorie très générale d'opérations que j'ai nommées *transmutations* qui font correspondre à une fonction d'une ou plusieurs variables une ou plusieurs fonctions des mêmes variables.

La transmutation est dite :

Uniforme, si elle ne fait correspondre à une fonction donnée qu'une seule fonction ;

Continue, si la limite de la transmuée d'une fonction est la transmuée de la limite de cette fonction ;

Régulière, si elle transforme une fonction régulière en une autre fonction également régulière ;

Complète, dans un domaine de rayon ρ, autour du point x, si elle fournit une transmuée pour toute fonction régulière dans tout ce domaine ou dans un domaine qui le contient.

Lorsque le rayon ρ est nul, en tout point x, la transmutation est applicable à toute fonction qui est régulière dans quelque domaine, si petit qu'il soit.

Lorsqu'au contraire ρ est infini, la transmutation ne peut s'appliquer qu'à des fonctions entières.

Parmi toutes les transmutations qu'on peut imaginer, il y a une

(¹) *Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini.*

classe particulière qui joue un rôle prépondérant. Ce sont celles que j'ai nommées *transmutations additives*, qui jouissent de la propriété de transmuer une somme en la somme des transmuées des deux parties.

M. Pincherle qui, concurremment avec moi (d'ailleurs à mon insu), avait étudié ces opérations, les nomme *opérations distributives* [1]. Quoique les Travaux de cet auteur aient paru, en partie, avant les miens, je me permets de conserver la terminologie que j'ai créée.

Je me propose, dans ce qui va suivre, de développer les résultats que j'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie des Sciences le 21 juin 1897, résultats qui étendent, partiellement, aux équations opératives construites avec une transmutation additive donnée, ceux que l'on connaît sur les équations différentielles ordinaires.

I.

1. Soit $\mathfrak{T}$ le symbole opératif d'une transmutation *additive*, uniforme, continue, régulière, complète dans quelque domaine.

Désignons par $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$, ... les puissances symboliques de cette opération, de telle sorte que l'on ait

$$\mathfrak{T}^2 u = \mathfrak{T}(\mathfrak{T} u), \qquad \mathfrak{T}^3 u = \mathfrak{T}(\mathfrak{T}^2 u), \qquad \ldots.$$

Si l'on considère une équation de la forme

$$(1) \qquad p_0 \mathfrak{T}^m u + p_1 \mathfrak{T}^{m-1} u + \ldots + p_{m-1} \mathfrak{T} u + p_m u = 0,$$

où $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}, p_m$ sont des fonctions données de la variable x et u une fonction inconnue de la même variable, on a là une sorte d'équation analogue à une équation différentielle linéaire qui, d'ailleurs, en est le cas particulier où l'opération $\mathfrak{T}$ est la dérivée.

Posons

$$\mathrm{T}u = p_0 \mathfrak{T}^m u + p_1 \mathfrak{T}^{m-1} u + \ldots + p_m u;$$

cette égalité définit une nouvelle transmutation T, additive, uniforme,

---

[1] M. Pincherle a résumé ses Travaux dans un Mémoire paru dans les *Mathematische Annalen*, Bd. XLIX (1897); p. 325 à 382.

continue, comme $\mathfrak{T}$ et l'équation (1) s'écrit

$$T u = 0. \tag{2}$$

Nous sommes ainsi ramené à considérer une équation différentielle d'ordre infini, puisque, comme je l'ai démontré, l'opération T est toujours définie par une série de la forme

$$Tu = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{du}{dx} + \alpha_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots + \alpha_m \frac{d^m u}{dx^m} + \ldots,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ sont des fonctions données de x.

2. Je rappelle rapidement les résultats que j'ai obtenus dans mon Mémoire (*loc. cit.*) pour les compléter sur quelques points.

1° L'équation (2) peut n'admettre que la seule solution $u = 0$; la transmutation T admet alors pour inverse une transmutation *uniforme* (en présupposant l'existence de cette inverse).

2° Si l'équation (2) n'admet qu'un nombre *fini* de solutions linéairement indépendantes, elle admet les mêmes solutions qu'une certaine équation différentielle linéaire facile à former.

Soient en effet $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ces solutions. La solution la plus générale de l'équation (2) sera donnée par la formule

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_p u_p, \tag{3}$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_p$ sont des constantes arbitraires. Si l'on prend p fois la dérivée des deux membres de l'égalité (3) et qu'on élimine C_1, $C_2, \ldots, C_p$ entre les $(p+1)$ égalités ainsi obtenues, on a une équation différentielle linéaire d'ordre p qui admet toutes les solutions de l'équation (2) et celles-là seulement. Soit

$$\Phi u = 0 \tag{4}$$

cette équation, en posant

$$\Phi u = \beta_0 + \beta_1 \frac{du}{dx} + \ldots + \beta_p \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Il est facile de voir comment on passe de l'équation (2) à l'équation (4).

La transmutation T^{-1} inverse de T est multiforme, car, si v est l'une des solutions de

$$Tv = u,$$

on a

$$T^{-1}u = v + C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_p u_p;$$

mais si l'on forme le produit de T^{-1} par $\mathfrak{D}$, on obtient la transmutation $\mathfrak{D}T^{-1}$ qui est *uniforme*, ainsi que son inverse $T\mathfrak{D}^{-1}$.

On peut donc poser

$$\mathfrak{D}T^{-1}u = \mathfrak{R}u,$$

$\mathfrak{R}$ étant le symbole d'une transmutation additive uniforme dont l'inverse est également uniforme. On en conclut

$$\mathfrak{D}T^{-1}Tu = \mathfrak{R}Tu$$

et, par suite,

$$\mathfrak{D}u = \mathfrak{R}Tu.$$

Donc, dans ce cas, il existe une certaine transmutation additive uniforme $\mathfrak{R}$, dont l'inverse est également uniforme, telle qu'en l'appliquant au premier membre de l'équation (1) *ou* (2) *cette équation se transforme en équation différentielle linéaire ordinaire équivalente.*

3° L'équation (2) peut admettre un nombre infini de solutions linéairement indépendantes, c'est-à-dire telles qu'un nombre quelconque d'entre elles (aussi grand qu'on le voudra, mais fini) soient linéairement indépendantes.

La solution la plus générale de l'équation dépendra alors d'un nombre *infini* de constantes arbitraires.

3. J'ai, dans le Mémoire déjà cité, donné des exemples du premier et du second type. Si l'on pose

$$f(x, z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots,$$

$f(x, z)$ est ce que j'appelle la *fonction opérative* de T.

J'ai montré que si, pour toutes les valeurs de x comprises dans un certain domaine, l'équation

$$f(x, z) = 0 \tag{4}$$

n'a aucune racine finie en z, l'équation (2) appartient à la première catégorie et la transmutation T est, à un facteur près, une *substitution*.

Si le nombre des racines en z est *fini*, l'équation appartient au second type et la transmutation uniforme $\mathcal{R}$ qui la ramène à une équation différentielle ordinaire est une substitution ([1]).

Lorsque le nombre des racines en z de l'équation (4) est infini et que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont constants, l'équation (2) appartient à la troisième catégorie. Il me semblait alors *vraisemblable* qu'il devait en être de même dans tous les cas. On en aurait conclu que la seule transmutation uniforme dont l'inverse est également uniforme serait une substitution.

M. Pincherle, dans une de ses lettres, m'a fait remarquer que mes prévisions n'étaient pas exactes en me fournissant un exemple très général de transmutations dont les inverses sont uniformes sans être des substitutions. Voici l'exemple de M. Pincherle :

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ des constantes *non nulles*. Définissons une transmutation additive par les égalités

$$\mathfrak{T} x^n = a_n x^n;$$

cette transmutation sera évidemment uniforme ainsi que son inverse et sera donnée (en appliquant la formule (2), page 153, de mon Mémoire) par le développement

$$\mathfrak{T} u = \sum_0^\infty \frac{b_n x^n}{n!} \frac{d^n u}{dx^n},$$

en posant

$$b_n = a_n - C_n^1 a_{n-1} + C_n^2 a_{n-2} + \ldots + (-1)^n a_0.$$

L'équation (4) pourra avoir ici un nombre infini de solutions, et cependant l'équation

$$\mathfrak{T} u = 0$$

n'aura pas d'autre solution que $u = 0$.

([1]) Ces théorèmes supposent la transmutation T *complète*, dans un certain domaine, ainsi que l'inverse.

II.

4. Je me propose maintenant d'étudier plus spécialement les équations linéaires de la forme (1) dans lesquelles les coefficients p_0, $p_1, \ldots, p_m$ sont *constants*.

On sait qu'étant donnée une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(5) \qquad p_0 \frac{d^m u}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m u = 0,$$

on obtient un système fondamental d'intégrales en considérant celles qui sont de la forme e^{rx} où r est une racine de l'équation caractéristique

$$(6) \qquad p_0 r^m + p_1 r^{m-1} + \ldots + p_m = 0.$$

Or, si l'on remarque que e^{rx} est une solution de l'équation

$$(7) \qquad \frac{du}{dx} = ru,$$

on voit que l'intégration de l'équation (5) se ramène à celle de l'équation (7) suivie de la résolution algébrique de l'équation entière (6).

Une méthode identique s'applique à l'équation (1).

Soit

$$(8) \qquad p_0 \mathfrak{T}^m u + p_1 \mathfrak{T}^{m-1} u + \ldots + p_{m-1} \mathfrak{T} u + p_m u = 0$$

une équation opérative à coefficients constants.

Supposons qu'on sache trouver la solution *la plus générale* de l'équation

$$(9) \qquad \mathfrak{T} u = ru,$$

où r désigne une constante arbitraire. Soit $\psi(x, r)$ cette solution; nous *admettrons* qu'elle est *régulière* par rapport aux *deux* variables x, r dans certains domaines et qu'elle n'est pas identiquement nulle.

