Annales scientifiques de l'É.N.S.

Élie Cartan

Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 239-332

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__239_0>

SUR

CERTAINES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES

ET LE

PROBLÈME DE PFAFF,

PAR M. ÉLIE CARTAN.

Le problème de Pfaff a été l'objet de nombreux travaux. Je n'ai pas l'intention de les passer tous en revue ([1]); les plus saillants sont ceux de Pfaff lui-même, puis de Grassmann, Natani, Clebsch, Lie, Frobenius et Darboux. Le problème dont il s'agit est, en somme, la résolution d'une équation aux différentielles totales, et il s'y est joint plus tard celui de la réduction d'une *expression* linéaire aux différentielles totales, ou *expression de Pfaff*, à une forme canonique au moyen d'un changement de variables convenable.

Pfaff ([2]) a le premier donné le résultat qu'une équation aux différentielles totales peut toujours être vérifiée par un système d'équations intégrales dont le nombre ne dépasse pas $\frac{n}{2}$ si n est pair, $\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Sa méthode est fondée sur la réduction graduelle du nombre des éléments différentiels dans l'équation, chaque réduction d'une unité étant fournie par l'intégration complète d'un système d'équations différentielles ordinaires et par un changement de variables.

([1]) Consulter, par exemple, pour la bibliographie, FORSYTH, *Theory of differential equations*, Ire Partie, Chapitre III; dans cet Ouvrage le problème de Pfaff est exposé d'une manière très intéressante, au point de vue historique (Chap. IV à XII).

([2]) *Methodus generalis æquationes differentiarum partialium necnon æquationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcumque variabiles complete integrandi* (*Abh. d. K.-P. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, p. 76-136; 1814-1815).

Grassmann, dans la seconde édition de son *Ausdehnungslehre* (¹), applique les principes de son calcul extensif au même problème. Sa méthode est au fond la même que celle de Pfaff, mais ne s'applique qu'aux équations qui, par une réduction graduelle, peuvent se ramener à une équation *générale* à un nombre pair de variables. Il donne la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation puisse être vérifiée par un système intégral de m équations. Ses résultats ont une forme extrêmement concise.

Natani (²) et Clebsch (³) réduisent successivement le nombre des éléments différentiels de l'équation; mais, ce qui est un grand progrès, chaque réduction n'exige la recherche que d'une seule intégrale d'un système d'équations différentielles; mais, comme dans la méthode de Pfaff, il faut chaque fois faire un changement de variables. Néanmoins, Natani a cherché, sans arriver à des résultats bien simples, à former directement les systèmes auxiliaires successifs par la seule connaissance des intégrales déjà trouvées des systèmes précédents.

Dans un second Mémoire (⁴), Clebsch a résolu le problème d'une manière très élégante dans le cas des équations *générales* à un nombre pair de variables; on a à chercher une intégrale d'un certain nombre de systèmes complets successifs et chaque équation d'un système de cette série dépend linéairement des dérivées partielles d'une seule des intégrales précédemment trouvées, sauf une équation commune à tous ces systèmes, qui ne dépend que des coefficients de l'équation donnée. Sa méthode ne s'étend pas aux autres cas et, d'ailleurs, Clebsch n'a jamais résolu complètement le cas d'un système général à un nombre impair de variables. Dans ce même Mémoire, Clebsch indique la manière de déduire d'un système intégral particulier le système intégral le plus général.

M. Lie (⁵) est, en somme, le premier qui se soit occupé de la réduction d'une *expression* de Pfaff; il a mis en évidence le caractère inva-

---

(¹) *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet.* Berlin; 1862.

(²) *Journal de Crelle,* t. 58, p. 301-328; janvier 1860.

(³) *Ibid.,* t. 60, p. 193-251; septembre 1860.

(⁴) *Ibid.,* t. 61, p. 146-179; septembre 1860.

(⁵) *Voir* plus spécialement : *Theorie des Pfaffschen Problems* (*Arch. for Math. og Nat.,* t. II, p. 338-379; 1877).

riant d'un certain nombre entier (la *classe* de l'expression de Pfaff d'après Frobenius), qui détermine complètement la forme canonique à laquelle on peut la réduire. Sa méthode est basée sur la théorie des transformations de contact. La réduction est obtenue comme dans la première méthode de Clebsch, mais en la combinant avec la méthode d'intégration de Mayer pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Frobenius, dans son beau Mémoire du *Journal de Crelle* (1), emploie une méthode toute nouvelle. Elle est fondée sur la considération de ce qu'il appelle le *covariant bilinéaire* associé à l'expression de Pfaff. Les conditions d'équivalence, c'est-à-dire de réduction possible à la même forme, de deux expressions de Pfaff sont alors les conditions d'équivalence algébrique de deux formes, linéaire et bilinéaire, par rapport aux éléments différentiels. Il arrive ainsi à la notion de la *classe*. Sa méthode de réduction est analogue à celle de Natani et Clebsch, mais ici les systèmes complets successifs sont formés sans changement de variables et leurs équations dépendent des dérivées partielles de toutes les intégrales précédemment trouvées.

Enfin, dans un Mémoire contemporain de celui de Frobenius, bien que publié cinq ans plus tard (2), M. Darboux part du même covariant bilinéaire dont les propriétés d'invariance lui permettent de déduire du premier système auxiliaire commun à toutes les méthodes de réduction la classe de l'expression de Pfaff. Il en tire aussi d'une manière très élégante les formules fondamentales de la théorie des transformations de contact.

Le présent travail constitue une exposition du problème de Pfaff fondée sur la considération de certaines expressions différentielles symboliques, entières et homogènes par rapport aux différentielles de n variables, les coefficients étant des fonctions quelconques de ces variables. Ces expressions peuvent être soumises aux règles ordinaires du calcul, à la condition de ne pas échanger l'ordre des différentielles dans un produit. Le calcul de ces quantités est, en somme, celui des

---

(1) *Ueber das Pfaffsche Problem* (*Journal de Crelle*, t. 82, p. 230-315; 1877).

(2) *Sur le problème de Pfaff* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 14-36, 49-68; 1882).

expressions différentielles qui sont placées sous un signe d'intégrale multiple (¹). Ce calcul présente aussi de nombreuses analogies avec le calcul de Grassmann; il est d'ailleurs identique au calcul géométrique dont se sert M. Burali-Forti dans un Livre récent (²).

Il est clair que si l'on fait un changement de variables, toute expression différentielle de degré p se change en une expression différentielle de degré p par rapport aux nouvelles différentielles. Dans le cas d'une expression de Pfaff, qui est du premier degré, on peut lui associer une autre expression différentielle du deuxième degré, qui est un covariant par rapport aux changements de variables et qui n'est autre chose que le covariant bilinéaire de Frobenius et de M. Darboux; je l'appelle la *dérivée* de l'expression de Pfaff. Mais, grâce à la notion des expressions différentielles symboliques, *ce covariant est le premier terme d'une suite de covariants symboliques du troisième, quatrième, ... degré, qui se déduisent intuitivement de l'expression de Pfaff et de sa dérivée par des multiplications;* ils constituent les dérivées deuxième, troisième, ... de l'expression de Pfaff, la dérivée $p^{\text{ième}}$ étant de degré $p+1$.

On conçoit le parti que l'on peut tirer de la considération de ces dérivées, grâce à leur caractère invariant. *Ce sont les seules quantités qui interviennent dans les énoncés de tous les résultats de la théorie,* dont la forme est extrêmement simple.

La considération de ces dérivées permet de trouver d'une manière pour ainsi dire intuitive tous les résultats déjà connus; mais elle m'a permis d'en découvrir d'autres. Je signalerai entre autres l'*extension de la seconde méthode de Clebsch à la réduction des expressions de Pfaff quelconques* (³), de classe paire ou impaire, à un nombre quelconque de variables. Elle m'a permis aussi d'exposer complètement la théorie des *intégrales singulières* d'une équation de Pfaff (⁴).

(¹) *Cf.* CARTAN, *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV, p. 1-39).

(²) *Introduction à la Géométrie différentielle, suivant la méthode de Grassmann* (Gauthier-Villars; 1898).

(³) *Voir* plus bas, Chap. IV, §§ 69, 70, 75.

(⁴) A part le cas classique des intégrales singulières de l'équation à trois variables, je

Ce Mémoire est divisé en cinq parties. Dans la *première*, j'expose les principes du calcul des expressions différentielles qui interviennent dans la suite. Dans la *seconde*, j'introduis les dérivées d'une expression de Pfaff et la notion de classe, et je démontre la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression de Pfaff soit de classe p : le résultat est extrêmement simple, *c'est que la dérivée $p^{ième}$ ait tous ses coefficients nuls*. J'introduis ensuite ce que j'appelle le système complet adjoint et expose la réduction d'une expression à sa forme canonique, soit par des changements de variables successifs (méthode de Natani et Clebsch), soit sans changements de variables (méthode de Frobenius).

La *troisième partie* est consacrée à la résolution d'une équation de Pfaff, problème qui admet des solutions générales dépendant de la réduction du premier membre à sa forme canonique, et des solutions singulières obtenues en annulant tous les coefficients d'une certaine dérivée.

La *quatrième partie* est consacrée aux deux problèmes suivants :

Résoudre une équation de Pfaff au moyen d'un nombre donné r de relations inconnues ;

Résoudre une equation de Pfaff au moyen d'un nombre donné r de relations, parmi lesquelles h sont données à l'avance.

Ces deux problèmes admettent des solutions générales et des solutions singulières. Les premières sont données par la recherche d'une intégrale de plusieurs systèmes complets successifs, les équations de ces systèmes contenant linéairement les dérivées de toutes les intégrales déjà trouvées. Quant aux solutions singulières, ce sont les solutions d'un problème analogue, mais où les relations données entre les variables sont en plus grand nombre et peuvent être formées par différentiations.

---

ne connais qu'un Mémoire de Frisiani, que je n'ai pas pu consulter et qui est intitulé : *Sull' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie di primo ordine e lineari fra un numero qualunque di variabili* (*Effemer. astr. di Milano* ; 1848). D'après Forsyth, il y discute la possibilité de satisfaire à une équation de Pfaff par des équations en nombre moindre que le nombre canonique.

Dans le cas, assez général, où les solutions cherchées ne sont pas des solutions *singulières* de l'équation de Pfaff, ou, d'une façon plus précise, n'annulent pas tous les coefficients de la dérivée $(2r-2)^{\text{ième}}$ de l'expression, la forme des systèmes complets peut être simplifiée pour le calcul, de manière que chaque équation ne dépende plus que des dérivées d'une seule des intégrales précédemment trouvées. Cette méthode donne en particulier la généralisation de la seconde méthode de Clebsch.

Enfin la cinquième partie est consacrée aux applications de la théorie à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, ordinaires ou homogènes. J'y indique aussi comment la considération des dérivées se prête à l'établissement des formules fondamentales de la théorie des transformations de contact.

I. — Expressions différentielles.

1. Étant données n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérons des expressions ω, purement symboliques, se déduisant, au moyen d'un nombre fini de *signes* d'addition ou de multiplication, des n différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ et de certains coefficients fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ces expressions étant, dans le sens ordinaire du mot, *homogènes* en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Comme elles sont purement symboliques, nous nous astreindrons, toutes les fois qu'il y aura un signe d'addition ou de multiplication, à ne pas changer l'ordre des termes ou des facteurs réunis par ce signe.

Soumises aux règles ordinaires du calcul, ces expressions pourraient se mettre sous la forme de polynomes entiers et homogènes en dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$. Le degré de ces polynomes sera, par définition, le degré de l'expression correspondante ω. Les expressions différentielles du premier degré s'appellent encore *expressions de Pfaff*; elles sont de la forme analogue à la suivante :

$$A_2\,dx_2 + A_1\,dx_1 + \ldots \tag{1}$$

Comme exemples d'expressions différentielles de degré supérieur, on peut avoir les suivantes :

$$(2)\qquad A_1\,dx_2dx_1+A_2\,dx_3dx_2,$$

$$(3)\qquad (A_1\,dx_1+A_2\,dx_2)(B_1\,dx_1dx_2+B_2\,dx_2dx_1)+C\,dx_1dx_2dx_1,$$

. . . .

2. *Expressions différentielles monomes.* — Ce sont celles qui se déduisent par des signes de multiplication d'un certain coefficient et de certaines des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, répétées ou non ; par exemple la suivante :

$$(4)\qquad A\,dx_1dx_2dx_1dx_4dx_3dx_2.$$

Les plus simples, après ces expressions différentielles, sont celles qui se déduisent par des signes d'addition d'un certain nombre d'expressions différentielles monomes de même degré; elles ont la forme de polynomes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Telle est l'expression (2).

Nous considérerons aussi, après ces expressions particulières, celles qu'on déduit par des signes de multiplication d'un certain nombre des expressions différentielles précédentes. Telle est l'expression

$$(5)\qquad (A_1\,dx_1+A_2\,dx_2)(B_1\,dx_2dx_2+B_2\,dx_1\,dx_3)(C_1\,dx_1dx_2+C_2\,dx_3dx_4).$$

3. *Rang d'une différentielle dans une expression différentielle.* — Considérons une différentielle entrant en un certain endroit dans une expression différentielle. Si cette expression différentielle est une expression monome, le rang se marque d'après la place que cette différentielle occupe dans le monome; ainsi, dans l'expression (4), la différentielle dx_4 occupe le quatrième rang.

S'il s'agit d'une expression différentielle polynome, le rang d'une différentielle est celui qu'elle occupe dans le monome où elle entre.

Enfin, dans le cas général, si l'on soumettait une expression différentielle quelconque aux règles ordinaires du calcul, de manière à la transformer en une expression polynome, mais en ayant bien soin dans chaque produit de respecter l'ordre des différentielles, le rang d'une différentielle donnée est celui qu'elle aurait dans l'expression polynome ainsi obtenue. Par exemple, dans l'expression (3), la différentielle dx_1, qui entre dans le deuxième terme de la deuxième parenthèse, est au troisième rang. Dans une expression différentielle, produit de plusieurs expressions différentielles polynomes, les différentielles du premier facteur, supposé de degré h, ont les rangs 1, $2, \ldots, h$; celles du deuxième facteur, supposé de degré k, ont les rangs $h+1, h+2, \ldots, h+k$, et ainsi de suite.

4. *Valeur d'une expression différentielle.* — Pour définir, par convention, la valeur d'une expression différentielle ω, de degré h par exemple, nous considérerons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des fonctions de h paramètres *indéterminés* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, supposés rangés dans un certain ordre que nous appellerons *l'ordre naturel*.

Cela étant, on considère toutes les $h!$ permutations des lettres α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_h$. Soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h)$ une de ces permutations. A cette permutation, on fait correspondre la valeur que prend, d'après les règles ordinaires du calcul, l'expression ω, lorsqu'on y remplace les différentielles qui occupent le $1^{\text{er}}, 2^{\text{e}}, \ldots, h^{\text{ième}}$ rang respectivement par les dérivées correspondantes prises par rapport à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$. On fait précéder la quantité ainsi déterminée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la permutation $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h)$ présente un nombre pair ou un nombre impair d'inversions. La somme algébrique des $h!$ quantités ainsi obtenues est, par définition, la valeur de l'expression différentielle donnée.

Ainsi la valeur de l'expression (2) est

$$\left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} + A_2 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) - \left(A_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + A_2 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right).$$

5. *Expressions différentielles équivalentes.* — Deux expressions différentielles sont dites équivalentes lorsque, étant de même degré, elles ont la même valeur, quels que soient les paramètres qu'on choisit pour définir cette valeur.

Il résulte de la définition donnée plus haut qu'on peut, sans changer la valeur d'une expression différentielle, lui appliquer toutes les règles du calcul ordinaire, à condition de laisser inaltéré le *rang* des différentielles, c'est-à-dire à condition de ne pas intervertir l'ordre des différentielles dans les produits qu'on effectue. En effet, ces modifications ne changent aucune des $h!$ quantités qui servent à définir la valeur de l'expression différentielle.

Il résulte de là qu'une expression différentielle quelconque est équivalente à une expression différentielle polynome et que, de plus, dans cette expression polynome, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des monomes et même réduire en un seul monome deux monomes ne différant que par les coefficients.

C'est ainsi que l'expression (3) est équivalente à l'expression polynome

$$(3') \qquad A_1B_1\,dx_1\,dx_1\,dx_2 + (A_1B_2 + C)\,dx_1\,dx_2\,dx_1 + A_2B_1\,dx_2\,dx_1\,dx_2 + A_2B_2\,dx_2\,dx_2\,dx_1.$$

6. *Valeur d'une expression différentielle monome.* — Si l'on cherche, d'après la règle donnée plus haut, la valeur d'une expression différentielle monome telle que

$$A\,dx_{m_1}\,dx_{m_2}\ldots dx_{m_h},$$

$m_1, m_2, \ldots, m_h$ étant h, distincts ou non, des indices $1, 2, \ldots, n$, on trouve tout simplement le produit de A par le déterminant fonctionnel de $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_h}$ par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$. Il résulte immédiatement de là que, si l'expression différentielle monome contient deux différentielles identiques, elle a une valeur nulle; on dit qu'elle est *identiquement nulle*. Il résulte également de la théorie des déterminants que l'on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des différentielles d'une expression monome, à condition de changer le signe du coefficient si cette substitution revient à un nombre impair de transpositions; ou encore si les deux permutations des indices des différentielles sont de parités contraires. On a, par exemple,

$$A\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = A\,dx_2\,dx_3\,dx_1 = A\,dx_3\,dx_1\,dx_2 = -A\,dx_2\,dx_1\,dx_3 = -A\,dx_3\,dx_2\,dx_1 = -A\,dx_1\,dx_3\,dx_2.$$

7. *Réduction d'une expression différentielle à sa forme la plus simple.* — De ce qui précède, il résulte que l'on peut toujours mettre une expression différentielle quelconque sous la forme d'une expression polynome, chaque monome de cette dernière expression ne contenant pas de différentielles identiques et les différentielles qu'il contient étant rangées par ordre d'indices croissants. Nous disons que dans ces con-

ditions l'expression est réduite à sa forme la plus simple. C'est ainsi que la forme la plus simple de l'expression

$$(A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3 + A_4\,dx_4)\,(B_1\,dx_2\,dx_3 + B_2\,dx_1\,dx_4)$$

est

$$A_1B_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3 - A_2B_2\,dx_1\,dx_2\,dx_4 - A_3B_2\,dx_1\,dx_3\,dx_4 + A_4B_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4.$$

8. *Expressions différentielles identiquement nulles.* — Ce sont celles dont la valeur est nulle quels que soient les paramètres dont on fait dépendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Une expression différentielle à n variables et de degré supérieur à n est nécessairement nulle, car, si on la met sous la forme d'une expression polynome, tous les monomes doivent avoir au moins deux différentielles identiques.

Une expression différentielle de degré $h \leqq n$ sera identiquement nulle si, en la réduisant à sa forme la plus simple, les coefficients de tous les monomes sont nuls. On s'en rend compte en prenant pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ h quelconques des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

9. *Interversion des facteurs dans un produit d'expressions différentielles.* — Considérons un produit (symbolique) ω d'expressions différentielles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Soit

$$\omega = \omega_1\,\omega_2\ldots\omega_m.$$

Imaginons que nous intervertissions deux des facteurs de ce produit, ω_μ, ω_ν, supposés d'ordre h et k, et supposons que ces deux facteurs soient séparés par un ou plusieurs autres facteurs ω_ρ de degré total p. Il est clair qu'une telle opération revient à faire une certaine substitution sur les rangs des différentielles d'un quelconque des monomes de ω réduit à une expression polynome.

Si cette substitution est paire, la valeur de ω n'est pas changée; si elle est impaire, elle est changée de signe.

Or, pour effectuer cette opération, on peut d'abord faire passer ω_ν devant ω_μ, ce qui exige $k(h+p)$ transpositions, puis faire reculer ω_μ après le groupe de facteurs ω_ρ, ce qui exige hp transpositions; donc en tout $hk + (h+k)p$ transpositions. L'expression différentielle ω est donc multipliée par $(-1)^{hk+(h+k)p}$.

Supposons en particulier que les deux facteurs considérés aient des degrés de même parité; alors $p(h+k)$ est pair et ω est multiplié par $(-1)^{hk}$. Donc la transposition de deux facteurs dans un produit d'expressions différentielles ne change pas ce produit si ces facteurs sont tous les deux de degré pair et change ce produit de signe s'ils sont tous les deux de degré impair.

Il en résulte que, *si une expression différentielle ω est le produit de plusieurs autres expressions différentielles parmi lesquelles il s'en trouve deux identiques et de degré impair, l'expression ω est identiquement nulle.*

10. *Puissances d'une expression différentielle.* — On appelle *puissance* $p^{\text{ième}}$ d'une expression différentielle ω le produit symbolique de p expressions identiques à ω.

La puissance $p^{\text{ième}}$ d'une expression monome est identiquement nulle, car c'est une expression monome qui contient des différentielles identiques.

La puissance $p^{\text{ième}}$ d'une expression différentielle de degré impair est aussi identiquement nulle, car c'est un produit qui contient deux facteurs identiques de degré impair.

Il suffit donc de considérer les expressions différentielles ω de degré pair. Réduite à sa forme la plus simple, ω est une somme de m monomes de même degré :

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m.$$

On voit immédiatement que le carré de ω est

$$\omega^2 = 2(\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \ldots + \omega_1\omega_m + \omega_2\omega_3 + \ldots + \omega_{m-1}\omega_m),$$

car les carrés de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sont nuls et le produit de deux monomes de degré pair est indépendant de l'ordre des facteurs. On verra de même que

$$\omega^3 = 2.3(\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_4 + \ldots + \omega_{m-2}\omega_{m-1}\omega_m)$$

et, d'une manière générale, que ω^p s'obtient en multipliant par $p!$ la somme de tous les produits p à p des m monomes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$.

11. *Changement de variables dans une expression différentielle.* — Imaginons qu'on fasse sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un changement de variables en prenant pour nouvelles variables n fonctions indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alors réciproquement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions indépendantes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Cela étant, remplaçons dans une expression différentielle ω en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les anciennes variables par les nouvelles et les différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ par

$$\begin{gathered}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial y_n} dy_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_n}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial y_n} dy_n.\end{gathered}$$

Nous obtiendrons ainsi une certaine expression différentielle ϖ de même degré en $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et dans laquelle chaque différentielle dy aura le même rang que la différentielle dx qui l'a fournie avait dans ω.

Il résulte de là que la valeur de ϖ est égale à la valeur de ω si l'on exprime les variables en fonction des mêmes paramètres α; car dans les $h!$ quantités qui définissent la valeur de ω, on remplace en somme les dérivées telles que $\frac{\partial x_i}{\partial \beta_r}$ par des expressions

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \beta_r} + \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial \beta_r} + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial \beta_r}$$

qui leur sont manifestement égales.

