A. GRÉVY

Étude sur les équations fonctionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 295-338
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__295_0>

ÉTUDE

SUR LES

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES,

PAR M. A. GRÉVY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

CHAPITRE I.

1. Dans un précédent Mémoire [1] j'ai étudié les solutions des équations fonctionnelles dans le voisinage d'un point limite à convergence régulière; je me propose d'étendre cette étude au cas de la convergence périodique.

Appelons E_k l'équation $z - \varphi_k(z) = 0$ relative à la substitution $|z, \varphi(z)|$ répétée k fois; si x_0 est racine de cette équation et n'est racine d'aucune équation d'indice inférieur, on dit que x_0 appartient à l'indice k; les quantités $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, où l'on pose $x_i = \varphi(x_{i-1})$, appartiennent toutes à l'indice k et elles sont permutées circulairement par la substitution $z, \varphi(z)$; leur ensemble constitue un groupe circulaire de k racines.

Posant

$$a_i = \varphi'(x_i) \qquad (a = a_0 a_1 \ldots a_{k-1}),$$

si la condition mod. $a < 1$ est vérifiée, le groupe est un groupe circulaire limite; tout point x_i du groupe est un point limite à convergence régulière pour la substitution $z, \varphi_k(z)$; si l'on entoure chaque point

---

(1) GRÉVY, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1894.

d'un cercle C_i, la substitution $z, \varphi(z)$ a pour effet de conduire d'un cercle au suivant et, dans chaque cercle, on a une suite de points qui convergent vers le centre.

L'infini et un pôle peuvent d'ailleurs faire partie du groupe; z_i étant infini, z_{i-1} est un pôle en vertu de la relation $z_i = \varphi(z_{i-1})$.

Ces résultats sont dus à M. Kœnigs, qui en a déduit la solution de l'équation fonctionnelle

$$f(z_1) = cf(z),$$

dans le cas où a est différent de zéro [1].

2. Supposons actuellement $a = 0$, et désignons par $\alpha_0 - 1, \ldots, \alpha_{k-1} - 1$, les ordres de multiplicité respectifs des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ de $\varphi'(z)$.

z étant un point du cercle C_i relatif à x_i, on a

$$\begin{aligned}
z_1 - x_{i+1} &= (z - x_i)^{\alpha_i}\psi(z),\\
z_2 - x_{i+2} &= (z_1 - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}}\psi_1(z_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$\psi_1(z_i)$ ne s'annulant pas pour $z = x_i$, sans quoi on aurait $\psi_1(x_{i+1}) = 0$ et x_{i+1} serait racine d'ordre α_{i+1} de $\varphi'(z)$.

Des relations précédentes on déduit

$$\begin{aligned}
z_2 - x_{i+2} &= (z - x_i)^{\alpha_i\alpha_{i+1}}\chi(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et finalement

$$z_k - x_i = (z - x_i)^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}\theta(z),$$

$\theta(z)$ ne s'annulant pas pour $z = x_i$.

On voit donc que la substitution $|z, \varphi_k(z)|$ effectuée sur un point intérieur à un cercle du groupe considéré est telle que $z_k - x$ soit divisible par

$$(z - x)^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}.$$

Dans le cas particulier où a est différent de zéro, $z_k - x$ est simplement divisible par $z - x$.

---

(1) Kœnigs, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1884 et 1885.

3. Soit $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}$; cherchons s'il existe une fonction y définie dans les domaines $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ et satisfaisant à l'équation

$$y_1 = \lambda y_1,$$

λ étant une constante.

Si une telle fonction existe et satisfait à cette équation pour les points de tous les domaines $x_0, \ldots, x_{k-1}$, les substitutions $z, \varphi(z); \ldots;$ $z, \varphi_k(z)$, laissant les points $z, z_1, \ldots, z_k$ dans ces mêmes domaines, on devra avoir

$$y_2 = \lambda y_1,$$
$$y_3 = \lambda y_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_k = \lambda y_{k-1},$$

et

$$y_k = \lambda^k y.$$

Cette équation est alors relative à un point limite à convergence régulière pour la substitution $z, \varphi_k(z)$; elle admet une solution [1] ayant le point limite comme point logarithmique, à la condition que λ^k égale α.

Nous définissons ainsi, dans chaque domaine, une fonction de la forme

$$\log(z - x) + f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe au point x.

Soient

$$C_0(z) = \log(z - x_0) + f(z),$$
$$C_1(z) = \log(z - x_1) + f'(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{k-1}(z) = \log(z - x_{k-1}) + f^{(k-1)}(z).$$

A chaque valeur de la fonction $C_0(z)$, définie dans le domaine du point x_0, correspond une valeur $\lambda C_0(z)$, que nous pouvons faire correspondre au point z_1 du domaine x_1; nous définissons ainsi une fonction dans le domaine x_1; soit $y_1(z_1)$; si sur les points z et z_1 on fait la substitution $z, \varphi_k(z)$, la première fonction prendra la valeur

(1) *Annales de l'École Normale*, p. 290, 1894.

$\lambda^k C_0(z)$ et la fonction correspondante du domaine x_1 sera $\lambda.\lambda^k C_0(z)$ ou $\lambda^k y_1(z_1)$; la fonction y_1, ainsi définie, satisfait donc à l'équation

$$y_1(z_{k+1}) = \lambda^k y_1(z_1).$$

Cette fonction, qui existe, puisque nous avons un moyen d'en connaître la valeur en chaque point du domaine x_1, est donc de la forme

$$[\log(z_1 - x_1) + f'(z_1)]\Omega[c_1(z_1)],$$

Ω étant une fonction périodique de période égale à l'unité, et $c_1(z_1)$ la fonction qui vérifie l'équation d'Abel relative à la substitution $z_1, \varphi_k(z_1)$.

Il suffit alors de connaître Ω; pour y parvenir, considérons le rapport

$$\frac{[\log(z_1 - x_1) + f'(z_1)]\Omega[c_1(z_1)]}{\log(z - x_0) + f(z)}.$$

Si l'on fait tendre z vers x_0, z_1 tendra vers x_1 et les modules de $\log(z - x_0)$ et $\log(z_1 - x_1)$ augmenteront indéfiniment, $f'(z_1)$ et $f(z)$ ayant des valeurs finies; le rapport aura alors pour limite

$$\alpha_0 \Omega[c_1(z_1)],$$

en tenant compte de la relation

$$z_1 - x_1 = (z - x)^{\alpha_0} F(z).$$

Si z_1 décrit un chemin n'entourant pas x_1 et passant par ce point, $C_1(z_1)$ aura en x_1 un module infini; il en sera de même de $c_1(z_1)$; l'infini étant un point essentiel de la fonction périodique, la valeur de Ω ne sera pas indépendante de la succession des valeurs de $c_1(z_1)$; si donc, à des chemins différents parcourus par z_1 correspondent des chemins différents pour $c_1(z_1)$, le rapport considéré n'aura pas une valeur finie et déterminée au point x_1; d'autre part, si $c_1(z_1)$ parcourait toujours le même chemin, quand on déforme d'une façon continue le chemin parcouru par z_1, cette fonction se réduirait à une constante.

On en conclut que Ω doit se réduire à une constante et que les valeurs des fonctions $C_1(z_1)$ et $C_0(z)$ ont un rapport constant égal à α_0; on verrait de même que le rapport de deux fonctions consécutives

$C_{i+1}(z_1)$ et $C_i(z)$ est constant et égal à α_i; ceci nous conduit à la proposition suivante :

Si l'on prend pour λ *une détermination de* $\alpha^{\frac{1}{k}}$, *il existe une fonction satisfaisant à l'équation*

$$C(z_1) = \lambda C(z);$$

elle coïncide avec

$$\begin{array}{llll} C_0(z) & \textit{dans le domaine} & & x_0, \\ \dfrac{\lambda}{\alpha_0} C_1(z) & \text{»} & \text{»} & x_1, \\ \ldots\ldots\ldots & . & . & \ldots, \\ \dfrac{\lambda^{k-1}}{\alpha_0 \ldots \alpha_{k-2}} C_{k-1}^{(z)} & \text{»} & \text{»} & x_{k-1}. \end{array}$$

Il est évident que, si l'on multiplie toutes ces fonctions par une même constante, on a encore une solution de l'équation.

On peut remarquer qu'il y a, en réalité, k équations fonctionnelles, qui correspondent aux k déterminations $\alpha^{\frac{1}{k}}$.

4. Si l'on pose

$$c(z) = \frac{\log C(z)}{\log \lambda},$$

on a une solution de l'équation d'Abel

$$c(z_1) = c(z) + 1.$$

L'équation

$$f(z_1) = \lambda f(z)$$

aura alors pour solution générale

$$C(z)\,\Omega[c(z)]$$

et l'équation d'Abel

$$c(z) + \Omega[c(z)].$$

Nous retrouvons ainsi les résultats obtenus par M. Kœnigs dans le cas où aucune des quantités $\varphi'(x_0), \ldots, \varphi'(x_{k-1})$ n'est nulle.

CHAPITRE II.

5. Considérons d'une façon générale l'équation fonctionnelle

$$p_0(z)f(z)+p_1(z)f(z_1)+\ldots+p_n(z)f(z_n)=0,$$

relative à la substitution $[z, \varphi(z)]$, qui admet le groupe circulaire limite $x_1, x_0, \ldots, x_{k-1}$; supposons que l'on ait défini dans le domaine de chaque point $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ une fonction holomorphe telle que l'équation fonctionnelle soit vérifiée; les substitutions $z, \varphi(z), \ldots, z, \varphi_{(k-1)n}$ conduisant à des points de ces domaines, la fonction $f(z)$ sera définie en chacun de ces points et l'on aura entre ses valeurs les relations (¹)

$$\begin{aligned}
&p_0\ f(z)\ +p_1\ f(z_1)+\ldots+p_n\ f(z_n) &&=0,\\
&p_{0,1}f(z_1)+p_{1,1}f(z_2)+\ldots+p_{n,1}f(z_{n+1}) &&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&,\\
&p_{0,(k-1)n}f(z_{(k-1)n})\quad+\ldots+p_{n,(k-1)n}f(z_{kn}) &&=0,
\end{aligned}$$

dans lesquelles on pose $p_{i,j}=p_i(z_j)$.