Il est bon de remarquer de suite que cette solution contiendra toujours au moins une constante arbitraire, car si u est une solution de (9), Cu en est une autre, C étant une constante arbitraire.

Si $\psi(x, r)$ contient un nombre *fini* q de constantes arbitraires, elle sera certainement de la forme

$$\psi(x, r) = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \ldots + C_q v_q,$$

$v_1, v_2, \ldots, v_q$ étant q fonctions de x et de r bien déterminées, et C_1, $C_2, \ldots, C_q$, q constantes arbitraires.

Mais il pourrait fort bien arriver, comme nous le verrons plus loin, que ψ dépende d'un nombre *infini* de constantes arbitraires.

5. De l'identité

$$\mathfrak{T}\psi(x, r) = r\psi(x, r)$$

on déduit sans peine la suivante

$$\mathfrak{T}^q\psi(x, r) = r^q\psi(x, r). \tag{10}$$

Nous allons en conclure la proposition que voici :

Soit r une racine de l'équation caractéristique

$$f(r) \equiv p_0 r^m + p_1 r^{m-1} + \ldots + p_m = 0, \tag{11}$$

d'ordre de multiplicité h. Les h fonctions

$$\psi(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial r}\psi(x, r), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{h-1}}{\partial r^{h-1}}\psi(x, r)$$

sont h solutions de l'équation (8).

En prenant successivement, pour r, toutes les racines de l'équation (11) *et en donnant aux constantes que contiennent ces fonctions des valeurs fixes mais quelconques, on aura m solutions linéairement indépendantes.*

Enfin, en laissant les constantes que contiennent ces m solutions absolument arbitraires, on obtient la solution la plus générale de l'équation (8) *en faisant la somme de ces m solutions.*

6. Pour établir cette proposition, remarquons d'abord que l'on a, T étant le symbole d'une transmutation additive, continue, uniforme et

régulière

$$\frac{\partial}{\partial r}[\mathrm{T}\psi(x, r)] = \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial r}\psi(x, r). \tag{12}$$

Car on a, d'après les propriétés de cette transmutation,

$$\frac{\mathrm{T}\psi(x, r+\Delta r) - \mathrm{T}\psi(x, r)}{\Delta r} = \mathrm{T}\left[\frac{\psi(x, r+\Delta r) - \psi(x, r)}{\Delta r}\right],$$

et il suffit de faire tendre Δr vers zéro pour obtenir l'égalité (12).

Posons, alors

$$\mathrm{T}u = p_0 \mathfrak{S}^m u + p_1 \mathfrak{S}^{m-1} u + \ldots + p_m u,$$

on aura identiquement

$$\mathrm{T}\psi(x, r) = f(r)\,\psi(x, r), \tag{13}$$

en vertu de l'égalité (10).

Prenons successivement les dérivées des deux membres de cette identité; il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}\frac{\partial}{\partial r}\psi(x, r) &= f'(r)\,\psi(x, r) + f(r)\frac{\partial}{\partial r}\psi(x, r),\\
\mathrm{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} &= f''(r)\,\psi + 2f'(r)\frac{\partial\psi}{\partial r} + f(r)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{T}\frac{\partial^{h-1}\psi}{\partial r^{h-1}} &= f^{(h-1)}(r)\,\psi + \frac{h-1}{1}f^{(h-2)}(r)\frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + f(r)\frac{\partial^{h-1}\psi}{\partial r^{h-1}}.
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, r étant racine multiple d'ordre h de l'équation (11), on a

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \ldots = f^{(h-1)}(r) = 0,$$

Les identités (13) et (14) donnent alors

$$\mathrm{T}\psi = 0, \qquad \mathrm{T}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{T}\frac{\partial^{(h-1)}\psi}{\partial r^{h-1}} = 0,$$

ce qui prouve bien que les h fonctions ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial r}$, $\ldots$, $\frac{\partial^{h-1}\psi}{\partial r^{h-1}}$ sont des solutions de l'équation (8).

7. Je dis, de plus, que les m solutions, ainsi obtenues, sont linéairement indépendantes.

Soient, en effet, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ les solutions distinctes de l'équation (11) et $h_1, h_2, \ldots, h_k$ leurs ordres de multiplicité respectifs

$$h_1+h_2+\ldots+h_k=m.$$

Nous allons montrer qu'il est impossible de trouver m coefficients constants non tous nuls, $a_0, a_1, \ldots, a_{h_1-1}$; $b_0, b_1, \ldots, b_{h_2-1}$; $l_0, l_1, \ldots, l_{h_k-1}$ tels que l'on ait identiquement

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_0\psi_1+a_1\frac{\partial\psi_1}{\partial r_1}+a_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r_1^2}+\ldots+a_{h_1-1}\frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-1}}\\
&+b_0\psi_2+b_1\frac{\partial\psi_2}{\partial r_2}+b_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r_2^2}+\ldots+b_{h_2-1}\frac{\partial^{h_2-1}\psi_2}{\partial r_2^{h_2-1}}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+l_0\psi_k+l_1\frac{\partial\psi_k}{\partial r_k}+l_2\frac{\partial^2\psi_k}{\partial r_k^2}+\ldots+l_{h_k-1}\frac{\partial^{h_k-1}\psi_k}{\partial r_k^{h_k-1}}=0,
\end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$\psi_i=\psi(x, r_i),$$

les constantes qui figurent dans les m fonctions

$$\psi_1,\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r_1},\quad \ldots,\quad \psi_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial\psi_k^{h_k-1}}{\partial r_k^{h_k-1}}$$

ayant des valeurs fixes, différentes ou non, dans ces diverses fonctions.

De l'identité

$$\mathfrak{S}\psi(x, r)=r\psi(x, r)$$

on tire, en prenant les dérivées par rapport à r,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{S}\frac{\partial\psi}{\partial r}=\psi+r\frac{\partial\psi}{\partial r},\\
&\mathfrak{S}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=2\frac{\partial\psi}{\partial r}+r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathfrak{S}\frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}=q\frac{\partial^{q-1}\psi}{\partial r^{q-1}}+r\frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}.
\end{aligned}\right.$$

Remarquons d'abord que ces identités prouvent qu'aucune des dérivées de ψ ne peut être identiquement nulle si ψ elle-même ne l'est pas, comme nous le supposons.

Prenons alors la transmuée ϖ du premier membre de l'égalité (15) et tenons compte des identités (16); il vient

$$\begin{aligned}
&r_1\left[a_0\psi_1 + a_1\frac{\partial\psi_1}{\partial r_1} + \ldots + a_{h_1-1}\frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-1}}\right]\\
&\quad + a_1\psi_1 + 2a_2\frac{\partial\psi_1}{\partial r_1} + \ldots + (h_1-1)\,a_{h_1-1}\frac{\partial^{h_1-2}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-2}}\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + r_k\left[l_0\psi_k + l_1\frac{\partial\psi_k}{\partial r_k} + \ldots + l_{h_k-1}\frac{\partial^{h_k-1}\psi_k}{\partial r_k^{h_k-1}}\right]\\
&\quad + l_1\psi_k + 2l_2\frac{\partial\psi_k}{\partial r_k} + \ldots + (h_k-1)\,l_{h_k-1}\frac{\partial^{h_k-2}\psi_k}{\partial r_k^{h_k-2}} = 0.
\end{aligned}$$

Multiplions la relation (15) par r_1 et retranchons-la de la précédente; nous obtenons enfin

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
&a_1\psi_1 + 2a_2\frac{\partial\psi_1}{\partial r_1} + \ldots + (h_1-1)\,a_{h_1-1}\frac{\partial^{h_1-2}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-2}}\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + (r_k - r_1)\left[l_0\psi_k + l_1\frac{\partial\psi_k}{\partial r_k} + \ldots + l_{h_k-1}\frac{\partial^{h_k-1}\psi_k}{\partial r_k^{h_k-1}}\right]\\
&\quad + l_1\psi_k + 2l_2\frac{\partial\psi_k}{\partial r_k} + \ldots + (h_k-1)\,l_{h_k-1}\frac{\partial^{h_k-2}\psi_k}{\partial r_k^{h_k-2}} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{h_1-1}, b_0; b_1, \ldots, b_{h_2-1}; \ldots, l_0, l_1, \ldots, l_{h_k-1}$ ne sont pas nuls, tous ceux de la relation (17) ne le seront pas non plus. Car si, par exemple, l_{h_k-1} est différent de zéro, le coefficient de $\frac{\partial^{h_k-1}\psi_k}{\partial r_k^{h_k-1}}$, qui est $(r_k - r_1)l_{h_k-1}$, sera différent de zéro. Si $l_{h_k-1} = 0$, mais $l_{h_k-2} \neq 0$, le coefficient de $\frac{\partial^{h_k-2}\psi_k}{\partial r_k^{h_k-2}}$ sera $(r_k - r_1)l_{h_k-2}$ et, par suite, différent de zéro; et ainsi de suite.

Si, au contraire, tous ces coefficients sont nuls, la relation (15) ne pourra avoir lieu que si $a_0 = 0$.

Tout revient donc à démontrer que la relation (17) ne peut avoir lieu sans que tous ses coefficients soient nuls.

Or, la relation (17) a la même forme que la relation (15), mais contient une fonction de moins. En opérant sur elle comme nous l'avons fait sur la relation (15), nous obtiendrons une nouvelle relation contenant encore une fonction de moins, et ainsi de suite de proche en proche. Après $m - 1$ opérations au plus, nous parviendrons donc à une relation de la forme

$$A\psi_k = 0;$$

et il restera à prouver que cette relation ne peut avoir lieu que si $A = 0$, ce qui est évident.

La première partie de la proposition énoncée est donc établie.