Il résulte immédiatement de là que, si les expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ se transforment, par le changement de variables, en $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$, l'expression

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_m$$

se transforme en

$$\varpi = \varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_m.$$

Cette propriété est capitale dans les applications que nous ferons de cette théorie.

On a, par exemple,

$$dx_1\,dx_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2}dy_2\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2}dy_2\right)$$
$$= \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)dy_1\,dy_2,$$

ce qui concorde avec la propriété bien connue des déterminants fonctionnels exprimée par l'égalité

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)}\frac{D(y_1, y_2)}{D(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

II. — Application des théorèmes précédents aux expressions de Pfaff.

12. *Expression dérivée d'une expression de Pfaff.* — Étant donnée une expression de Pfaff à n variables

$$\omega = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_n\,dx_n,$$

on appelle *expression dérivée* l'expression différentielle du deuxième degré définie par l'égalité

$$\omega' = dA_1\,dx_1 + dA_2\,dx_2 + \ldots + dA_n\,dx_n.$$

La propriété fondamentale de cette dérivée est la suivante :

Théorème. — *Si un changement de variables transforme l'expression de Pfaff ω en une expression ϖ, ce même changement de variables transforme l'expression dérivée ω' dans l'expression dérivée ϖ'.*

En effet, supposons que, avec de nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ω devienne

$$\varpi = B_1\,dy_1 + B_2\,dy_2 + \ldots + B_n\,dy_n.$$

Si l'on désigne par α, β deux paramètres quelconques, on a alors

$$(6)\quad A_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + A_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \ldots + A_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} = B_1\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + B_2\frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + \ldots + B_n\frac{\partial y_n}{\partial \alpha},$$

$$(7)\quad A_1\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + A_2\frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \ldots + A_n\frac{\partial x_n}{\partial \beta} = B_1\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + B_2\frac{\partial y_2}{\partial \beta} + \ldots + B_n\frac{\partial y_n}{\partial \beta}.$$

Différentions la première de ces équations par rapport à β, la seconde par rapport à α, et retranchons les deux équations ainsi obtenues; nous aurons

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\left(\frac{\partial A_1}{\partial\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial\beta}-\frac{\partial A_1}{\partial\beta}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial A_n}{\partial\alpha}\frac{\partial x_n}{\partial\beta}-\frac{\partial A_n}{\partial\beta}\frac{dx_n}{\partial\alpha}\right)\\ &=\left(\frac{\partial B_1}{\partial\alpha}\frac{\partial y_1}{\partial\beta}-\frac{\partial B_1}{\partial\beta}\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial B_n}{\partial\alpha}\frac{\partial y_n}{\partial\beta}-\frac{\partial B_n}{\partial\beta}\frac{\partial y_n}{\partial\alpha}\right).\end{aligned}$$

Le premier membre de (8) n'est autre que la valeur de ω' relativement aux deux paramètres α, β; le second membre est la valeur de ϖ' avec les deux mêmes paramètres.

Ces deux valeurs étant égales quels que soient α et β, le changement de variables transforme ω' en une expression différentielle équivalente à ϖ' et qui, par suite, n'est autre, après les réductions faites, que ϖ'. Le théorème est donc démontré ([1]).

13. *Dérivées d'ordres supérieurs.* — En même temps que la dérivée d'une expression de Pfaff ω, nous considérons d'autres expressions différentielles de degrés supérieurs ω'', ω''', ..., et que nous définirons de la manière suivante :

$$(9)\qquad \omega''=\omega\omega'=(A_1\,dx_1+\ldots+A_n\,dx_n)(dA_1\,dx_1+\ldots+dA_n\,dx_n),$$

$$(10)\qquad \omega'''=\frac{1}{2}\omega'^2=\frac{1}{2}(dA_1\,dx_1+dA_2\,dx_2+\ldots+dA_n\,dx_n)^2=\sum_{i,j}dA_i\,dx_i\,dA_j\,dx_j,$$

$$(11)\qquad \omega^{\text{IV}}=\omega\omega'''=(A_1\,dx_1+\ldots+A_n\,dx_n)\left(\sum_{i,j}dA_i\,dx_i\,dA_j\,dx_j\right).$$

D'une manière générale, la dérivée d'ordre $2m-1$, $\omega^{(2m-1)}$, d'une expression de Pfaff ω, sera la puissance $m^{\text{ième}}$ de ω', divisée par $m!$, ou encore la somme de tous les produits m à m des n monomes $dA_1\,dx_1$, $dA_2\,dx_2$, ..., $dA_n\,dx_n$. La dérivée d'ordre $2m$, $\omega^{(2m)}$ sera le produit de ω par $\omega^{(2m-1)}$. La dérivée $p^{\text{ième}}$ est de degré $p+1$.

Ces dérivées jouissent de la même propriété que la dérivée ω'; il est

---

([1]) La considération de la dérivée ω' ou, ce qui revient au même, du covariant bilinéaire de ω, forme la base des belles recherches de Frobenius et de M. Darboux sur le problème de Pfaff (*loc. cit.*).

évident que, *si un changement de variables transforme* ω *en* ϖ, *ce même changement de variables transformera la dérivée* $p^{\text{ième}}$ *de* ω *dans la dérivée* $p^{\text{ième}}$ *de* ϖ, car cette dérivée se déduit par multiplication des deux expressions différentielles ω et ω' qui sont transformées en ϖ et ϖ'.

14. *Expressions de Pfaff différentielles exactes.* — Supposons que l'expression de Pfaff ω soit une différentielle exacte. Il est clair alors que, par un changement de variables, elle peut se mettre sous la forme

$$\varpi = dy_1.$$

Or la dérivée de ϖ est ici identiquement nulle, puisque les coefficients des différentielles sont des constantes; il en résulte donc que ω' est également nulle. *La dérivée d'une expression de Pfaff différentielle exacte est donc identiquement nulle.*

Réciproquement, supposons que la dérivée ω' d'une expression de Pfaff

$$\omega = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_n\,dx_n$$

soit identiquement nulle. Je dis que ω est une différentielle exacte. Le théorème est vrai pour $n = 1$. Supposons-le vrai jusqu'à $n - 1$, et démontrons-le pour n. Si, dans ω, on fait $dx_1 = 0$ et qu'on regarde x_1 comme une constante, on obtient une expression de Pfaff ω_1 à $n - 1$ variables, dont la dérivée ω'_1 se déduit de ω' par les mêmes opérations. Il en résulte que cette dérivée ω'_1 est identiquement nulle et que, par suite, ω_1 est une différentielle exacte du. Si maintenant on ne regarde plus x_1 comme une constante, on voit que l'on a

$$\omega = du + \left(A_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1,$$

et, par un changement de variables, on peut supposer

$$\omega = A_1\,dx_1 + dx_2.$$

En calculant ω' qui doit rester identiquement nulle, on trouve

$$\omega' = dA_1\,dx_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\,dx_2\,dx_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\,dx_3\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial A_1}{\partial x_n}\,dx_n\,dx_1 = 0.$$

On voit donc que les dérivées de A_1, par rapport à $x_2, x_3, \ldots, x_n$, sont nulles, et, par suite, A_1 ne dépend que de x_1 et

$$\omega = d\left(x_2 + \int A_1\, dx_1\right)$$

est une différentielle exacte.

Les conditions pour qu'une expression de Pfaff soit différentielle exacte sont donc données par l'équation

$$\omega' = dA_1\, dx_1 + dA_2\, dx_2 + \ldots + dA_n\, dx_n = 0,$$

où, en termes finis,

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

15. *Classe d'une expression de Pfaff.* — Dans le cas que nous venons d'examiner, on peut, par un changement de variables, mettre ω sous une forme qui ne contienne plus explicitement qu'une seule variable y_1. Dans le cas général il se peut que, par un changement de variables, ω prenne une forme ϖ qui ne contienne explicitement que p variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$:

$$\varpi = B_1\, dy_1 + B_2\, dy_2 + \ldots + B_p\, dy_p,$$

les $B_1, B_2, \ldots, B_p$ ne dépendant que de $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

On appelle *classe* (1) de l'expression de Pfaff le nombre minimum de variables au moyen desquelles puisse s'exprimer cette expression par un changement de variables convenable. Une expression de Pfaff de la première classe est une différentielle exacte.

16. *Condition nécessaire pour qu'une expression de Pfaff soit de classe p.* — Si une expression de Pfaff ω est de classe p, on peut, par un changement de variables, la mettre sous la forme d'une expression de Pfaff ϖ à p variables. Considérons alors la dérivée $p^{\text{ième}}$ de ϖ, qui est de degré $p+1$. Cette expression différentielle étant à p variables et de degré $p+1$ est identiquement nulle. Il en résulte que la dérivée $p^{\text{ième}}$ de ω, qui lui est égale, est aussi identiquement nulle.

(1) Cette expression a été introduite par Frobenius, *loc. cit.*

Donc, *pour qu'une expression de Pfaff soit de classe p, il faut que sa dérivée $p^{\text{ième}}$ soit identiquement nulle* (1).

17. *Réciproque du théorème précédent.* — Nous allons démontrer que, réciproquement, si la dérivée $p^{\text{ième}}$ d'une expression de Pfaff est identiquement nulle, cette expression est de classe p au plus. Le théorème étant vrai pour $p = 1$, nous allons le supposer démontré pour $1, 2, \ldots, p-1$ et le démontrer pour p.

Considérons donc une expression de Pfaff

$$\omega = A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + \ldots + A_n\, dx_n$$

dont la dérivée $p^{\text{ième}}$ $\omega^{(p)}$ soit identiquement nulle

$$\omega^{(p)} = \frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)!}\, \omega'^{\frac{p+1}{2}},$$

si p est impair, ou

$$\omega^{(p)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)!}\, \omega\omega'^{\frac{p}{2}},$$

si p est pair.

Il est clair que, si n est inférieur ou égal à p, cette expression de Pfaff est de classe p au plus. Supposons donc démontré qu'une expression de Pfaff à $1, 2, \ldots, n-1$ variables, dont la dérivée $p^{\text{ième}}$ est nulle, est de classe p au plus, et démontrons-le pour une expression à n variables.

Si dans ω nous regardons x_1 comme une constante et y faisons $dx_1 = 0$, nous obtenons une expression ω_1 à $n-1$ variables dont la dérivée $p^{\text{ième}}$ $\omega_1^{(p)}$ se déduit manifestement de $\omega^{(p)}$ en y regardant x_1 comme une constante et y faisant $dx_1 = 0$. Cette dérivée $p^{\text{ième}}$ $\omega_1^{(p)}$ est donc identiquement nulle et par suite, d'après l'hypothèse faite, ω_1 est de classe p au plus. On peut donc faire un changement de variables tel que ω_1 se transforme en

$$\varpi_1 = B_2\, dy_2 + B_3\, dy_3 + \ldots + B_{p+1}\, dy_{p+1},$$

(1) *Cf.* Grassmann, *loc. cit.*

où $y_2, y_3, \ldots, y_{p+1}$ sont p fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et où les B sont des fonctions de $y_2, y_3, \ldots, y_{p+1}$ et aussi de la constante x_1. Si maintenant dans ω on ne regarde plus x_1 comme une constante, on obtient manifestement

$$\omega = A_1\, dx_1 + B_2\left(dy_2 - \frac{\partial y_2}{\partial x_1}dx_1\right) + \ldots + B_{p+1}\left(dy_{p+1} - \frac{\partial y_{p+1}}{\partial x_1}dx_1\right).$$

Finalement, en changeant les notations, on a

$$\omega = A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + \ldots + A_{p+1}\, dx_{p+1},$$

où $A_2, A_3, \ldots, A_{p+1}$ ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$.

Cela étant, deux cas peuvent se présenter : ou bien A_1 est indépendant de $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$; ou bien A_1 ne dépend que de ces $p+1$ variables.

18. Dans le premier cas, on peut toujours supposer qu'on a pris $A_1 = x_{p+2}$. Si alors, dans $\omega^{(p)}$, on groupe les termes qui contiennent dx_{p+2}, on vérifie facilement qu'on obtient

$$dx_{p+2}\, dx_1\, \omega_1^{(p-2)},$$

où ω_1 a la même signification que plus haut. La dérivée $\omega^{(p)}$ étant identiquement nulle, il en doit être de même du groupe de termes de cette dérivée qui contiennent dx_{p+2}, et, par suite, de $\omega_1^{(p-2)}$. L'expression de Pfaff ω_1, ayant alors sa dérivée $(p-2)^{\text{ième}}$ nulle, est d'ordre $p-2$ au plus. Autrement dit, on peut supposer que A_p et A_{p+1} sont nuls et que $A_2, A_3, \ldots, A_{p-1}$ ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. L'expression ω devient alors une expression à p variables seulement $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_{p+2}$, et le théorème est démontré.

19. Dans le second cas, on est ramené à une expression ω à $p+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$. Considérons alors l'expression différentielle du $(p+1)^{\text{ième}}$ degré

$$\omega^{(p-1)}\, df,$$

où f désigne une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$; elle est de la forme

$$H\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{p+1} = \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}\right) dx_1 \ldots dx_{p+1},$$

les α étant des fonctions des x qui ne dépendent que des coefficients A. Si un changement de variables transforme ω en ϖ et la fonction f de $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ dans la fonction φ de $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$, ce changement de variables transformera $\omega^{(p-1)}\,df$ en $\varpi^{(p-1)}\,d\varphi$, et, par suite, toute fonction f qui annulera la première de ces deux expressions se transformera en une fonction φ qui annulera la seconde, et réciproquement. Or l'équation

$$\omega^{(p-1)}\,df = 0$$

ou

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_{p+1}} = 0$$

est une équation aux dérivées partielles, linéaire en f, qui admet p intégrales indépendantes; on peut faire un changement de variables en prenant pour y_1 l'une de ces intégrales, ou encore on peut, en changeant de notations, supposer que x_1 est une de ces intégrales, c'est-à-dire que l'on a

$$\omega^{(p-1)}\,dx_1 = 0.$$

Le coefficient de dx_1, dans le premier membre de cette égalité, n'est autre que $\omega^{(p-1)}$, où l'on aurait fait $dx_1 = 0$; c'est donc, si l'on y regarde x_1 comme une constante, la dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ de ω_1, où ω_1 a la même signification que plus haut. L'expression ω_1 ayant sa dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ nulle est donc de classe $p-1$ au plus. Autrement dit, on peut supposer

$$\omega = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_p\,dx_p,$$

où $A_2, A_3, \ldots, A_p$ ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Si A_1 est indépendant de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, on est ramené au premier cas et le théorème est démontré. Si A_1 ne dépend que de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, ω est mise sous la forme d'une expression à p variables et le théorème est également démontré.

20. *Introduction d'un système complet remarquable.* — Considérons une expression de Pfaff de classe p à n variables

$$\omega = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_n\,dx_n$$

et l'équation qu'on obtient en égalant à zéro l'expression différentielle

$\omega^{(p-2)}\,df$, où f désigne une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En écrivant que cette expression est identiquement nulle, on obtient pour la fonction f un certain nombre d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

Considérons une transformation de variables amenant ω à ne dépendre plus que de p variables

$$\varpi = \mathrm{B}_1\,dy_1 + \mathrm{B}_2\,dy_2 + \ldots + \mathrm{B}_p\,dy_p,$$

et soit φ la fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans laquelle f est transformée. Il est clair que les deux équations

$$\omega^{(p-2)}\,df = 0, \tag{13}$$

$$\varpi^{(p-2)}\,d\varphi = 0 \tag{14}$$

se transforment l'une dans l'autre par le changement de variables, ou que le système d'équations aux dérivées partielles en f équivalent à l'équation (13) se transforme dans le système d'équations aux dérivées partielles en φ équivalent à l'équation (14). Or ce dernier système comprend d'abord les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_{p+1}} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_{p+2}} = \ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} = 0; \tag{15}$$

car $\varpi^{(p-2)}$ n'étant pas identiquement nulle, sans quoi ϖ et, par suite ω, ne seraient pas de classe p, le coefficient de $dy_1\,dy_2\ldots dy_{p-1}$, par exemple, dans $\varpi^{(p-2)}$, n'est pas nul, et, par suite, les équations (15) s'obtiennent en annulant dans le premier membre de (14) les coefficients de

$$dy_1\,dy_2\ldots dy_{p-1}\,dy_{p+1}, \quad \ldots, \quad dy_1\,dy_2\ldots dy_{p-1}\,dy_n.$$

Outre les équations (15), l'équation (14) fournit une équation et une seule en φ, obtenue en prenant dans (14) le coefficient de $dy_1\,dy_2\ldots dy_p$, soit

$$\beta_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \beta_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + \ldots + \beta_p\frac{\partial\varphi}{\partial y_p} = 0. \tag{16}$$

L'équation (14) est donc équivalente au système des équations (15) et (16). Les β étant des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_p$, ce système est manifestement un système complet admettant $p-1$ intégrales indépendantes fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

En revenant à l'équation (13), nous voyons qu'elle est équivalente à un système complet admettant p intégrales indépendantes. L'intégration de ce système, d'après la méthode de Mayer, par exemple, revient à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires à p variables.

Nous appellerons ce système *le système complet adjoint à l'expression de Pfaff* (¹).

21. *Exemple.* — Considérons, par exemple, l'expression de Pfaff à 5 variables,

$$\omega = x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3 + (x_1 + x_3 x_5) dx_4 + x_3 x_4 dx_5. \tag{17}$$

On a ici, en faisant le calcul,

$$\omega' = x_3 dx_1 dx_2 + x_2 dx_1 dx_3 + dx_1 dx_4 + x_5 dx_3 dx_4 + x_4 dx_3 dx_5,$$

$$\omega''' = \frac{1}{2}\omega'^2 = x_3 x_5 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 - x_4 dx_1 dx_3 dx_4 dx_5 + x_3 x_4 dx_1 dx_2 dx_3 dx_5,$$

puis

$$\omega^{\mathrm{IV}} = \omega\omega''' = 0.$$

L'expression ω est donc de la quatrième classe. Le système complet adjoint est donc donné par l'équation

$$\omega'' df = \omega\omega' df = 0,$$

et doit admettre 3 intégrales indépendantes. En faisant le calcul, on trouve, pour l'équation précédente,

$$\begin{aligned}\omega'' df = (&x_3^2 x_5 dx_1 dx_2 dx_4 + x_3^2 x_4 dx_1 dx_2 dx_5 + x_2 x_3 x_5 dx_1 dx_3 dx_4 \\ &+ x_2 x_3 x_4 dx_1 dx_3 dx_5 + x_3 x_4 dx_1 dx_4 dx_5 \\ &+ x_1 x_3 x_5 dx_2 dx_3 dx_4 + x_1 x_3 x_4 dx_2 dx_3 dx_5 - x_1 x_4 dx_3 dx_4 dx_5) \\ &\times \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_5} dx_5\right) = 0,\end{aligned}$$

(¹) Dans le cas où p est pair et n égal à p, c'est le premier système auxiliaire qu'on trouve dans toutes les méthodes de réduction.

ce qui donne pour f le système

$$x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_3 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_3 x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0,$$
$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

C'est bien un système complet qui admet les trois intégrales indépendantes $\frac{x_1}{x_3}$, $x_2 x_3 + x_4$, $x_4 x_5$.

22. *Propriétés des intégrales du système complet adjoint.* — Considérons une expression de Pfaff ω de classe p et une des p intégrales indépendantes du système complet adjoint. Faisons un changement de variables en prenant pour une des nouvelles variables y_1 cette intégrale particulière. Alors l'expression ω devient une certaine expression ϖ en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et l'on a

$$\varpi^{(p-2)} dy_1 = 0.$$

Cette égalité exprime que, si dans ϖ on regarde y_1 comme une constante et qu'on y fasse $dy_1 = 0$, l'expression ϖ_1 obtenue a sa dérivée $(p-2)^{\text{ième}}$ identiquement nulle. Autrement dit l'expression ϖ est de classe $p-2$ au plus; elle n'est, d'ailleurs, certainement pas de classe inférieure sinon l'introduction d'un terme en dy_1 ne pourrait pas rendre ϖ de classe p.

Réciproquement, si ϖ_1 est de classe $p-2$, sa dérivée $(p-2)^{\text{ième}}$ est nulle, ou encore l'expression $\varpi^{(p-2)} dy_1$ est nulle.

Une intégrale du système complet adjoint est donc une fonction f qui, égalée à une constante arbitraire, abaisse de deux unités la classe de l'expression de Pfaff considérée.

Naturellement, cet énoncé suppose implicitement qu'en même temps qu'on lie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par la relation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$$

on lie les différentielles par la relation

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{df}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Ainsi, dans l'exemple traité précédemment, si l'on prend l'intégrale $\frac{x_1}{x_3}$ du système complet adjoint, la substitution de ax_3 à x_1 et de adx_3 à dx_1 doit abaisser la classe de ω de deux unités. En effet, ω devient

$$(18) \qquad \begin{cases} \omega = ax_3^2\,dx_2 + ax_2x_3\,dx_3 + x_3(a + x_5)\,dx_4 + x_3x_4\,dx_5 \\ \quad = x_3\,d[ax_2x_3 + (a + x_5)x_4], \end{cases}$$

et n'est plus que de deuxième classe.

23. *Réduction d'une expression de Pfaff de classe p à une forme canonique.* — Étant donnée une expression de Pfaff ω de classe p, soit f_1 une intégrale du système complet adjoint. Considérons l'équation

$$(19) \qquad \omega^{(p-4)}\,df_1\,df = 0,$$

où f désigne une fonction arbitraire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on fait un changement de variables en prenant f_1 pour une des variables y_1, si ce changement de variables transforme ω en ϖ et f en φ, l'équation précédente devient

$$(20) \qquad \varpi^{(p-4)}\,dy_1\,d\varphi = 0.$$

Si dans ϖ et φ on regarde y_1 comme une constante et qu'on fasse partout $dy_1 = 0$, cette équation peut encore s'écrire

$$(21) \qquad \varpi_1^{(p-4)}\,d\varphi = 0.$$

Comme ϖ_1 est de classe $p - 2$, on voit qu'elle est équivalente au système complet adjoint à ϖ_1. Ce système admet $p - 3$ intégrales indépendantes fonctions de $y_2, y_3, \ldots, y_n$ et aussi de la constante y_1. En remontant à l'équation (20) et en ne regardant plus y_1 comme une constante, on voit que cette équation est équivalente à un système complet admettant $p - 2$ intégrales indépendantes, parmi lesquelles y_1.

Finalement, l'équation (19) est équivalente à un système complet qui admet $p - 2$ intégrales indépendantes, parmi lesquelles se trouve la fonction f_1 elle-même.

Celles des intégrales f du système complet équivalent à (19) *qui sont* *indépendantes de f_1 sont les fonctions telles que les relations*

$$\left\{\begin{array}{ll} f=a, & f_1=a_1, \\ df=0, & df_1=0, \end{array}\right. \tag{22}$$

abaissent la classe de ω de quatre unités. La démonstration est absolument la même que dans le cas précédent.