Si l'on suppose que les déterminants principaux relatifs aux quantités $f(z_i)$, i n'étant ni nul, ni multiple de k, ne sont pas tous nuls, on voit que le déterminant caractéristique de ces $(k-1)n+1$ équatinns linéaires par rapport aux $(k-1)n$ inconnues $f(z_i)$ $(i \neq \text{mult.}\, k)$ doit être nul, ces équations ayant des solutions par hypothèse.

Ce déterminant étant linéaire et homogène par rapport à

$$f(z),\ f(z_k),\ \ldots,\ f(z_{nk}),$$

on voit que la fonction $f(z)$ satisfait à une équation fonctionnelle d'ordre n, relativement à la substitution $z, \varphi_k(z)$, et pour tous les points du domaine considéré, la substitution étant à convergence régulière.

(¹) $f(z)$, $f(z_1)$, $f(z_2), \ldots, f(z_{k-1})$ ne désignent pas la même fonction des variables $z, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$; à chaque domaine peut correspondre une fonction.

6. L'équation *caractéristique* de cette équation pour la substitution régulière z, $\varphi_k(z)$ s'obtient en remplaçant, dans l'équation fonctionnelle, $f(z_{pk})$ par t^p ou, en posant $t = r^k$, par r^{kp}.

$$(\Delta) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{k-1} & p_{k+1} & \dots & p_{2k-1} & \dots & p_0 & + p_k r^k & + \dots \\ p_{0,1} & p_{1,1} & \dots & p_{k-2,1} & p_{k,1} & \dots & p_{2k-2,1} & \dots & p_{k-1,1} r^k & + p_{2k-1,1} r^{2k} & + \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & + p_{n,(k-1)n} r^{kn} & \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est le produit de deux déterminants d'ordre k et $(n-1)(k-1)$; pour le montrer, multiplions les colonnes respectivement par r, r^2, ..., r^{k-1}; r^{k+1}, ..., r^{2k-1}; ...; et remplaçons les $k-1$ premières colonnes par les sommes obtenues en ajoutant les colonnes contenant des puissances de r dont les exposants sont congrus suivant le module k; en tenant compte de la dernière colonne, nous aurons ainsi k colonnes polynomes.

La ligne de rang $\lambda k + j$ contient en facteur $r^{\lambda k + j - 1}$, et si l'on remarque que l'on a au point limite x, $p_{0,\lambda k+j} = p_{0,j}$, on voit que les termes des colonnes polynomes, qui appartiennent à des lignes de rangs congrus suivant le module k, sont identiques au facteur $r^{\lambda k}$ près.

Si l'on développe ce déterminant suivant les mineurs formés par les k colonnes polynomes, on voit que tous ces mineurs sont ou identiquement nuls, ou les produits par une puissance de r du premier δ :

$$\delta = \begin{vmatrix} p_0 + p_k r^k + \dots & p_1 r + p_{k+1} r^{k+1} + \dots & p_{k-1} r^{k-1} + \dots \\ p_{k-1,1} r^{k-1} + \dots & p_{0,1} + p_{k,1} r^k + \dots & p_{k-2,1} r^{k-2} + \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{1,k-1} r + p_{k+1,k-1} r^{k+1} & \dots & p_{0,k-1} + p_{k,k-1} r^k + \dots \end{vmatrix}.$$

L'équation caractéristique est alors de la forme

$$r^{-m} A \delta = 0.$$

Si nous supposons, comme nous l'avons fait dans le cas de la convergence régulière (¹), que $p_0(z)$ ne s'annule pas aux points limites

(¹) *Annales de l'École Normale*, p. 255; 1894.

du groupe circulaire, on voit que le terme constant de $\delta = 0$ n'est pas nul; si l'on fait la même hypothèse sur $p_n(z)$, cette équation possède un terme de degré nk, son coefficient étant $\pm p_n, p_{n,1}, \ldots, p_{n,k-1}$.

L'équation caractéristique a donc les mêmes racines, avec le même ordre de multiplicité, que l'équation $\delta = 0$; on peut en conclure que le facteur A est indépendant de r ou contient r^k en facteur; on voit, d'autre part, par un calcul direct, que δ est un polynome en r^k.

On peut aisément calculer A, en remarquant que c'est une somme de produits de termes tels que

$$r^{\Sigma\lambda k+j-1}\delta.A' = r^{\frac{k(k-1)}{2}+\Sigma\lambda k}.\delta.A',$$

A' étant un déterminant d'ordre $(n-1)(k-1)$ formé au moyen des colonnes monomes; or, le déterminant complet déduit de (Δ) est égal à

$$r^{\frac{k(k-1)}{2}}\Delta.$$

On en conclut que A se réduit au coefficient de $r^{\frac{k(k-1)}{2}}\delta$, c'est-à-dire du mineur formé à l'aide des k premières lignes et des k colonnes polynomes.

Nous avons supposé $k \leqq n$; si k est supérieur à n, nous pouvons reprendre ce qui vient d'être fait, en remarquant que les colonnes polynomes sont remplacées par des colonnes monomes; on a

$$\delta = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 r & \ldots & p_n r^n & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & p_{0,1} r & \ldots & \ldots & p_{n,1} r^n & 0 & \ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons formé une équation fonctionnelle d'ordre n pour la substitution z, $\varphi_k(z)$.

$$P_0 f(z) + P_1 f(z_k) + \ldots + P_n f(z_{nk}) = 0.$$

Son équation caractéristique est, au point limite x,

$$P_0(x) + P_1(x) r^k + \ldots + P_n(x) r^{nk} = A\delta = 0.$$

Si nous supposons, comme nous l'avons déjà fait, $P_0(x)$ et $P_n(x)$

non nuls, A ne l'est pas et nous sommes ramenés à l'étude faite dans le cas de la convergence régulière.

Si, sur les équations linéaires considérées (5) au début, on fait les substitutions $z, \varphi(z), \ldots, z, \varphi_{k-1}(z)$, on voit que $f(z_i)$ doit satisfaire, relativement à la substitution $z, \varphi_k(z)$ dans le domaine x_i, à l'équation

$$P_{0,i}(z)f(z_i) + \ldots + P_{n,i}(z)f(z_{i+nk}) = 0.$$

C'est donc toujours la même équation appliquée successivement aux différents domaines; on voit immédiatement que l'équation caractéristique se réduit à la même équation

$$\delta = 0,$$

dont les coefficients sont indépendants du point limite considéré.

7. Supposons que l'équation $\delta = 0$ admette en r^k la racine 1 et n'admette pas de racine $[\varphi'_k(x)]^m$, m étant un entier positif, dans l'hypothèse où $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots, \varphi'(x_{k-1}) \neq 0$.

Il existe alors dans le domaine du point x du groupe circulaire *une fonction holomorphe, non nulle en ce point, qui vérifie l'équation*

$$P_0(z)f(z) + P_1(z)f(z_k) + \ldots + P_n(z)f(z_{nk}) = 0.$$

Cette fonction est d'ailleurs définie à un facteur constant près; nous pouvons alors définir les fonctions holomorphes $\lambda_0 u_0(z)$, $\lambda_1 u_1(z_1), \ldots, \lambda_{k-1}u_{k-1}(z_{k-1})$ dans les domaines respectifs $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$; ces fonctions étant les seules fonctions holomorphes satisfaisant à l'équation fonctionnelle précédente relative à la substitution $z, \varphi_k(z)$.

Soit alors z un point du domaine x_0; à ce point correspondent des valeurs $\lambda_0 u(z), \lambda_0 u(z_k), \ldots$ finies et bien déterminées; portons ces valeurs dans les équations linéaires entre $f(z), f(z_1) \ldots f(z_{kn})$; le déterminant principal $P_0(z)$ n'étant pas nul par hypothèse (6) au point x_0, on peut prendre le domaine de ce point de façon que $P_0(z)$ soit différent de zéro; on tire alors un système unique de valeurs pour $f(z_1)$, $f(z_{k+1}), \ldots$; ces fonctions sont holomorphes, de même que les termes connus des équations qui les fournissent; il en sera de même de la fonction $f(z_{kn+1})$ définie par

$$p_{0,(k-1)n+1} f(z_{(k-1)n+1}) + \ldots + p_{n,(k-1)n+1} f(z_{kn+1}) = 0.$$

Ainsi, à z on fait correspondre une fonction $f(z_1)$; je dis que cette fonction est une fonction holomorphe de z_1; supposons-la uniforme et ayant x_1 un *pôle;* la valeur de cette fonction qui correspond au point x_0 aurait un module infini, ce qui n'a pas lieu, $P_0(x)$ n'étant pas nul; supposons x_1 *point essentiel* de $f(z_1)$; à différents chemins conduisant de z_1 en x_1, correspondront alors différentes valeurs de $f(z_1)$ au point x_1; on peut toujours choisir ces chemins de façon qu'ils ne correspondent pas à un même chemin z; en sorte que la valeur de $f(z_1)$ dépendrait du chemin zx_0, ce qui n'a pas lieu, si l'on résout les équations linéaires en $f(z_1), \ldots, f(z_{(n-1)k+1})$.

Enfin, si $f(z_1)$ était non uniforme en x_1, elle ne pourrait être uniforme en x_0 que si z était une fonction de z_1 ayant pour points de ramification $x_0, x_1, \ldots$; or, ceci n'a pas lieu, car on a, par hypothèse,

$$\varphi'(x_0)\,\varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{k-1}) \neq 0.$$

Ainsi, les valeurs que nous trouvons définissent une fonction holomorphe au point x_1 et satisfont à l'équation d'ordre nk; la fonction ainsi définie est

$$\lambda_1 u_1(z_1).$$

Le même raisonnement montre que, si l'on suppose

$$\varphi'(x_0)\ldots\varphi'(x_{k-1}) = 0,$$

la fonction que l'on doit prendre dans le domaine x_1 est $\lambda_1 u_1(z_1)$; il ne peut y avoir doute que dans le cas où $f(z_1)$ ne serait pas uniforme; mais, alors, le point x_1 serait un point de ramification logarithmique, comme on l'a vu dans le cas de la convergence régulière; z étant une fonction de z_1 qui admet le point x_1 comme point critique algébrique, on en conclut qu'après un nombre fini de tours, on revient à la même valeur z_1 tandis que $f(z_1)$ ne reprend pas la même valeur, ce qui est contraire à ce que nous avons trouvé en résolvant les équations linéaires en $f(z_1) f(z_{k+1}) \ldots$.