8. La fonction

$$\begin{aligned} u = \quad & \psi_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} + \ldots + \frac{\partial^{h_1 - 1} \psi_1}{\partial r_1^{h_1 - 1}} \\ & + \psi_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial r_2} + \ldots + \frac{\partial^{h_2 - 1} \psi_2}{\partial r_2^{h_2 - 1}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \psi_k + \frac{\partial \psi_k}{\partial r_k} + \ldots + \frac{\partial^{h_k - 1} \psi_k}{\partial r_k^{h_k - 1}}, \end{aligned}$$

dans laquelle les constantes arbitraires qui figurent dans les m fonctions du second membre sont *toutes* arbitraires et indépendantes les unes des autres, est, d'après ce qui précède, une solution de l'équation (8). De plus, toutes les constantes qu'elle contient sont *essentielles,* c'est-à-dire qu'on ne peut pas réduire leur nombre, puisque les m fonctions sont linéairement indépendantes.

Il nous reste à prouver que c'est la solution *la plus générale.*

Remarquons, à cet effet, que le polynome $f(r)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(r) = p_0 (r - r_1)^{h_1} (r - r_2)^{h_2} \ldots (r - r_k)^{h_k}.$$

Si l'on pose alors

$$S_r u = \mathfrak{C} u - r u,$$

le premier membre Tu de l'équation (8) pourra se mettre sous la forme d'un produit symbolique, à *facteurs permutables,* de transmutations S_r :

$$\text{(19)} \qquad T u = p_0 S_{r_1}^{h_1} S_{r_2}^{h_2} \ldots S_{r_{k-1}}^{h_{k-1}} S_{r_k}^{h_k} u.$$

9. Cela étant, nous établirons d'abord quelques propriétés des transmutations S_r.

Observons, avant tout, que, C étant une constante quelconque, les deux fonctions $\psi(x, r)$ et $C\psi(x, r)$ ne doivent pas être considérées comme distinctes, car on déduit la seconde de la première en changeant les valeurs numériques des constantes arbitraires qu'elle contient.

De même, si les constantes qui contiennent les fonctions ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial r}$, ..., $\frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}$ sont différentes et indépendantes les unes des autres, les deux fonctions

$$\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}$$

et

$$C\psi + C_1\frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + C_q\frac{\partial^q\psi}{\partial r^q},$$

où C, C_1, ..., C_q sont des constantes quelconques, doivent être considérées comme identiques.

Avec ces conventions de langage, on peut énoncer les propositions suivantes :

L'expression

$$\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^{q-1}\psi}{\partial r^{q-1}} + \frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}$$

est transformée par la transmutation S_r *en une expression de la forme*

$$\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^{q-1}\psi}{\partial r^{q-1}};$$

et par la transmutation en $S_{r'}$, r' *étant différent de* r, *en une expression de même forme qu'elle, contenant effectivement* $\frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}$.

En effet, les égalités (16) s'écrivent

$$\begin{aligned}
S_r\psi &= 0,\\
S_r\frac{\partial\psi}{\partial r} &= \psi,\\
S_r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial\psi}{\partial r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
S_r\frac{\partial^q\psi}{\partial r^q} &= q\frac{\partial^{q-1}\psi}{\partial r^{q-1}}.
\end{aligned}$$

Il suffit d'ajouter ces égalités pour établir la première partie de la proposition.

D'autre part, on a, manifestement,

$$S_{r'}u = S_r u + (r - r')u$$

et, par suite,

$$S_{r'}\left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}\right)$$
$$= \psi + \ldots + q\frac{\partial^{q-1}\psi}{\partial r^{q-1}} + (r - r')\left(\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^q\psi}{\partial r^q}\right),$$

ce qui prouve la seconde partie de l'énoncé, puisque $(r - r')$ est différent de zéro.

10. Je dis maintenant que :

La solution la plus générale de l'équation

$$S_r^q u = 0$$

est

$$\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^{q-1}\psi}{\partial r^{q-1}},$$

où toutes les constantes sont indépendantes et arbitraires.

La proposition est vraie pour $q = 1$ car, par définition même de $\psi(x, r)$, ψ est la solution la plus générale de

$$S_r u = 0.$$

Il suffit donc de démontrer que, si elle est vraie pour $q = h$, elle est encore vraie pour $q = h + 1$.

Supposons donc que la solution la plus générale de l'équation

$$S_r^h u = 0$$

soit

$$\psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^{h-1}\psi}{\partial r^{h-1}}.$$

Comme on a

$$S_r^{h+1} u = S_r^h S_r u,$$

il suffit, pour avoir la solution la plus générale de l'équation

$$S_r^{h+1}u = 0,$$

de résoudre de la façon la plus générale l'équation

$$(20)\qquad S_r u = \psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^{h-1}\psi}{\partial r^{h-1}}.$$

Pour cela, on en cherche d'abord une solution particulière u_1, et la solution générale s'obtient en ajoutant à u_1 la solution générale de $S_r u = 0$, soit ψ.

Or, d'après les propositions du n° 9, on a, de suite, une telle solution particulière qui est de la forme

$$u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^{h-1}\psi}{\partial r^{h-1}} + \frac{\partial^h\psi}{\partial r^h}.$$

Donc la solution générale est bien de la forme

$$u = u_1 + \psi = \psi + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial^{h-1}\psi}{\partial r^{h-1}} + \frac{\partial^h\psi}{\partial r^h}.$$

11. Ces préliminaires établis, nous arrivons facilement au but.

D'après ce qui précède, la solution la plus générale de l'équation

$$S_{r_1}^{h_1}u = 0$$

est de la forme

$$u = \psi_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial r_1} + \ldots + \frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-1}};$$

on aura donc évidemment la solution la plus générale de l'équation

$$S_{r_1}^{h_1}S_{r_2}^{h_2}u = 0$$

en résolvant

$$(21)\qquad S_{r_2}^{h_2}u = \psi_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial r_1} + \ldots + \frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-1}}.$$

Pour résoudre cette équation, on en cherche une solution particulière u_1 à laquelle on ajoute la solution générale de l'équation sans second membre

$$S_{r_2}^{h_2}u = 0$$

qui est

$$\psi_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial r_2} + \ldots + \frac{\partial^{h_2-1}\psi_2}{\partial r_2^{h_2-1}}.$$

Or, d'après le n° 9, r_1 étant différent de r_2, une expression de la forme

$$u_1 = \psi_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} + \ldots + \frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-1}}$$

est précisément une solution particulière de l'équation (21); sa solution générale est donc

$$\psi_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} + \ldots + \frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-1}} + \psi_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial r_2} + \ldots + \frac{\partial^{h_2-1}\psi_2}{\partial r_2^{h_2-1}}.$$

De même, pour obtenir la solution la plus générale de l'équation

$$S_{r_1}^{h_1} S_{r_2}^{h_2} S_{r_3}^{h_3} u = 0,$$

on cherchera les solutions de

$$S_{r_3}^{h_3} u = \psi_1 + \ldots + \frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r_1^{h_1-1}} + \psi_2 + \ldots + \frac{\partial^{h_2-1}\psi_2}{\partial r_2^{h_2-1}}.$$

Les résultats du n° 9 prouvent qu'il y a une solution particulière de même forme que le second membre; en lui ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre, on a bien

$$\psi_1 + \ldots + \frac{\partial^{h_1-1}\psi_1}{\partial r^{h_1-1}} + \psi_2 + \ldots + \frac{\partial^{h_2-1}\psi_2}{\partial r^{h_2-1}} + \psi_3 + \ldots + \frac{\partial^{h_3-1}\psi_3}{\partial r^{h_3-1}},$$

et ainsi de suite, de proche en proche; on parvient ainsi à la solution la plus générale de l'équation (8) qui est bien de la forme annoncée.

12. La proposition générale que nous venons d'établir avait déjà été démontrée par M. Pincherle (*Mathematische Annalen*, t. XLIX, pages 332 à 348) dans le cas particulier où la fonction $\psi(x, r)$ ne contient qu'un nombre *fini* de constantes arbitraires.

En vue des applications que nous en ferons dans la suite, il nous était tout à fait nécessaire de la prouver dans le cas général.

On peut encore remarquer en passant que les propositions du n° 9 permettraient de trouver très facilement des solutions particulières et, par suite, la solution générale d'une équation à second membre et à coefficients constants

$$p_0 \varpi^m u + p_1 \varpi^{m-1} u + \ldots + p_m u = \mathrm{F}(x),$$

dans le cas où le second membre $\mathrm{F}(x)$ est une somme de fonctions de la forme

$$\psi(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial r}\psi(x, r), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^q}{\partial r^q}\psi(x, r).$$

Les résultats seraient encore ici identiques à ceux que l'on connaît pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

13. En dernière analyse, on voit que le problème que nous nous sommes posé est complètement résolu dès qu'on sait trouver la solution *la plus générale* de l'équation

$$\mathrm{S}_r u = \varpi u - r u = 0. \tag{22}$$

Admettons que la transmutation admette une inverse ϖ^{-1} *complète* dans quelque domaine D dans lequel ϖ l'est également.

Il est alors facile de donner une expression de $\psi(x, r)$ qui vérifie *formellement* cette équation.

Soit en effet $a_0(x)$ une fonction de x régulière dans tout le domaine D. Construisons une suite infinie dans les deux sens

$$\ldots, \quad a_{-2}(x), \quad a_{-1}(x), \quad a_0(x), \quad a_1(x), \quad a_2(x), \quad \ldots$$

de fonctions telles que l'on ait, pour toutes les valeurs de i,

$$\varpi a_i = a_{i-1}.$$

La série infinie dans les deux sens

$$\psi(x, r) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} a_i(x)\, r^i \tag{23}$$

répond évidemment à la question.

Il restera évidemment, dans chaque cas particulier, à montrer que l'on peut choisir $a_0(x)$ de façon que la série (23) soit uniformément convergente.