D'après la méthode de Mayer, ces fonctions sont données par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires à $p-2$ variables.

Il est bien clair que, lorsqu'il sera pratique de tirer de $f_1=a_1$ une des variables en fonction des $n-1$ autres, il suffira d'intégrer le système complet adjoint à l'expression de Pfaff qui résulte de ω par cette substitution.

On peut continuer ainsi de proche en proche. Désignant par f_2 une intégrale indépendante de f_1 de l'équation (19), on considérera l'équation

$$\omega^{(p-6)}df_1\,df_2\,df=0. \tag{23}$$

Cette équation est équivalente à un système complet admettant $p-5$ intégrales indépendantes de f_1 et de f, et ces intégrales sont les fonctions f telles que les relations

$$\left\{\begin{array}{lll} f=a, & f_1=a_1, & f_2=a_2, \\ df=0, & df_1=0, & df_2=0 \end{array}\right. \tag{24}$$

abaissent la classe de ω de six unités. Et ainsi de suite.

Cela étant, deux cas peuvent se présenter, suivant que p est pair ou impair.

24. *Forme canonique d'une expression de classe paire.* — Si p est pair et égal à $2m$, par exemple, le $(m-1)^{\text{ième}}$ système complet sera donné par l'équation

$$\omega''\,df_1\,df_2\ldots df_{m-2}\,df=0, \tag{25}$$

et le $m^{\text{ième}}$ sera, par suite,

$$\omega\,df_1\,df_2\ldots df_{m-2}\,df_{m-1}\,df=0. \tag{26}$$

Il est clair qu'il donnera les fonctions f_m telles que les relations

$$(27)\quad \begin{cases} f_1 = a_1, & f_2 = a_2, & \ldots, & f_{m-1} = a_{m-1}, & f_m = a_m, \\ df_1 = 0, & df_2 = 0, & \ldots, & df_{m-1} = 0, & df_m = 0 \end{cases}$$

rendent ω identiquement nul. Si alors on prend pour nouvelles variables $y_1 = f_1, y_2 = f_2, \ldots, y_m = f_m$ et m autres fonctions quelconques indépendantes des premières, ω prend la forme

$$\varpi = B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_m dy_m.$$

Il est clair que les m coefficients B sont des fonctions indépendantes entre elles et indépendantes de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, sinon ϖ serait de classe inférieure à $2m$. On peut donc les prendre pour les m variables indépendantes autres que $y_1, y_2, \ldots, y_m$. En changeant de notations, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnée une expression de Pfaff quelconque de classe $2m$, on peut toujours, par un changement de variables, la mettre sous la forme*

$$(28)\qquad \omega = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_m dx_m,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m; p_1, p_2, \ldots, p_m$ *étant $2m$ variables indépendantes.*

Cette réduction peut se faire par la recherche d'*une* intégrale de m systèmes d'équations différentielles ordinaires respectivement à $2m, 2m-2, \ldots, 4, 2$ variables [1].

25. Dans l'exemple traité plus haut, on a $m = 2$; nous avons trouvé une intégrale $\frac{x_1}{x_3}$ du premier système complet. Le second est fourni par l'équation

$$(29)\qquad [ax_3^2 dx_2 + ax_2x_3 dx_3 + x_3(a + x_5) dx_4 + x_3x_4 dx_5] \\ \times \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_5} dx_5\right) = 0,$$

[1] Les équations (25) ne diffèrent que par la forme des équations qui se présentent dans la méthode de réduction de Frobenius.

et peut se mettre sous la forme

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{a x_3^2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{a x_2 x_3} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_4}}{x_3(a + x_5)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_5}}{x_3 x_4}. \tag{30}$$

On trouve facilement une intégrale, à savoir :

$$a x_2 x_3 + (a + x_5) x_4 = b = x_1 x_2 + x_4 x_5 + \frac{x_1 x_4}{x_3}.$$

En posant alors, par exemple,

$$x_1 = a x_3, \qquad x_5 = -a + \frac{b - a x_2 x_3}{x_4},$$

et substituant dans (17) en regardant a et b comme des variables, on trouve, toutes réductions faites,

$$\omega = -x_3(x_4 + x_2 x_3)\,da + x_3\,db.$$

Ici les variables x_1, x_2, p_1, p_2 de la forme canonique sont

$$\frac{x_1}{x_3}, \quad x_1 x_2 + x_4 x_5 + \frac{x_1 x_4}{x_3}, \quad -x_3(x_4 + x_2 x_3), \quad x_3.$$

26. *Forme canonique d'une expression de classe impaire.* — Si p est impair et égal à $2m+1$, par exemple, le $m^{\text{ième}}$ système complet est

$$\omega'\,df_1\,df_2 \ldots df_{m-1}\,df = 0. \tag{31}$$

Si donc f_m est une intégrale indépendante de $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$, les relations

$$\begin{cases} f_1 = a_1, & f_2 = a_2, & \ldots, & f_m = a_m \\ df_1 = 0, & df_2 = 0, & \ldots, & df_m = 0 \end{cases} \tag{32}$$

rendent ω de première classe, c'est-à-dire *différentielle exacte* dz. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une expression de Pfaff quelconque de classe* $2m+1$, *on peut toujours, par un changement de variables, la mettre sous la forme*

$$\omega = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_m\,dx_m, \tag{33}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont $2m+1$ variables indépendantes.

Cette réduction peut se faire par la recherche d'*une* intégrale de m systèmes d'équations différentielles ordinaires respectivement à $2m+1, 2m-1, \ldots, 5, 3$ variables et par une quadrature.

27. Prenons, par exemple,

$$\omega = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2 - x_3 x_5\,dx_4 - x_3 x_4\,dx_5 + x_2\,dx_6.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\omega' &= dx_2\,dx_6 - x_5\,dx_3\,dx_4 - x_4\,dx_3\,dx_5,\\
\omega''' &= -x_5\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_6 - x_4\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_6,\\
\omega^{\mathrm{V}} &= 0.
\end{aligned}$$

L'expression ω est donc de cinquième classe au plus; on constate facilement que, ω^{IV} n'étant pas identiquement nul, ω est effectivement de cinquième classe.

Le système complet adjoint est ici

$$\omega'''\,df = 0,$$

qui se décompose en

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,\\
&x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.
\end{aligned}$$

On peut prendre x_2 pour une des intégrales de ce système complet. Faisons alors $x_2 = a_1$ et formons le système complet

$$\omega'\,df = 0,$$

qui est ici

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial x_6} = 0,\\
&x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0.
\end{aligned}$$

La fonction x_3 est une intégrale de ce système. En faisant donc

$x_2 = a_1$, $x_3 = a_2$, ω doit devenir une différentielle exacte; on trouve, en effet,

$$\omega = d(a_1 x_1 - a_2 x_4 x_5 + a_1 x_6);$$

en ne regardant plus a_1 et a_2 comme des constantes, on obtient

$$\omega = d(a_1 x_1 - a_2 x_4 x_5 + a_1 x_6) - x_6 da_1 + x_4 x_5 da_2,$$
$$\omega = d(x_1 x_2 - x_3 x_4 x_5 + x_2 x_6) - x_6 dx_2 + x_4 x_5 dx_3 \quad (^1).$$

28. *Remarque.* — Le système complet adjoint à une expression de Pfaff mise sous sa forme canonique se réduit, dans le cas où la classe est paire, à l'équation

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} = 0;$$

dans le cas où la classe est impaire, à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Il admet donc, dans le premier cas, les intégrales indépendantes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \quad \frac{p_1}{p_m}, \quad \frac{p_2}{p_m}, \quad \ldots, \quad \frac{p_{m-1}}{p_m};$$

dans le second cas, les intégrales indépendantes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m.$$

On voit que toutes les intégrales du système complet qu'on rencontre dans la réduction satisfont au système complet adjoint, puisque les m intégrales dont on s'est servi ici sont $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

On verra plus loin (IV, 69, 70, 75) une nouvelle forme sous laquelle on peut mettre les équations des systèmes complets successifs qui servent à la réduction.

---

(1) La méthode de réduction de Frobenius pour les expressions de classe impaire diffère de celle qui vient d'être exposée en ce qu'il commence par déterminer une fonction f telle que $\omega - df$ soit seulement de classe $2m$.

III. — Équations aux différentielles totales.

29. Les équations aux différentielles totales dont nous allons nous occuper sont celles qu'on obtient en égalant à zéro une expression de Pfaff.

Résoudre une équation de cette nature, c'est trouver un système de relations finies entre $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tel que ces relations entre les variables et celles qu'on en déduit entre leurs différentielles annulent l'expression de Pfaff.

Nous allons d'abord nous proposer de trouver d'une manière générale tous les systèmes d'équations qui annulent une expression de Pfaff. A cet égard, toute expression de Pfaff peut être supposée de classe impaire, car, par division par un facteur convenable, on peut toujours abaisser d'une unité la classe d'une expression de Pfaff de classe paire. C'est ainsi que l'équation

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_m\,dx_m = 0$$

peut s'écrire

$$dx_m + \frac{p_1}{p_m}\,dx_1 + \frac{p_2}{p_m}\,dx_2 + \ldots + \frac{p_{m-1}}{p_m}\,dx_{m-1} = 0,$$

et le premier membre est de la classe $2m-1$.

30. *Nombre minimum d'équations annulant une expression de Pfaff.* — Considérons une expression de Pfaff ω de la classe $2m+1$ (ou $2m+2$) mise sous sa forme canonique et cherchons à résoudre l'équation

$$(1) \qquad \omega = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_m\,dx_m = 0,$$

au moyen du nombre minimum de relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_m, z, p_1, p_2, \ldots, p_m$ et les autres variables qui n'entrent pas explicitement dans ω. Une première solution est fournie en égalant $x_1, x_2, \ldots, x_m, z$ à $m+1$ constantes arbitraires, ce qui donne $m+1$ relations. Je dis qu'il n'est pas possible de satisfaire à l'équation (1) avec un moins grand nombre de relations.

En effet, l'équation (1) exprime qu'il y a au moins une relation entre $z, x_1, x_2, \ldots, x_m$. Supposons qu'il y en ait exactement $h+1$ et, pour préciser, que ces relations soient mises sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_m), \\ x_2 = \varphi_2(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_h = \varphi_h(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_m), \\ z\ \ = \psi(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_m). \end{array}\right.$$

Les variables $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_m$ n'étant liées par aucune relation, l'équation (1) donne

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_{h+1}} - p_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_{h+1}} - p_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_{h+1}} - \ldots - p_h \dfrac{\partial\varphi_h}{\partial x_{h+1}} - p_{h+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_m} - p_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_m} - p_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_m} - \ldots - p_h \dfrac{\partial\varphi_h}{\partial x_m} - p_m = 0. \end{array}\right.$$

Ces $m-h$ nouvelles relations (3) sont indépendantes entre elles et indépendantes des équations (2). Elles forment avec (2) un système de $m+1$ équations qui résout le problème.

On voit en même temps que, pour avoir la solution la plus générale, il suffit d'ajouter à ces équations un nombre quelconque d'autres équations formant avec les premières un système algébriquement compatible. On peut prendre pour $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h, \psi$ des fonctions absolument arbitraires, le nombre h étant égal à $0, 1, 2, \ldots, m$. La solution particulière obtenue plus haut s'obtient en prenant $h = m$, les fonctions φ et ψ étant alors des constantes.

31. Pour préciser et compléter ce qui vient d'être dit sur la résolution générale de l'équation

$$(1)\qquad dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \ldots - p_m\, dx_m = 0,$$

cherchons directement tous les systèmes de relations satisfaisant à cette équation et par lesquels un système de valeurs donné $x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, p_1^0, \ldots, p_m^0$ constitue un élément simple, c'est-à-dire tel qu'au voisinage de ce système de valeurs, un certain nombre $2m-h+1$ des variables puissent s'exprimer en fonctions holomorphes des h autres; ou, ce qui revient au même, cherchons tous les systèmes de $2m-h+1$ relations telles que les premiers membres de ces relations soient holomorphes au voisinage de ce système de valeurs et que de plus les déterminants fonctionnels de ces premiers membres par rapport à $2m-h+1$ des variables ne soient pas tous nuls pour le même système de valeurs. Les h variables différentes des $2m-h+1$ par rapport auxquelles on peut résoudre le système seront dites les h variables indépendantes.

Cela étant, on peut toujours supposer que z n'est pas une des variables indépendantes; sinon, en effet, on aurait

$$1-p_1\frac{\partial x_1}{\partial z}-p_2\frac{\partial x_2}{\partial z}-\ldots-p_m\frac{\partial x_m}{\partial z}=0;$$

cette égalité montre que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ne peuvent pas être toutes variables indépendantes, sans quoi le premier membre se réduirait à 1 et que, de plus, l'une des dérivées $\frac{\partial x_1}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial x_m}{\partial z}$ est différente de zéro pour $(x_1^0, \ldots, p_m^0)$, la première par exemple. Cela montre qu'on pourrait tirer z en fonction holomorphe de x_1 et des $h-1$ variables indépendantes autres que z et que, par suite, on pourrait remplacer z par x_1 comme variable indépendante.

On peut, de même, supposer que parmi les h variables indépendantes, qui sont prises dans les x et les p, il n'y en a pas deux telles que x_1 et p_1, autrement dit que ces h variables ont h indices distincts. Sinon, en effet, on aurait, en considérant la dérivée ω', qui doit être nulle pour le système de relations considéré,

$$\frac{D(x_1,p_1)}{D(x_1,p_1)}+\frac{D(x_2,p_2)}{D(x_1,p_1)}+\ldots+\frac{D(x_m,p_m)}{D(x_1,p_1)}=0.$$

Le premier terme de cette égalité est égal à 1; il en résulte que l'un au moins des indices n'est représenté dans aucune des h variables indépendantes, car sans cela tous les termes qui suivent le premier seraient nuls. Si alors les indices non représentés sont par exemple les $m-\alpha$ derniers, il n'y a que les $m-\alpha$ derniers termes de l'égalité qui puissent être différents de zéro et, par suite, l'une au moins des quantités

$$\frac{\partial x_{\alpha+1}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_{\alpha+2}}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_m}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial p_{\alpha+1}}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p_m}{\partial x_1}$$

est différente de zéro pour $(x_1^0, \ldots, p_m^0)$, soit $\frac{\partial x_{\alpha+1}}{\partial x_1}$. On pourra alors tirer x_1 en fonction holomorphe de $x_{\alpha+1}$ et substituer $x_{\alpha+1}$ à x_1 comme variable indépendante. Les indices 1 et $\alpha+1$ ne sont alors représentés chacun qu'une fois parmi les h variables indépendantes. S'il y a un autre couple de variables tel que (x_2, p_2), on pourra répéter la même opération, de manière à arriver finalement à h variables indépendantes à indices tous distincts. Cela prouve en particulier que h ne peut pas dépasser m.

32. Cela étant, supposons que les h variables indépendantes soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\alpha; \quad p_{\alpha+1}, \quad p_{\alpha+2}, \quad \ldots, \quad p_h.$$

On aura alors des relations de la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} z - x_{\alpha+1}p_{\alpha+1} - \ldots - x_h p_h &= w(x_1, \ldots, x_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_h),\\ x_{h+1} &= u_{h+1}(x_1, \ldots, x_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_h),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_m &= u_m(x_1, \ldots, x_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_h),\\ p_{h+1} &= v_{h+1}(x_1, \ldots, x_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_h),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ p_m &= v_m(x_1, \ldots, x_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_h), \end{aligned}\right.$$

les fonctions $u_{h+1}, \ldots, u_m, v_{h+1}, \ldots, v_m, w$ étant holomorphes au voisinage de $(x_1^0, \ldots, x_\alpha^0, p_{\alpha+1}^0, \ldots, p_h^0)$ et assujetties à l'unique condition de prendre, pour ce système de valeurs, les valeurs respectives

$$x_{h+1}^0, \quad \ldots, \quad x_m^0, \quad p_{h+1}^0, \quad \ldots, \quad p_m^0, \quad z^0 - x_{\alpha+1}^0 p_{\alpha+1}^0 - \ldots - x_h^0 p_h^0.$$

En portant dans l'équation aux différentielles totales (1), elle prend la forme

$$\begin{aligned} &dw - p_1\,dx_1 - \ldots - p_\alpha\,dx_\alpha + x_{\alpha+1}\,dp_{\alpha+1}\\ &\quad + \ldots + x_h\,dp_h - v_{h+1}\,du_{h+1} - \ldots - v_m\,du_m = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_h$, à savoir

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial w}{\partial x_1} - v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial x_1} - \ldots - v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_\alpha &= \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial x_\alpha} - \ldots - v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_\alpha},\\
x_{\alpha+1} &= -\frac{\partial w}{\partial p_{\alpha+1}} + v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial p_{\alpha+1}} + \ldots + v_m \frac{\partial u_m}{\partial p_{\alpha+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_h &= -\frac{\partial w}{\partial p_h} + v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial p_h} + \ldots + v_m \frac{\partial u_m}{\partial p_h}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (4) et (5) résolvent la question. La solution dépend donc de $2m - 2h + 1$ fonctions arbitraires de h arguments et h peut prendre les valeurs 0, 1, 2, ..., m. Si nous réunissons ces deux groupes de formules, nous obtenons, comme solution générale de l'équation (1), admettant le système de valeurs $(x_1^0, \ldots, p_m^0)$ comme élément simple, les relations suivantes :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
z &= w - p_{\alpha+1}\frac{\partial w}{\partial p_{\alpha+1}} - \ldots - p_h \frac{\partial w}{\partial p_h} + v_{h+1}\left(p_{\alpha+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial p_{\alpha+1}} + \ldots + p_h \frac{\partial u_{h+1}}{\partial p_h}\right) + \ldots\\
&\qquad\qquad + v_m\left(p_{\alpha+1}\frac{\partial u_m}{\partial p_{\alpha+1}} + \ldots + p_h \frac{\partial u_m}{\partial p_h}\right),\\
p_1 &= \frac{\partial w}{\partial x_1} - v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial x_1} - \ldots - v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p_\alpha &= \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial x_\alpha} - \ldots - v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_\alpha},\\
x_{\alpha+1} &= -\frac{\partial w}{\partial p_{\alpha+1}} + v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial p_{\alpha+1}} + \ldots + v_m \frac{\partial u_m}{\partial p_{\alpha+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_h &= -\frac{\partial w}{\partial p_h} + v_{h+1}\frac{\partial u_{h+1}}{\partial p_h} + \ldots + v_m \frac{\partial u_m}{\partial p_h},\\
x_{h+1} &= u_{h+1},\\
&\ldots\ldots,\\
x_m &= u_m,\\
p_{h+1} &= v_{h+1},\\
&\ldots\ldots,\\
p_m &= v_m,
\end{aligned}\right.$$

où $u_{h+1}, \ldots, u_m, v_{h+1}, \ldots, v_m, w$ sont des fonctions holomorphes de $x_1, \ldots, x_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_h$, holomorphes au voisinage de $(x_1^0, \ldots, p_h^0)$, prenant pour ce système de valeurs des valeurs données, les dérivées partielles du premier ordre des $2m-2h$ premières prenant des valeurs données, faciles à calculer, toujours pour le même système de valeurs.

En particulier pour $h=m$, il y a une seule fonction arbitraire w de m arguments, soient $x_1, \ldots, x_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots, p_m$, et l'on a

$$(7)\qquad \begin{cases} z = w - p_{\alpha+1}\dfrac{\partial w}{\partial p_{\alpha+1}} - \ldots - p_m\dfrac{\partial w}{\partial p_m}, \\ p_1 = \dfrac{\partial w}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\alpha = \dfrac{\partial w}{\partial x_\alpha}, \\ x_{\alpha+1} = -\dfrac{\partial w}{\partial p_{\alpha+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m = -\dfrac{\partial w}{\partial p_m}. \end{cases}$$

Si, en particulier, on prend pour w une fonction linéaire de $p_{\alpha+1}, \ldots, p_m$, on retrouve, avec un simple changement de notations, les formules (2) et (3).

33. *Solution générale d'une équation de Pfaff quelconque.* — Nous venons de résoudre l'équation particulière de Pfaff (1). D'après cela, étant donnée une expression de Pfaff quelconque de classe $2m+1$ ou $2m+2$, on n'aura qu'à la réduire à sa forme canonique. L'équation à résoudre sera alors de la forme (1), et les équations (6) fourniront la solution générale du problème. On voit que si $\omega^{(2m+2)}$ est la première dérivée d'ordre pair qui s'annule identiquement, il faudra pour annuler ω un système d'au moins $m+1$ équations entre les variables, et alors il y en aura une infinité dépendant d'une fonction arbitraire de m arguments.

34. *Solutions singulières.* — La conclusion précédente peut néan-

moins être en défaut dans certains cas particuliers. Il se peut que la première dérivée identiquement nulle d'ordre pair d'une expression de Pfaff ω étant $\omega^{(2m)}$, on puisse annuler cette expression, soit au moyen d'un système de moins de m relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit au moyen d'un système de m relations au plus, mais ne rentrant pas dans la formule (7). Ces cas pourront se présenter lorsque, pour les systèmes de valeurs des variables qui satisfont à ces relations, le changement de variables qui réduit ω à sa forme canonique est illusoire. C'est ainsi que l'expression du troisième ordre

$$dx_1 - x_1 x_2\, dx_3$$

peut s'annuler au moyen de la seule équation

$$x_1 = 0,$$

qui se traduit, en effet, avec les variables canoniques $(x_1, x_1 x_2, x_3)$ par le système de deux équations

$$x_1 = x_1 x_2 = 0.$$

C'est ainsi encore qu'on peut satisfaire à l'équation

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_m\, dx_m = 0,$$

par le système des m relations

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_m = 0,$$

qui ne rentre pas dans le type général.

Il importe donc de savoir trouver toutes les solutions qui ne rentrent pas dans le type général. Nous allons pour cela donner un criterium très simple.

35. *Conditions pour qu'une solution soit singulière.* — Nous allons démontrer que, *pour qu'une solution soit singulière, l'expression de Pfaff ω étant de classe $2m-1$ ou $2m$, il faut que cette solution annule tous les coefficients de la dérivée $(2m-2)^{\text{ième}}$ de ω, supposée mise sous sa forme la plus simple.*

Nous supposons que les coefficients de ω sont des fonctions holomorphes des variables et nous ne considérons que des solutions, générales ou singulières, définies par un certain nombre h d'équations à premiers membres holomorphes au voisinage d'un système arbitraire de valeurs satisfaisant à ces équations, les déterminants fonctionnels de ces h premiers membres par rapport à h quelconques des variables n'étant pas tous nuls pour ce même système de valeurs.

Cela étant, nous allons démontrer que si, pour un système arbitraire de valeurs des variables correspondant à une solution donnée, les coefficients de $\omega^{(2m-2)}$ ne sont pas tous nuls, cette solution est *générale*, c'est-à-dire peut être obtenue par le procédé exposé plus haut.