8. *Nous concluons de tout ceci que la fonction solution de l'équation fonctionnelle donnée coïncide avec*

$$\begin{array}{llll}
\lambda_0 u(z) & \textit{dans le domaine} & & x_0, \\
\lambda_1 u(z) & \text{»} & \text{»} & x_1, \\
\ldots\ldots & . & . & .., \\
\lambda_{k-1} u_{k-1}(z) & \text{»} & \text{»} & x_{k-1}
\end{array}$$

Il reste à déterminer les constantes λ; nous supposerons que

$$u(x_0) = u_1(x_1) = \ldots = u_{k-1}(x_{k-1}) = 1;$$

alors, le système d'équations fonctionnelles devient

$$\begin{array}{r}
[p_0(x_0) + \ldots]\lambda_0 + [p_1(x_0) + \ldots]\lambda_1 + \ldots = 0, \\
[p_{k-1}(x_1) + p_{2k-1}(x_1) + \ldots]\lambda_0 + [p_0(x_1) + \ldots]\lambda_1 + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[p_1(x_{k-1}) + p_{k+1}(x_{k-1}) + \ldots]\lambda_0 + \ldots = 0.
\end{array}$$

Le déterminant des coefficients étant le déterminant δ, dans lequel on a remplacé r par 1, est nul, puisque l'équation $\delta = 0$ admet la racine 1.

On voit d'ailleurs que $P_0(x_0)$ étant différent de zéro, l'un au moins des déterminants d'ordre $k-1$ formés avec les coefficients de λ n'est pas nul; nous pouvons donc tirer un système unique pour

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\,\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\cdots\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_0}.$$

Ce que nous venons de dire suffit pour montrer comment on peut trouver la solution qui répond à la racine 1 de l'équation $\delta = 0$.

9. Soit maintenant une racine quelconque de $\delta = 0$; cette racine peut être mise sous la forme $[\varphi'(x_0)\varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{k-1})]^m$ ou $(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1})^m$ suivant que les quantités $\varphi'(x_i)$ sont différentes de zéro ou non.

Nous poserons, suivant les cas,

$$f(z) = F(z)[B(z)]^m,$$
$$f(z) = F(z)[C(z)]^m,$$

B et C étant solutions de l'équation

$$B[\varphi(z)] = [\varphi'(x_0)\ldots\varphi'(x_{k-1})]^{\frac{1}{k}} B(z),$$

$$C[\varphi(z)] = [\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}]^{\frac{1}{k}} C(z).$$

L'équation fonctionnelle en F est alors

$$p_0 F + p_1 F_1 \lambda^m + \ldots + p_n F_n \lambda^{mn} = 0,$$

λ étant la constante $[\varphi'(x_0)\ldots\varphi'(x_{k-1})]^{\frac{1}{k}}$ ou la constante $(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1})^{\frac{1}{k}}$.

L'équation caractéristique correspondante diffère de l'ancienne par le changement de r^i en $r^i\lambda^{im}$; ses racines r sont donc égales aux produits des racines de $\delta = 0$ par λ^{-m}; cette équation nouvelle a donc une racine r^k égale à l'unité; nous aurons alors défini une solution holomorphe F en chaque point $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, si les coefficients $P'_0\, P'_n$ de l'équation d'ordre nk relative à la substitution $z, \varphi_k(z)$ ne s'annulent pas en ces points; cela résulte des relations, que l'on vérifie aisément,

$$P'_0 = P_0 \lambda^{m\frac{(k-1)n[(k-1)n+1]}{2}} \quad P'_n = P_n \lambda^{m\frac{(k-1)n[(k-1)n+1]}{2}}.$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

A une racine de l'équation $\delta = 0$, qui n'est pas racine multiple et qui ne fait pas partie d'un groupe de racines, correspond, suivant les cas, une solution

$$F(z)[B(z)]^m \qquad \text{ou} \qquad F(z)[C(z)]^m,$$

F coïncidant dans chaque domaine avec une fonction holomorphe, non nulle au point limite du domaine.

CHAPITRE III.

10. Nous allons résoudre rapidement quelques équations dont nous aurons besoin dans la théorie générale; considérons l'équation

$$f(z_1) - f(z) = \mathrm{U}(z).$$

$\mathrm{U}(z)$ coïncidant avec une fonction $u_0(z)$ holomorphe dans le domaine x_0; avec une fonction $u_1(z)$ holomorphe, dans le domaine x_1; etc.

Posons $f(z) = \log y$, en supposant z dans le domaine x_0, on a successivement

$$\begin{aligned}
y &= y_1 e^{-u_0(z)},\\
y_1 &= y_2 e^{-u_1(z_1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{k-1} &= y_k e^{-u_{k-1}(z_{k-1})},\\
y &= y_k e^{-u_0(z)-u_1(z_1)\ldots u_{k-1}(z_{k-1})}.
\end{aligned}$$

Les fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ étant holomorphes dans les domaines $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, et $\varphi(z)$ étant holomorphe, on voit que le coefficient de y_k est une fonction holomorphe: si l'on a

$$u_0(x_0) + u_1(x_1) + \ldots + u_{k-1}(x_{k-1}) = 0.$$

il existe (8) une fonction coïncidant dans chaque domaine avec une fonction holomorphe non nulle au point limite et telle que l'on ait

$$y = y_1 e^{-\mathrm{U}(z)}.$$

Si l'on a

$$u_0(x_0) + u_1(x_1) + \ldots + u_{k-1}(x_{k-1}) \neq 0,$$

la fonction cherchée est de la forme

$$[\mathrm{B}(z)]^m \mathrm{Y} \quad \text{ou} \quad [\mathrm{C}(z)]^m \mathrm{Y},$$

Y coïncidant dans chaque domaine avec une fonction holomorphe non nulle au point limite.

On voit donc que l'équation

$$f(z_1) - f(z) = \mathrm{U}(z)$$

admet une solution coïncidant avec des fonctions holomorphes dans les domaines $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, *lorsque*

$$\mathrm{U}(x_0) + \mathrm{U}(x_1) + \ldots + \mathrm{U}(x_{k-1}) = 0;$$

et avec des fonctions ayant respectivement pour points logarithmiques $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, *dans le cas contraire.*

11. On vérifie immédiatement que les équations

$$y_1 - y = b^{n-1}(z), \qquad y_1 - y = c^{n-1}(z)$$

sont vérifiées par des polynomes de degré n en $b(z)$ ou en $c(z)$ (1).

12. L'application de la formule analogue à celle de l'intégration par parties montre, comme dans le cas de la convergence régulière, que les équations

$$y_1 - y = \mathrm{U}(z)\, b^{n-1}(z),$$
$$y_1 - y = \mathrm{U}\, c^{n-1}(z),$$

U étant une fonction définie comme il a été dit plus haut (10), ont pour solutions des polynomes de degré n en $b(z)$ ou $c(z)$, les coefficients de ces polynomes coïncidant dans chaque domaine avec une fonction holomorphe définie dans ce domaine; le coefficient de $b^n(z)$ $c^n(z)$ est une constante, qui ne peut être nulle que si l'on a

$$u_0(x_0) + u_1(x_1) + \ldots + u_{k-1}(x_{k-1}) = 0.$$

13. Dans l'étude relative aux groupes de racines, nous serons conduits, dans l'hypothèse $\varphi'(x_0)\varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{k-1}) \neq 0$, à des équations de la forme

$$y_1 - y = \frac{\mathrm{U}(z)}{\mathrm{V}(z)},$$

$\mathrm{U}(z)$ étant la fonction définie plus haut (10) et $\mathrm{V}(z)$ coïncidant avec

(1) *Annales de l'École Normale*, 1895.

$(z-x_i)^m$ dans le domaine x_i, m étant un entier positif, qui est le même pour tous les points $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Posons

$$y = t + s,$$

s étant une fonction qui coïncide avec

$$\frac{\mu_{0,i}}{[\beta_i(z)]^m} + \frac{\mu_{1,i}}{[\beta_i(z)]^{m-1}} + \ldots + \frac{\mu_{m-1,i}}{\beta_i(z)} \quad \text{dans le domaine } x_i,$$

$\mu_{0,i} \ldots \mu_{m-1,k-1}$ étant des constantes arbitraires.

Si nous supposons z dans le domaine x_i, nous devons avoir

$$t_1 - t = \frac{U_i(z)}{(z-x_i)^m} + \frac{\mu_{0,i}}{[\beta_i(z)]^m} + \ldots + \frac{\mu_{m-1,i}}{\beta_i(z)} - \frac{\mu_{0,i+1}}{[\beta_{i+1}(z_1)]^m} - \ldots - \frac{\mu_{m-1,i+1}}{\beta_{i+1}(z_1)^m};$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de la relation (¹)

$$\beta_{i+1}(z_1) = \varphi'(x_i)\beta_i(z),$$

$$t_1 - t = \frac{U_i(z)}{(z-x_i)^m} - \frac{1}{[\beta_i(z)]^m}\left[\frac{\mu_{0,i+1}}{[\varphi'(x_i)]^m} - \mu_{0,i}\right] - \ldots - \frac{1}{\beta_i(z)}\left[\frac{\mu_{m-1,i+1}}{\varphi'(x_i)} - \mu_{m-1,i}\right].$$

On peut alors profiter de l'indétermination des constantes μ pour faire disparaître les termes en

$$\frac{1}{z-x_i}.$$

Nous formons ainsi m équations linéaires entre $\mu_{0,i+1} \ldots \mu_{m-1,i+1}$; $\mu_{0,i} \ldots \mu_{m-1,i}$; si l'on fait la même opération pour chaque domaine, on trouve ainsi km équations à km inconnues; on reconnaît d'ailleurs immédiatement, en groupant les équations relatives à une même puissance des binomes, que les dénominateurs des expressions qui fournissent les μ sont de la forme

$$1 - [\varphi'(x_0) \ldots \varphi'(x_{k-1})]^{m-j} \neq 0.$$

On trouve donc un système unique de valeurs pour les constantes μ.