Un cas particulier intéressant est celui qu'a considéré M. Pincherle [1], où il existe au moins une fonction $a_0(x)$ vérifiant l'équation

$$\mathfrak{T} a_0(x) = 0.$$

Dans ce cas, les fonctions $a_i(x)$ à indices négatifs sont toutes nulles et l'on n'a plus qu'une série infinie dans un seul sens. On peut alors toujours choisir r dans une intervalle comprenant O de façon que la série (23) soit uniformément convergente.

14. *A priori,* il semble que l'égalité (23) fournit toujours une solution contenant une *fonction arbitraire* $a_0(x)$ et peut-être encore d'autres arbitraires qui peuvent provenir de ce que la transmutation inverse de $\mathfrak{T}$ peut ne pas être uniforme.

Il faut remarquer de suite que cela peut n'être qu'une apparence, car la convergence de la série (23) peut restreindre le choix des fonctions $a_0, a_1, \ldots$ au point de faire disparaître toutes les arbitraires, à un multiplicateur près.

Appliquons, par exemple, les résultats qui précèdent au cas où la transmutation $\mathfrak{T}$ est la dérivée. La formule (23) donne alors

$$(24) \qquad \begin{aligned} \psi(x, r) = a_0(x) + r\mathrm{D}^{-1} a_0(x) + r^2 \mathrm{D}^{-2} a_0(x) + \ldots, \\ + \frac{1}{r} \mathrm{D} a_0(x) + \frac{1}{r^2} \mathrm{D}^2 a_0(x) + \ldots, \end{aligned}$$

en désignant par D le symbole de la dérivation et par D^{-1} celui de l'intégration avec une limite inférieure arbitraire.

Il est facile de se rendre compte que la série (24) ne peut être convergente, pour quelque valeur de r, que si elle est limitée dans un sens. Ceci n'arrivera que si $a_0(x)$ est un polynome entier en x, et la solution obtenue de cette façon ne diffère pas de celle où a_0 est une constante.

La solution la plus générale de l'équation

$$\frac{du}{dx} - ru = 0$$

---

[1] S. Pincherle, *Sulle operat. distrib. commutabili con una op. data* (*R. C. dell' Acc. R. d. Sc. di Torino;* 1895).

est, d'après cela,

$$u = a_0 + r(a_0 x + a_1) + r^2\left(\frac{a_0 x^2}{2!} + a_1 x + a_2\right) + \ldots$$
$$+ r^p\left[\frac{a_0 x^p}{p!} + \frac{a_1 x^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + a_p\right] + \ldots,$$

où a_0, a_1, ..., a_p, ... sont des constantes arbitraires. Il semble donc qu'il y ait une infinité de constantes arbitraires. Ce n'est qu'une apparence, car on a

$$\psi(x, r) = (a_0 + r a_1 + r^2 a_2 + \ldots + r^p a_p + \ldots)\, e^{rx}.$$

Il suffit alors de choisir a_0, a_1, ..., a_p, ... de façon que la série entre crochets soit convergente. La somme de cette série est une constante arbitraire, et on retrouve bien, comme on devait s'y attendre, que la solution la plus générale est, dans ce cas,

$$\psi(x, r) = C e^{rx},$$

avec une seule constante arbitraire.

III.

15. Nous allons maintenant appliquer ces résultats généraux à un premier cas particulier : celui où ϖ est une substitution, c'est-à-dire où l'on a

$$\varpi u(x) = u[\varphi(x)],$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de substitution *donnée*.

Les équations de la forme (1) sont alors les équations fonctionnelles que M. Grévy a étudiées dans sa Thèse de doctorat, et l'équation

$$\varpi u = r u$$

n'est autre chose que l'équation de Schröder intégrée par M. Kœnigs (1)

(1) SCHRÖDER, *Ueber iterirte Functionen* (*Math. Annalen*, t. III, p. 296).
KŒNIGS, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1884, supplément; 1885, p. 385.

dans les cas où il existe une solution holomorphe dans le voisinage d'un point limite.

L'intégration effective des équations de M. Grévy, *à coefficients constants*, revient donc à résoudre de la façon la plus générale l'équation de Schröder.

Nous allons appliquer à cette équation le procédé exposé au nº 13; nous parviendrons ainsi à une nouvelle méthode de résolution de cette équation qui donnera une expression en quelque sorte explicite de la solution (¹).

16. Soit $\varphi(x)$ la fonction de substitution; nous poserons toujours dans la suite, pour abréger,

$$x_1 = \varphi(x), \qquad x_2 = \varphi(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_k = \varphi(x_{k-1}), \qquad \ldots.$$

Soit $\varphi_{-1}(x)$ la fonction inverse de $\varphi(x)$ supposée uniforme ou rendue telle; nous poserons encore

$$x_{-1} = \varphi_{-1}(x), \qquad x_{-2} = \varphi_{-1}(x_{-1}), \qquad \ldots, \qquad x_{-k} = \varphi_{-k}(x_{-k+1}).$$

Tout point x donnera ainsi naissance à une suite doublement infinie

$$\text{(X)} \qquad \ldots, \quad x_{-k}, \quad \ldots, \quad x_{-1}, \quad x, \quad x_1 \quad \ldots, \quad x_k, \quad \ldots,$$

telle qu'entre deux termes consécutifs on ait la relation

$$x_{i+1} = \varphi(x_i),$$

en posant

$$x_0 = x.$$

On sait que, s'il existe un point a, dit *point limite*, tel que a soit racine de l'équation

$$\varphi(x) = x,$$

et tel, en outre, que

$$|\varphi'(a)| < 1,$$

on peut déterminer un cercle C de centre a tel que lorsque x tombe à

(¹) La méthode que nous allons appliquer avait déjà été employée par M. Appell dans deux cas particuliers (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 avril et 19 mai 1879).

l'intérieur du cercle C, x_n ait pour limite a lorsque n croît indéfiniment.

Nous admettrons en outre que le point a est un point de convergence *régulière*.

17. Considérons alors, en suivant la méthode indiquée au n° 13, la série doublement infinie

$$(25)\qquad \ldots + \frac{1}{r^2} f(x_2) + \frac{1}{r} f(x_1) + f(x) + r f(x_{-1}) + r^2 f(x_{-2}) + \ldots.$$

Nous allons montrer qu'on peut trouver une fonction $f(x)$ telle que dans un domaine convenable, en supposant

$$|\varphi'(a)| < 1,$$

la série (25) soit convergente pour toutes les valeurs de r comprises entre ε et 1, ε étant un nombre positif donné, d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra.

Puisque $|\varphi'(a)| < 1$, on pourra d'abord trouver un nombre entier p tel que l'on ait

$$|\varphi'(a)|^p < \varepsilon.$$

Ce nombre p étant fixé, nous astreindrons la fonction $f(x)$ aux deux seules conditions suivantes :

1° La fonction $f(x)$ est holomorphe dans tout le cercle C entourant a. En dehors de ce centre, elle n'a que des singularités telles qu'on puisse les enfermer dans un nombre limité de cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$ de très petits rayons et le point à l'infini est un point ordinaire.

2° A l'intérieur du cercle C, la fonction $f(x)$ peut être mise sous la forme

$$f(x) = (x - a)^p \,\mathrm{F}(x),$$

p étant l'entier déterminé plus haut, et $\mathrm{F}(x)$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas pour $x = a$. En d'autres termes, le point A est un zéro d'ordre de multiplicité p pour $f(x)$.

Dans ces conditions, on pourra déterminer un nombre fixe M tel que, pour toute valeur de x extérieure aux q cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$, on ait

$$|f(x)| < \mathrm{M}.$$

18. Ceci posé, l'égalité

$$z_1 = \varphi(z)$$

fait correspondre à tout point $z = x + iy$ du plan un autre point $z_1 = x_1 + iy_1$.

Elle définit donc une transformation géométrique. Cette transformation laisse invariables certaines courbes, faciles à déterminer dans chaque cas particulier, que nous appellerons les *invariantes*.

Toutes ces invariantes passent évidemment par les points limites de la substitution $\varphi(z)$, car le point $z = a$ se correspond à lui-même, puisque $\varphi(a) = a$.

De plus, on peut, en général, et cela d'une infinité de manières, trouver une famille d'invariantes dépendant d'un paramètre arbitraire.

Si, alors, x est un point quelconque du plan et I une invariante passant par ce point, tous les points de la double suite

$$\text{(X)} \qquad x_{-k}, \quad \ldots, \quad x_{-1}, \quad x, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_k, \quad \ldots$$

sont tous situés sur la courbe I.

Par exemple, considérons la substitution

$$\varphi(z) = z^m \qquad (m \text{ entier, positif});$$

elle admet le point limite $z = 0$, par lequel $\varphi'(z) = 0$.

Les spirales logarithmiques, représentées, en coordonnées polaires, par l'équation

$$r = \lambda^\theta,$$

sont des invariantes, quel que soit le paramètre λ.

Comme second exemple, considérons la substitution

$$\varphi(z) = \sqrt{a^2 + k(z^2 - a^2)},$$

où k désigne un nombre réel plus petit que 1 et a un nombre réel quelconque; elle admet les deux points limites $+a$ et $-a$.

La famille d'hyperboles équilatères

$$x^2 - y^2 - a^2 + 2\lambda xy = 0,$$

passant par les deux points limites, est une famille d'invariantes.

19. Revenons alors au problème qui nous occupe; il pourra se présenter deux cas :

1° On peut déterminer une courbe Γ, de centre a, telle que, dès que le point x tombe à l'intérieur de Γ, tous les points de la suite doublement infinie (X) s'y trouvent également. Le cercle C défini plus haut sera certainement intérieur à la courbe Γ, et nous astreindrons les cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$, qui contiennent les singularités de $f(x)$, à être *tous extérieurs* à Γ.