Considérons, en effet, d'abord l'équation

$$\omega^{(2m-2)}\, df = 0; \tag{8}$$

si ω est de classe $2m$, cette équation est équivalente au système complet adjoint à ω et admet $2m-1$ intégrales indépendantes; ce système complet est donc formé de $n-2m+1$ équations indépendantes. Si ω est de classe $2m-1$, et si l'on prend des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ telles que ω ne dépende explicitement que de $y_1, y_2, \ldots, y_{2m-1}$, l'équation (8) est manifestement équivalente au système

$$\frac{\partial f}{\partial y_{2m}} = \frac{\partial f}{\partial y_{2m+1}} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,$$

et, par suite, à un système complet admettant $2m-1$ intégrales indépendantes et formé de $n-2m+1$ équations indépendantes. Dans tous les cas, l'*équation* (8) *fournit un système complet que nous appellerons* SYSTÈME COMPLET *adjoint à l'équation aux différentielles totales* $\omega = 0$ *et qui admet* $2m-1$ *intégrales indépendantes.*

36. Cela étant, revenons à notre solution particulière et soit

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

un système arbitraire de valeurs correspondant à cette solution. Par hypothèse, les coefficients de $\omega^{(2m-2)}$, qui est de degré $2m-1$, ne sont pas tous nuls pour ce système de valeurs. Supposons, par exemple, que le coefficient de

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2m-1}$$

ne soit pas nul. L'expression $\omega^{(2m-2)}$ résultant du produit de $\omega^{(2m-4)}$ par ω', il en résulte que dans $\omega^{(2m-4)}$ les coefficients des différents monomes formés des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{2m-1}$ ne sont pas tous nuls, toujours pour le même système de valeurs; supposons, par exemple, qu'il en soit ainsi du coefficient de

$$dx_2\,dx_3 \ldots dx_{2m-2}.$$

Nous pourrons continuer ainsi et supposer que :

dans	$\omega^{(2m-2)}$	le coefficient de	$dx_1\,dx_2 \ldots dx_{2m-1}$	n'est pas nul;
»	$\omega^{(2m-4)}$	»	$dx_2\,dx_3 \ldots dx_{2m-2}$	»
...	...	...	...	...;
dans	$\omega^{(2m-2r)}$	le coefficient de	$dx_r\,dx_{r+1} \ldots dx_{2m-r}$	n'est pas nul;
...	...	...	...	...
dans	ω	le coefficient de	dx_m	n'est pas nul.

Dans ces conditions, considérons le système complet adjoint à l'équation $\omega = 0$; pour le former, prenons dans le premier membre de (8) les coefficients totaux des monomes

$$\begin{array}{l} dx_1\,dx_2 \ldots dx_{2m-1}\,dx_{2m}, \\ dx_1\,dx_2 \ldots dx_{2m-1}\,dx_{2m+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_1\,dx_2 \ldots dx_{2m-1}\,dx_n. \end{array}$$

Nous aurons ainsi, d'après les hypothèses faites, $n - 2m + 1$ équations résolues par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_{2m}}, \frac{\partial f}{\partial x_{2m+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, les coefficients des autres dérivées étant holomorphes au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Comme le système complet contient exactement $n - 2m + 1$ équations, il est complètement déterminé. Nous voyons de plus, d'après la théorie des systèmes complets, que *ce système admet $2m - 1$ intégrales indépendantes holomorphes au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ et se réduisant respectivement à $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_{2m-1} - x_{2m-1}^0$ pour $x_{2m} = x_{2m}^0$, $x_{2m+1} = x_{2m+1}^0, \ldots, x_n = x_n^0$*. Nous prendrons celle u_1 de ces intégrales qui se réduit à $x_1 - x_1^0$. Cette intégrale, en négligeant les termes du second degré et des degrés supérieurs, est donc de la forme

$$u_1 = x_1 - x_1^0 + \alpha_{2m}(x_{2m} - x_{2m}^0) + \alpha_{2m+1}(x_{2m+1} - x_{2m+1}^0) + \ldots + \alpha_n(x_n - x_n^0).$$

Si l'on égale u_1 à une constante et qu'on tienne compte de $du_1 = 0$, l'expression ω n'est plus que de la classe $2m-2$ ou $2m-3$, puisque sa dérivée $(2m-2)^{\text{ième}}$ s'annule et que sa classe ne peut pas s'abaisser de plus de deux unités.

37. Nous considérerons maintenant l'équation

$$\omega^{(2m-4)}\, du_1\, df = 0, \tag{9}$$

qui, d'après ce qui précède, est équivalente au système complet adjoint à l'équation $\omega = 0$, où l'on fait $u_1 = \text{const.}$

Ce système complet admet $2m-3$ intégrales indépendantes, et en ne regardant pas u_1 comme une constante, $2m-2$ intégrales indépendantes; il est formé de $n-2m+2$ équations indépendantes. Ici pour les avoir, il suffit de prendre dans le premier membre de (9) les coefficients de $dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2m-2}\, dx_{2m-1}$, $dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2m-2}\, dx_{2m}$, $\ldots$, $dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2m-2}\, dx_n$. Ces coefficients contiennent respectivement les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_{2m-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{2m}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ multipliées par un coefficient par hypothèse différent de zéro, et en outre des termes en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{2m-2}}$.

En égalant ces coefficients à zéro, on a $n-2m+2$ équations indépendantes qu'on peut considérer comme résolues par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_{2m-1}}$, $\frac{\partial f}{\partial x_{2m}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, les coefficients des autres dérivées étant holomorphes au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Ces $n-2m+2$ équations sont les équations du système complet cherché. On voit de plus que ce système admet $2m-2$ intégrales indépendantes holomorphes et se réduisant respectivement à $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0$, $\ldots$, $x_{2m-2} - x_{2m-2}^0$ pour

$$x_{2m-1} = x_{2m-1}^0, \qquad x_{2m} = x_{2m}^0, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0.$$

La première n'est autre que u_1. Nous désignerons la seconde par u_2; à des termes près de degrés supérieurs, u_2 est de la forme

$$u_2 = x_2 - x_2^0 + \beta_{2m-1}(x_{2m-1} - x_{2m-1}^0) + \beta_{2m}(x_{2m} - x_{2m}^0) + \ldots + \beta_n(x_n - x_n^0).$$

Nous continuerons ainsi en formant

$$\omega^{(2m-6)}\, du_1\, du_2\, df = 0, \tag{10}$$

équation équivalente à un système complet admettant une intégrale holomorphe u_3 se réduisant à $x_3 - x_3^0$ pour

$$x_{2m-2} = x_{2m-2}^0, \qquad x_{2m-1} = x_{2m-1}^0, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0.$$

Et ainsi de suite jusqu'au système complet

$$\omega\, du_1\, du_2 \ldots du_{m-1}\, df = 0,$$

qui admettra l'intégrale holomorphe u_m se réduisant à $x_m - x_m^0$ pour

$$x_{m+1} = x_{m+1}^0, \qquad x_{m+2} = x_{m+2}^0, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0.$$

38. Nous sommes donc finalement arrivés en somme à m fonctions holomorphes

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m$$

se réduisant respectivement à

$$x_1 - x_1^0, \quad x_2 - x_2^0, \quad \ldots, \quad x_m - x_m^0$$

lorsqu'on y fait

$$x_{m+1} - x_{m+1}^0 = x_{m+2} - x_{m+2}^0 = \ldots = x_n - x_n^0 = 0.$$

De plus, lorsqu'on donne à ces m fonctions des valeurs constantes, ω devient nul, de sorte que l'on a une égalité de la forme

$$\omega = C_1\, du_1 + C_2\, du_2 + \ldots + C_m\, du_m. \tag{11}$$

Les coefficients C sont des fonctions holomorphes au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. En effet, si l'on fait un changement de variables en prenant

$$y_1 = u_1, \qquad y_2 = u_2, \qquad \ldots, \qquad y_m = u_m,$$
$$y_{m+1} = x_{m+1} - x_{m+1}^0, \qquad \ldots, \qquad y_n = x_n - x_n^0,$$

toute fonction holomorphe des anciennes variables au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_n^0$ est une fonction holomorphe des nouvelles au voisinage de $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ et réciproquement. En particulier, ω reste holomorphe au voisinage des y nuls, et comme il ne doit contenir que $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$, il en résulte que $C_1, C_2, \ldots C_n$ sont holomorphes.

On voit de plus que C_m^0 est différent de zéro, car l'expression (11) développée donne pour coefficient de dx_m une quantité dont la valeur pour $x_1^0, \ldots, x_n^0$, supposée par hypothèse différente de zéro, n'est autre que C_m^0. Il en résulte qu'au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_n^0$ l'équation aux différentielles totales est équivalente à l'équation

$$du_m + \frac{C_1}{C_m} du_1 + \frac{C_2}{C_m} du_2 + \ldots + \frac{C_{m-1}}{C_m} du_{m-1} = du_m - v_1\, du_1 - \ldots - v_{m-1}\, du_{m-1} = 0, \tag{12}$$

où les v sont encore holomorphes. Enfin, si l'on réduit $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ à leurs termes du premier degré, on obtient $2m-1$ expressions du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *qui doivent être indépendantes*.

En effet, il n'y a que ces termes du premier degré qui interviennent pour donner la valeur des coefficients de $\omega^{(2m-2)}$ lorsqu'on fait $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$; si ces $2m-1$ quantités n'étaient pas indépendantes, elles fourniraient une expression de Pfaff de classe $2m-2$ au plus, et, par suite, $\omega^{(2m-2)}$ serait nul pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

39. Il en résulte enfin que si $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ prennent les valeurs $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_{m-1}^0$ pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, on peut faire un changement de variables en prenant pour nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $v_1 - v_1^0, v_2 - v_2^0, \ldots, v_{m-1} - v_{m-1}^0$ et $n - 2m + 1$ des quantités $x_i - x_i^0$. Toute fonction holomorphe des anciennes variables au voisinage des x_i^0 sera holomorphe des nouvelles au voisinage de leurs valeurs zéro. La solution considérée se transformera alors en une solution contenant le système de valeurs zéro des variables et annulant l'expression

$$du_m - v_1\, du_1 - v_2\, du_2 - \ldots - v_{m-1}\, du_{m-1}.$$

Elle ne pourra être fournie que par le procédé général de résolution de cette équation aux différentielles totales.

On aura une infinité de systèmes de $m, m+1, \ldots, 2m-1$ équations dépendant de fonctions arbitraires, auxquelles on ajoutera au besoin des équations quelconques en nombre quelconque, si n est supérieur à $2m-1$.

Le problème que nous venons de résoudre est en somme le suivant :

Trouver toutes les solutions de l'équation $\omega = 0$ *admettant pour point simple un point (ou système de valeurs)* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *n'annulant pas tous les coefficients de la dérivée* $(2m-2)^{\text{ième}}$ *de* ω.

On voit que toutes ces solutions sont données par des formules qui rentrent toutes dans un nombre fini de types dépendant de fonctions arbitraires.

40. *Recherche des solutions singulières.* — D'après ce qui précède, *nous appellerons* SOLUTION SINGULIÈRE *une solution dont tous les points annulent les coefficients de* $\omega^{(2m-2)}$ *supposée réduite à sa forme la plus simple.*

Si l'on égale tous ces coefficients à zéro, on a un système d'équations qui peut être algébriquement incompatible, et alors il n'y a pas de solution singulière; qui peut aussi se décomposer en plusieurs autres indécomposables. Chacun de ceux-là peut se mettre sous une forme telle que les premiers membres des h équations qui le composent soient holomorphes par rapport à un système arbitraire de valeurs des variables satisfaisant au système et que de plus les déterminants fonctionnels de ces h premiers membres par rapport à h quelconques des variables ne soient pas tous nuls pour le même système de valeurs.

Cela étant, considérons une solution singulière déterminée et un point simple arbitraire $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de cette solution. Si pour ce point les deux conditions énumérées plus haut sont vérifiées, on pourra tirer h des variables en fonction holomorphe des $n-h$ autres et porter dans ω. On aura alors une nouvelle expression de Pfaff holomorphe au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, *et qui sera de classe* $2m-2$ *au plus.* On sera ramené à chercher les solutions de l'équation obtenue en égalant cette expression à zéro.

Si, pour tous les points $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de la solution considérée, la deuxième condition, relative aux déterminants fonctionnels, n'est pas réalisée, on a une solution d'un ordre supérieur de singularité. On aura toutes ces solutions en ajoutant aux h équations trouvées plus haut celles qu'on obtient en égalant à zéro tous les déterminants fonctionnels de leurs premiers membres par rapport à h des variables. On obtient ainsi un nouveau système de $k > h$ équations qu'on peut mettre sous une forme satisfaisant aux deux conditions énoncées plus haut. On procède pour ce second système comme on a procédé pour le premier et ainsi de suite.

Ces opérations ont nécessairement un terme, car on est nécessairement ramené à un nombre *fini* d'équations aux différentielles totales d'ordre inférieur à l'équation donnée ; chacune d'elles pourra conduire à d'autres équations aux différentielles totales, mais dont l'ordre sera inférieur au sien propre. Il est bien clair qu'on finira par s'arrêter dans la suite de ces opérations.

41. *Exemples.* — Prenons l'expression de Pfaff

$$\omega = x_5\, dx_1 + x_3\, dx_2 + x_1\, dx_4 + x_1\, dx_5. \tag{13}$$

On a ici

$$\left\{\begin{aligned} \omega' &= dx_1\, dx_4 + dx_3\, dx_2,\\ \omega''' &= -x_5\, dx_1\, dx_2\, dx_3 - x_3\, dx_1\, dx_2\, dx_4 - x_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\\ &\qquad + x_1\, dx_1\, dx_4\, dx_3 - x_1\, dx_2\, dx_3\, dx_5,\\ \omega^{\text{v}} &= -x_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\, dx_5,\\ \omega^{\text{vii}} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ici donc $m = 3$. Les solutions singulières seront celles pour lesquelles on aura

$$x_1 = 0,$$

le seul coefficient de ω^{v} étant x_1. Si l'on remplace, dans ω, la variable x_1 par zéro, on obtient l'équation

$$\varpi = x_3\, dx_2 = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$x_2 = a,$$

et la solution singulière est

$$x_3 = 0.$$

Par suite, les solutions singulières de l'équation $\omega = 0$ sont

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = a \tag{15}$$

et

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = 0, \tag{16}$$

et celles qu'on obtient en ajoutant des équations quelconques à chacune de ces solutions.

Ici la solution générale est donnée par trois équations au moins, tandis qu'on a des solutions singulières formées de deux équations seulement.

42. Considérons encore l'expression de Pfaff, qui nous a déjà servi d'exemple,

$$\omega = x_1 x_3\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3 + (x_1 + x_3 x_5)\, dx_4 + x_3 x_4\, dx_5.$$

On trouve ici

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega'' = {} & x_3^2 x_5\, dx_1 dx_2 dx_4 + x_3^2\, dx_4 x_1 dx_2 dx_5 + x_2 x_3 x_5\, dx_1 dx_3 dx_4 \\ & + x_2 x^2 x_4\, dx_1 dx_3 dx_5 + x_3 x_4\, dx_1 dx_4 dx_5 + x_1 x^3 x_5\, dx_2 dx_3 dx_4 \\ & + x_1 x_3 x_4\, dx_2 dx_3 dx_5 - x_1 x_4\, dx_3 dx_4 dx_5, \\ \omega^{\text{IV}} = {} & 0. \end{aligned} \right.$$

On a donc $m = 2$. Les solutions singulières s'obtiennent en annulant les coefficients de ω''. On trouve ainsi

$$(18)\qquad x_1 x_4 = x_3 x_4 = x_3 x_5 = 0.$$

Ce système se décompose en trois autres

$$(18)_a \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_3 &= 0, \end{aligned} \right. \qquad (18)_b \left\{ \begin{aligned} x_3 &= 0, \\ x_4 &= 0, \end{aligned} \right. \qquad (18)_c \left\{ \begin{aligned} x_4 &= 0, \\ x_5 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le premier système, ainsi que le second, annulent identiquement ω; ils constituent donc deux solutions singulières. Le troisième donne

$$(19)\qquad \varpi = x_1 x_3\, dx_2 + x_1 x_2\, dx_3 = 0,$$

et pour ϖ, $m = 1$. La solution générale de l'équation (19) est immédiate, c'est

$$(20)\qquad x_2 x_3 = a.$$

Quant aux solutions singulières, elles s'obtiennent en annulant

$x_1 x_3$ et $x_1 x_2$, coefficients de ϖ. On a donc deux cas : ou bien

$$x_1 = 0,$$

ou bien

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Le système $(18)_c$ donne donc pour l'équation primitive les solutions singulières

$$(21) \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0, \qquad x_2 x_3 = a;$$

$$(22) \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0, \qquad x_1 = 0,$$

$$(23) \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

La dernière rentre d'ailleurs dans la solution singulière $(18)_b$.

43. Considérons enfin l'équation

$$(24) \qquad \omega = A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3 = 0,$$

où les A sont des fonctions de x_1, x_2, x_3. Dans le cas général, ω est de troisième classe et, par suite, $m = 2$. Les solutions singulières seront fournies en annulant les coefficients de $\omega^{(2m-2)} = \omega'$. Or ici

$$\omega'' = \left[A_1\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right) + A_2\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right) + A_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)\right] dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Si la quantité entre crochets est identiquement nulle, on peut satisfaire à l'équation (24) par une seule équation dépendant d'un paramètre arbitraire. Sinon en annulant cette quantité, on peut avoir une solution singulière qui, dans certains cas, pourra être formée de la seule relation obtenue ainsi, mais qui en général aura besoin d'être complétée par une autre relation. C'est ainsi qu'en prenant

$$(25) \qquad \omega = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 + x_2 x_3^2\, dx_2 + x_3^2\, dx_3,$$

l'équation obtenue en annulant le coefficient de ω'' est

$$2 x_1 x_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0.$$

Cette équation se décompose en quatre autres, et, chacune d'elles étant traitée séparément, on est conduit finalement aux solutions singulières suivantes :

$$(25)_a \qquad x_1 = 0, \qquad x_2^2 + x_3^2 = a;$$
$$(25)_b \qquad x_2 = 0, \qquad 2x_1^2 - x_1^4 + x_3^4 = a;$$
$$(25)_c \qquad x_1 = a, \qquad x_3 = 0;$$
$$(25)_d \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

De chacune de ces solutions, on déduit, bien entendu, une infinité d'autres en ajoutant des équations quelconques aux équations qui la déterminent.

IV. — Systèmes formés de plusieurs équations finies et d'une équation aux différentielles totales.

44. Étant donnés une équation aux différentielles totales

$$(26) \qquad \omega = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_n\,dx_n = 0$$

et un système de h équations finies entre les variables

$$(27) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

il s'agit de satisfaire à l'équation (26) au moyen d'un système d'équations comprenant les équations (27).

Nous supposerons comme toujours que les premiers membres des équations (27) satisfont aux deux conditions fondamentales énoncées plus haut relativement à tous les systèmes d'équations dont nous nous sommes occupé.

Avant de résoudre le problème, nous allons démontrer un théorème, important en soi, dont nous nous sommes déjà servi implicitement.

45. *Classe d'une expression de Pfaff, en y supposant les variables liées par des relations données.* — Considérons l'expression de Pfaff ω. Supposons qu'on tire des équations (27) h des variables en fonction des $n - h$ autres et qu'on porte dans ω. Cette expression ne contient plus

alors que $n-h$ variables. Je dis que *la classe de cette nouvelle expression est le plus petit nombre entier p tel que les coefficients de l'expression*

$$\omega^{(p)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h, \tag{28}$$

supposée réduite à sa forme la plus simple, soient tous nuls en vertu des relations (27).

Supposons en effet que le déterminant fonctionnel de $f_1, f_2, \ldots, f_h$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_h$ ne soit pas identiquement nul. Alors on peut prendre pour nouvelles variables

$$y_1 = f_1, \quad y_2 = f_2, \quad \ldots, \quad y_h = f_h, \quad y_{h+1} = x_{h+1}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n,$$

et toute fonction holomorphe des anciennes variables sera fonction holomorphe des nouvelles, et réciproquement. Si l'on désigne par ϖ ce que devient ω par ce changement de variables, l'expression (28) se transforme en

$$\varpi^{(p)}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_h; \tag{29}$$

il est bien clair, de plus, que chaque coefficient de (28) est une combinaison linéaire à coefficients holomorphes des coefficients de (29) et réciproquement. (Les coefficients de ces expressions s'entendent, une fois la réduction effectuée à la forme plus simple.) Or les coefficients de l'expression (29) sont les mêmes que ceux de $\varpi^{(p)}$, où l'on aurait enlevé les termes qui contiennent les différentielles dy_1, $dy_2, \ldots, dy_h$. Si donc dans les coefficients de (28) on tient compte des relations (27), cela revient, dans $\varpi^{(p)}$, à faire d'une part

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_h = 0,$$

d'autre part

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_h = 0.$$

Soit ϖ_0 ce que devient ϖ lorsqu'on fait ces substitutions; il est facile de voir que par ces substitutions ϖ' se change en ϖ'_0; si en effet

$$\varpi = B_1\, dy_1 + \ldots + B_h\, dy_h + B_{h+1}\, dy_{h+1} + \ldots + B_n\, dy_n,$$

on a

$$\varpi_0 = B^0_{h+1}\, dy_{h+1} + \ldots + B^0_n\, dy_n,$$

d'où l'on tire

$$\varpi'_0 = \sum_{ij} \frac{\partial B^0_{h+i}}{\partial y_{h+j}} dy_{h+i}\, dy_{h+j} = \sum_{ij} \left(\frac{\partial B_{h+i}}{\partial y_{h+j}}\right)_0 dy_{h+i}\, dy_{h+j},$$

les indices o exprimant qu'on fait $y_1 = y_2 = \ldots = y_h = 0$. On voit bien que ϖ'_0 se déduit de ϖ' en faisant

$$y_1 = \ldots = y_h = dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_h = 0.$$

Par cette dernière substitution, ϖ se changeant en ϖ_0 et ϖ' en ϖ'_0, il est clair que ϖ'^q se change en ϖ'^q_0 et que $\varpi\varpi'^q$ se change en $\varpi_0\varpi'^q_0$, autrement dit que $\varpi^{(p)}$ se change en $\varpi^{(p)}_0$.

On voit par là que la condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients de (28) soient tous nuls en vertu de (27) est que $\varpi^{(p)}_0$ soit identiquement nul ; ou, comme ϖ_0 est ce que devient ω lorsqu'on tire $x_1, x_2, \ldots, x_h$ de (27), que la classe de ω soit p au plus, après que les variables y sont liées par les relations (27). Cette conclusion démontre le théorème.