La fonction t est alors (10) de la forme

$$mb(z) + f(z),$$

(¹) KOENIGS, *Annales de l'École Normale*, 1884.

m étant une constante qui n'est nulle que si la somme

$$u'_0(x) + u_1(x_1) + \ldots + u'_{k-1}(x_{k-1})$$

est nulle, $u'_0(z), \ldots, u'_{k-1}(z)$ étant les fonctions holomorphes avec lesquelles coïncide le second membre de l'équation

$$t_1 - t = \mathrm{U}'(z).$$

L'équation proposée a donc une solution de la forme

$$m\,b(z) + \frac{\mathrm{F}(z)}{\mathrm{V}(z)}.$$

14. On en conclut, comme dans le cas de la convergence régulière, que la solution de l'équation

$$y_1 - y = \frac{\mathrm{U}(z)\,b^n(z)}{\mathrm{V}(z)}$$

est de la forme

$$\frac{\mathrm{Q}_0 + \mathrm{Q}_1\,b(z) + \ldots + \mathrm{Q}_n\,b^n(z)}{\mathrm{V}(z)} + \rho\,b^{n+1}(z),$$

$\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_n$ coïncidant dans chaque domaine avec des fonctions holomorphes, ρ étant une constante, et $\mathrm{V}(z)$ la fonction définie au paragraphe précédent.

CHAPITRE IV.

15. Nous avons vu comment des solutions de k équations fonctionnelles, relatives à la substitution $z, \varphi_k(z)$, on pouvait déduire une solution de l'équation relative à la substitution $z, \varphi(z)$, quand l'équation caractéristique $\delta = 0$ a une racine simple, ne faisant pas partie d'un groupe.

Supposons actuellement que $\delta = 0$ admette la racine 1, à l'ordre m

de multiplicité; soit Y′ la fonction définie dans chaque domaine et telle que l'on ait

$$p_0 Y'(z) + p_1 Y'(z_1) + \ldots + p_n Y'(z_n) = 0.$$

Si l'on pose $y = Y' t$, la fonction t devra satisfaire à l'équation

$$p_0(z) Y'(z)(t - t_n) + \ldots + p_{n-1}(z) Y'(z_{n-1})(t_{n-1} - t_n) = 0.$$

Prenons pour fonction inconnue $t_1 - t = u$, l'équation fonctionnelle qui définit u sera

$$\begin{aligned} 0 = p_0(z) Y'(z) u + [p_0(z) Y'(z) + p_1(z) Y'(z_1)] u_1 + \ldots \\ + [p_0 Y'(z) + \ldots + p_{n-1}(z) Y'(z_{n-1})] u_{n-1}; \end{aligned}$$

les coefficients de cette équation d'ordre $n-1$ sont définis dans les domaines $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

16. L'équation $\delta' = 0$ s'obtiendra en remplaçant dans $\delta = 0$,

$$p_i \text{ par } p_0 Y' + p_1 Y'_1 + \ldots + p_i Y'_i \quad \text{et} \quad p_n \text{ par } 0.$$

Si l'on remarque que l'on peut écrire

$$1 - r^k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & \ldots & 0 & -r \\ -r & 1 & 0 & . & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \ldots & -r & 1 \end{vmatrix}$$

on voit aisément, en tenant compte des égalités

$$Y'(x_j) = Y'(x_{j+k}) = \ldots = Y'(x_{j+\lambda k}),$$

que l'on a

$$\delta = \delta'(1 - r^k) Y'(x_0) Y'(x_1) \ldots Y'(x_{k-1}).$$

En effet, le terme (i, j) du produit $\delta'(1 - r^k)$ sera la somme des produits des termes de la $i^{\text{ième}}$ ligne de δ' par ceux de la $j^{\text{ième}}$ ligne de $1 - r^k$; ces derniers sont nuls, sauf les termes de rangs $j-1$ et j qui sont 1 et $-r$; les termes de mêmes rangs de la $i^{\text{ième}}$ ligne de

δ' sont

$$\begin{aligned}A_{j-1} = (p_{0,i-1}Y'_{i-1} + p_{1,i-1}Y'_i + \ldots + p_{j-i-1,i-1}Y'_{j-2})\,r^{j-i-1}\\ + (p_{0,i-1}Y'_{i-1} + \ldots + p_{k+j-i-1,i-1}Y'_{k+j-2})\,r^{k+j-i-1} + \ldots\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}A_j = (p_{0,i-1}Y'_{i-1} + \ldots + p_{j-i,i-1}Y_{j-1})\,r^{j-i}\\ + (p_{0,i-1}Y'_{i-1} + \ldots + p_{k+j-i,i-1}Y'_{k+j-1})\,r^{k+j-i} + \ldots.\end{aligned}$$

Le terme (i,j) est alors

$$\begin{aligned}A_j - rA_{j-1} &= p_{j-i,i-1}Y'_{j-1}r^{j-i} + p_{k+j-i,i-1}Y'_{k+j-1}r^{k+j-i} + \ldots\\ &= Y'_{j-1}(p_{j-i,i-1}r^{j-i} + p_{k+j-i,i-1}r^{k+j-i} + \ldots);\end{aligned}$$

c'est le produit Y'_{j-1} du terme (i,j) de δ, en supposant que ce terme ne renferme pas $p_{n,i-1}$; il en est de même encore dans le cas contraire; soit $\alpha k + j - i = n$; le dernier terme de A_{j-1} est

$$(p_{0,i-1}Y'_{i-1} + \ldots + p_{n-1,i-1}Y'_{n+i-2})\,r^{n-1},$$

et celui de A_j

$$(p_{0,i-1}Y'_{i-1} + \ldots + p_{n-k,i-1}Y'_{n-k+i-1})\,r^{n-k}.$$

On a alors

$$A_j - rA_{j-1} = \ldots + [-r^n(p_{0,i-1}Y'_{i-1} + \ldots + p_{n-1,i-1}Y'_{n+i-2})]$$

ou, en vertu de la relation

$$p_{0,i-1}Y'_{i-1} + p_{1,i-1}Y'_i + \ldots + p_{n-1,i-1}Y'_{n+i-2} + p_{n,i-1}Y'_{n+i-1} = 0,$$
$$A_j - rA_{j-1} = \ldots + r^nY_{n,i-1}Y'_{n+i-1};$$

c'est encore au facteur près $Y'_{n+i-1} = Y'_{\alpha k+j-1} = Y'_{j-1}$ le dernier terme de (i,j) dans δ.

Si l'on suppose $j < i+1$, il suffit de supposer nuls les coefficients p dont le premier indice serait négatif dans les termes que nous avons inscrits; les mêmes résultats subsistent.

17. Nous voyons que la transformation $y = Y't$, $t_1 - t = u$ conduit à une équation fonctionnelle, dont l'équation caractéristique admet les racines de l'équation $\delta = 0$, sauf une racine égale à l'unité; de plus, dans la formation de l'équation d'ordre $(n+1)k$, on suppose non nuls les déterminants principaux relatifs aux u; cela résulte de

ce que les déterminants relatifs aux y sont différents de zéro; le système de valeurs $y_1 y_2 \ldots y_{k-1} y_{k+1} \ldots$ étant unique, il en sera de même des valeurs u, lorsque l'on connaîtra $u_1 u_k \ldots$ par l'équation d'ordre $(n-1)k$.

L'équation

$$p_0 Y'.u + \ldots + (p_0 Y' + p_1 Y'_1 + \ldots + p_{n-1} Y'_{n-1}) u_{n-1} = 0$$

a une solution qui coïncide avec une fonction holomorphe, non nulle, dans chaque domaine, puisque $\delta' = 0$ admet encore la racine 1; on en conclut que la fonction t définie par l'équation

$$t_1 - t = u$$

est de la forme

$$m' b(z) + F(z).$$

18. Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit que l'on peut répéter ce qui a été dit relativement à la convergence régulière, dans le cas des racines multiples ou des racines faisant partie d'un groupe.

La transformation donne en effet, dans les deux cas, des équations fonctionnelles de même nature et conduit à des équations auxiliaires du premier ordre dont la théorie est la même, que la convergence soit régulière ou non; le seul point important à établir était la suppression d'une racine 1 dans l'équation caractéristique; nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, qui résume cette théorie :

L'équation fonctionnelle

$$p_0(z) f(z) + p_1(z) f(z_1) + \ldots + p_n f(z_n) = 0$$

relative à la substitution $z, \varphi(z)$, qui admet un groupe circulaire limite $x_0 x_1 \ldots x_{k-1}$, a n solutions; chacune d'elles coïncide dans les domaines $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ avec une solution des équations

$$\begin{array}{llll}
P_0(z) f(z) & + P_1(z) f(z_k) & + \ldots + P_n(z) f(z_{nk}) & = 0, \\
P_0(z_1) f_1(z_1) & + P_1(z_1) f_1(z_{k+1}) & + \ldots + P_n(z_1) f_1(z_{nk+1}) & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots, \\
P_0(z_{k-1}) f_{k-1}(z_{k-1}) & & + \ldots + P_n(z_{k-1}) f_{k-1}(z_{nk+k-1}) & = 0,
\end{array}$$

les fonctions dont l'ensemble forme une solution devant correspondre à *une même racine de l'équation caractéristique commune à ces k équations.*

19. Tous les résultats trouvés pour la solution générale et dans l'étude des relations entre différentes solutions dans le cas de la convergence régulière subsistent pour la convergence périodique.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

20. Les applications que je me propose de développer sont de deux sortes : les premières sont relatives à la détermination d'une courbe définie par une équation fonctionnelle entre les abscisses et les ordonnées des points de cette courbe; c'est le problème analogue à celui que l'on résout dans l'étude d'une courbe définie par une équation différentielle.

Je recherche, en second lieu, les propriétés qui résultent, pour certaines courbes données, de la considération de la correspondance entre points, cette correspondance se ramenant aisément à une relation fonctionnelle entre les paramètres qui définissent les points.

Problème I. — *Trouver une courbe plane telle que les ordonnées des points, dont les abscisses sont en progression géométrique, soient également en progression géométrique.*

Soient x et x_1 les abscisses de deux points consécutifs de la série; y et y_1 leurs ordonnées.

Si l'on pose $y = f(x)$, on a

$$f(x_1) = k' f(x), \tag{1}$$

$$x_1 = kx.$$

L'équation fonctionnelle (1) a pour solution

$$f(x) = Cx,$$

si l'on suppose $k' = k$.

On sait que, si l'on pose $k' = k^\alpha$, l'équation (1) admet la solution

$$f(x) = C^\alpha x^\alpha.$$

La fonction $B(x)$ est ici x, la fonction $b(x)$ est $\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} k}$, et la solution de l'équation fonctionnelle est

$$x^\alpha \Omega\left(\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} k}\right),$$

Ω étant une fonction périodique de période égale à l'unité.