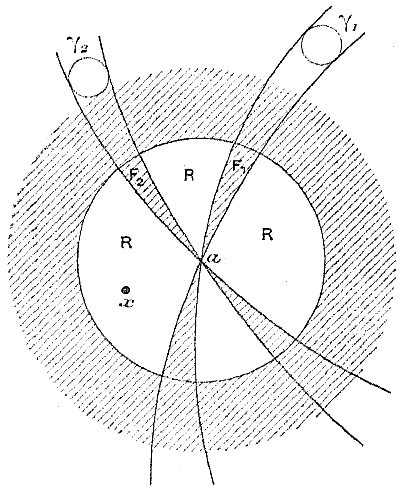
Dans ces conditions, pour tout point x situé à l'intérieur du cercle C, aucun des points de la suite (X) ne tombera à l'intérieur de l'un des cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$ et l'on aura, quel que soit l'indice i (positif ou négatif),

$$|f(x_i)| < \mathrm{M}.$$

Ce cas se présente, par exemple, pour la substitution

$$\varphi(z) = z^m \qquad (m \text{ entier, positif}).$$

Il suffit de prendre pour Γ un cercle de centre O et de rayon 1, et, pour C, un cercle concentrique de rayon plus petit.



2° S'il n'existe pas de courbe telle que Γ, traçons le cercle C de centre a défini plus haut et les cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$, tous extérieurs à C. Menons à chacun des cercles γ_i les deux invariantes qui lui sont tangentes. Ces deux invariantes, passant par a, découpent un fuseau F_i sur le cercle (ombré sur la figure), et il est clair que, si un point x du cercle C ne tombe pas dans le fuseau F_i, aucun des points de la suite (X) ne tombera dans le cercle γ_i.

Supprimons, dans le cercle C, tous les fuseaux F_1, F_2, ..., F_q. Il restera une surface R composée de q fuseaux et qui sera telle que, pour tout point x de R, aucun des points de (X) ne tombera dans l'un des cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$.

Pour tout point x de R, on aura donc, quel que soit l'indice i,

$$|f(x_i)| < \mathrm{M}.$$

Ce second cas se présente, par exemple, pour la substitution

$$\varphi(z) = \sqrt{a^2 + k(z^2 - a^2)},$$

signalée plus haut (n° 18).

En résumé, dans les deux cas, nous avons déterminé un domaine R, *jouissant des deux propriétés suivantes :*

Pour tout point x situé dans le domaine R :

1° *Les points x_1, x_2, ..., x_n sont situés dans ce domaine et*

$$\lim x_n = a,$$

lorsque n croît indéfiniment.

2° *On a, quel que soit l'indice i, positif ou negatif,*

$$|f(x_i)| < \mathrm{M}.$$

20. Ces préliminaires établis, la proposition que nous avions en vue en découle immédiatement.

Le nombre ε ayant été donné, $f(x)$ et le domaine R ayant été choisis comme il a été dit plus haut, la série (25) est convergente pour toute valeur de x du domaine R et pour toute valeur de r dont le module est compris entre ε et 1.

En effet, cette série se compose de deux séries simplement infinies :

$$\text{(A)} \qquad f(x) + rf(x_{-1}) + r^2 f(x_{-2}) + \ldots + r^n f(x_{-n}) + \ldots$$

et

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{r}f(x_1)+\frac{1}{r^2}f(x_2)+\ldots+\frac{1}{r^n}f(x_n)+\ldots,$$

qui doivent être convergentes séparément.

La série (A) l'est évidemment lorsque $|r|<1$, puisque, dans nos hypothèses,

$$|f(x_{-n})|<M.$$

De plus, si

$$|r|<1-\varepsilon',$$

la série sera *uniformément* convergente, si petit que soit ε'.

Examinons alors la série (B).

Dans cette série, le rapport d'un terme au précédent est

$$\rho_n=\frac{\frac{1}{r^{n+1}}f(x_{n+1})}{\frac{1}{r^n}f(x_n)}=\frac{1}{r}\,\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}.$$

Tous les points x_k sont situés dans le cercle C. On peut donc écrire

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\frac{(x_{n+1}-a)^p}{(x_n-a)^p}\,\frac{F(x_{n+1})}{F(x_n)},$$

ou, encore,

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\left[\frac{\varphi(x_n)-\varphi(a)}{x_n-a}\right]^p\frac{F(x_{n+1})}{F(x_n)}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, x_n tend vers a. Comme $F(a)\neq 0$, on a évidemment

$$\lim\left[\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}\right]=[\varphi'(a)]^p.$$

Par suite, lorsque n croît indéfiniment,

$$\lim|\rho_n|=\frac{|\varphi'(a)|^p}{|r|}.$$

Or, p ayant été choisi de façon que

$$|\varphi'(a)|^p<\varepsilon,$$

pour toute valeur de r telle que

$$\varepsilon < |r| < 1,$$

on aura

$$\lim |\rho_n| < \frac{\varepsilon}{|r|} < 1,$$

et la série B est absolument convergente.

De plus, comme x_n converge *régulièrement et uniformément* vers a, la série (B) sera *uniformément convergente.*

21. En résumé, *la fonction $f(x)$ et le domaine* R *ayant été choisis comme il a été dit, l'égalité*

$$(26) \qquad \psi(x, r) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(x_{-i})\, r^i$$

définit, à l'intérieur du domaine R, *une fonction $\psi(x, r)$, solution de l'équation de Schröder, pour toute valeur du paramètre r telle que*

$$\varepsilon < |r| < 1,$$

en supposant

$$|\varphi'(a)| < 1.$$

Cet énoncé donne lieu aux remarques suivantes :

D'abord comme ε peut être choisi aussi petit qu'on le veut, on en conclut que l'égalité (26) fournit, dans le domaine R, une solution de l'équation de Schröder

$$\psi[\varphi(x)] = r\psi(x),$$

pour toute valeur de r plus petite que 1.

Cette solution est *nulle* pour $x = a$, car pour $x = a$, $x_i = a$

$$f(x_i) = f(a) = 0,$$

quel que soit i.

Cette solution n'est pas, en général, holomorphe autour du point a, car, en général, le domaine R n'entoure pas complètement le point a, mais se compose de fuseaux séparés aboutissant en a.

Enfin il faut remarquer que le procédé s'applique encore dans le cas de

$$\varphi'(a) = 0,$$

et alors la solution n'est certainement pas holomorphe en a puisque $\varphi_{-1}(x)$ ne l'est pas.

Il suffit, dans ce cas, quel que soit ε, de prendre

$$p = 1.$$

Au contraire, il ne s'applique pas au cas de

$$|\varphi'(a)| = 1.$$

22. Nous avons examiné et résolu le cas où

$$|\varphi'(a)| < 1.$$

Celui où

$$|\varphi'(a)| > 1$$

se ramène immédiatement au précédent.

En effet, dans ce cas, a est un point limite pour la fonction inverse $\varphi_{-1}(x)$.

L'équation de Schröder

$$\psi[\varphi(x)] = r\,\psi(x)$$

peut s'écrire alors

$$\psi[\varphi_{-1}(x)] = \frac{1}{r}\,\psi(x),$$

et on est ramené au cas précédent, où r est changé en $\frac{1}{r}$.

On peut donc énoncer immédiatement les conclusions suivantes :

Lorsque

$$|\varphi'(a)| > 1,$$

en choisissant la fonction $f(x)$ *et le domaine* R, *par rapport à* $\varphi_{-1}(x)$, *comme on l'a fait plus haut, par rapport à* $\varphi(x)$, *l'égalité* (26) *définit une fonction* $\psi(x, r)$, *solution de l'équation de Schröder, à l'intérieur du domaine* R, *pour toute valeur du paramètre* r *dont le module est plus grand que* 1.

23. Il est maintenant facile d'avoir une solution de l'équation de Schröder pour *toutes* les valeurs de r, dans chaque cas où

$$|\varphi'(a)| \neq 1.$$

Supposons, en effet,

$$|\varphi'(a)| < 1.$$

La proposition énoncée au n° 21 nous donne une solution de l'équation de Schröder dans tous les cas où

$$|r| < 1.$$

Il reste à la résoudre lorsque

$$|r| \geqq 1.$$

Soit alors r un nombre dont le module est supérieur à 1. On pourra toujours déterminer deux nombres r' et r'' dont les modules sont tous deux inférieurs à 1 et tels que

$$r = \frac{r'}{r''}.$$

Il suffit, pour cela, de prendre

$$|r''| < \frac{1}{|r|}$$

et

$$r' = rr''.$$

Soit ε un nombre plus petit que r''. Nous pouvons trouver une solution de l'équation de Schröder, holomorphe dans le domaine R, *pour toutes* les valeurs de r, telles que

$$\varepsilon < |r| < 1.$$

Soit $\psi(x, r)$ cette solution.

Posons

$$\Psi(x) = \frac{\psi(x, r')}{\psi(x, r'')},$$

$\Psi(x)$ sera une solution de l'équation

$$\Psi[\varphi(x)] = r\Psi(x),$$

car on a

$$\Psi[\varphi(x)] = \frac{\psi(\varphi, r')}{\psi(\varphi, r'')} = \frac{r'\psi(x, r')}{r''\psi(x, r'')} = r\Psi(x).$$

Dans le cas de $r = 1$, nous prendrons deux solutions

$$\psi(x, r') \qquad \text{et} \qquad \psi_1(x, r')$$

différentes, c'est-à-dire construites avec deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ différentes. Leur quotient fournira une solution de l'équation

$$F[\varphi(x)] = F(x).$$

On peut présenter encore ceci de la façon suivante : soit ε un nombre fixe, réel, positif, d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra et ρ un nombre *fixe*, réel et positif, supérieur à ε et plus petit que 1.