46. *Solutions générales du problème proposé.* — D'après cela, revenons à notre problème et supposons que m soit le plus petit nombre entier tel que les coefficients de

(30) $$\omega^{(2m)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h$$

soient tous nuls en vertu de (27). Les solutions générales seront celles en vertu desquelles les coefficients de

(31) $$\omega^{(2m-2)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h$$

ne seront pas tous nuls. En particulier, pour ces solutions, les déterminants fonctionnels de $f_1, f_2, \ldots, f_h$ par rapport à h quelconques des variables ne seront pas tous nuls, sinon l'expression $df_1\, df_2 \ldots df_h$ aurait manifestement tous ses coefficients nuls (ces coefficients étant ces déterminants fonctionnels eux-mêmes) et il en serait de même de l'expression (31).

D'après cela, si $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ désignent un système arbitraire de valeurs correspondant à une solution générale déterminée, on pourra de (27) tirer h des variables en fonctions holomorphes des autres au voisinage de $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et en portant dans ω nous serons ramené à résoudre une équation aux différentielles totales dont le premier membre sera d'ordre $2m$ ou $2m-1$, la dérivée $\omega^{(2m-2)}$ n'ayant pas tous ses coefficients nuls pour le système de valeurs considéré (x_i^0). On y arrivera par la considération de m systèmes complets successifs pour chacun desquels on déterminera une intégrale holomorphe.

47. Ici on peut donner à ces systèmes complets la forme suivante. Le premier sera équivalent à l'équation

$$\omega^{(2m-2)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h\, df = 0, \tag{32}$$

les variables étant supposées liées par les relations (27). Si f_{h+1} est une intégrale holomorphe ne se réduisant pas à une constante en vertu de (27), le second système complet sera

$$\omega^{(2m-4)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h\, df_{h+1}\, df = 0, \tag{33}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_{h+m-1}\, df = 0,$$

qui donnera une intégrale holomorphe f_{h+m}. Nous aurons ainsi m fonctions holomorphes $f_{h+1}, f_{h+2}, \ldots, f_{h+m}$ indépendantes, même en tenant compte de (27). On pourra de plus s'arranger pour que l'équation à résoudre se mette sous la forme

$$df_{h+m} - \varphi_{h+1}\, df_{h+1} - \ldots - \varphi_{h+m-1}\, df_{h+m-1} = 0, \tag{34}$$

les φ étant aussi holomorphes au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_n^0$. On sera ainsi en mesure de trouver toutes les solutions admettant le point $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ comme point simple.

48. *Solutions singulières.* — Pour avoir les solutions singulières, on ajoutera aux équations (27) celles qu'on obtient en annulant tous les coefficients de l'expression différentielle

$$\omega^{(2m-2)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h. \tag{31}$$

On aura ainsi un nouveau système de relations, et l'on sera en somme ramené à un problème analogue au premier, sauf que l'entier h sera devenu plus grand. Pour ce nouveau problème, nous aurons une nouvelle valeur m' de m, au plus égale à m, et il admettra des solutions générales et des solutions singulières qui seront données par les solutions d'un troisième problème, où h aura encore augmenté. Il est clair que h ne pouvant pas dépasser le nombre $n - 1$, ces opérations auront un terme.

49. *Résolution d'une équation aux différentielles totales au moyen d'un nombre donné d'équations.* — Le nouveau problème que nous nous proposons est le suivant. Étant donnée l'équation aux différentielles totales (26), résoudre cette équation au moyen de r relations finies entre les variables, parmi lesquelles $h < r$ relations données (27).

Nous allons d'abord, à cet effet, démontrer que, *si un système de r relations annule l'expression de Pfaff ω, tous les coefficients de $\omega^{(2r)}$ sont nuls en vertu de ces relations.*

50. Soit, en effet,

$$(35)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

le système de r relations annulant ω; on suppose que les premiers membres vérifient toujours les deux mêmes hypothèses fondamentales. Si alors le déterminant fonctionnel de $f_1, f_2, \ldots, f_r$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_r$ n'est pas nul en vertu de (35), nous pouvons prendre pour nouvelles variables

$$y_1 = f_1, \quad y_2 = f_2, \quad \ldots, \quad y_r = f_r, \quad y_{r+1} = x_{r+1}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n,$$

et, d'après une remarque faite plus haut, si ω se transforme en ϖ, les coefficients de $\omega^{(p)}$ s'annuleront, en vertu de (35), en même temps que ceux de $\varpi^{(p)}$ et réciproquement.

Or, si nous formons l'expression ϖ

$$\varpi = B_1\,dy_1 + B_2\,dy_2 + \ldots + B_r\,dy_r + B_{r+1}\,dy_{r+1} + \ldots + B_n\,dy_n,$$

il faut, par hypothèse, que B_{r+1}, B_{r+2}, ..., B_n s'annulent en même temps que y_1, y_2, ..., y_r. Considérons alors

$$\varpi^{(2r)} = \frac{1}{r!}\varpi.\varpi'^r,$$

et faisons dans les coefficients $y_1 = y_2 = \ldots = y_r = 0$. Les termes de ϖ dont les coefficients ne s'annulent pas ne peuvent être que les termes en dy_1, dy_2, ..., dy_r. De même, si un terme de ϖ' a un coefficient différent de zéro en vertu de (35), il doit contenir une au moins des différentielles dy_1, dy_2, ..., dy_r; sinon ce serait un terme de la forme

$$\frac{\partial B_{r+i}}{\partial y_{r+j}} dy_{r+j}\, dy_{r+i},$$

et la valeur du coefficient de ce terme pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_r = 0$ peut manifestement s'obtenir en faisant d'abord $y_1 = \ldots = y_r = 0$ dans B_{r+i} et en dérivant ensuite par rapport à y_{r+j}, ce qui donne nécessairement zéro.

Si donc on ne conserve dans les $r+1$ facteurs ϖ et ϖ' de $\varpi^{(2r)}$ que les termes à coefficients différents de zéro, chaque terme de chacun de ces facteurs contient une au moins des r différentielles dy_1, dy_2, ..., dy_r; comme il y a plus de facteurs que de différentielles, les coefficients du produit symbolique total seront certainement tous nuls.

Les coefficients de $\omega^{(2r)}$ s'annulant en vertu des expressions (35) en même temps que les coefficients de $\varpi^{(2r)}$, le théorème est démontré.

On démontrerait de la même façon que tous les coefficients de $\omega^{(2r+1)}$ s'annulent.

51. Nous allons encore démontrer un théorème un peu plus général. *Si une expression de Pfaff ω s'annule au moyen de r relations dont h relations données* (27), *tous les coefficients de l'expression*

$$\omega^{(2r-2h)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h \tag{36}$$

s'annulent en vertu de ces r relations.

Si d'abord, en effet, tous les déterminants fonctionnels des premiers membres f_1, f_2, ..., f_h des h relations données par rapport à h quelconques des variables s'annulent en vertu des r relations considérées, le théorème est vrai, car alors l'expression $df_1\, df_2 \ldots df_h$ a tous ses coefficients nuls en vertu des relations considérées, et par suite aussi l'expression (36).

Si ces déterminants fonctionnels ne sont pas tous nuls en vertu des r relations, nous pouvons tirer de (27) h des variables en fonctions holomorphes des $n-h$ autres et porter dans ω. Nous aurons alors une expression ϖ; de plus, les coefficients de $\omega^{(p)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h$ s'annuleront en même temps que ceux de $\varpi^{(p)}$ et réciproquement. Or l'expression ϖ peut s'annuler au moyen de $r-h$ relations entre les variables; par suite, d'après le théorème précédent, tous les coefficients de la dérivée $\varpi^{(2r-2h)}$ s'annulent en vertu de ces $r-h$ relations. Par conséquent, tous les coefficients de (36) s'annulent en vertu des r relations considérées. Il en est de même de tous les coefficients de

$$\omega^{(2r-2h+1)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h.$$

52. Cela étant, arrivons à la solution du problème proposé : *Résoudre le système des équations* (26) *et* (27) *au moyen de $r-h$ relations distinctes de* (27).

On formera l'expression différentielle

$$\omega^{(2r-2h)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h, \tag{36}$$

et l'on égalera tous ses coefficients à zéro. En général, on obtiendra des équations distinctes des équations données, de sorte que le système (27) sera remplacé par un nouveau système de $h' > h$ équations. Si h' est supérieur à r, le problème est impossible. Si non, on formera, pour ce nouveau système, l'expression différentielle analogue à (36) et ainsi de suite. On finira par arriver soit à un système de plus de r relations, auquel cas il y aura impossibilité, soit à un système de $k < r$ relations pour lequel l'expression $\omega^{(2r-2k)}\, df_1\, df_2 \ldots df_k$ aura tous ses coefficients nuls, en vertu de ces k relations. Alors, si m est le plus petit nombre entier tel que $\omega^{(2m)}\, df_1 \ldots df_k$ ait tous ses coefficients nuls en vertu des k relations obtenues, on aura la solution générale du problème par la résolution d'une certaine équation de Pfaff

$$dZ - P_1\, dX_1 - \ldots - P_{m-1}\, dX_{m-1} = 0,$$

où les X, P, Z seront donnés par des systèmes complets successifs. On aura ainsi une infinité de systèmes de m relations à chacun desquels on ajoutera $r-k-m$ équations *quelconques*.

53. Les solutions singulières s'obtiendront en ajoutant aux k relations considérées celles qu'on obtient en annulant tous les coefficients de $\omega^{(2m-2)}\,df_1\,df_2\ldots df_k$. On aura ainsi un nouveau système de relations et l'on sera ramené au problème primitif, mais h aura augmenté. On voit comment on continuera et l'on se rend bien compte que toutes ces opérations auront un terme.

La solution qui vient d'être exposée comprend comme cas particulier celui où il n'y a pas de relation donnée *a priori* entre les variables ($h=0$).

54. *Exemple.* — Prenons l'exemple déjà traité (13)

$$\omega = x_5\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x_1\,dx_4 + x_1\,dx_5.$$

Cherchons à annuler ω par un système de $r=3$ relations dont $h=1$ relation donnée

$$x_4 = 0.$$

Il faudra former ici ($r-h=2$) l'expression $\omega^{\text{IV}}\,dx_4$. Or, en se reportant à la valeur (14) de ω^{IV}, on trouve

$$\omega^{\text{IV}}\,dx_4 = 0.$$

Il y a donc ici des solutions générales. Comme on a

$$\omega''\,dx_4 = -x_5\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 + x_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5,$$

le nombre m est ici égal à 2 et les solutions générales sont celles qui n'annulent pas à la fois x_1 et x_5. En faisant dans (37) $x_4=0$, on trouve

$$\varpi = x_5\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x_1\,dx_5 = x_3\,dx_2 + d(x_1 x_5) = 0.$$

La solution générale du problème sera donc fournie par

$$x_4 = 0, \qquad x_1 x_5 = \varphi(x_2), \qquad x_3 = -\varphi'(x_2).$$

Les solutions singulières doivent comprendre les $h=3$ relations

$$x_1 = x_4 = x_5 = 0;$$

il faut donc annuler les coefficients de $\omega\, dx_1\, dx_4\, dx_5$, puisque $r - h = 3 - 3 = 0$; or on trouve

$$\omega\, dx_1\, dx_4\, dx_5 = -x_3\, dx_1\, dx_2\, dx_4\, dx_5;$$

il faut donc ajouter aux équations (40) l'équation

$$x_3 = 0,$$

ce qui donne plus de trois relations. Il n'y a donc pas de solution singulière.

55. *Autre solution du même problème.* — Les équations qu'il faut ajouter aux équations données (27) dans le cas général, à savoir celles qu'on obtient en annulant les coefficients de l'expression différentielle

$$\omega^{(2r-2h)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h, \tag{36}$$

sont assez compliquées si h est grand, puisqu'elles dépendent des dérivées partielles de h fonctions $f_1, \ldots, f_h$. On peut, *dans un cas très étendu,* leur substituer d'autres équations plus faciles à former.

Remarquons d'abord que toute solution du problème sera une solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = 0, \\ f_1 = 0, \end{array}\right. \tag{37}$$

et par suite, h étant ici égal à 1, devra annuler tous les coefficients de l'expression $\omega^{(2r-2)}\, df_1$. Nous voyons donc déjà qu'on aura à ajouter aux équations (27) celles qu'on obtient en annulant les coefficients des h expressions différentielles

$$\omega^{(2r-2)}\, df_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, h). \tag{38}$$

De même, si h est supérieur à 1, on aura pour une raison analogue à annuler tous les coefficients des expressions différentielles

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^{(2r-3)}\, df_i\, df_j \\ \omega^{(2r-4)}\, df_i\, df_j \end{array}\right. \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h). \tag{39}$$

Ces expressions (38) et (39) contiennent des dérivées de deux seulement au plus des fonctions f. Voici un théorème qui, dans trois cas assez généraux, permet de se borner à la considération d'expressions analogues.

56. Théorème. — *Étant donné un système de h relations*

$$(27)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$$

dont les premiers membres satisfont toujours aux mêmes conditions relatives à leurs déterminants fonctionnels.

Si l'on ne considère que des systèmes de valeurs des variables satisfaisant à (27), n'annulant pas tous les coefficients de l'expression

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h,$$

ni à la fois tous ceux de $\omega^{(r-1)}$ et de $\omega^{(r-2)}$, ils n'annulent pas non plus ceux de l'expression

$$\omega^{(2r-2h-2)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h.$$

De plus dans les mêmes conditions :

1° *Si ces systèmes de valeurs n'annulent pas $\omega^{(2r-1)}$, l'équation*

$$(36)\qquad \omega^{(2r-2h)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h = 0$$

est algébriquement équivalente aux équations

$$(40)\qquad \begin{cases} \omega^{(2r-2)}\, df_i = 0 \\ \omega^{(2r-3)}\, df_i\, df_j = 0 \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h);$$

2° *Si ces systèmes de valeurs n'annulent pas $\omega^{(2r-2)}$, l'équation*

$$(36)\qquad \omega^{(2r-2h)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h = 0$$

est algébriquement équivalente aux équations

$$(41)\qquad \omega^{(2r-4)}\, df_i\, df_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h);$$

3° *Si ces systèmes de valeurs n'annulent pas $\omega^{(2r-2)}$, l'équation*

$$(42)\qquad \omega^{(2r-2h-1)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h = 0$$

est algébriquement équivalente aux équations

$$(43)\qquad \begin{cases} \omega^{(2r-3)}\, df_i = 0 \\ \omega^{(2r-4)}\, df_i\, df_j = 0 \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h).$$

L'entier h est supposé au moins égal à 1 dans le premier et le troisième cas, et au moins égal à 2 dans le second cas. Enfin, *si les coefficients de* (36) *ou* (37) *sont nuls, il en est de même de ceux de* $\omega^{(2r)}$ *dans les trois cas et, en outre, de* $\omega^{(2r-1)}$ *dans le dernier cas.*

Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant :

57. Lemme. — *Étant données une expression différentielle ϖ du second degré et $h+1$ expressions différentielles $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_h$ du premier degré à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:*

1° *Si pour un certain système de valeurs des variables n'annulant pas $\omega\omega_1\ldots\omega_h$, les coefficients de ϖ^r ne sont pas tous nuls, les coefficients de*

$$\varpi^{r-h}\omega\omega_1\ldots\omega_h$$

ne s'annulent pour ce système de valeurs qu'en même temps que ceux des expressions

$$\varpi^{r-1}\omega\omega_i, \quad \varpi^{r-1}\omega_i\omega_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h),$$

et réciproquement;

2° *Dans les mêmes conditions, si les coefficients de $\omega\varpi^{r-1}$ ne sont pas tous nuls, les coefficients de*

$$\varpi^{r-h}\omega\omega_1\ldots\omega_h$$

ne s'annulent qu'en même temps que ceux des expressions

$$\varpi^{r-2}\omega\omega_i\omega_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h);$$

3° *Si les coefficients de $\omega\varpi^{r-1}$ ne sont pas tous nuls, les coefficients de*

$$\varpi^{r-h}\omega_1\omega_2\ldots\omega_h$$

ne s'annulent qu'en même temps que ceux des expressions

$$\varpi^{r-1}\omega_i, \quad \varpi^{r-2}\omega\omega_i\omega_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h).$$

Dans tous les cas, les coefficients de l'expression

$$\varpi^{r-h-1}\omega\omega_1\omega_2\ldots\omega_h$$

ne peuvent jamais s'annuler simultanément.

On peut supposer, sans rien changer aux conditions de l'énoncé, que les coefficients des expressions ϖ, ω, ω_1, ..., ω_h gardent les valeurs constantes qu'ils possèdent pour le système de valeurs considéré des variables. Cela revient à supposer que ω, ω_1, ω_2, ..., ω_h sont des différentielles de formes linéaires en x_1, x_2, ..., x_n.

Cela étant, l'hypothèse faite sur le produit $\omega\omega_1\ldots\omega_h$ exprime que ces $h+1$ formes linéaires sont indépendantes. On peut, d'ailleurs, effectuer sur les h dernières une substitution linéaire quelconque à déterminant différent de zéro, sans rien changer aux conditions de l'énoncé; enfin, on peut de même faire sur les n variables une substitution linéaire quelconque à déterminant différent de zéro, de manière à avoir par exemple

$$\omega_1 = dx_1, \qquad \omega_2 = dx_2, \qquad \ldots, \qquad \omega_h = dx_h, \qquad \omega = dx_n$$

58. Cela étant, l'ensemble des termes de ϖ qui contiennent dx_n est de la forme

$$dx_n\, du,$$

où u est une certaine forme linéaire, pouvant être identiquement nulle, de x_1, x_2, ..., x_{n-1}. Considérons maintenant les termes qui ne contiennent pas dx_n. Si nous désignons

par i, j, ... les indices $1, 2, \ldots, h$;
» λ, μ, ... » $h+1, h+2, \ldots, n-1$,

nous voyons que ϖ se compose, outre $dx_n\, du$, de trois groupes de termes :

1° Des termes de la forme $A_{i,j}\, dx_i\, dx_j$;
2° » $A_{i,\lambda}\, dx_i\, dx_\lambda$;
3° » $A_{\lambda,\mu}\, dx_\lambda\, dx_\mu$.

Supposons que, dans le troisième groupe, le coefficient de

$$dx_{h+1}\, dx_{h+2}$$

soit différent de zéro. Nous ferons alors un changement de variables en prenant

$$x'_{h+1} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{\rho,\, h+2}\, x_\rho,$$

$$A_{h+1,\, h+2}\, x'_{h+2} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{h+1.\, \rho}\, x_\rho.$$

Nous voyons alors que le produit $dx'_{h+1}\, dx'_{h+2}$ contient tous les termes en dx_{h+1} et dx_{h+2} qui se trouvaient dans $\varpi - dx_n\, du$. Donc, en prenant x'_{h+1} et x'_{h+2} au lieu de x_{h+1} et x_{h+2}, $\varpi - dx_n\, du$ ne contient plus de termes en dx'_{h+1} et dx'_{h+2}.

En enlevant $dx'_{h+1}\, dx'_{h+2}$, nous aurons une expression analogue à $n-3$ variables; s'il y a dans cette nouvelle expression des termes du troisième groupe, nous pourrons répéter l'opération précédente jusqu'à ce que tous ces termes soient épuisés. Autrement dit, nous pouvons supposer que les termes du troisième groupe sont

$$dx_{h+1}\, dx_{h+2} + dx_{h+3}\, dx_{h+4} + \ldots + dx_{h+2\alpha-1}\, dx_{h+2\alpha},$$

les termes du premier et du deuxième groupe ne contenant aucune des différentielles dx_{h+1}, dx_{h+2}, $\ldots$, $dx_{h+2\alpha}$.

Prenons maintenant dans le second groupe, s'il existe effectivement, les termes qui contiennent une des différentielles dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_h; supposons, par exemple, que le coefficient de $dx_1\, dx_{h+2\alpha+1}$ soit différent de zéro. Alors nous pourrons prendre, comme tout à l'heure, de nouvelles variables à la place de x_1 et de $x_{h+2\alpha+1}$

$$x'_1 = \sum_{\rho=1}^{\rho=h} A_{\rho,\, h+2\alpha+1}\, x_\rho,$$

$$A_{1,\, h+2\alpha+1}\, x'_{h+2\alpha+1} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} A_{1,\, \rho}\, x_\rho,$$

de manière que dx'_1 et $dx'_{h+2\alpha+1}$ n'entrent dans aucun autre terme du premier et du deuxième groupe que $dx'_1\, dx'_{h+2\alpha+1}$. Finalement, en répétant cette opération autant de fois qu'il sera nécessaire, on mettra les termes du second groupe sous la forme

$$dx_1\, dx_{h+2\alpha+1} + dx_2\, dx_{h+2\alpha+2} + \ldots + dx_\beta\, dx_{h+2\alpha+\beta},$$

les termes du premier groupe ne contenant aucune des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_\beta$.

Enfin, les termes du premier groupe eux-mêmes, s'il y en a, peuvent, par un procédé identique aux précédents, se mettre sous la forme

$$dx_{\beta+1}dx_{\beta+2} + dx_{\beta+3}dx_{\beta+4} + \ldots + dx_{\beta+2\gamma-1}dx_{\beta+2\gamma}.$$

Finalement, en changeant les notations, nous pouvons écrire

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi = {} & dx_1 dx_{h+1} + dx_2 dx_{h+2} + \ldots + dx_\alpha dx_{h+\alpha} \\ & + dx_{\alpha+1} dx_{\alpha+2} + dx_{\alpha+3} dx_{\alpha+4} + \ldots + dx_{\alpha+2\beta-1} dx_{\alpha+2\beta} \\ & + dx_{h+\alpha+1} dx_{h+\alpha+2} + dx_{h+\alpha+3} dx_{h+\alpha+4} + \ldots + dx_{h+\alpha+2\gamma-1} dx_{h+\alpha+2\gamma} \\ & + dx_n du, \end{aligned}\right.$$

où α, β, γ sont des entiers, pouvant être nuls, tels que

$$\alpha + 2\beta \leqq h, \qquad h + \alpha + 2\gamma \leqq n - 1.$$

59. Cela étant, passons à la démonstration du lemme. On peut d'abord ramener les deux premiers cas l'un à l'autre. En effet, si le second cas est démontré, il suffit de supposer que ϖ ne dépende pas de dx_n, de remplacer alors r par $r+1$, h par $h+1$, les h expressions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ devenant $h+1$ expressions $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$, pour retomber sur le premier cas.

Nous n'avons donc que les deux derniers cas à démontrer.

60. Deuxième cas. — L'hypothèse est que $\omega\varpi^{r-1}$ n'a pas tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire que $\varpi - dx_n du$ contient au moins $r-1$ termes; on a donc

$$\alpha + \beta + \gamma \geqq r - 1.$$

On voit d'abord que $\varpi^{r-h-1}\omega\omega_1\ldots\omega_h$ ne peut pas s'annuler, car en enlevant de ϖ les termes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_h, dx_n$, il reste *au moins* $r-1-h$ termes.