Bornons-nous à considérer les solutions

$$y = f(x) = C' x^\alpha.$$

Aux valeurs entières positives de α correspondent des courbes paraboliques, sauf à la valeur 1, qui donne une droite; à la valeur $\alpha = -1$ correspond une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Problème II. — *Trouver les courbes planes telles que $x, x_1, \ldots, x_n$ étant des nombres en progression géométrique de raison k, les ordonnées des points d'abscisses $x, x_1, \ldots, x_n$ soient liées par une relation donnée linéaire et homogène, indépendante de x.*

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une telle courbe; la fonction $f(x)$ doit satisfaire à l'équation

$$f(x) = k_1 f(kx) + k_2 f(k^2 x) + \ldots + k_n f(k^n x).$$

Cette équation a pour solutions des fonctions de la forme

$$\sum x^\alpha \left(\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} k}\right)^p \Omega\left(\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} k}\right),$$

k^α étant racine de l'équation

$$1 - k_1 t - k_2 t^2 - \ldots - k_n t^n = 0.$$

Nous voyons d'abord qu'il ne peut y avoir de courbes algébriques jouissant de la propriété énoncée que si l'équation en t admet des racines, puissances entières ou fractionnaires de la raison k; si $k^{\alpha_1}, \ldots, k^{\alpha_p}$ sont ces racines, l'équation générale de ces courbes est

$$y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + \ldots + C_p x^{\alpha_p},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_p$ étant des constantes arbitraires.

Considérons en particulier l'équation fonctionnelle

$$k^3 f(x) = (k + k^2) - f(kx) - f(k^2 x)$$

qui admet pour solution

$$y = Cx + C' x^2,$$

équation d'une parabole.

En mettant l'équation fonctionnelle sous la forme

$$k^2[kf(x) - f(kx)] = kf(kx) - f(k^2 x),$$

on a le théorème suivant :

Si, dans une parabole rapportée à un diamètre, l'abscisse x d'un point est moyenne proportionnelle entre les abscisses x', x'' de deux autres points, on a, entre les ordonnées de ces points, la relation

$$\frac{ky' - y''}{ky' - y'} = k^2.$$

Problème III. — *Déterminer les courbes telles qu'à des points, dont les abscisses sont en progression géométrique de raison k, correspondent des sous-tangentes en progression géométrique de raison k'.*

Si x et kx sont les abscisses de deux points consécutifs, on doit avoir, en désignant par $f(x)$ l'ordonnée relative à l'abscisse x,

$$\frac{f(kx)}{f'(kx)} = k' \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Les seules courbes algébriques répondant à la question seront telles que l'on ait

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = Cx^{-\alpha},$$

C et α étant des constantes.

On voit d'ailleurs, en intégrant, que $f(x)$ n'est une fonction algébrique que si α est égale à l'unité ou $k = k'$ et C un nombre rationnel : l'équation générale des courbes cherchées est

$$y = C' x^{\frac{m}{n}}.$$

On trouve, comme cas particuliers, la droite et la parabole.

Problème IV. — Même question, en remplaçant la sous-tangente par la sous-normale.

En désignant encore par $f(x)$ l'ordonnée d'un point de la courbe, on trouve que cette fonction doit vérifier l'équation fonctionnelle

$$f(kx) f'(kx) = k' f(x) f'(x).$$

Le produit ff' est donc de la forme

$$Cx^\alpha,$$

en se bornant aux courbes algébriques, ce qui suppose α rationnel et différent de -1.

En intégrant l'équation

$$ff' = Cx^\alpha,$$

on trouve

$$f^2 = \frac{2}{\alpha + 1} Cx^{\alpha+1} + C'.$$

L'équation générale des courbes algébriques cherchées est donc

$$y^2 = \frac{2}{\alpha + 1} Cx^{\alpha+1} + C'.$$

1° Si l'on suppose $C' = 0$, $\alpha = 1$, on trouve des droites passant par l'origine ; les raisons k et k' sont alors égales ;

2° $C' = 0$, $\alpha = 3$, la courbe se réduit à l'ensemble de deux paraboles rapportées à l'axe et à la tangente au sommet ; l'axe étant l'axe des y et les sous-normales relatives à la tangente au sommet, on a alors $k' = k^3$;

3° $C' = 0$, $\alpha = 0$, la courbe est une parabole dont l'axe est l'axe des x ; on a alors $k' = 1$; la sous-normale est constante ;

4° $\alpha = 1$, $C \neq 0$, la courbe est une ellipse ou une hyperbole rapportée à ses axes; on voit que, pour ces courbes, *les sous-normales déterminées sur un axe sont en progression géométrique, si les distances au centre des projections sur cet axe des pieds des normales sont en progression géométrique; les raisons de ces deux progressions sont égales;*

5° Le cas de $C' = 0$, $\alpha = 2$ donne la parabole semi-cubique.

Problème V. — *Trouver les courbes planes telles que, à $n+1$ points dont les abscisses sont en progression géométrique de raison k, correspondent des sous-tangentes ou des sous-normales entre lesquelles existe toujours une même relation linéaire et homogène, à coefficients constants.*

Soient x, kx, ..., $k^n x$ les abscisses de ces points et $S, S_1, \ldots, S_n$ les sous-tangentes entre lesquelles on a la relation

$$S + p_1 S_1 + \ldots + p_n S_n = 0.$$

S, étant une fonction de l'abscisse x, est déterminée ici par une équation fonctionnelle d'ordre n à coefficients constants.

La fonction $B(x)$ étant ici x, la solution générale de l'équation sera

$$S = \sum x^\alpha \Omega\left(\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} k}\right) \cdot \left(\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} k}\right)^m,$$

en supposant que k^α soit racine de l'équation

$$p + p_1 t + \ldots + p_n t^n = 0.$$

Si l'on s'occupe uniquement des solutions algébriques, on peut négliger les termes en $\frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} k}$, qui proviennent des racines multiples de l'équation en t et les multiplicateurs Ω; on ne devra également prendre que les racines k^α pour lesquelles α est rationnel. On voit donc déjà que, si l'équation en t n'admet aucune racine qui soit puissance rationnelle de la raison k, il n'existe aucune courbe algébrique jouissant de la propriété énoncée.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soient $k^{\alpha_1}, \ldots, k^{\alpha_i}$ des racines pour lesquelles $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ sont rationnels, l'équation générale des courbes algébriques cherchées sera

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \sum C x^\alpha.$$

Il reste à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\Sigma\, C x^\alpha}.$$

Groupons les termes x^α suivant le signe de α

$$\frac{1}{\Sigma\, C x^\alpha} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=r} C_i x^{-\frac{m_i}{n_i}} + \sum_{j=1}^{j=s} C'_j x^{+\frac{m'_j}{n'_j}}}.$$

Pour intégrer le second membre, posons

$$x = t^{n_1 \ldots n_r . n'_1 \ldots n'_s},$$

$$dx = n_1 \ldots n_r . n'_1 \ldots n'_s \, t^{n_1 \ldots n_r . n'_1 \ldots n'_s - 1}\, dt.$$

L'expression à intégrer devient

$$\frac{n_1 \ldots n_r . n'_1 \ldots n'_s \, t^{n_1 \ldots n_r . n'_1 \ldots n'_s - 1}\, dt}{\sum_1^r C_i t^{-\nu \frac{m_i}{n_i}} + \sum_1^s C'_j t^{\nu \frac{m'_j}{n'_j}}} \qquad (\nu = n_1 \ldots n_r . n'_1 \ldots n'_s).$$

Si nous supposons les exposants rangés par ordre de grandeur croissante, nous ferons disparaître les puissances négatives en multipliant les deux termes par $t^{\nu \frac{m_1}{n_1}}$.

Le numérateur sera de degré $\nu - 1 + \nu \frac{m_1}{n_1}$ et le dénominateur de degré $\nu \frac{m'_s}{n'_s} + \nu \frac{m_1}{n_1}$.

Pour que $f(x)$ soit algébrique, il faut que l'intégrale de cette fonction rationnelle ne contienne que des logarithmes, ce qui exige d'abord que le degré du numérateur soit inférieur à celui du dénominateur

$$\nu - 1 < \nu \frac{m'_s}{n'_s}.$$

Cette inégalité entre nombres entiers montre que m'_s est supérieur ou égal à n'_s.

Cette condition étant supposée remplie, il faudra de plus que les constantes C soient telles que l'équation obtenue en annulant le dénominateur n'ait pas de racines multiples.

L'intégrale sera alors de la forme

$$\operatorname{Log}(t-a_1)^{b_1}(t-a_2)^{b_2}\ldots(t-a_m)^{b_m}$$

et l'équation de la courbe sera

$$y=\left(x^{\frac{1}{\gamma}}-a_1\right)^{b_1}\ldots\left(x^{\frac{1}{\gamma}}-a_m\right)^{b_m}.$$

Dans le problème relatif aux sous-normales, on est conduit à l'équation

$$f(x)f'(x)=\Sigma C x^{\alpha},$$

dont l'intégrale ne contiendra que des fonctions algébriques, si α n'est jamais égal à -1.

21. Je me bornerai aux exemples qui précèdent pour la détermination des courbes définies par des propriétés fonctionnelles; toutefois, je ferai une remarque importante, qui résulte de la propriété des équations fonctionnelles à coefficients constants d'admettre pour solutions des fonctions linéaires et homogènes des puissances de $B(x)$ ou, plus généralement, d'une solution particulière convenablement choisie.

Supposons que l'on ait établi que, des points d'une courbe se succédant suivant une voie déterminée, une grandeur liée à ces points se reproduit multipliée par une même constante, quand on passe d'un point au suivant; on déduira immédiatement une infinité de courbes jouissant de cette propriété que, entre les grandeurs relatives à n points consécutifs liés par la loi donnée, existe une même relation linéaire et homogène.

Nous avons fait des applications de cette remarque dans les problèmes II et V.

Cette remarque s'applique d'ailleurs également aux équations fonctionnelles qui se ramènent aux équations à coefficients constants.

22. Je me propose maintenant de donner quelques explications relatives à la correspondance que l'on peut établir entre les points

d'une courbe donnée; dans l'étude de cette correspondance, il y a lieu de rechercher s'il existe des points *unis*, c'est-à-dire, des points qui se correspondent à eux-mêmes, ou des points *unis périodiquement*, c'est-à-dire des points qui forment un cycle fermé; il peut arriver que la correspondance soit telle que tous les points de la courbe soient distribués en cycles fermés : tel est le cas des polygones de Poncelet.