Construisons deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ et un domaine R répondant aux conditions données plus haut, et considérons les deux fonctions

$$\psi(x, r\rho) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f(x_{-i}) r^i \rho^i;$$

$$\psi_1(x, \rho) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} f_1(x_{-i}) \rho^i,$$

qui sont toutes deux bien définies dans tout le domaine R, pourvu que

$$\varepsilon < |r\rho| < 1.$$

La fonction

$$\Psi(x, r) = \frac{\psi(x, r\rho)}{\psi_1(x, \rho)}$$

sera une solution de l'équation de Schröder

$$\Psi[\varphi(x), r] = r\Psi(x, r)$$

définie dans tout le domaine R et pour toutes les valeurs de r, telles que

$$\varepsilon < |r\rho| < 1,$$

c'est-à-dire telles que

$$\frac{\varepsilon}{\rho} < |r| < \frac{1}{\rho}.$$

Or on peut toujours choisir ε et ρ *de façon que r soit compris entre telles limites que l'on voudra, non nulles.*

Un raisonnement analogue au précédent s'applique évidemment au cas où

$$|\varphi'(a)| > 1.$$

24. La solution de l'équation de Schröder, que nous venons de former, contient au moins une fonction arbitraire.

C'est, vraisemblablement, la solution la plus générale dans le domaine R où elle est définie.

En tous cas, si ce n'est pas la solution la plus générale, il sera facile, en suivant la marche indiquée par M. Kœnigs (*loc. cit.*), d'en déduire la solution la plus générale qui dépendra d'une fonction arbitraire périodique, de période 1.

La résolution de cette équation étant effectuée, on en déduit, en appliquant les procédés indiqués dans le § I, la solution générale de toute équation fonctionnelle à *coefficients constants*,

$$p_0 u(x_n) + p_1 u(x_{n-1}) + \ldots + p_{n-1} u(x_1) + p_n u(x) = 0.$$

La marche qu'il faudra suivre pour obtenir cette solution ne différera pas, essentiellement, de celle qu'a donnée M. Grévy dans sa Thèse.

III.

25. Comme seconde application, nous indiquerons brièvement comment les résultats généraux du § I pourraient être utiles, dans certains cas particuliers, pour l'intégration des équations différentielles linéaires.

Si, dans une équation de la forme (1),

$$(1) \qquad p_0 \varpi^m u + p_1 \varpi^{m-1} u + \ldots + p_{m-1} \varpi u + p_m u = 0,$$

la transmutation ϖ est une transmutation finie, c'est-à-dire si l'on a

$$(27) \qquad \varpi u = q_0 u + q_1 \frac{du}{dx} + \ldots + q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + q_n \frac{d^n u}{dx^n},$$

cette équation est une équation différentielle ordinaire d'ordre mn et les généralités qui précèdent montrent que, dans le cas où $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sont des *constantes*, l'intégration de l'équation (1) se ramène à la résolution d'une équation entière de degré m,

$$p_0 r^m + p_1 r^{m-1} + \ldots + p_m = 0,$$

suivie de l'intégration de m équations différentielles linéaires d'ordre n de la forme

$$\mathfrak{T}u - ru = 0.$$

26. Une question qui se pose alors naturellement est la suivante :

Étant donnée une équation différentielle linéaire d'ordre k,

$$k = mn,$$

est-il possible de la mettre sous la forme (1), *le symbole* $\mathfrak{T}$ *représentant une transmutation finie de la forme* (27) *et* $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *étant des constantes?*

Il est aisé de voir que dans le cas général où $k > 2$ cette transformation n'est pas toujours possible.

En effet, une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre k contient k coefficients. La transmutation (27) n'en contient que $n + 1$. L'identification n'est donc possible, en général ($p_0, p_1, \ldots, p_m$ étant des *constantes*), que si l'on a

$$k = mn = n + 1.$$

Cette égalité entraîne nécessairement

$$n = 1, \qquad \text{d'où} \qquad m = 2, \qquad k = 2.$$

Donc, au delà du second ordre, une équation différentielle linéaire sans second membre ne pourra être mise sous la forme (1) que si ses coefficients vérifient certaines conditions restrictives qu'il serait facile de former dans chaque cas particulier.

Au contraire, dans le cas du second ordre, la transformation est toujours possible.

Nous n'examinerons pas, ici, le cas général, nous réservant d'y revenir peut-être plus tard, et nous nous contenterons de prendre le cas de $k = 2$.

27. Soit donc

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{du}{dx} + bu = 0 \tag{28}$$

une équation du second ordre, où a et b sont des fonctions de x, qu'il s'agit de mettre sous la forme

$$\mathfrak{C}^2 u + p_1 \mathfrak{C} u + p_2 u = 0, \tag{29}$$

où p_1 et p_2 sont deux constantes et où l'on a

$$\mathfrak{C} u = q_0 u + q_1 \frac{du}{dx}, \tag{30}$$

q_0 et q_1 étant deux fonctions de x qu'il s'agit de déterminer.

On a alors

$$\mathfrak{C}^2 u = \left(q_0^2 + q_1 \frac{dq_0}{dx}\right) u + \left(2 q_0 q_1 + q_1 \frac{dq_1}{dx}\right) \frac{du}{dx} + q_1^2 \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

En identifiant (28) et (29), on trouve alors les deux égalités

$$\left\{\begin{aligned} 2 q_0 + \frac{dq_1}{dx} + p_1 &= q_1 a, \\ q_0^2 + q_1 \frac{dq_0}{dx} + p_1 q_0 + p_2 &= q_1^2 b. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Si l'on se *donne* arbitrairement les deux constantes p_1 et p_2, on a là deux équations différentielles simultanées du premier ordre pour déterminer q_0 et q_1.

L'intégration de l'équation (28) est ainsi ramenée à celle de deux équations différentielles simultanées de premier ordre; car, dès qu'on a trouvé q_0 et q_1, il ne reste plus qu'à résoudre ces équations du second degré et à intégrer deux équations de Bernoulli de la forme

$$q_1 \frac{du}{dx} + (q_0 - r) u = 0,$$

ce qui n'exige que des quadratures.

Ce qu'il y a d'intéressant dans cette transformation, c'est que le système (31) contient *deux constantes arbitraires* p_1 et p_2, dont on pourra quelquefois disposer de façon à simplifier l'intégration de ce système.

28. Prenons, comme exemple, le cas particulier où

$$p_1 = p_2 = 0.$$

Le système (31) s'écrit alors

$$(32)\qquad \begin{cases} 2q_0 = q_1 a - \dfrac{dq_1}{dx}, \\ q_0^2 + q_1 \dfrac{dq_0}{dx} - q_1^2 b = 0. \end{cases}$$

En tirant q_0 de la première équation et portant dans la seconde, on a, pour déterminer q_1,

$$2q_1 \frac{d^2 q_1}{dx^2} - \left(\frac{dq_1}{dx}\right)^2 + q_1^2\left(4b - 2\frac{da}{dx} - a^2\right) = 0;$$

posons

$$\frac{1}{q_1}\frac{dq_1}{dx} = v,$$

et l'on a, pour v, l'équation

$$(33)\qquad 2\frac{dv}{dx} + v^2 + 4b - 2\frac{da}{dx} - a^2 = 0,$$

ce qui est une équation de Riccatti.

On retrouve ainsi un résultat classique, à savoir que l'intégration d'une équation du second ordre se ramène à celle d'une équation de Riccatti suivie de quadratures.

Si, en particulier, on a

$$4b - 2\frac{da}{dx} - a^2 = 0,$$

l'équation (33) admet la solution $v = 0$; on a donc

$$q_1 = \text{const.}$$

et

$$q_0 = \frac{1}{2} a q_1.$$

On peut prendre $q_1 = 1$ et l'équation proposée s'écrit

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} a u\right)^{(2)} = 0,$$

la puissance étant une puissance symbolique.

IV.

29. Étant donnée une transmutation additive $\mathfrak{T}$, si l'on considère, plus généralement, une équation de la forme

$$f(\mathfrak{T}^m u, \mathfrak{T}^{m-1} u, \ldots, \mathfrak{T} u, u, x) = 0, \tag{34}$$

on a là, entre la fonction inconnue u et la variable x, une équation analogue à une équation différentielle d'ordre m, dont l'équation linéaire (1) examinée plus haut n'est qu'un cas particulier.

On est, alors, naturellement amené à se demander s'il ne serait pas possible de fonder une théorie générale de ces équations analogue à celle des équations différentielles.

Il faut évidemment, pour cela, qu'on puisse d'abord obtenir un développement des fonctions régulières qui soit à l'opération $\mathfrak{T}$ ce que le développement de Taylor est à la dérivée.

Pour atteindre ce but, nous établirons d'abord la proposition générale que voici :

30. *Soit* $\omega_0(x), \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots$ *une suite infinie de fonctions régulières dans le voisinage de* $x = 0$; *pour que, étant donnée une fonction quelconque* u *régulière au voisinage de* $x = 0$, *on puisse la développer en une série de la forme*

$$u(x) = a_0 \omega_0(x) + a_1 \omega_1(x) + \ldots + a_n \omega_n(x) + \ldots,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *sont des coefficients constants, il suffit que, si l'on considère la transmutation additive continue et régulière* T *telle que l'on ait*

$$\mathrm{T}\,1 = \omega_0(x), \qquad \mathrm{T}x^k = k!\,\omega_k(x),$$

quel que soit k, *cette transmutation admette une inverse, complète dans quelque domaine entourant le point* $x = 0$.

Je rappellerai d'abord qu'étant donnée une suite

$$\omega_0(x), \quad \omega_1(x), \quad \ldots, \quad \omega_n(x), \quad \ldots,$$

on peut toujours construire une transmutation additive telle que l'on ait

$$\mathrm{T}\,1 = \omega_0(x), \qquad \mathrm{T}x^k = k!\,\omega_k(x).$$

J'ai démontré ce fait dans mon Mémoire paru antérieurement dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (1897, page 150, théor. X). Cette transmutation étant construite, il n'est pas certain qu'elle soit *complète* dans un certain domaine entourant $x = 0$, et qu'il existe une transmutation inverse également complète (*loc. cit.*, pages 158 et 176). C'est ce que nous *admettrons*.