Cela étant, si $\varpi^{r-h}\omega\omega_1\ldots\omega_h$ est nulle, cela signifie qu'en enlevant de ϖ les termes en $dx_n, dx_1, dx_2, \ldots, dx_h$ il reste au plus $r-h-1$ termes; mais cela revient à en enlever *au plus h* de $\varpi - dx_n du$ qui en contient *au moins* $r-1$; il faut donc qu'on en enlève *exactement* h et que $\varpi - dx_n du$ en contienne *exactement* $r-1$. On a donc

$$\alpha+\beta+\gamma=r-1$$

et

$$\alpha=h, \qquad \beta=0;$$

et, réciproquement, s'il en est ainsi, $\varpi^{r-h}\omega\omega_1\ldots\omega_h$ est nulle.

Cherchons de même les conditions pour que toutes les expressions $\varpi^{r-2}\omega\omega_i\omega_j$ soient nulles. Il faut, pour cela, qu'en enlevant de ϖ les termes en dx_n, dx_i, dx_j il en reste *au plus* $r-3$; or cela revient à enlever *au plus* deux termes de $\varpi - dx_n du$ qui en contient *au moins* $r-1$; il faut donc que $\varpi - dx_n du$ en contienne exactement $r-1$ et qu'on en enlève *exactement* deux. Cela ayant lieu, quels que soient les indices i et j, il faut que chacune des différentielles dx_1, dx_2, ..., dx_h soit contenue dans un, et un seul, des termes de $\varpi - dx_n du$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\alpha+\beta+\gamma=r-1,$$
$$\alpha=h, \qquad \beta=0;$$

et, réciproquement, s'il en est ainsi, les expressions $\varpi^{r-2}\omega\omega_i\omega_j$ sont toutes nulles.

Si donc

$$\varpi^{r-h}\omega\omega_1\ldots\omega_h$$

s'annule, il en est de même de

$$\varpi^{r-2}\omega\omega_i\omega_j \qquad (i, j=1, 2, \ldots, h)$$

et réciproquement. Le lemme est démontré.

61. Troisième cas. — L'hypothèse est que $\omega\varpi^{r-1}$ n'est pas nulle, c'est la même que dans le cas précédent; on a donc

$$\alpha+\beta+\gamma \geqq r-1,$$

et l'on voit de la même manière que $\varpi^{r-h-1}\omega\omega_1\ldots\omega_h$ ne peut pas être nulle.

Cela étant, si $\varpi^{r-h}\omega_1\omega_2\ldots\omega_h$ est nulle, en posant

$$\varpi=\varpi_1+dx_n du,$$

on voit que

$$\varpi^{r-h} = \varpi_1{}^{r-h} + dx_n du \varpi_1{}^{r-h-1}.$$

On a donc

$$\varpi_1{}^{r-h} dx_1 dx_2 \ldots dx_h = 0,$$
$$du \varpi_1{}^{r-h-1} dx_1 dx_2 \ldots dx_h = 0.$$

La première égalité montre qu'en enlevant de ϖ les termes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_h$ il en doit rester au plus $r-h-1$. On en déduit, comme tout à l'heure, que ϖ_1 contient exactement $r-1$ termes et que chacune des différentielles doit figurer dans un, et un seul, des termes de ϖ_1; on a donc

$$\alpha + \beta + \gamma = r - 1,$$
$$\alpha = h, \qquad \beta = 0.$$

La deuxième égalité s'écrit alors

$$du\, dx_1 dx_2 \ldots dx_h dx_{2h+1} dx_{2h+2} \ldots dx_{2r-2} = 0,$$

ce qui montre que u est une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_h$, $x_{2h+1}, \ldots, x_{2r-2}$. Réciproquement, ces conditions sont suffisantes pour que $\varpi^{r-h} \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h$ soit nulle.

Supposons maintenant que les expressions $\varpi^{r-1} \omega_i$ et $\varpi^{r-2} \omega \omega_i \omega_j$ soient toutes nulles. En considérant ces dernières, on verra, comme tout à l'heure, que l'on doit avoir

$$\alpha + \beta + \gamma = r - 1,$$
$$\alpha = h, \qquad \beta = 0,$$

et que ces conditions sont suffisantes.

En considérant maintenant les premières, on a

$$\varpi^{r-1} \omega_i = \varpi_1{}^{r-1} \omega_i + dx_n du \varpi_1{}^{r-2} \omega_i;$$

le premier terme du second membre est nul, et il reste

$$du \varpi_1{}^{r-2} dx_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$du\, dx_1 dx_2 \ldots dx_h dx_{h+1} \ldots dx_{h+i-1} dx_{h+i+1} \ldots dx_{2h} dx_{2h+1} \ldots dx_{2r-2} = 0.$$

Cela ayant lieu quel que soit l'indice $i = 1, 2, \ldots, h$, il faut et il suffit que u soit une combinaison linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_h, x_{2h+1}, \ldots, x_{2r-2}$.

Il résulte de là que les deux systèmes

$$\varpi^{r-h}\omega_1\omega_2\ldots\omega_h = 0$$

et

$$\varpi^{r-1}\omega_i = \varpi^{r-2}\omega\omega_i\omega_j = 0$$

sont équivalents, ce qu'il fallait démontrer.

62. On voit facilement, de plus, que l'un des deux systèmes entraîne

$$\omega\varpi^r = 0$$

dans les trois cas; en effet, dans les deux derniers cas, ϖ, lorsqu'on y fait $\omega = dx_n = 0$, se compose de $r - 1$ termes et, par suite,

$$dx_n\varpi^r = \omega\varpi^r = 0;$$

dans le premier cas, ϖ est une somme de r termes dont un, et un seul, contient ω, de sorte que $\omega\varpi^r$ est encore nul. On voit même que, dans le second cas, toutes les expressions $\varpi^{r-1}\omega\omega_i$ ont leurs coefficients nuls.

Le lemme n'a naturellement de sens que si h est supérieur ou égal à 1 dans le premier et le troisième cas, supérieur ou égal à 2 dans le second.

63. Revenons maintenant au théorème que nous voulions démontrer. Il se déduit immédiatement du lemme précédent en prenant pour ϖ l'expression dérivée ω' et pour ω_i la différentielle df_i, et en ne l'appliquant qu'aux valeurs numériques des variables qui satisfont à (27).

64. Nous allons maintenant appliquer ce théorème *à la résolution de l'équation de Pfaff au moyen de r relations dont h relations données* (27) *en supposant que ces r relations n'annulent pas simultanément les coefficients de* $\omega^{(2r-1)}$ *et de* $\omega^{(2r-2)}$.

Nous allons examiner successivement le cas où l'on ne considère que des solutions n'annulant pas $\omega^{(2r-1)}$ et où l'on ne considère que des solutions n'annulant pas $\omega^{(2r-2)}$.

65. Premier cas. — *Annuler une expression de Pfaff ω au moyen de r relations n'annulant pas $\omega^{(2r-1)}$, parmi lesquelles h relations données* (27).

Supposons d'abord que h soit au moins égal à 1, c'est-à-dire que l'on se donne effectivement *a priori* une ou plusieurs relations entre les variables. D'après la théorie générale, il faudra adjoindre à ces relations celles qu'on obtient en annulant tous les coefficients des expressions

$$\omega^{(2r-2)}\, df_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

et, si h est supérieur à 1, tous ceux des expressions

$$\omega^{(2r-3)}\, df_i\, df_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h),$$

puisqu'on doit annuler ω au moyen de $f_i = 0$ et de $r-1$ autres relations, et aussi au moyen de

$$f_i = f_j = 0$$

et de $r-2$ autres relations. Si les relations obtenues ainsi sont des conséquences de (27), le système sera dit *en involution*. Sinon, on aura un nouveau système de $h' > h$ relations qu'on mettra sous une forme satisfaisant aux conditions relatives aux déterminants fonctionnels des premiers membres. On procédera sur ce nouveau système comme sur le premier et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un système en involution.

66. Le problème est donc ramené au cas où le système (27) est en involution. Si alors ce système contient plus de r relations indépendantes, le problème est impossible.

Supposons donc que h soit inférieur ou égal à r.

Si l'on avait d'abord

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h = 0$$

en vertu de (27), comme $df_1\, df_2 \ldots df_h$ n'est pas nul, les équations (27) constitueraient une solution de l'équation de Pfaff; si donc h était inférieur à r, les coefficients de $\omega^{(2h)}$ et, à plus forte raison, de $\omega^{(2r-2)}$ et aussi de $\omega^{(2r-1)}$ seraient tous nuls en vertu de (27), ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur $\omega^{(2r-1)}$. Donc, dans ce cas, h serait égal à r et les équations (27) constitueraient l'unique solution du problème.

Réciproquement, si le système (27) en involution est formé de r relations, on a

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_r = 0,$$

comme on le voit en se reportant au lemme démontré précédemment, et les équations (27) constituent une solution.

Supposons donc maintenant que h soit inférieur à r; alors

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h$$

n'a pas tous ses coefficients nuls en vertu de (27); par suite, on a, toujours en vertu de (27),

$$\omega^{(2r-2h)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h = 0,$$

sans avoir

$$\omega^{(2r-2h-2)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h = 0.$$

67. On aura les *solutions générales* en cherchant une intégrale f_{h+1} non constante du système complet

$$\omega^{(2r-2h-2)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h\, df = 0,$$

c'est-à-dire, d'après le théorème du n° 56, du système équivalent

$$(45)\qquad \left\{\begin{array}{r} \omega^{(2r-2)}\, df = 0,\\ \omega^{(2r-3)}\, df_1\, df = \omega^{(2r-3)}\, df_2\, df = \ldots = \omega^{(2r-3)}\, df_h\, df = 0; \end{array}\right.$$

puis une intégrale f_{h+2} indépendante de f_{h+1} du système complet

$$(46)\qquad \left\{\begin{array}{r} \omega^{(2r-2)}\, df = 0,\\ \omega^{(2r-3)}\, df_1\, df = \omega^{(2r-3)}\, df_2\, df = \ldots = \omega^{(2r-3)}\, df_{h+1}\, df = 0, \end{array}\right.$$

et ainsi de suite, jusqu'à une intégrale f_r indépendante de f_{h+1}, $f_{h+2}, \ldots, f_{r-1}$ du système complet

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{r} \omega^{(2r-2)}\, df = 0,\\ \omega^{(2r-3)}\, df_1\, df = \omega^{(2r-3)}\, df_2\, df = \ldots = \omega^{(2r-3)}\, df_{r-1}\, df = 0. \end{array}\right.$$

Alors on aura, en tenant compte de (27), et des relations dérivées en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$,

$$\omega = \varphi_{h+1}\, df_{h+1} + \varphi_{h+2}\, df_{h+2} + \ldots + \varphi_r\, df_r,$$

et les solutions générales s'en déduiront comme il a déjà été dit.

En somme, le premier système complet (45) admet $2r - 2h - 1$ intégrales indépendantes en tenant compte de (27), le second (46) admet $2r - 2h - 3$ intégrales indépendantes de f_{h+1} et enfin le dernier admet une intégrale indépendante de $f_{h+1}, f_{h+2}, \ldots, f_{r-1}$, toujours en tenant compte de (27).

On a donc à faire $r - h$ opérations d'ordres

$$2r - 2h - 1, \quad 2r - 2h - 3, \quad \ldots, \quad 3, \quad 1.$$

Mais il ne faut pas oublier que cette méthode n'est valable qu'à la condition de ne considérer que des solutions n'annulant pas tous les coefficients de $\omega^{(2r-1)}$.

68. Les *solutions singulières* du système (27) s'obtiennent en égalant à zéro les coefficients de

$$\omega^{(2r-2h-2)}\, df_1\, df_2 \ldots df_h,$$

c'est-à-dire, toujours en vertu du même théorème, en annulant les coefficients de

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h.$$

On égalera donc à zéro tous les déterminants de degré $h+1$ de la matrice

$$(48) \qquad \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_h}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_h}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_h}{\partial x_n} \end{Vmatrix}.$$

Deux cas sont à distinguer. Si le système de relations ainsi obtenu n'annule pas

$$df_1\, df_2 \ldots df_h,$$

c'est-à-dire *n'annule pas tous les déterminants fonctionnels des f par rapport à h des variables, ce système constitue une solution de l'équation de Pfaff*. Si d'ailleurs il n'annule pas $\omega^{(2r-1)}$, il contient au moins r relations indépendantes, sinon $\omega^{(2r-2)}$ et $\omega^{(2r-1)}$ seraient nulles; s'il en contient exactement r, il donne la solution singulière du problème; s'il en contient plus de r, il n'y a pas de solution singulière.

Si, au contraire, l'équation

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h = 0$$

entraîne

$$df_1\, df_2 \ldots df_h = 0,$$

on ne peut plus rien dire; on a un nouveau système de $h' > h$ relations qu'on traite comme on a traité le système primitif, qui peut être incompatible, qui peut admettre des solutions générales et des solutions singulières.

69. Nous avons supposé jusqu'à présent qu'on se donnait *a priori* au moins une relation entre les variables. Dans le cas contraire, il s'agit d'annuler ω au moyen de r relations inconnues, n'annulant pas $\omega^{(2r-1)}$. On égalera pour cela à zéro les coefficients de $\omega^{(2r)}$. Si $\omega^{(2r)}$ n'est pas identiquement nulle, on retombe ainsi sur le cas précédent. Si $\omega^{(2r)}$ est identiquement nulle, ω est une expression de Pfaff de classe $2r$, puisque $\omega^{(2r-1)}$ n'est pas identiquement nulle par hypothèse. Ici les solutions singulières s'obtiendront en annulant $\omega^{(2r-2)}$, ou, comme on ne veut pas que $\omega^{(2r-1)}$ s'annule, *en égalant à zéro tous les coefficients de* ω.

Quant aux solutions générales, elles sont données par la réduction de l'expression ω à sa forme canonique. On aura à chercher une intégrale f_1 du système complet

$$\omega^{(2r-2)}\, df = 0,$$

puis une intégrale f_2 indépendante de f_1 du système complet

$$\omega^{(2r-2)}\, df = 0,$$
$$\omega^{(2r-3)}\, df_1\, df = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à une intégrale f_r indépendante de $f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ du système complet

$$\omega^{(2r-2)}\, df = 0,$$
$$\omega^{(2r-3)}\, df_1\, df = \omega^{(2r-3)}\, df_2\, df = \ldots = \omega^{(2r-3)}\, df_{r-1}\, df = 0,$$

et l'on aura alors

$$\omega = \varphi_1\, df_1 + \varphi_2\, df_2 + \ldots + \varphi_r\, df_r.$$

70. Si, en particulier, le nombre des variables est égal à la classe $2r$, les expressions $\omega^{(2r-2)}\,df$, $\omega^{(2r-3)}\,df_i\,df$ sont de degré $2r$, de sorte que chacune d'elles fournit une équation du système complet. Les systèmes complets successifs sont donc formés successivement de 1, 2, ..., r équations. *Dans ce cas particulier*, la méthode est due à Clebsch; d'après les notations de Clebsch, on a

$$\omega^{(2r-2)}\,df = (f)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{2r},$$
$$\omega^{(2r-3)}\,df\,d\varphi = (f, \varphi)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{2r}.$$

Dans le cas où le nombre des variables est supérieur à la classe, la méthode est une généralisation naturelle de celle de Clebsch; pratiquement, pour écrire les équations du $(h+1)^{\text{ième}}$ système complet, on égalera à zéro dans $\omega^{(2r-2)}\,df$ les coefficients des monomes

$$dx_1\,dx_2\ldots dx_{2r-1}\,dx_{2r-1+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2r+1),$$

en supposant que le terme en $dx_1\,dx_2\ldots dx_{2r-1}$ dans $\omega^{(2r-2)}$ a un coefficient différent de zéro; on aura ainsi $n-2r+1$ équations indépendantes; puis dans chacune des expressions $\omega^{(2r-3)}\,df_i\,df$, on égalera à zéro le coefficient d'un des monomes différentiels, de manière à obtenir ainsi h nouvelles équations indépendantes des premières. Ces $n-2r+h+1$ équations forment le système complet qui doit bien effectivement avoir $2r-h-1$ intégrales indépendantes.

71. Deuxième cas. — *Annuler une expression de Pfaff* ω *au moyen de* r *relations n'annulant pas tous les coefficients de* $\omega^{(2r-2)}$, *parmi lesquelles* h *relations données* (27).

Supposons d'abord que h soit au moins égal à 1, c'est-à-dire que l'on se donne effectivement *a priori* une ou plusieurs relations entre les variables. Il faudra adjoindre à ces relations celles qu'on obtient en annulant tous les coefficients de l'expression

$$\omega^{(2r-2)}\,df_1$$

si h est égal à 1, des expressions

$$(41) \qquad \omega^{(2r-4)}\,df_i\,df_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h)$$

si h est supérieur à 1. Si les relations obtenues ainsi ne sont pas des conséquences de (27), on aura un nouveau système sur lequel on répètera la même opération, jusqu'à ce qu'on arrive à un système en *involution*, c'est-à-dire tel que les coefficients de (41) s'annulent tous en vertu de ce système.

72. Supposons donc que le système (27) soit en involution, h étant au plus égal à r, sans quoi il y aurait impossibilité. On montrera, comme dans le premier cas, que les coefficients de

$$\omega \, df_1 \, df_2 \ldots df_h$$

ne peuvent être tous nuls que si le système (27) constitue une solution de l'équation de Pfaff, et qu'alors h doit être égal à r; et, réciproquement, un système en involution de r équations indépendantes constitue une solution de l'équation de Pfaff.

Si h est inférieur à r, on aura les *solutions générales* en cherchant une intégrale f_{h+1}, non constante en vertu de (27), du système complet

$$\omega^{(2r-4)} df_1 \, df = \omega^{(2r-4)} df_2 \, df = \ldots = \omega^{(2r-4)} df_h \, df = 0, \tag{49}$$

puis une intégrale f_{h+2}, indépendante de f_{h+1} en vertu de (27), du système complet

$$\omega^{(2r-4)} df_1 \, df = \omega^{(2r-4)} df_2 \, df = \ldots = \omega^{(2r-4)} df_{h+1} \, df = 0, \tag{50}$$

et ainsi de suite, jusqu'à une intégrale f_r indépendante de f_{h+1}, f_{h+2}, ..., f_{r-1}, du système complet

$$\omega^{(2r-4)} df_1 \, df = \ldots = \omega^{(2r-4)} df_{r-1} \, df = 0. \tag{51}$$

Alors, le système obtenu en joignant à (27) les équations

$$f_{h+1} = a_{h+1}, \qquad f_{h+2} = a_{h+2}, \qquad \ldots, \qquad f_r = a_r,$$

est un système en involution de r équations; il constitue donc une solution de l'équation de Pfaff qui, par suite, peut se mettre sous la forme

$$\varphi_{h+1} \, df_{h+1} + \varphi_{h+2} \, df_{h+2} + \ldots + \varphi_r \, df_r = 0.$$

73. Ce procédé peut s'appliquer à toutes les solutions qui n'annulent pas tous les coefficients de $\omega^{(2r-2)}$. Pratiquement, on l'appli-

quera seulement à celles qui annulent simultanément tous les coefficients de $\omega^{(2r-1)}$, puisque, dans le cas contraire, la méthode exposée précédemment est plus simple. Mais il se peut qu'une simplification soit possible dans la méthode générale. Supposons que les relations (27) d'un système en involution annulent tous les coefficients des expressions

$$\omega^{(2r-3)} df_i \qquad (i=1, 2, \ldots, h);$$

alors, d'après le théorème du n° 56, comme il ne s'agit naturellement que des systèmes de moins de r relations, les coefficients de

$$\omega \, df_1 \, df_2 \ldots df_h$$

ne sont pas tous nuls et, par suite, les coefficients de

$$\omega^{(2r-2h-1)} df_1 \, df_2 \ldots df_h$$

sont tous nuls; autrement dit, l'*expression de Pfaff* ω, *lorsqu'on y tient compte des relations* (27) *entre les variables et des relations dérivées entre les différentielles, est de classe* $2r-2h-1$.

Si h est égal à $r-1$, cela signifie que ω est une différentielle exacte et, *par une quadrature*, on a

$$\omega = df_r,$$

ce qui donne toutes les solutions du problème.

Si h est inférieur à $r-1$, on réduira ω à sa forme canonique en cherchant une intégrale du système complet

$$\omega^{(2r-2h-3)} df_1 \, df_2 \ldots df_h \, df = 0,$$

c'est-à-dire du système complet

$$(52) \qquad \begin{cases} \omega^{(2r-3)} df = 0, \\ \omega^{(2r-4)} df_1 \, df = \omega^{(2r-4)} df_2 \, df = \ldots = \omega^{(2r-4)} df_h \, df = 0, \end{cases}$$

système complet qui lui est équivalent puisqu'on ne peut pas avoir

$$\omega \, df_1 \, df_2 \ldots df_h \, df = 0,$$

$h+1$ étant inférieur à r. Si h est égal à $r-2$, ω se réduira à une différentielle exacte, en tenant compte de (27) et des relations dérivées entre les différentielles, et aussi de

$$f_{h+1} = a, \qquad df_{h+1} = 0.$$

On aura donc, par une quadrature,

$$\omega = df_r + \varphi_{r-1}\, df_{r-1}.$$

Dans le cas général, on aura à chercher $r - h - 1$ intégrales successives de $r - h - 1$ systèmes complets, le dernier étant

$$(53)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \omega^{(2r-3)}\, df = 0, \\ \omega^{(2r-4)}\, df_1\, df = \omega^{(2r-4)}\, df_2\, df = \ldots = \omega^{(2r-4)}\, df_{r-2}\, df = 0, \end{array} \right.$$

et, en tirant de (27) et des équations

$$f_{h+1} = a_{h+1}, \qquad \ldots, \qquad f_{r-1} = a_{r-1},$$

$r - 1$ des variables en fonction des $n - r + 1$ autres, on aura une expression de Pfaff différentielle exacte; de sorte que, par une quadrature, on obtiendra

$$\omega = df_r + \varphi_{h+1}\, df_{h+1} + \ldots + \varphi_{r-1}\, df_{r-1}.$$

En somme, les opérations à faire sont d'ordre

$$2r - 2h - 2, \quad 2r - 2h - 4, \quad \ldots, \quad 6, 4, 2, 0,$$

une opération d'ordre 0 étant une quadrature.

74. Les *solutions singulières* s'obtiennent, comme précédemment, en annulant les coefficients de

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h.$$

Si les coefficients de l'expression

$$df_1\, df_2 \ldots df_h$$

ne s'annulent pas en même temps, les relations obtenues, si jointes à (27) elles donnent r relations indépendantes, constituent l'intégrale singulière; si elles donnent plus de r relations, il n'y a pas d'intégrale singulière.

Si les coefficients de

$$df_1\, df_2 \ldots df_h$$

étaient tous nuls, on aurait un nouveau système de plus de h relations sur lequel on procéderait comme sur le système donné (27), et ainsi de suite.