Si la correspondance donne une série illimitée de points, il y a lieu de rechercher si ces points tendent vers un point *uni* ou s'ils tendent périodiquement vers des points *unis formant un cycle fermé;* enfin, il peut arriver que ces points ne tendent vers aucune limite.

En second lieu, on peut étudier la grandeur qui se reproduit multipliée par une constante, quand on passe d'un point au suivant; c'est en quelque sorte un invariant de la correspondance. L'interprétation d'équations fonctionnelles relatives à la substitution qui définit la correspondance fournit des relations entre certaines grandeurs qui dépendent des points de la suite.

I. — Correspondance entre les points d'une ellipse situés sur une tangente au cercle tangent aux sommets du petit axe.

L'ellipse étant supposée rapportée à ses axes, désignons par $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$; $a\cos\varphi'$, $b\sin\varphi'$ les coordonnées de deux points correspondants : la droite qui joint ces points étant tangente au cercle, on a

$$a^2\cos^2\frac{\varphi'-\varphi}{2} = b^2\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2} + a^2\sin^2\frac{\varphi'+\varphi}{2},$$

ou, en posant $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = z$, $\operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2} = z_1$,

$$a^2(1+zz_1)^2 = b^2(1-zz_1)^2 + a^2(z+z_1)^2.$$

Cette équation définit z_1 en fonction de z; on trouve deux valeurs

$$z_1' = \frac{az+c}{cz+a}, \quad z_1'' = \frac{az-c}{a-cz}, \qquad c^2 = a^2 - b^2.$$

On peut remarquer que ces deux substitutions sont inverses; l'une conduit du premier point au second; l'autre, du second au premier.

Les valeurs limites doivent vérifier l'équation

$$cz^2 - c = 0, \qquad z = \pm 1.$$

Si l'on forme $\frac{dz'_1}{dz}$, on trouve, en remplaçant z par 1, $\frac{a-c}{a+c}$ dont le module est inférieur à l'unité; 1 est donc une valeur limite pour la première substitution; -1 est limite pour la seconde substitution.

Nous pouvons évidemment nous borner à considérer ici le premier quadrant : z étant alors positif et inférieur à l'unité, on a

$$1 - z > 1 - \frac{az+c}{cz+a},$$

les valeurs $z'_1, \ldots, z'_n$ sont toutes inférieures à l'unité et ont pour limite l'unité; les points correspondants de l'ellipse se rapprochent indéfiniment du sommet B du petit axe; les sommets du petit axe sont les seuls points *unis;* ils correspondent chacun à une substitution.

La fonction $B(z)$ est ici $\frac{1-z}{1+z}$; on a

$$\frac{1-z'_1}{1+z'_1} = \frac{a-c}{a+c}\,\frac{1-z}{1+z}.$$

On peut donc interpréter de la façon suivante cette propriété de la fonction $\frac{1-z}{1+z}$.

Si l'on introduit l'angle φ, on voit que

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

On a donc, entre les angles φ et φ' de deux points correspondants, la relation

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{a-c}{a+c}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Si M et M' sont ces deux points et M_1, M'_1 les points du cercle homographique dont ils sont les projections, les angles $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$ sont égaux aux angles $M_1A'B_1$, $M'_1A'B_1$ et les droites $A'M_1$, $A'M'_1$ rencontrent AB_1 en des points $P_1 P'_1$ tels que l'on ait

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{B_1 P_1}{A' B_1} \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{B_1 P'_1}{A' B_1},$$

d'où l'on conclut

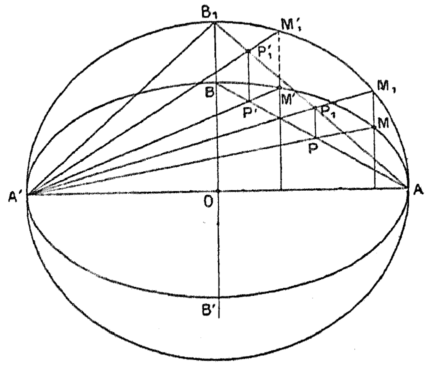
$$B_1 P'_1 = \frac{a - c}{a + c} B_1 P_1.$$

Cette propriété donne un moyen simple de construire le point M', connaissant le point M.

On voit également, en projetant le cercle sur le plan de l'ellipse, que les projections P, P' des points P_1, P'_1 vérifient la relation

$$BP' = \frac{a - c}{a + c} BP.$$

Si, par le centre, on mène une parallèle à AB', on voit que *les*



droites, qui joignent le sommet A' aux points correspondants de l'ellipse situés dans le premier quadrant, déterminent, sur celui des diamètres conjugués égaux non situé dans ce quadrant, deux divisions semblables.

II. — Correspondance entre les points d'une hyperbole situés sur une tangente à l'hyperbole conjuguée.

Soient

$$xy = k^2, \qquad xy = -k^2$$

les équations de ces hyperboles rapportées aux asymptotes.

La tangente en un point α, β de la première a pour équation

$$\beta x + \alpha y - 2k^2 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites qui joignent le centre aux points de l'hyperbole conjuguée situés sur cette droite est

$$\alpha^2 t^2 + 2(2k^2 + \alpha\beta)t + \beta^2 = 0.$$

Si l'on élimine α et β entre les relations

$$\alpha\beta = k^2,$$
$$t_1 + t = -2\frac{2k^2 + \alpha\beta}{\alpha^2},$$
$$tt_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

on trouve

$$36tt_1 = (t + t_1)^2$$

ou

$$9[(t+t_1)^2 - (t-t_1)^2] = (t+t_1)^2,$$
$$t_1 = t\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}, \qquad \text{et} \qquad t_1 = t\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}.$$

Le coefficient de t étant inférieur à l'unité, les valeurs t diminuent constamment et ont pour limite zéro, si l'on considère la première substitution; la seconde est la substitution inverse; les valeurs de t augmentent indéfiniment; les points *unis* sont les points à l'infini et ils sont limites avec convergence régulière.

Remarquons que les abscisses et les ordonnées des points correspondants sont en progression géométrique.

La fonction $B(t)$ est ici t; la fonction $b(t)$ sera alors, à un facteur constant près, $\operatorname{Log} t$; on a, pour la première substitution,

$$\operatorname{Log} t_1 = \operatorname{Log} t + \operatorname{Log}\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}},$$

et

$$\operatorname{Log} y_1 = \operatorname{Log} y + \operatorname{Log}(-3 + 2\sqrt{2}).$$

Si l'on remarque que y et y_1 sont de signes contraires, on en conclut que les points sont sur des branches différentes (ce qui est d'ailleurs évident) et que *les segments hyperboliques sont en progression arithmétique*.

Dans les deux cas que nous venons de traiter, les coniques étaient bitangentes; on peut, par transformation homographique, déduire des résultats analogues relatifs à deux coniques bitangentes quelconques; je citerai le cas des points d'une parabole situés sur une tangente à une parabole égale et de même axe; les ordonnées sont en progression arithmétique.

III. — Correspondance entre les points de rencontre d'une hyperbole équilatère et d'une normale à cette courbe.

Si α, β sont les coordonnées du pied de la normale à l'hyperbole

$$xy - k^2 = 0,$$

les coordonnées du second point d'intersection sont

$$x = -\frac{k^4}{\alpha^3}, \qquad y = -\frac{k^4}{\beta^3}.$$

Les valeurs limites de la substitution

$$z_1 = -\frac{k^4}{z^3}$$

sont, en laissant de côté le pôle $z = 0$, les racines imaginaires de l'équation $z^4 + k^4 = 0$; n'ayant ici à s'occuper que des valeurs réelles de z, nous ne trouvons que $z = 0$, qui est un pôle et est une valeur limite pour la convergence de période 2; l'infini étant l'autre valeur du cycle, la substitution est alors

$$z_2 = +\frac{z^9}{k^8}.$$

On voit que les points correspondants pris de deux en deux ont pour limites respectives les points d'abscisses 0 et ∞; c'est-à-dire que, si le point α dont on part est tel que l'on ait $|\alpha| < k$, les points $\alpha_2, \alpha_4, \ldots$ se rapprochent du point à l'infini sur l'axe des y; les points α_1, α_3, ... ont pour limite le point à l'infini sur l'axe des x; le contraire a lieu si $|\alpha| > k$.

La transformation $\left| z_2, \frac{z^9}{k^8} \right|$ a pour valeur limite zéro et la dérivée de la fonction de transformation est nulle pour cette valeur; la fonction invariante $C(z)$ aura un point logarithmique pour $z = 0$ (1).

Si l'on pose

$$C(z) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} \frac{(-1)^{\frac{1}{4}}}{k},$$

on a

$$C(z_1) = \operatorname{Log}(-k^4) - 3 \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} \frac{(-1)^{\frac{1}{4}}}{k} = -3C(z).$$

Appliquons ce résultat au cas qui nous occupe; les valeurs de x et α étant de signes contraires, les points correspondants sont sur des branches différentes.

Si l'on désigne par α' et x' les valeurs absolues de α et x, on a, en considérant les parties réelles de $C(z)$ et $C(z_1)$,

$$\operatorname{Log}\left(\frac{x}{k}\right) = -3 \operatorname{Log}\left(\frac{\alpha}{k}\right),$$

égalité qui exprime que *l'aire du segment hyperbolique, compris les ordonnées du point x et du sommet de la branche correspondante, est le triple de l'aire du segment compris entre le sommet de l'autre branche et l'ordonnée du point x.*

Les aires des segments hyperboliques limités, d'une part à un sommet, d'autre part aux points de la suite situés sur la branche correspondante, sont en progression géométrique.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que les résultats qui précèdent subsistent si l'on considère une hyperbole quelconque en remplaçant la normale par la droite de coefficient angulaire $\frac{\alpha}{\beta}$.

---

(1) *Annales de l'École Normale*, 1894.

IV. — Correspondance entre un point d'une cubique et son tangentiel.

Clebsch a établi que le tangentiel d'un point d'une cubique ayant un point de rebroussement a pour limite le point de rebroussement, et que le point de contact a pour limite le point d'inflexion; je me propose d'étendre cette proposition au cas d'une cubique à point double quelconque.