Posons alors

$$T^{-1} u = v,$$

T^{-1} étant la transmutation inverse de T, de telle sorte que

$$u = T v.$$

Développons v en série de Maclaurin

$$v = v_0 + v_0' \frac{x}{1} + v_0'' \frac{x^2}{2!} + \ldots + v_0^{(n)} \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$v_0^{(n)}$ désignant la valeur de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de v pour $x = 0$.

On aura

$$u = T v = v_0 T 1 + v_0' T \frac{x}{1} + \ldots + v_0^{(n)} T \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

et, par suite,

$$u = v_0 \omega_0(x) + v_0' \omega_1(x) + \ldots + v_0^{(n)} \omega_n(x) + \ldots.$$

Le développement de $u(x)$ sera donc *possible* et l'on aura

$$a_0 = v_0, \qquad a_1 = v_0', \qquad \ldots, \qquad a_n = v_0^{(n)}, \qquad \ldots.$$

31. Ceci posé, soit ϖ une transmutation additive, régulière dans un domaine entourant le point $x = 0$; *supposons* qu'on puisse trouver une suite de fonctions, non nulles,

$$\omega_0(x), \quad \omega_1(x), \quad \ldots, \quad \omega_n(x), \quad \ldots,$$

telles que l'on ait

$$(35) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varpi\, \omega_0(x) = 0, & \omega_0(0) = 1, \\ \varpi\, \omega_1(x) = \omega_0(x), & \omega_1(0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \varpi\, \omega_n(x) = \omega_{n-1}(x), & \omega_n(0) = 0, \end{array} \right.$$

Comme nous le montrerons plus loin, on peut toujours, par une transformation simple, remplacer l'équation (34) par une autre de même forme et de même ordre pour laquelle l'opération ϖ jouit de ces propriétés.

La généralisation du développement de Taylor est alors la suivante :

Soit $u(x)$ une fonction régulière dans le voisinage de $x = 0$, on a, dans un domaine convenable entourant ce point,

$$(36)\qquad u(x) = u_0\,\omega_0(x) + \varpi_0 u.\omega_1(x) + \varpi_0^2 u.\omega_2(x) + \ldots + \varpi_0^n u.\omega_2(x) + \ldots,$$

u_0 étant la valeur de $u(x)$ pour $x = 0$, et $\varpi_0^n u$ étant la valeur de $\varpi^n u(x)$ pour $x = 0$ (en admettant, en outre, que la condition suffisante énoncée au n° 30 soit remplie par la suite $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$).

En effet, si la condition du n° 30 est remplie, on pourra trouver des coefficients constants $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tels que l'on ait

$$(37)\qquad u(x) = a_0\,\omega_0(x) + a_1\,\omega_1(x) + a_2\,\omega_2(x) + \ldots + a_n\,\omega_n(x) + \ldots;$$

de cette égalité, on déduit les suivantes, en tenant compte des relations (35),

$$\begin{aligned}
\varpi u(x) &= a_1\,\omega_0(x) + a_2\,\omega_1(x) + \ldots + a_n\,\omega_{n-1}(x) + \ldots,\\
\varpi^2 u(x) &= a_0\,\omega_2(x) + \ldots + a_n\,\omega_{n-2}(x) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varpi^n u(x) &= a_n\,\omega_0(x) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'on fait, ici, $x = 0$, en ayant toujours égard aux relations (35), on trouve

$$u_0 = a_0,\qquad \varpi_0 u = a_1,\qquad \varpi_0^2 u = a_2,\qquad \ldots,\qquad \varpi_0^n u = a_n,\qquad \ldots,$$

ce qui établit l'exactitude du développement (36).

Lorsque la transmutation ϖ est la dérivée, le développement (36) est le développement de Taylor dont il est la généralisation.

Il est bon de remarquer, de suite, que s'il existe plusieurs suites ω_0, $\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$, répondant aux conditions précédentes, à chacune de ces suites correspondra un mode de développement.

En d'autres termes, s'il existe une suite $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ dans laquelle ces fonctions contiennent des constantes arbitraires, il y aura un développement (36) dépendant de constantes arbitraires.

Il est bien entendu que, dans chaque cas particulier, il faudrait étudier avec soin les conditions de convergence des développements qui se présentent ici.

32. Avant d'aller plus loin, pour ne pas rester sans cesse dans des généralités, traitons un exemple.

Supposons que l'on considère la suite des polynomes suivants [1],

$$\omega_0, \quad \omega_1(x), \quad \omega_2(x), \quad \ldots, \quad \omega_n(x), \quad \ldots$$

tels que ω_0 soit une constante et que l'on ait, en général,

$$\frac{d\,\omega_k(x)}{dx} = \omega_{k-1}(x).$$

Si l'on forme, suivant la règle que j'ai donnée (*loc. cit.*, p. 152), la transmutation additive uniforme et régulière T, telle que

$$\mathrm{T}x^k = k!\,\omega_k(x),$$

on trouve que cette transmutation est une transmutation *à coefficients constants*. C'est même la transmutation la plus générale de cette nature, si on laisse arbitraire le choix des constantes qui figurent dans les polynomes de la suite précédente. Or une transmutation additive à coefficients constants admet, *en général*, une inverse [2]; on en conclut, d'après le n° 30, que toute fonction régulière pourra, *en général*, être développée en une série de polynomes de cette espèce.

33. Ces préliminaires établis, revenons aux équations de la forme (34).

Je dis d'abord qu'on peut toujours supposer que la transmutation $\mathfrak{E}$ vérifie les conditions énoncées au n° 31.

---

(1) *Voir :* Léauté, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 14 juin 1880; et *Journal de Liouville*, juin 1881.

Appell, *Sur une classe de polynomes* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1880).

(2) *Voir* mon Mémoire, *loc. cit.*, p. 177.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et posons

$$\mathcal{S}u = \mathfrak{T}u - ru.$$

D'après les résultats du § I, on pourra, en général, choisir la constante r de façon que l'équation

$$\mathcal{S}u = 0$$

ait une solution

$$u = \psi(x, r)$$

non identiquement nulle et régulière au voisinage du point $x = 0$.

Par exemple, si la transmutation $\mathfrak{T}$ est une substitution

$$\mathfrak{T}u(x) = u[\varphi(x)],$$

et si 0 est un point limite pour lequel

$$|\varphi'(0)| < 1,$$

il suffira de prendre

$$r = [\varphi'(0)]^\alpha$$

et la solution $\psi(x, r)$ sera la fonction $B^\alpha(x)$ de M. Kœnigs, α étant entier, positif.

De plus, comme $\psi(x, r)$ contient au moins une constante arbitraire, on pourra toujours s'arranger de façon que

$$\psi(0, r) = 1.$$

Ensuite, d'après ce qui a été établi au n° 9, on aura

$$\mathcal{S}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + A_1\psi\right) = \psi,$$

quelle que soit la constante A_1; et l'on pourra choisir A_1 de façon que, pour $x = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial r} + A_1\psi$ s'annule.

On a encore

$$\mathcal{S}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + A_1\frac{\partial\psi}{\partial r} + A_2\psi\right) = \frac{\partial\psi}{\partial r} + A_1\psi;$$

et l'on choisira encore A_2 de façon que $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + A_1\frac{\partial\psi}{\partial r} + A_2\psi$ s'annule pour $x = 0$; et ainsi de suite de proche en proche.

Si donc on pose

$$\omega_0(x) = \psi(x, r),$$

$$\omega_1(x) = \frac{\partial\psi}{\partial r} + A_1\psi,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\omega_n(x) = \frac{1}{n}\,\frac{\partial^n\psi}{\partial r^n} + \frac{A_1}{n-1}\,\frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial r^{n-1}} + \frac{A_2}{n-2}\,\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial r^{n-2}} + \dots + A_{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r} + A_n\psi,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

avec un choix convenable des constantes A_1, A_2, ..., A_n, ..., on aura déterminé une suite de fonctions ω_0, ω_1, ..., ω_n, ... remplissant, vis-à-vis de l'opération $\mathcal{S}$, les conditions du n° 31.

Si l'on remarque alors que l'on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} u &= \mathcal{S} u + r u, \\ \mathfrak{T}^2 u &= \mathcal{S}^2 u + 2 r \mathcal{S} u + r^2 u, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathfrak{T}^m u &= (\mathcal{S} + r)^{(m)} u, \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation (34) l'opération $\mathfrak{T}$ par la transmutation $\mathcal{S}$, on obtiendra une équation de même forme et de même ordre, dans laquelle la transmutation en question donne lieu à un développement de Taylor généralisé de la forme (36).

Cette transformation préalable de l'équation est absolument nécessaire pour qu'on puisse la traiter d'une façon identique à celle que l'on emploie pour les équations différentielles.

Ainsi, par exemple, dans le cas des équations fonctionnelles étudiées par MM. Grévy et Leau, cette transformation ferait disparaître les dissemblances que les auteurs ont pu rencontrer entre leurs équations et les équations différentielles ordinaires.

Si l'on pose

$$\mathfrak{T} u = u[\varphi(x)],$$

les équations étudiées par M. Grévy dans sa Thèse sont de la forme

$$p_m \mathfrak{T}^m u + p_{m-1} \mathfrak{T}^{m-1} u + \dots + p_1 \mathfrak{T} u + p_0 u = 0.$$

En faisant sur cette équation la transformation

$$\mathfrak{T} u = (\mathcal{S} + r) u,$$

on trouve l'équation de même forme

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(r)\, \delta^m u + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(r)\, \delta^{m-1} u + \ldots + f'(r)\, \delta u + f(r)\, u = 0$$

en posant

$$f(r) = p_m r^m + p_{m-1} r^{m-1} + \ldots + p_0$$

et en désignant par $f'(r)$, $\ldots$, $f^{(m-1)}(r)$, $f^{(m)}(r)$ les dérivées successives de ce polynome par rapport à r.