75. Dans le cas où l'on ne donne pas de relations *a priori* entre les variables, il suffit de chercher les solutions qui, n'annulant pas tous les coefficients de $\omega^{(2r-2)}$, annulent tous ceux de $\omega^{(2r-1)}$. Alors, si les coefficients de $\omega^{(2r-1)}$ ne sont pas tous identiquement nuls, on a un certain nombre de relations entre les variables et l'on retombe sur l'hypothèse écartée. Si les coefficients de $\omega^{(2r-1)}$ sont tous identiquement nuls, ω est une expression de Pfaff de classe $2r-1$. Les solutions singulières, ici, n'existent pas, puisqu'on s'astreint à ne considérer que des solutions n'annulant pas tous les coefficients de $\omega^{(2r-2)}$.

La recherche des solutions générales revient à la réduction de ω à sa forme canonique. D'après ce qui précède, on cherchera une intégrale f_1 du système complet

$$\omega^{(r-3)}\, df = 0,$$

puis une intégrale f_2 du système complet

$$\omega^{(2r-3)}\, df = \omega^{(2r-4)}\, df_1\, df = 0,$$

et ainsi de suite, jusqu'à une intégrale f_{r-1} du système complet

$$\omega^{(2r-3)}\, df = \omega^{(2r-4)}\, df_1\, df = \ldots = \omega^{(2r-4)}\, df_{r-2}\, df = 0;$$

alors, en tirant de

$$f_1 = a_1, \qquad f_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad f_{r-1} = a_{r-1},$$

$r-1$ des variables en fonction des $n-r+1$ autres et portant dans ω, cette expression devient une différentielle exacte ; on achève donc par une quadrature la réduction :

$$\omega = df_r + \varphi_1\, df_1 + \varphi_2\, df_2 + \ldots + \varphi_{r-1}\, df_{r-1}.$$

Pratiquement, le système complet qui donne f_h admet $2r-h-1$

intégrales indépendantes; il est donc formé de $n-2r+h+1$ équations linéairement indépendantes.

On les obtiendra en égalant à zéro les coefficients des $n-2r+2$ monomes différentiels

$$dx_1\,dx_2\ldots dx_{2r-2}\,dx_i \qquad (i=2r-1,\ 2r,\ \ldots,\ n),$$

en supposant que le coefficient de $dx_1\,dx_2\ldots dx_{2r-2}$ n'est pas nul dans $\omega^{(2r-3)}$; on aura ainsi $n-2r+2$ équations donnant

$$\frac{\partial f}{\partial x_{2r-1}},\quad \frac{\partial f}{\partial x_{2r}},\quad \ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial f}{\partial x_{2r-2}}.$$

On aura les $h-1$ équations restantes en annulant, dans chacune des expressions

$$\omega^{(2r-4)}\,df_1\,df,\quad \ldots,\quad \omega^{(2r-4)}\,df_{h-1}\,df,$$

le coefficient d'un des monomes différentiels, de manière à obtenir des équations indépendantes entre elles et indépendantes des $n-2r+2$ premières.

Si n est égal à $2r-1$, les équations sont formées d'elles-mêmes, les expressions

$$\omega^{(2r-3)}\,df,\quad \omega^{(2r-4)}\,df_1\,df,\quad \ldots$$

étant de degré $2r-1$.

Cette méthode constitue la généralisation, pour les expressions de classe impaire, de la seconde méthode de Clebsch qui n'était connue que pour les expressions de classe $2r$ à $2r$ variables.

76. *Exemple.* — Considérons l'expression de Pfaff (Forsyth)

$$\omega = x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x_4\,dx_3 + x_5\,dx_4 + x_6\,dx_5 + x_1\,dx_6.$$

On a ici

$$\omega^{\text{v}} = 0,$$

$$\begin{aligned}\omega^{\text{iv}} = {} & (x_2+x_4+x_6)(dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5 + dx_3\,dx_4\,dx_5\,dx_6\,dx_1 + dx_5\,dx_6\,dx_1\,dx_2\,dx_3)\\ & + (x_1+x_3+x_5)(dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5\,dx_6 + dx_4\,dx_5\,dx_6\,dx_1\,dx_2 + dx_6\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4).\end{aligned}$$

L'expression ω est donc de cinquième classe. Pour faire la réduction, calculons les expressions $\omega''' df$, $\omega'' df\, d\varphi$. On a

$$\omega''' df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_5}\right)(dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 + dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 dx_1 + \ldots)$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_4}+\frac{\partial f}{\partial x_6}\right)(dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 + dx_4 dx_5 dx_6 dx_1 dx_2 + \ldots);$$

puis, en tenant compte de ce que les coefficients de $\omega''' df$, $\omega''' d\varphi$, doivent être nuls, on a

$$\begin{aligned}\omega'' df\, d\varphi = {} & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial \varphi}{\partial x_5}-\frac{\partial f}{\partial x_5}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\right)\\ & \times [(x_1+x_3+x_5)\, dx_4\, dx_5\, dx_6\, dx_1\, dx_2\\ & \quad + (x_2+x_4+x_6)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\, dx_5]\\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}-\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_5}\frac{\partial \varphi}{\partial x_6}-\frac{\partial f}{\partial x_6}\frac{\partial \varphi}{\partial x_5}\right)\\ & \times [(x_1+x_3+x_5)\, dx_2\, dx_3\, dx_4\, dx_5\, dx_6\\ & \quad + (x_2+x_4+x_6)\, dx_5\, dx_6\, dx_1\, dx_2\, dx_3]\\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}-\frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_6}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_6}\right)\\ & \times [(x_1+x_3+x_5)\, dx_6\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4\\ & \quad + (x_2+x_4+x_6)\, dx_3\, dx_4\, dx_5\, dx_6\, dx_1].\end{aligned}$$

Le premier système complet est donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_3}+\frac{\partial f}{\partial x_5}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_4}+\frac{\partial f}{\partial x_6}=0.$$

Soit $f_1 = x_1 - x_3$ une intégrale de ce système complet; l'autre s'obtient en ajoutant aux équations précédentes

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\frac{\partial f}{\partial x_5}-\frac{\partial f_1}{\partial x_5}\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=0.$$

Une intégrale de ce second système est, par exemple,

$$f_2 = x_1 - x_5.$$

Posons

$$f_1 = x_1 - x_3 = a_1, \qquad f_2 = x_1 - x_5 = a_2,$$

et tirons x_3 et x_5 de ces équations; nous obtenons

$$\omega = x_2\,dx_1 + (x_1 - a_1)\,dx_2 + x_4\,dx_1 + (x_1 - a_2)\,dx_4 + x_6\,dx_1 + x_1\,dx_6,$$

ou

$$\omega = d(x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_6 - a_1x_2 - a_2x_4) = d(x_2x_3 + x_4x_5 + x_6x_1),$$

et, en ne tenant plus compte de

$$f_1 = a_1, \qquad f_2 = a_2,$$

on obtient

$$\omega = d(x_2x_3 + x_4x_5 + x_6x_1) + (x_2 - x_4)\,d(x_1 - x_3) + (x_4 - x_6)\,d(x_1 - x_5).$$

77. *Remarque.* — On voit quelles simplifications de calcul introduit cette méthode de réduction des expressions de Pfaff sur la méthode d'abord indiquée. Précédemment, chaque fonction dont la différentielle entrait dans la forme réduite était donnée par un système complet dont chaque équation contenait simultanément les dérivées partielles de toutes les fonctions précédemment trouvées; maintenant les dérivées partielles d'une quelconque des fonctions déjà trouvées n'entrent plus que dans une seule équation du système, et cette équation n'en contient pas d'autres.

V. — Équations aux dérivées partielles du premier ordre.

78. Étant données n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et une fonction inconnue z de ces variables, considérons un système de h équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \\ f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \end{cases}$$

Intégrer ce système, c'est, d'après la notion généralisée due à M. Lie, trouver $2n+1$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ fonctions de n paramètres et satisfaisant identiquement au système

$$(2)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \end{cases}$$

et à l'équation aux différentielles totales

$$(3)\qquad \omega = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n = 0;$$

ou encore *c'est satisfaire aux équations* (2) *et* (3) *par un système de* $n+1$ *relations distinctes entre* $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$.

Nous sommes ainsi, par ce dernier énoncé, ramenés au problème traité en dernier lieu : Annuler l'expression de Pfaff ω par un système de $r = n+1$ relations entre les $2n+1$ variables, parmi lesquelles h relations données (2).

79. *Multiplicités.* — Avant d'appliquer ici les principes du Chapitre précédent, nous allons définir des expressions d'origine géométrique dont nous nous servirons dans la suite.

Un système de valeurs $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ sera dit un *élément*.

Un système quelconque de relations entre les x, z et les p sera dit définir une *multiplicité* si ce système entraîne comme conséquence l'équation aux dérivées totales (3). Nous avons vu comment on pouvait trouver toutes les multiplicités. Si la multiplicité est définie par r relations, elle sera dite à $n-r+1$ dimensions. Tous les systèmes de valeurs des variables qui satisfont aux équations de la multiplicité définiront des éléments de la multiplicité. Les éléments d'une multiplicité à $n-r+1$ dimensions dépendent alors de $n-r+1$ paramètres. Une multiplicité à s dimensions se notera par le symbole M_s.

Une multiplicité ne peut pas être à plus de n dimensions, car il faut au moins $n+1$ relations pour entraîner l'équation (3). Un élément est encore une multiplicité M_s.

Un élément est dit élément *simple* d'une multiplicité M_s si, au voisinage de cet élément, on peut exprimer $2n-s+1$ des variables en fonctions holomorphes des h autres. Nous avons (formule 6 du Chapitre précédent) déterminé toutes les multiplicités M_s qui admettent un élément donné comme élément simple.

Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles (2), toute multiplicité dont tous les éléments satisfont aux relations (2) sera dite une *multiplicité intégrale*. Intégrer le système (2), c'est donc trouver toutes les multiplicités intégrales M_n à n dimensions.

80. *Application des théorèmes généraux. — Crochet de deux fonctions.* — D'après la méthode exposée dans le Chapitre précédent, voici comment on procédera pour intégrer le système (2).

Le nombre que nous avons désigné par r est ici égal à $n+1$. La dérivée $(2r-2)^{\text{ième}}$ de ω est ici

$$\begin{aligned}\omega^{(2r-2)}=\omega^{(2n)}&=(dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n)(dx_1\,dp_1+\ldots+dx_n\,dp_n)^n\\&=dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n.\end{aligned}$$

Aucune multiplicité intégrale ne peut donc annuler les coefficients de cette dérivée $\omega^{(2n)}$. Par suite, nous pouvons sûrement appliquer la méthode exposée à la fin du Chapitre précédent.

Nous avons donc à former, f et φ désignant deux quelconques des premiers membres du système (2), l'expression différentielle

$$\omega^{(2r-4)}\,df\,d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\omega^{(2n-2)}\,df\,d\varphi=\omega\omega'^{n-1}\,df\,d\varphi,$$

et à égaler tous ses coefficients à zéro. Or cette expression différentielle à $n+1$ variables est de degré $2n+1$; elle a donc *un seul* coefficient. Si donc nous posons

$$\omega^{(2n-2)}\,df\,d\varphi=(f,\varphi)\,dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n, \tag{4}$$

l'expression (f,φ) qu'on appelle le *crochet* des deux fonctions f et φ, est une forme bilinéaire des dérivées partielles de f et de φ, et les équations à ajouter aux équations (2) sont

$$(f_i,f_j)=0 \qquad (i,j=1,2,\ldots,h). \tag{5}$$

81. Il est facile de former explicitement le crochet des deux fonc-

tions f et φ. L'expression différentielle (4) ne change pas, en effet, si l'on remplace df et $d\varphi$ respectivement par

$$d'f = df - \frac{\partial f}{\partial z}\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial p_1}dp_1 + \ldots$$

et

$$d'\varphi = d\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\omega = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}dp_1 + \ldots,$$

et cela en vertu de la présence du facteur ω dans l'expression différentielle (4). On a donc

$$\omega^{(2n-2)}\,df\,d\varphi = \omega\,\omega'^{n-1}\,d'f\,d'\varphi,$$

et dans le second membre la différentielle dz n'entre plus que dans ω. Par suite, le coefficient de $dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n$ dans (4) n'est autre que le coefficient de $dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n$ dans l'expression $\omega'^{n-1}\,d'f\,d'\varphi$. On a donc encore

$$(f,\varphi)\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n = \omega'^{n-1}\,d'f\,d'\varphi, \tag{6}$$

et, en remplaçant ω'^{n-1} par sa valeur

$$\omega'^{n-1} = \Sigma\,dx_1\,dp_1\,dx_2\,dp_2\ldots dx_{n-1}\,dp_{n-1},$$

le signe Σ étant étendu à toutes les combinaisons $n-1$ à $n-1$ des indices 1, 2, ..., n, on obtient

$$(f,\varphi) = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

le signe Σ étant étendu à tous les indices 1, 2, ..., n. Nous poserons, conformément à la tradition,

$$(f,\varphi) = \sum_{i=1}^{i=2n}\left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]. \tag{7}$$

82. Le crochet de deux fonctions jouit des propriétés suivantes. On a

$$(f,\varphi) = -(\varphi,f).$$

De plus, si f et φ dépendent des variables par l'intermédiaire d'un certain nombre de fonctions $u, v, w, \ldots$, on a

$$(8) \quad (f, \varphi) = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}(u, v) + \frac{D(f, \varphi)}{D(u, w)}(u, w) + \ldots + \frac{D(f, \varphi)}{D(v, w)}(v, w) + \ldots.$$

Cela résulte en effet de l'identité

$$df\, d\varphi = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} du\, dv + \frac{D(f, \varphi)}{D(u, w)} du\, dw + \ldots + \frac{D(f, \varphi)}{D(v, w)} dv\, dw + \ldots,$$

qui, par multiplication de ses deux membres par $\omega^{(2n-2)}$, donne l'identité (8).

83. *Systèmes en involution.* — Ces propriétés étant établies, revenons au système (2). Nous lui adjoindrons toutes les équations (5), ce qui donnera en général un nouveau système. Nous procéderons sur ce nouveau système comme sur le premier et ainsi de suite. Nous finirons par arriver ainsi soit à un système de plus de $n+1$ équations, auquel cas il y aura impossibilité, soit à un système tel que les crochets de deux quelconques des premiers membres de ce système soient tous nuls en vertu des équations de ce système. Nous dirons alors que ce système est *en involution*.

Un système en involution est donc un système de $h \leqq n+1$ équations (2) *sur les premiers membres desquelles on suppose :*

1° *Qu'ils sont holomorphes au voisinage d'un élément arbitraire* (x_i^0, z^0, p_i^0) *satisfaisant au système ;*

2° *Que les déterminants fonctionnels de ces h premiers membres par rapport à h quelconques des variables ne sont pas tous nuls pour le même élément ;*

3° *Que les crochets de deux quelconques de ces h premiers membres sont nuls en vertu des équations du système.*

Si h est égal à 1, cette dernière condition est naturellement à laisser de côté ; dans le cas général, tous les coefficients de $\omega^{(2r-2)}\, df_1$ doivent être nuls ; ici ils le sont toujours, $\omega^{(2r-2)}\, df_1$ étant de degré $n+2$.

D'après ce qui précède, on peut toujours ramener l'intégration d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à celle d'un système en involution.

84. *Intégrale générale d'un système en involution.* — Soit à intégrer un système en involution de h équations (2). D'après la théorie générale, on a à considérer un certain nombre de systèmes complets successifs pour chacun desquels il suffit de trouver une intégrale. Le premier de ces systèmes complets est donné par les équations

$$\omega^{(2n-4)}\,df_1\,df = \omega^{(2n-4)}\,df_2\,df = \ldots = \omega^{(2n-4)}\,df_h\,df = 0,$$

c'est-à-dire ici

$$(9)\qquad (f_1, f) = 0, \qquad (f_2, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (f_h, f) = 0.$$

Soit A_1 une intégrale particulière, ne se réduisant pas à une constante en vertu de (2), de ce système complet.

On considérera le second système complet

$$(10)\quad (f_1, f) = 0, \qquad (f_2, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (f_h, f) = 0, \qquad (A_1, f) = 0,$$

et l'on cherchera une intégrale A_2 ne se réduisant pas à une fonction de A_1 en vertu de (2), de ce second système. On aura ainsi $n - h$ systèmes complets successifs qui donneront respectivement $n - h$ fonctions A_1, A_2, ..., A_{n-h} indépendantes même en tenant compte de (2), et enfin un dernier système complet

$$(11)\qquad \begin{cases} (f_1, f) = 0, & \ldots, & (f_h, f) = 0, \\ (A_1, f) = 0, & \ldots, & (A_{n-h}, f) = 0, \end{cases}$$

qui admettra une intégrale et une seule indépendante de A_1, A_2, ..., A_{n-h}, soit C.

L'équation à résoudre pourra alors se mettre sous la forme

$$(12)\qquad dC - B_1\,dA_1 - B_2\,dA_2 - \ldots - B_{n-h}\,dA_{n-h} = 0,$$

où les B sont $n - h$ fonctions qui se déterminent par des différentiations. De plus, d'après la théorie générale, si l'on considère un élément arbitraire (x_i^0, z^0, p_i^0) satisfaisant au système (2), on pourra toujours choisir les intégrales A_1, A_2, ..., A_{n-h}, C, de telle manière que les $2n - 2h + 1$ fonctions A_1, ..., A_{n-h}, C, B_1, ..., B_{n-h} soient holomorphes au voisinage de cet élément. La multiplicité intégrale M_n la plus générale du système (2) admettant cet élément comme élément simple, s'obtiendra en ajoutant aux équations (2) $n-h+1$ relations entre les A, les B et C, relations qui pourront être résolues par rapport à $n-h+1$ de ces quantités, les seconds membres étant holomorphes au voisinage de $(A_1^0, \ldots, A_{n-h}^0, \ldots, B_{n-h}^0)$. Ces relations rentrent dans le type général des formules (7) du Chapitre précédent.

85. Les systèmes complets (9), (10), .. , (11) admettent respectivement

$$2n-h+1, \quad 2n-h, \quad \ldots, \quad n+1$$

intégrales indépendantes; mais bien entendu ils admettent toutes les intégrales $f_1, f_2, \ldots, f_h$. Bien plus, il faut essentiellement supposer que les variables sont liées par les relations (2); ce n'est qu'à cette condition qu'on peut être sûr que les systèmes (9), (10), ... sont complets.

Enfin, si l'on remarque que, A_1 étant connue, le système (10) admet $h+1$ intégrales connues; que, A_1 et A_2 étant connues, le système suivant admet $h+2$ intégrales connues, et ainsi de suite, on voit que la méthode indiquée exige la recherche d'une intégrale de $n-h+1$ systèmes complets successifs à $2n+1$ variables, mais qui admettent respectivement

$$h, \quad h+1, \quad h+2, \quad \ldots, \quad n$$

intégrales connues. D'après la méthode de Mayer, cette méthode revient donc à la recherche d'une intégrale particulière de $n-h+1$ systèmes d'équations différentielles successifs ayant respectivement

$$2n-2h+2, \quad 2n-2h, \quad \ldots, \quad 4, \quad 2$$

variables.

86. En particulier, si $h=1$, le premier système complet est formé de la seule équation

$$(f_1, f) = 0;$$

il y a ici n systèmes d'équations différentielles successifs qui sont respectivement à

$$2n, \quad 2n-2, \quad \ldots, \quad 4, \quad 2$$

variables.

Si h est égal à $n+1$, il n'y a aucune intégration à faire; *un système en involution de* $n+1$ *équations définit toujours une multiplicité intégrale à* n *dimensions*. La réciproque est d'ailleurs évidente.

87. *Cas particulier.* — L'intégration d'un système en involution se simplifie, d'après la théorie générale, si les coefficients des expressions

$$\omega^{(2r-3)}\,df_i = \omega^{(2n-1)}\,df_i \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,h),$$

s'annulent tous en vertu des équations de ce système. Or on a

$$\omega^{(2n-1)}\,df = \omega'^{n}\,df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\,dx_1\,dp_1\,dx_2\,dp_2\ldots dx_n\,dp_n.$$

La simplification se produit donc si les quantités $\dfrac{\partial f_i}{\partial z}$ sont toutes nulles en vertu de (2), c'est-à-dire si le système (2) ne contient pas explicitement z, ou ne le contient que *formellement*.

Si donc il s'agit d'intégrer un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en involution, ne contenant pas explicitement la fonction inconnue z,

$$(2)' \qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f_h(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_n)=0,\end{array}\right.$$

on cherchera une intégrale A_1 du système complet

$$\omega^{(2n-1)}\,df = \omega^{(2n-2)}\,df_1\,df = \ldots = \omega^{(2n-2)}\,df_h\,df = 0,$$

c'est-à-dire du système complet

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0, \qquad (f_1, f)=0, \qquad (f_2, f)=0, \qquad \ldots, \qquad (f_h, f)=0,$$

puis une intégrale A_2 indépendante de A_1 du système complet

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0, \qquad (f_1,f)=0, \qquad (f_2,f)=0, \qquad \ldots, \qquad (f_h,f)=0, \qquad (A_1,f)=0,$$

et ainsi de suite jusqu'à une intégrale A_{n-h} indépendante de A_1,

$A_2, \ldots, A_{n-h-1}$ du système complet

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad (f_1, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (A_{n-h-1}, f) = 0;$$

alors, en tirant $n-1$ des variables x_i, p_k en fonction des autres variables restantes autres que z des équations $(2)'$ et des équations

$$A_1 = a_1, \qquad A_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad A_{n-h-1} = a_{n-h-1},$$

l'expression

$$\omega = dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \ldots - p_n\,dx_n$$

devient une différentielle exacte et, par une quadrature, on obtient, en tenant compte de $(2)'$,

$$\omega = dz - dC - B_1\,dA_1 - B_2\,dA_2 - \ldots - B_{n-h-1}\,dA_{n-h-1},$$

où C est une fonction des x et des p.

Remarquons d'ailleurs que pour les fonctions qui entrent dans les systèmes complets à intégrer, on a

$$(f, \varphi) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right).$$

88. *Intégrales singulières.* — L'expression $\omega^{(2r-2)} = \omega^{(2n)}$ ne pouvant jamais avoir ses coefficients nuls, les intégrales singulières du système en involution (2) s'obtiennent en annulant tous les coefficients de l'expression

$$(13) \qquad \omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h = dz\, d'f_1\, d'f_2 \ldots d'f_h,$$

c'est-à-dire en annulant tous les coefficients de l'expression

$$(14) \qquad d'f_1\, d'f_2 \ldots d'f_h,$$

où n'entre pas dz. On considérera donc la matrice

$$(15) \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial p_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_h}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial f_h}{\partial z} \cdots \dfrac{\partial f_h}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial f_h}{\partial z} & \dfrac{\partial f_h}{\partial p_1} \cdots \dfrac{\partial f_h}{dp_n} \end{matrix} \right\|$$

et on annulera tous ses déterminants à h lignes et à h colonnes. D'après la théorie générale, deux cas peuvent se présenter.