Soit l'équation d'une cubique

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine aux points d'intersection de la cubique et d'une droite

$$ux + vy = 1$$

est

$$t^3(d + c'v) + t^2(c + b'v + c'u) + t(b + a'v + b'u) + a + a'u = 0.$$

Si cette droite est tangente à la courbe et si l'on désigne par t le paramètre du point de contact et par t_1 celui du tangentiel, on a

$$\begin{aligned}(t_1 + 2t)(d + c'v) + c + b'v + c'u &= 0,\\ (2t_1t + t^2)(d + c'v) - (b + a'v + b'u) &= 0,\\ t_1t^2(d + c'v) + a + a'u &= 0.\end{aligned}$$

Éliminant u et v entre ces équations, on trouve la relation suivante entre t_1 et t

$$\begin{vmatrix} c' & b' + c'(t_1 + 2t) & c + d(t_1 + 2t) \\ b' & a' - c'(2t_1t + t^2) & b - d(2t_1t + t^2) \\ a' & c't_1t^2 & a + dt_1t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} c' & b'd - cc' & c + d(t_1 + 2t) \\ b' & a'd - bc' & b - d(2tt_1 + t^2) \\ a' & -ac' & a + dt_1t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$t_1 = \frac{At^2 + 2Bt - C}{Dt^2 - 2At - B},$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= a'b'd - a'cc' + ac'^2,\\
B &= ab'c' + a'^2d - a'bc',\\
C &= aa'c' + a'bb' - a'^2c - ab'^2,\\
D &= a'c'd + b'cc' - bc'^2 - b'^2d.
\end{aligned}$$

Nous distinguerons maintenant trois cas suivant la nature du point double :

1° *Point de rebroussement.* — En prenant la tangente en ce point pour axe des x, on doit faire dans l'équation $a' = 0$, $b' = 0$ et l'on peut supposer $c' = 1$.

La relation entre t et t_1 devient

$$t_1 = \frac{-at}{bt + 2a}.$$

Les valeurs limites sont ici 0 et $-\frac{3a}{b}$, qui correspondent, la première au point double et la seconde, on le vérifie aisément, au point d'inflexion.

Si l'on prend pour axe des y la droite qui joint le point de rebroussement au point d'inflexion, on a $b = 0$ et la relation devient

$$t_1 = -\frac{t}{2}.$$

La valeur absolue de t_1 étant toujours inférieure à celle de t, *le tangentiel se rapproche du point de rebroussement et a ce point pour limite ;* si l'on considère la transformation inverse, qui permet de passer d'un point de la courbe au point de contact de la tangente issue de ce point, on voit que *ce point de contact se rapproche indéfiniment du point d'inflexion.*

Le point de rebroussement et le point d'inflexion sont des *points unis limites.*

La fonction $B(t)$ est ici t, c'est-à-dire que *les rapports des distances des points de la suite à la tangente de rebroussement et à la droite qui joint ce point au point d'inflexion forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.*

2° *Point double à tangentes réelles distinctes.* — Nous pouvons prendre les tangentes au point double pour axes, ce qui revient à supposer $a' = c' = 0$; supposons de plus $b' = 1$.

La fonction de transformation est alors

$$t_1 = -\frac{a}{d}\frac{1}{t^2}.$$

Les seules valeurs limites, en supposant la convergence régulière, sont données par la relation

$$t^3 + \frac{a}{d} = 0.$$

La dérivée de la fonction étant $\frac{2a}{d}\frac{1}{t^3}$, on voit qu'elle est, pour ces valeurs, égale à -2; ces valeurs de t ne sont donc pas des valeurs limites pour la convergence régulière.

La suite des points, pris de deux en deux, est définie par la relation

$$t_2 = -\frac{d}{a} t^4.$$

Nous trouvons comme valeurs limites de t

$$t = 0 \qquad \text{et} \qquad t = -\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

La seule valeur acceptable est $t = 0$ qui forme un cycle avec $t = \infty$, relativement à la première substitution.

On voit d'ailleurs que si t est, en valeur absolue, inférieur à la valeur absolue de $\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$, les valeurs absolues de $t, t_2, t_4, \ldots, t_{2n}$ diminuent indéfiniment et ont pour limite zéro; si la valeur de t est supérieure à celle de $\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$, les valeurs absolues de $t, t_2, \ldots, t_{2n}$ augmentent indéfiniment.

Remarquons que, si la valeur absolue de t est inférieure à celle de $\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$, la valeur absolue de t_1 lui est supérieure, et réciproquement, de telle sorte que, quel que soit le point pris sur la courbe, les tangentiels successifs ont pour limite le point double, les tangentes en ces points tendant, suivant la suite considérée, vers l'une ou l'autre des tangentes au point double.

Les points qui correspondent à $t = \left(-\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$ sont les points d'inflexion; nous n'avons ici à nous occuper que du point réel, qui correspond à la racine cubique arithmétique de $-\frac{a}{d}$.

La droite qui joint le point double au point pris sur la courbe étant dans un des angles formés par la droite qui unit le point double au point d'inflexion et sa conjuguée par rapport aux tangentes au point double, les tangentiels, pris de deux en deux, auront pour limite le point double avec la tangente en ce point situé dans l'angle considéré.

Les points d'inflexion sont des points limites à convergence régulière pour la transformation

$$t_1 = \pm\sqrt{-\frac{a}{d}\frac{1}{t}},$$

qui permet de passer d'un point au point de contact de la tangente issue de ce point; si l'on ne considère que les tangentes réelles, on devra prendre t de même signe que $-\frac{a}{d}$; la valeur t_1 sera donc déterminée de signe; on voit que cette condition revient à prendre les points $t, t_1, \ldots$ dans l'angle des tangentes au point double qui contient le point d'inflexion réel; pour tout point pris dans les autres angles, *les tangentes sont imaginaires*.

Ceci posé, il est facile de voir que les valeurs de t convergent régulièrement vers $-\sqrt[3]{\frac{a}{d}}$.

On a, quel que soit le signe de $\frac{a}{d}$, en remarquant que t et t_1 ont un signe contraire à celui de $\frac{a}{d}$,

$$\left|t_1 + \sqrt[3]{\frac{a}{d}}\right| < \left|t + \sqrt[3]{\frac{a}{d}}\right|.$$

Remarquons que, $-\sqrt[3]{\frac{a}{d}}$ étant compris entre t et t_1, les points correspondants de la courbe sont de part et d'autre du point d'inflexion et tendent vers ce point en parcourant deux régions différentes de la courbe.

La fonction $B(t)$ est ici

$$\operatorname{Log} t + \operatorname{Log} \sqrt[3]{-\frac{d}{a}},$$

et l'on a

$$B\left(-\frac{a}{d}\frac{1}{t^2}\right) = -2B(t).$$

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : en posant $xy = k^2$, l'aire du segment de l'hyperbole, qui passe par le point considéré et qui a pour asymptotes les tangentes au point double, a pour expression

$$s\,(^1) = k^2 \sin\theta \operatorname{Log}\frac{x}{k} = -\frac{1}{2}k^2 \sin\theta \operatorname{Log} t,$$

en supposant t positif et le segment limité à l'ordonnée du sommet et à l'ordonnée du point considéré, θ étant l'angle des tangentes au point double.

t_1 étant positif en même temps que t, on aura pour l'aire correspondante s_1

$$s_1 = -\frac{1}{2}k_1^2 \sin\theta \operatorname{Log} t_1.$$

On en conclut

$$\frac{2s_1}{k^2\sin\theta} + \operatorname{Log}\sqrt[3]{-\frac{a}{d}} = 2\left(\frac{2s}{k_1^2\sin\theta} + \operatorname{Log}\sqrt[3]{-\frac{a}{d}}\right),$$

$k^2\sin\theta$ étant l'aire du parallélogramme limité aux tangentes au point double et aux parallèles menées par le point (x, y) ; d'ailleurs, on peut répéter les mêmes remarques pour le point d'inflexion relativement à $\operatorname{Log}\sqrt[3]{-\frac{a}{d}}$.

On voit donc que *la somme des rapports de l'aire du segment hyperbolique et l'aire du parallélogramme qui correspondent à un point et des aires qui correspondent au point d'inflexion fait partie d'une progression géométrique de raison* Q, *quand on passe d'un point à son tangentiel.*

La même interprétation pour la fonction $b(t) = -\dfrac{\operatorname{Log} t}{\operatorname{Log}(-2)}$ dans

---

(1) s est une aire positive ou négative, suivant que x est supérieure ou inférieure à k.

le cas de la cubique à point de rebroussement donnait un résultat analogue, en ayant soin de ne considérer que les parties réelles; dans le cas que nous venons d'étudier, on peut également supposer t et t_1 négatifs; les relations entre les parties réelles des logarithmes conduisent aux mêmes résultats.

3° *Point double isolé.* — Prenons les axes de façon que l'on ait $a' = c'$, $b' = 0$, la relation qui lie t et t_1 sera

$$t_1 = \frac{lt^2 + 2t - l}{t^2 - 2lt - 1}, \qquad l = \frac{a - c}{d - b},$$

et, si l'on pose

$$t' = \frac{t - i}{t + i}, \qquad t'_1 = \frac{t_1 - i}{t_1 + i},$$

la relation précédente devient

$$t'_1 = \frac{l - i}{l + i}\,\frac{1}{t'^2}.$$

Si les tangentiels successifs tendent régulièrement ou périodiquement vers des points limites, les quantités t et, par suite, les quantités t' tendront vers des valeurs limites qui seront le pôle zéro et l'infini ou des racines d'une équation telle que

$$1 = a^{1-2+2^2+\dots+(-2)^{n-1}}\, t'^{(-2)^n-1}, \qquad a = \frac{l - i}{l + i},$$

relative à la convergence de période n.

Suivant que n est pair ou impair, on déterminera t' par l'une ou l'autre des équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} t'^{2^n-1} &= \left(\frac{l - i}{l + i}\right)^{\frac{2^n-1}{3}}, \\ t'^{2^n+1} &= \left(\frac{l - i}{l + i}\right)^{\frac{2^n+1}{3}}. \end{aligned} \right.$$

La fonction de transformation est alors

$$t'_n = \left(\frac{l + i}{l - i}\right)^{\frac{2^n-1}{3}} t^{+2^n},$$

$$t'_n = \left(\frac{l - i}{l + i}\right)^{\frac{2^n+1}{3}} t^{-2^n}.$$

La dérivée est, suivant les cas,

$$2^n \left(\frac{l+i}{l-i}\right)^{\frac{2^n-1}{3}} t^{2^n-1},$$

$$-2^n \left(\frac{l-i}{l+i}\right)^{\frac{2^n+1}{3}} t^{-2^n-1},$$

dont la valeur absolue est toujours 2^n; ces valeurs de t' ne peuvent donc être des valeurs limites pour la convergence de période n; toutefois, aux valeurs de t', racines des équations (1), correspondent des valeurs réelles de t; on a, en effet,

$$t' = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

et

$$t = i\,\frac{1+t'}{1-t'} = i\,\frac{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}{1-\cos\varphi - i\sin\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

A ces valeurs correspondent donc des points qui sont sommets de polygones à la fois inscrits et circonscrits à la courbe; le nombre des côtés sera égal à n, si n est premier; dans le cas contraire, il y aura un nombre moindre de côtés.