Le point $x = 0$ étant un point limite de la substitution $\varphi(x)$, avec $|\varphi'(0)| < 1$, on prendra

$$r = [\varphi'(0)]^\alpha$$

pour que $\omega_0(x)$ soit régulière, α étant un entier positif. On voit, alors, que l'expression

$$f(r) = p_m \varphi'^{m\alpha}(0) + p_{m-1} \varphi'^{(m-1)\alpha}(0) + \ldots + p_1 \varphi'^{\alpha}(0) + p_0,$$

qui est le coefficient de u dans l'équation transformée, doit jouer un rôle important dans l'étude de l'équation proposée.

Les circonstances particulières rencontrées par M. Grévy et la distinction des cas où $f(r)$ est ou n'est pas nul s'expliquent ainsi tout naturellement.

34. Ceci posé, rappelons, en quelques mots, la marche suivie dans l'étude des équations différentielles.

Étant donnée une équation différentielle d'ordre m, pour établir l'existence de l'intégrale et reconnaître son degré de généralité, on résout l'équation par rapport à $\frac{d^m u}{dx^m}$ et l'on montre que, si l'on se donne arbitrairement les valeurs initiales u_0, u'_0, $\ldots$, $u_0^{(m-1)}$ de u, $\frac{du}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}}$, on peut, en se servant de l'équation elle-même, calculer de proche en proche les valeurs initiales $u_0^{(m)}$, $u_0^{(m+1)}$, $\ldots$ des dérivées suivantes : $\frac{d^m u}{dx^m}$, $\frac{d^{m+1} u}{dx^{m+1}}$, $\ldots$. La connaissance de m premiers coefficients du développement, en série de Taylor, de l'intégrale suffit pour la déterminer, ainsi, complètement puisque, grâce à l'équation, on calcule tous les autres coefficients en fonction des m premiers. Il ne reste plus qu'à établir, ensuite, la convergence des développements calculés.

Essayons d'appliquer une méthode semblable à une équation de la forme (34).

A cet effet, nous la résoudrons par rapport à $\mathfrak{T}^m u$ et nous l'écrirons

$$(38) \qquad \mathfrak{T}^m u = \mathrm{F}(\mathfrak{T}^{m-1} u, \mathfrak{T}^{m-2} u, \ldots, \mathfrak{T} u, u, x).$$

S'il existe une solution de cette équation, nous la développerons en une série de la forme (36), qui est la série de Taylor généralisée pour l'opération $\mathfrak{T}$,

$$u(x) = u_0 . \omega_0(x) + \mathfrak{T}_0 u . \omega_1(x) + \ldots + \mathfrak{T}_0^n u . \omega_n(x) + \ldots,$$

et, pour pouvoir édifier une théorie semblable à celle que nous venons de rappeler, il faut que la connaissance des m premiers coefficients

$$u_0, \quad \mathfrak{T}_0 u, \quad \ldots, \quad \mathfrak{T}_0^{m-1} u$$

du développement suffise, avec l'équation (38), pour déterminer la solution.

Si l'on se donne u_0, $\mathfrak{T}_0 u$, ..., $\mathfrak{T}_0^{m-1} u$, l'équation (38) fournit immédiatement $\mathfrak{T}_0^m u$.

On a ensuite

$$(39) \qquad \mathfrak{T}^{m+1} u = \mathfrak{T}[\mathrm{F}(\mathfrak{T}^{m-1} u, \mathfrak{T}^{m-2} u, \ldots, \mathfrak{T} u, u, x)]$$

et, plus généralement,

$$(40) \qquad \mathfrak{T}^{m+p} u = \mathfrak{T}^p[\mathrm{F}(\mathfrak{T}^{m-1} u, \mathfrak{T}^{m-2} u, \ldots, \mathfrak{T} u, u, x)].$$

Pour que l'égalité (39) fournisse $\mathfrak{T}^{m+1} u$ en fonction de $\mathfrak{T}^m u$, $\mathfrak{T}^{m-1} u$, ..., $\mathfrak{T} u$, u et x, il faut que

$$\mathfrak{T}[\mathrm{F}(\mathfrak{T}^{m-1} u, \mathfrak{T}^{m-2} u, \ldots, \mathfrak{T} u, u, x)]$$

soit une fonction, uniquement, de $\mathfrak{T}^m u$, $\mathfrak{T}^{m-1} u$, ..., $\mathfrak{T} u$, u et x.

Ceci revient à dire qu'il faut que, étant donnée une fonction composée, $f(u, v, w, \ldots)$, de plusieurs fonctions u, v, w, ..., la transmuée $\mathfrak{T} f(u, v, w, \ldots)$ s'exprime uniquement en fonction de u, v, w, ... et de leurs transmuées $\mathfrak{T} u$, $\mathfrak{T} v$, $\mathfrak{T} w$, ... et x.

Or, si l'on admet que la fonction $f(u, v, w, \ldots)$ est régulière, on pourra la mettre sous la forme d'une série

$$f(u, v, w, \ldots) = \sum \mathrm{A}\, u^k v^h w^r \ldots,$$

et, en vertu des propriétés des transmutations additives, on aura

$$\varpi f(u, v, w, \ldots) = \Sigma \mathrm{A}\, \varpi(u^k v^h w^r \ldots).$$

Il faut donc enfin que toute expression de la forme $\varpi(u^k v^h w^r \ldots)$ puisse s'exprimer uniquement en fonction de u, v, w, ...: ϖu, ϖv, ϖw, ... et x. Pour cela, il faut évidemment et il suffit que la proposition soit vraie pour un produit de *deux facteurs*.

35. En dernière analyse, nous sommes donc amenés à la conclusion suivante :

Étant donnée une équation de la forme (34) *où la transmutation additive* ϖ *donne lieu à un développement de Taylor généralisé, il faut et il suffit, pour qu'on puisse établir une théorie de l'existence des solutions identique à celle des équations différentielles, que la transmuée d'un produit de deux fonctions puisse s'exprimer uniquement au moyen de ces deux fonctions, de leurs transmuées et de la variable indépendante.*

Recherchons donc les transmutations de cette nature.

On devra avoir

$$\varpi uv = \varphi(\varpi u, \varpi v, u, v, x),$$

quelles que soient les fonctions u et v.

Or, comme

$$\varpi u(v + w) = \varpi uv + \varpi uw,$$

on aura, par suite,

$$\varphi(\varpi u, \varpi v + \varpi w, u, v + w, x) = \varphi(\varpi u, \varpi v, u, v, x) + \varphi(\varpi u, \varpi w, u, w, x),$$

quelles que soient les fonctions u, v, w. Ceci revient à dire que, si l'on considère la fonction de cinq variables

$$\varphi(y', z', y, z, x),$$

elle devra donner lieu à l'*identité*

$$(41) \quad \varphi(y', z' + t', y, z + t, x) = \varphi(y', z', y, z, x) + \varphi(y', t', y, t, x).$$

De plus, comme $uv = vu$, cette fonction ne devra pas changer quand on permute *à la fois* y' et z' ainsi que y et z,

$$(42) \qquad \varphi(y', z', y, z, x) = \varphi(z', y', z, y, x).$$

La relation (41) met en évidence que $\varphi(y', z', y, z, x)$ doit être linéaire en z' et z et, à cause de la symétrie, elle devra être également linéaire en y' et y. En tenant compte de l'identité (42), la fonction φ doit *nécessairement* être de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\varphi(y', z', y, z, x) = A yz + B(yz' + y'z) + C y'z' \\ + D(y+z) + E(y'+z') + F,\end{aligned}$$

A, B, C, D, E, F étant des fonctions de x.

Donc toutes les transmutations en question devront vérifier une relation de la forme

$$\mathfrak{T}uv = A uv + B(u\mathfrak{T}v + v\mathfrak{T}u) + C\mathfrak{T}u\mathfrak{T}v + D(u+v) + E(\mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v) + F.$$

Or on sait que si $u = 0$, on a $\mathfrak{T}u = 0$. En faisant $u = 0$ dans cette égalité, on doit donc avoir, quel que soit v,

$$0 = Dv + E\mathfrak{T}v + F.$$

Ceci entraîne

$$D = E = F = 0.$$

En résumé, on doit avoir

$$(43) \qquad \mathfrak{T}uv = A uv + B(u\mathfrak{T}u + v\mathfrak{T}u) + C\mathfrak{T}u\mathfrak{T}v.$$

La détermination de toutes les transmutations additives qui vérifient une relation de la forme (43) a été faite par M. Pincherle [1], et il a trouvé qu'il n'y a que deux classes de transmutations additives de cette nature :

1° Celles pour lesquelles on a

$$\mathfrak{T}u = a\frac{du}{dx} + bu;$$

(1) *Voir :* S. Pincherle, *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 2 mai 1897.
Voir aussi mon Mémoire *Sur les transmutations* (*Bulletin de la Société mathématique de France*; 1897).

2° Celles qui sont définies par

$$\mathfrak{E} u = \mathrm{C} u[\varphi(x)] + \mathrm{K} u,$$

où a, b, C, K désignent des fonctions de x et $\varphi(x)$ une fonction de substitution.

La première catégorie donne les équations différentielles ordinaires.

La seconde fournit les équations fonctionnelles itératives signalées plus haut et étudiées par MM. Grévy et Leau dans leurs thèses.

La conclusion finale à laquelle nous parvenons est donc la suivante :

Les seules équations opératives de la forme (34), *dont la théorie puisse être calquée sur celle des équations différentielles ordinaires, sont les équations fonctionnelles itératives.*

Le parallélisme frappant qui existe entre les théories de MM. Grévy et Leau et des auteurs qui se sont occupés de ces équations fonctionnelles et celles des équations différentielles s'explique ainsi tout naturellement. Ces analogies eussent été encore plus frappantes peut-être, si ces auteurs avaient employé la transformation signalée plus haut au n° 33, qui permet d'employer un développement de la solution en série analogue à la série de Taylor. Mais il ne faut pas se dissimuler qu'une étude approfondie de tels développements et de leur légitimité présentera parfois des difficultés très sérieuses.