Si les coefficients de

$$df_1\, df_2 \ldots df_h \tag{16}$$

ne s'annulent pas en même temps que ceux de (14), les équations obtenues, jointes aux équations (2), constituent l'intégrale singulière si elles sont au nombre de $n+1$ (elles ne peuvent pas être en moindre nombre); si elles sont au nombre de plus de $n+1$, il n'y a pas d'intégrale singulière.

Si, au contraire, les coefficients de (16) s'annulent en même temps que ceux de (14), on ne peut plus rien dire. Les équations obtenues, jointes à (2), forment un nouveau système à intégrer. Ce système contient certainement plus de h équations (h est supposé inférieur à $n+1$), mais il peut ne pas être en involution. On le complètera donc au besoin de manière à avoir soit un système de plus de $n+1$ équations, auquel cas il y aura impossibilité, soit un système en involution de $h' \leqq n+1$ équations. On intégrera ce nouveau système comme le premier; il admettra des intégrales générales et il pourra à son tour admettre des intégrales singulières qu'on trouvera au moyen d'un troisième système en involution de $h'' > h'$ équations et ainsi de suite. Il est bien clair que ces opérations auront un terme.

En particulier, si le système (2) est formé d'une seule équation, les intégrales singulières satisferont au système

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial p_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial p_n} = 0;$$

si ces équations n'annulent pas $\frac{\partial f}{\partial z}$, elles donneront une intégrale singulière ou n'en donneront pas, suivant qu'elles peuvent se réduire ou non à $n+1$ équations indépendantes. Si elles annulent $\frac{\partial f}{\partial z}$, on a un nouveau système qui peut être formé de moins de $n+1$ équations et qu'on intègre directement.

86. *Exemple.* — Considérons, dans le cas de $n = 2$, l'équation aux

dérivées partielles

$$f = p_1^3 + (z - p_2^2)^2 = 0, \tag{17}$$

et cherchons ses intégrales singulières; elles satisfont aux équations

$$p_1(z - p_2^2) = p_2(z - p_2^2) = p_1^2 = p_2(z - p_2^2) = 0,$$

c'est-à-dire au système

$$\begin{cases} f_1 = p_1 = 0, \\ f_2 = z - p_2^2 = 0, \end{cases} \tag{18}$$

qui est en involution, comme il est facile de le vérifier. Pour en avoir les intégrales générales, tirons-en p_1 et p_2 et portons dans l'équation

$$dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 = 0;$$

nous trouvons

$$p_2(2\, dp_2 - dx_2) = 0.$$

Nous avons donc, comme intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire a,

$$\begin{cases} z = \left(\dfrac{x_2 - a}{2}\right)^2, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = \dfrac{x_2 - a}{2}, \end{cases} \tag{19}$$

et, comme intégrale singulière,

$$\begin{cases} z = 0, \\ p_1 = 0, \\ p_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

90. *Transformations de contact.* — Une transformation de contact est, d'après M. Lie, définie par $2n+1$ fonctions $Z, X_1, X_2, \ldots, X_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ des $2n+1$ variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ et telles que l'on ait identiquement

$$\Omega = dZ - P_1\, dX_1 - \ldots - P_n\, dX_n = \rho(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n) = \rho\omega; \tag{21}$$

ρ désignant une fonction non identiquement nulle des variables z, x_i, p_k.

Montrons d'abord que ces $2n+1$ fonctions sont indépendantes. De l'identité

$$\Omega = \rho\omega$$

on déduit, en effet,

$$\Omega' = \rho\omega' + d\rho.\omega,$$

et, en élevant à la n^{ieme} puissance,

$$\Omega'^n = \rho^n\omega'^n + \rho^{n-1}\omega'^{n-1}d\rho.\omega;$$

et, enfin,

$$\Omega\Omega'^n = \Omega^{(2n)} = \rho^{n+1}\omega\omega'^n = \rho^{n+1}\omega^{(2n)}. \tag{22}$$

En remplaçant $\omega^{(2n)}$ et $\Omega^{(2n)}$ par leurs valeurs, on obtient

$$dZ\,dX_1\,dP_1\ldots dX_n\,dP_n = \rho^{n+1}\,dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n \tag{23}$$

ou, enfin,

$$\frac{D(Z, X_1, P_1, \ldots, X_n, P_n)}{D(z, x_1, p_1, \ldots, x_n, p_n)} = \rho^{n+1}.$$

Les $2n+1$ fonctions Z, X_i, P_k sont donc bien indépendantes en vertu de l'hypothèse faite sur ρ.

Désignons de même par F et Φ deux fonctions quelconques de Z, X_i, P_k et par f et φ ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace les fonctions Z, X_i, P_k par leurs valeurs. On a

$$\Omega^{(2n-2)}dF\,d\Phi = (\rho\omega)^{(2n-2)}df\,d\varphi;$$

mais

$$\Omega^{(2n-2)} = (\rho\omega)^{(2n-2)} = \rho^n\omega\omega'^{n-1} = \rho^n\omega^{(2n-2)}.$$

On a donc

$$\Omega^{(2n-2)}dF\,d\Phi = \rho^n\omega^{(2n-2)}df\,d\varphi.$$

Désignons par

$$[F, \Phi] = \frac{\partial F}{\partial P_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + P_1\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial X_1} + P_1\frac{\partial F}{\partial Z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial P_1} + \ldots$$

le crochet des deux fonctions F et Φ considérées comme fonctions de Z, X_i, P_k; et désignons, comme auparavant, par (f, φ), le crochet relatif aux variables z, x_i, p_k. On a alors

$$[F, \Phi]\,dZ\,dX_1\ldots dP_n = \rho^n(f, \varphi)\,dz\,dx_1\ldots dp_n,$$

ou, en remplaçant le monome différentiel du premier membre par sa valeur (23),

$$(24) \qquad (f, \varphi) = \rho[F, \Phi].$$

Cette égalité fondamentale s'écrit explicitement

$$(24)' \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left[\frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &\quad = \rho \sum \left[\frac{\partial F}{\partial P_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial F}{\partial Z} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

f désignant ce que devient F et φ ce que devient Φ par substitution des valeurs de Z, X_i, P_k.

Appliquons cette identité à tous les couples de fonctions Z, X_i, P_k. On a alors

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(Z, X_i) = (X_i, X_k) = (X_i, P_k) = (P_i, P_k) = 0, \\ &\qquad (Z, P_i) = -\rho P_i, \qquad (P_i, X_i) = \rho. \end{aligned} \right.$$

91. *Réciproquement, étant données* $n + 1$ *fonctions indépendantes* Z, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *satisfaisant aux relations*

$$(Z, X_i) = (X_i, X_k) = 0,$$

il existe n autres fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *telles que l'on ait identiquement*

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n),$$

ρ *étant une fonction non identiquement nulle.*

En effet, les équations obtenues en égalant $Z, X_1, \ldots, X_n$ à des constantes arbitraires forment un système en involution de $n + 1$ équations, c'est-à-dire déterminent une multiplicité. On peut donc déterminer $n + 1$ fonctions λ telles que

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = \lambda_1 dX_1 + \lambda_2 dX_2 + \ldots + \lambda_n dX_n + \lambda_{n+1} dZ,$$

d'où se déduit l'identité à démontrer, en posant

$$P_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}}, \qquad \rho = \frac{1}{\lambda_{n+1}}.$$

92. On peut, d'ailleurs, obtenir les crochets de ρ et des fonctions

Z, X_i, P_k. On a, en effet, en conservant les mêmes notations,

$$\Omega^{(2n-1)}dF = (\rho\omega)^{(2n-1)}df,$$

c'est-à-dire

$$\Omega^{(2n-1)}dF = \rho^n\omega^{(2n-1)}df - \rho^{n-1}\omega^{(2n-2)}d\rho\, df.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\Omega^{(2n-1)}dF &= \frac{\partial F}{\partial Z}dZ\,dX_1\,dP_1\ldots dX_n\,dP_n\\ &= \rho^{n+1}\frac{\partial F}{\partial Z}dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\omega^{(2n-1)}df &= \frac{\partial f}{\partial z}dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n,\\ \omega^{(2n-2)}d\rho\,df &= -(\rho, f)\,dz\,dx_1\,dp_1\ldots dx_n\,dp_n.\end{aligned}$$

On a donc, finalement, en divisant par ρ^{n-1}, l'identité

$$\rho^2\frac{\partial F}{\partial Z} = \rho\frac{\partial f}{\partial z} + (\rho, f),$$

c'est-à-dire

$$(\rho, f) = \rho^2\frac{\partial F}{\partial Z} - \rho\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{26}$$

Appliquant cette identité aux fonctions Z, X_i, P_k, on obtient

$$\left\{\begin{aligned}(\rho, Z) &= \rho^2 - \rho\frac{\partial Z}{\partial z},\\ (\rho, X_i) &= -\rho\frac{\partial X_i}{\partial z},\\ (\rho, P_k) &= -\rho\frac{\partial P_k}{\partial z}.\end{aligned}\right. \tag{26$'$}$$

93. *Équations aux dérivées partielles homogènes.* — Étant données $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il s'agit de satisfaire à l'équation aux différentielles totales

$$\omega = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \ldots + p_ndx_n = 0, \tag{27}$$

au moyen de relations entre les variables et des relations dérivées entre les différentielles, en se donnant *a priori* un certain nombre h de ces relations.

L'expression ω est de classe $2n$, et sa dérivée $(2n-1)^{\text{ième}}$ est

$$\omega^{(2n-1)} = \omega'^n = dp_1\,dx_1\,dp_2\,dx_2\ldots dp_n\,dx_n.$$

Il faut donc au moins n relations entre les variables pour satisfaire à (27), et les solutions singulières de (27) s'obtiennent, puisque $\omega^{(2n-1)}$ a ses coefficients essentiellement différents de zéro, en annulant les coefficients de ω, c'est-à-dire annulent à la fois $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Une *multiplicité* étant un système de relations satisfaisant à (27) sera dite *non singulière* si elle n'entraîne pas

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0.$$

Elle est au plus à n dimensions et on l'obtient de la façon la plus générale, si, par exemple, p_1 n'est pas nul, en résolvant

$$dx_1 + \frac{p_2}{p_1}dx_2 + \ldots + \frac{p_n}{p_1}dx_n = 0.$$

Étant donné un système de h relations

$$\text{(28)}\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \end{cases}$$

intégrer ce système, c'est trouver toutes les multiplicités à n dimensions dont les éléments satisfont à ces relations; c'est donc annuler ω au moyen de n relations, parmi lesquelles h relations données.

94. Nous pouvons, ici, appliquer la théorie du Chapitre précédent, $\omega^{(2n-1)}$ ne pouvant pas avoir ses coefficients nuls. Pour l'appliquer, il faut former les expressions

$$\omega^{(2n-2)}\,df, \quad \omega^{(2n-3)}\,df\,d\varphi.$$

On a facilement

$$\omega^{(2n-2)}\,df = -\left(p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + p_n\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)dp_1\,dx_1\,dp_2\,dx_2\ldots dp_n\,dx_n,$$

$$\omega^{(2n-3)}\,df\,d\varphi = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)dp_1\,dx_1\,dp_2\,dx_2\ldots dp_n\,dx_n.$$

Nous poserons

$$(29)\qquad H(f) = p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \ldots + p_n\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$(30)\qquad (f, \varphi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right).$$

Cela étant, le système (28) sera dit en involution si les équations

$$(31)\qquad H(f_i) = 0, \qquad (f_i, f_k) = 0, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, h)$$

sont des conséquences de ce système. Les premières équations expriment que le système (28) est *homogène* en $p_1, p_2, \ldots, p_n$, c'est-à-dire qu'il est équivalent au système obtenu en remplaçant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par $\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_n$; ou encore qu'il peut se mettre sous une forme telle que les premiers membres soient tous homogènes en $p_1, \ldots, p_n$.

Par suite, si le système (28) n'est pas en involution, nous lui adjoindrons les équations (31); nous aurons un nouveau système qui, s'il n'est pas en involution, pourra être étendu par le même procédé, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un système en involution (à moins que, dans la suite des calculs, on n'arrive soit à un système incompatible, soit à un système de plus de n équations).

95. Supposons donc le système (28) en involution. On aura son intégrale générale en cherchant une intégrale f_{h+1} du système complet

$$H(f) = 0, \qquad (f_1, f) = \ldots = (f_h, f) = 0$$

puis une intégrale f_{h+2} indépendante de f_{h+1} du système complet

$$H(f) = 0, \qquad (f_1, f) = (f_2, f) = \ldots = (f_{h+1}, f) = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à une intégrale f_n indépendante de f_{h+1}, $f_{h+2}, \ldots, f_{n-1}$ du système complet

$$H(f) = 0, \qquad (f_1, f) = (f_2, f) = \ldots = (f_{n-1}, f) = 0.$$

En tenant compte de (28), ω peut alors se mettre sous la forme

$$\omega = \varphi_{h+1}\, df_{h+1} + \ldots + \varphi_n\, df_n$$

et la résolution s'achève comme d'habitude.

En particulier, un système en involution de n équations fournit une multiplicité.

96. Les *intégrales singulières* s'obtiennent en annulant tous les coefficients de l'expression

$$\omega\, df_1\, df_2 \ldots df_h,$$

c'est-à-dire tous les déterminants à $h+1$ lignes et $h+1$ colonnes de la matrice

$$(32)\qquad \left\|\begin{matrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_h}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_h}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_h}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_h}{\partial p_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_h}{\partial p_n} \end{matrix}\right\|,$$

et si tous les déterminants formés des h dernières lignes et de h colonnes quelconques ne sont pas nuls, le système obtenu constitue une intégrale singulière s'il ne contient que n équations indépendantes. Dans le cas contraire, on a un système qu'on traite comme un système ordinaire.

En particulier, si h est égal à 1, c'est-à-dire si l'on a une équation homogène en $p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$(33)\qquad f_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

les intégrales singulières satisfont aux équations

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_2} = \ldots = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_n} = 0, \\ \dfrac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{p_1} = \dfrac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}}{p_2} = \ldots = \dfrac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}}{p_n}, \end{cases}$$

et si les rapports de la deuxième ligne ne sont pas nuls, les équations (33) et (34) fournissent l'intégrale singulière, au cas où elles se réduisent à n; on peut d'ailleurs se borner aux équations (34), car (33) en est une conséquence en vertu de

$$H(f_1) = 0.$$

97. *Exemple.* — Considérons, dans le cas de $n = 2$, l'équation

$$f_1 = p_1^2 + p_2^2 - (p_1 x_1 + p_2 x_2)^2 = 0; \tag{35}$$

les équations (34) deviennent ici

$$p_1 - x_1(p_1 x_1 + p_2 x_2) = 0,$$
$$p_2 - x_2(p_1 x_1 + p_2 x_2) = 0,$$
$$\frac{-p_1(p_1 x_1 + p_2 x_2)}{p_1} = \frac{-p_2(p_1 x_1 + p_2 x_2)}{p_2}.$$

Les quantités p_1 et p_2 étant supposées non nulles toutes les deux, les deux derniers rapports sont égaux d'eux-mêmes et les trois équations qui déterminent l'intégrale singulière se réduisent à deux

$$p_1 = x_1(p_1 x_1 + p_2 x_2),$$
$$p_2 = x_2(p_1 x_1 + p_2 x_2);$$

ces équations entraînent d'ailleurs, par élimination de p_1 et de p_2,

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

98. *Transformations de contact homogènes.* — Une transformation de contact homogène est définie par $2n$ fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entraînant l'identité

$$P_1\, dX_1 + P_2\, dX_2 + \ldots + P_n\, dX_n = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n. \tag{36}$$

Si l'on désigne par Ω le premier membre de cette identité, on a d'abord

$$\Omega^{(2n-1)} = \omega^{(2n-1)},$$

c'est-à-dire

$$dP_1\, dX_1\, dP_2\, dX_2 \ldots dP_n\, dX_n = dp_1\, dx_1\, dp_2\, dx_2 \ldots dp_n\, dx_n, \tag{37}$$

ce qui montre que les $2n$ fonctions X_i, P_k sont indépendantes et que leur déterminant fonctionnel est égal à l'unité.

On a ensuite, f désignant ce que devient une fonction arbitraire F des X_i, P_k lorsqu'on remplace ces quantités par leurs valeurs,

$$\Omega^{(2n-2)}\, dF = \omega^{(2n-2)}\, df,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (37),

$$(38)\qquad P_1\frac{\partial F}{\partial P_1}+P_2\frac{\partial F}{\partial P_2}+\ldots+P_n\frac{\partial F}{\partial P_n}=p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\ldots+p_n\frac{\partial f}{\partial p_n}.$$

Cette identité, appliquée aux fonctions X_i, P_k donne

$$(38)'\qquad \left\{\begin{array}{l} H(X_i)=0,\\ H(P_i)=P_i,\end{array}\right.$$

ce qui montre que *les* X *sont des fonctions homogènes et de degré zéro, les* P *des fonctions homogènes et de degré un en* $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On a enfin, F et Φ désignant deux fonctions quelconques des grandes lettres et f et φ les fonctions des petites lettres qu'elles deviennent après substitution

$$\Omega^{(2n-3)}\,dF\,d\Phi=\omega^{(2n-3)}\,df\,d\varphi,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (37),

$$(39)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}-\frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{\partial \Phi}{\partial P_i}\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right).$$

Cette identité, appliquée aux fonctions X_i, P_k, donne

$$(39)'\qquad \left\{\begin{array}{l} (X_i, X_k)=(P_i, P_k)=(P_i, X_k)=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (P_i, X_i)=1 \qquad (i\neq k).\end{array}\right.$$

Les $2n$ fonctions X_i, P_k satisfont donc aux équations (38)′ et (39)′.

99. *Réciproquement, étant données n fonctions indépendantes* X_1, $X_2, \ldots, X_n$ *de* $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *homogènes et de degré zéro en* p_1, $p_2, \ldots, p_n$ *et satisfaisant aux relations*

$$(X_i, X_k)=0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

il existe n autres fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *définissant avec les premières une transformation de contact homogène.*

Cela est évident, car, par hypothèse, les n fonctions X_i, égalées à des constantes, définissent un système en involution, de sorte qu'on peut déterminer n quantités $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de manière à avoir

$$p_1\,dx_1+\ldots+p_n\,dx_n=P_1\,dX_1+\ldots+P_n\,dX_n.$$

100. *Équations aux dérivées partielles en coordonnées homogènes.* — Étant données $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $u_1, u_2, \ldots, u_n$ liées par la relation

$$\varphi = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = 0, \tag{40}$$

il s'agit de résoudre l'équation aux différentielles totales

$$\omega = u_1\, dx_1 + u_2\, dx_2 + \ldots + u_n\, dx_n = 0 \tag{41}$$

en établissant entre les variables un certain nombre de relations parmi lesquelles un certain nombre sont données.

En se reportant au problème précédent, on voit qu'il faut établir au moins $n-1$ relations autres que (40). Les solutions singulières des systèmes (40) et (41) sont d'ailleurs données en annulant tous les coefficients de $\omega\, d\varphi$, c'est-à-dire toutes les quantités $u_i x_k$. On a donc, soit

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0,$$

soit

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Nous exclurons ces deux solutions singulières.

Nous avons à former (φ, f) où φ est donnée par (40). On a

$$(\varphi, f) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} - \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right).$$

Nous poserons

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{H}(f) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n}, \\ \mathrm{K}(f) &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{aligned} \right. \tag{42}$$

et

$$(f, f_1) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} \right). \tag{43}$$

101. Étant alors donné un système de h relations

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) = 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_h(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) = 0, \end{array} \right. \tag{44}$$

ce système est en involution si les équations

$$(45)\qquad \begin{cases} H(f_i) = K(f_i) = 0, \\ (f_i, f_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, h) \end{cases}$$

sont des conséquences de (40) et de (44). Tout système peut se ramener à un système en involution. Un système en involution de $n-1$ équations constitue une solution de l'équation (41).

Si h est inférieur à $n-1$, on intègre (44) en cherchant une intégrale f_{h+1} du système complet

$$H(f) = K(f) = 0, \qquad (f_1, f) = (f_2, f) = \ldots = (f_h, f) = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à une intégrale f_{n-1} du système complet

$$H(f) = K(f) = 0, \qquad (f_1, f) = (f_2, f) = \ldots = (f_{n-2}, f) = 0.$$

On a alors, en tenant compte de (40) et de (44),

$$\omega = \varphi_{h+1}\, df_{h+1} + \varphi_{h+2}\, df_{h+2} + \ldots + \varphi_{n-1}\, df_{n-1}.$$

102. Les *intégrales singulières* s'obtiennent en annulant tous les coefficients de l'expression

$$\omega\, d\varphi\, df_1 \ldots df_h,$$

c'est-à-dire en annulant tous les déterminants à $h+2$ lignes et $h+2$ colonnes de la matrice

$$(46)\qquad \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_h}{\partial x_1} & \frac{\partial f_h}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_h}{\partial x_n} & \frac{\partial f_h}{\partial u_1} & \frac{\partial f_h}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_h}{\partial u_n} \end{matrix} \right\|.$$

Dans le cas de h égal à 1, les intégrales singulières sont données par les équations

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{u_1} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{u_2} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{u_n},$$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial u_1}}{x_1} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u_2}}{x_2} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u_n}}{x_n},$$

et si ces rapports ne sont pas tous égaux entre eux, ces équations définissent l'intégrale singulière, dans le cas où elles se réduisent à n seulement.

103. *Cas particulier.* — Lorsque n est égal à 3, on obtient des équations différentielles ordinaires à deux variables x et y. Si nous désignons en effet par x_1, x_2, x_3 les coordonnées homogènes d'un point, par u_1, u_2, u_3 les coordonnées homogènes d'une droite dans le plan, on a, pour un élément,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

et

$$\frac{x_1}{x} = \frac{x_2}{y} = \frac{x_3}{1}, \qquad \frac{u_1}{y'} = \frac{u_2}{-1} = \frac{u_3}{y - xy'}.$$

Pour intégrer une équation

$$F(x, y, y') = 0,$$

c'est-à-dire

$$F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, -\frac{u_1}{u_2}\right) = 0,$$

il faut intégrer le système complet

$$H(f) = K(f) = 0, \qquad (F, f) = 0,$$

c'est-à-dire trouver une intégrale f homogène et de degré zéro en x_1, x_2, x_3 d'une part, en u_1, u_2, u_3 d'autre part, du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial u_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial u_2}} = \frac{dx_3}{\frac{\partial F}{\partial u_3}} = \frac{-du_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \frac{-du_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \frac{-du_3}{\frac{\partial F}{\partial x_3}}.$$