Laissant de côté ces points particuliers, nous voyons que, dans le cas général, il ne peut y avoir comme points limites que les points qui correspondent à $t' = 0$, $t' = \infty$, c'est-à-dire aux tangentes au point double; comme nous ne considérons que les points réels et les tangentes réelles, ces limites sont à rejeter; on peut donc conclure que, *dans une cubique acnodale, les tangentiels successifs ne tendent vers aucun point limite.*

Pour étudier la correspondance inverse, il est préférable de prendre pour axes deux droites joignant le point double à deux points d'inflexion (¹); ces points sont, dans le cas général, donnés par

$$t = \frac{At^2 + 2Bt - C}{Dt^2 - 2At - B},$$

$$Dt^3 - 3At^2 - 3Bt + C = 0.$$

(¹) Dans une cubique acnodale, les trois points d'inflexion sont réels.

Dans le système d'axes adopté ici, on doit avoir $D = C = 0$ et la relation entre t et t_1 est

$$t_1 = -\frac{t^2 + 2kt}{2t + k},$$

$-k$ étant le coefficient angulaire qui correspond au troisième point d'inflexion; les points de contact des tangentes issues du point t_1 sont définis par l'équation

$$t^2 + 2t(t_1 + k) + kt_1 = 0.$$

Aux points d'inflexion correspondent les points eux-mêmes et les trois points $-2k$, $-\frac{k}{2}$ et k.

Supposons t_1 compris entre $-\frac{k}{2}$ et k (¹), valeurs qui comprennent zéro, et qui correspondent aux points de contact des tangentes issues des deux autres points d'inflexion ($-k$ et ∞).

Si, dans le premier membre de l'équation, on substitue $-\frac{k}{2}$, 0, k, on trouve $-\frac{3k^2}{4}$, kt_1, $3k(k + t_1)$; on en conclut qu'une des racines est dans l'intervalle $-\frac{k}{2}$, 0, si t_1 est dans l'intervalle 0, k, et dans l'intervalle 0, k, si t_1 est dans l'intervalle $-\frac{k}{2}$, 0.

Je vais, de plus, montrer que la valeur absolue de cette racine est inférieure à celle de t_1; supposons t_1 dans l'intervalle $-\frac{k}{2}$, 0 : il faudra établir que $-t_1 > t$, c'est-à-dire que $-t_1$ n'est pas entre les racines de l'équation, ce qui a lieu, le résultat de substitution de $-t_1$ étant $-t_1(k + t_1)$, quantité positive si t_1 est dans l'intervalle $-\frac{k}{2}$, 0; la même démonstration subsiste si t_1 est dans l'intervalle 0, k; ces résultats conduisent à la proposition suivante :

Un point d'inflexion d'une cubique acnodale est compris dans un des angles formés par les droites qui joignent le point double aux points de contact, autres que les points d'inflexion, des tangentes issues de ces

---

(¹) On peut toujours choisir la direction des axes de façon que k soit positif.

points; d'un point de la courbe compris dans cet angle, on peut mener deux tangentes réelles, l'une d'elles ayant son point de contact dans l'angle considéré.

Les points de contact successifs sont alternativement de part et d'autre du point d'inflexion et ont pour limite ce point.

La même propriété est vérifiée si, au lieu de prendre le point d'inflexion $t = 0$, nous prenons l'un quelconque des points d'inflexion.

Il reste à examiner les points de contact non situés dans la région dans laquelle se trouve le point considéré; les points d'inflexion et les points de contact des tangentes issues de ces points divisent le plan en six systèmes d'angles opposés par le sommet; les limites étant

$$-\infty,\quad -2k,\quad -k,\quad -\frac{k}{2},\quad 0,\quad k,\quad +\infty.$$

Supposons t_1 dans l'intervalle $0, k$; une racine t est dans l'intervalle $-\frac{k}{2}, 0$, nous l'avons étudiée plus haut; l'autre est dans l'intervalle $-2k, -\infty$ ou plus exactement $-2k, -k(2+\sqrt{3})$; t_1 étant dans l'intervalle $-\infty, -2k$, la racine que nous considérons actuellement sera dans l'intervalle $-\frac{k}{2}, k(1-\sqrt{3})$, compris lui-même dans l'intervalle $-\frac{k}{2}, -k$; enfin, de l'intervalle $-k, -\frac{k}{2}$, on passe à l'intervalle $+k, \frac{k}{2}(-1+\sqrt{3})$, c'est-à-dire dans l'intervalle $0, k$, d'où l'on était parti.

Ceci posé, considérons deux valeurs t_1, t'_1 dans un intervalle et les valeurs t, t' correspondantes; on a

$$t'_1 - t_1 = \frac{t^2 + 2kt}{2t+k} - \frac{t'^2 + 2kt'}{2t'+k} = \frac{(t-t')[2tt' + k(t+t') + 2k^2]}{(2t+k)(2t'+k)};$$

ceci nous montre d'abord que les différences $t - t'$, $t_1 - t'_1$ sont de signes contraires; on peut écrire

$$\frac{t'_1 - t_1}{t - t'} = \frac{1}{2} + \frac{3k^2}{2(2t+k)(2t'+k)}.$$

1° t_1 et t'_1 étant dans l'intervalle o, k, t et t' sont dans l'intervalle $-2k$, $-k(2+\sqrt{3})$ et l'on a

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} < \frac{t'_1 - t_1}{t-t'} < \frac{2}{3}.$$

2° t_1 et t'_1 étant dans l'intervalle $-\infty$, $-2k$, t et t' sont dans l'intervalle $-\frac{k}{2}$, $k(1-\sqrt{3})$, et l'on a

$$\frac{4-2\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} < \frac{t'_1 - t_1}{t-t'} < \infty.$$

3° t_1 et t'_1 étant dans l'intervalle $-k$, $-\frac{k}{2}$, t et t' sont dans l'intervalle $\frac{k}{2}(\sqrt{3}-1)$, k, et l'on a

$$\frac{2}{3} < \frac{t'_1 - t_1}{t-t'} < 1.$$

On en conclut que la différence des valeurs de t, quand on est revenu dans le premier intervalle, est inférieure au produit de la différence primitive par

$$\frac{7+4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\,\frac{7-4\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}\,\frac{3}{2} = \frac{3}{8}.$$

Soit t une valeur prise dans le premier intervalle; t_{-1}, t_{-2}, ... les valeurs qui correspondent aux points de contact successifs tels que nous venons de les obtenir; les points du premier intervalle seront t, t_{-3}, t_{-6}, ...; d'après ce qui précède, on a

$$\frac{t-t_{-3}}{t_{-3}-t_{-6}} < 0 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{t_{-6}-t_{-3}}{t_{-3}-t}\right| < \frac{3}{8};$$

on conclut de ces inégalités que les t à indice impair vont en augmentant et sont inférieurs aux t à indice pair, si l'on suppose $t > t_{-3}$.

Nous aurons ainsi deux suites de nombres compris entre o et k; ces deux suites ont une limite commune, d'après la relation

$$\left|\frac{t_{-3n}-t_{-3(n-1)}}{t-t_{-3}}\right| < \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}.$$

On voit donc que les points de contact ont une limite vers laquelle ils convergent périodiquement, la période étant égale à 3; il y aura ainsi deux centres limites dans les intervalles $-\infty, -2k$ et $-k, -\frac{k}{2}$; les trois points limites seront alors les sommets d'un triangle à la fois inscrit et circonscrit à la courbe; il y a un second triangle relatif aux intervalles $-\frac{k}{2}, o, k, +\infty, -2k, -k$.

Pour trouver les valeurs de t qui correspondent à ces six points limites, il suffit de former l'équation $E_3 = 0$; on a ainsi

$$t^6 + 3kt^5 - 3k^2t^4 - 11k^3t^3 - 3k^4t^2 + 3k^5t + k^6 = 0;$$

et l'on vérifie que cette équation a ses racines réelles comprises dans les intervalles

$$-\infty, \quad -2k, \quad -k, \quad -\frac{k}{2}, \quad 0, \quad k, \quad +\infty.$$

Pour trouver la quantité qui joue le rôle de $B(z)$, reprenons la transformation

$$t_1 = \frac{lt^2 + 2t - l}{t^2 - 2lt - 1}.$$

On vérifie aisément que si $t = \alpha$ est un point d'inflexion, la fonction

$$\operatorname{Log} \frac{t-i}{t+i} : \frac{\alpha - i}{\alpha + i}$$

se reproduit multipliée par -2 quand on passe d'un point à son tangentiel; c'est le *logarithme du rapport anharmonique du faisceau formé par les tangentes au point double et les droites qui joignent le point double à un point d'inflexion et au point considéré*.

Le point d'inflexion dont il est question ici est le point limite relatif à la région dans laquelle se trouve le point considéré sur la courbe; si l'on prend la suite des points à convergence périodique de périodes 3, les fonctions $B(z)$ seront

$$\operatorname{Log} \frac{t-i}{t+i} : \frac{\alpha_1 - i}{\alpha_2 + i}, \qquad \operatorname{Log} \frac{t-i}{t+i} : \frac{\alpha_2 - i}{\alpha_2 + i}, \qquad \operatorname{Log} \frac{t-i}{t+i} : \frac{\alpha_3 - i}{\alpha_3 + i},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ formant un cycle limite.

Considérons en particulier le cas où les tangentes au point double sont les droites isotropes; les axes étant alors rectangulaires, le logarithme précédent est, au facteur $2i$ près, l'angle des droites qui joignent le point double aux points t et α; on a alors la propriété suivante :

Les points de contact successifs qui ont pour limite un point d'inflexion sont tels que les angles formés par les droites qui joignent le point double à ces points avec la droite relative au point limite forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Un théorème analogue a lieu pour les points à convergence périodique.