M. HAURE

Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 115-196
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__115_0>

RECHERCHES

SUR LES

POINTS DE WEIERSTRASS

D'UNE

COURBE PLANE ALGÉBRIQUE,

PAR M. M. HAURE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

On sait à quelle propriété des courbes planes algébriques M. Weierstrass a rattaché la notion de leur genre.

Soit P un point d'une pareille courbe; si l'on considère l'ensemble des fonctions rationnelles de x et de y attachées à la courbe qui sont infinies en ce seul point, leurs ordres, rangés en suite croissante, reproduisent la série des nombres naturels, à un certain nombre de lacunes près. Le nombre de ces lacunes est indépendant du point P et est égal au genre p de la courbe.

Nommons les nombres, dont l'absence constitue les lacunes, *les ordres manquants*. Si le point P est quelconque, ces ordres seront les nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p;$$

mais, en certains points particuliers A, ils pourront être différents. *J'appellerai ces points* A *des points de Weierstrass*.

C'est à l'étude de ces points qu'est consacré le présent travail. Ils ont déjà été l'objet de quelques recherches de la part de MM. Schottky (1), Nœther (2) et Hurwitz (3), sans compter ce que M. Weierstrass a pu en dire dans ses Leçons non encore publiées sur les fonctions abéliennes (4).

Je me suis proposé, en poursuivant les recherches de ces géomètres, particulièrement celles de MM. Schottky et Hurwitz, d'arriver à la détermination des divers systèmes d'ordres manquants qui peuvent se trouver dans les courbes d'un genre déterminé et aussi à la définition des classes de courbes possédant un point de Weierstrass correspondant à l'un de ces systèmes.

A ces recherches, il était naturel de rattacher l'étude des fonctions rationnelles infinies en ce seul point, et aussi des familles de groupes spéciaux que l'on peut en faire dériver.

C'est ce que j'ai fait, en me servant surtout des théorèmes de M. Nœther (5), et cela m'a permis de traiter l'application qui termine ce travail.

Des cinq Chapitres qui le composent, le premier est consacré à l'exposition des théorèmes de M. Nœther; le second, à la définition précise des points de Weierstrass et des familles de groupes qui en dérivent, ainsi qu'à la démonstration d'un important théorème de M. Weierstrass (6), relatif à l'existence d'un système d'intégrales de première espèce, infiniment petites en A, dont les ordres infinitésimaux sont précisément les ordres manquants.

Dans le troisième Chapitre, je développe au début, conformément à des indications données par M. Hurwitz (7), une méthode pour former des tableaux d'ordres manquants; j'établis ensuite, d'après M. Schottky (8), la relation qui existe entre deux fonctions convenablement choisies, parmi toutes celles qui sont infinies en A. Je pour-

---

(1) *J. C.*, t. 83.
(2) *J. C.*, t. 97.
(3) *M. A.*, t. XLI.
(4) *B. N.*, *Berichte*, p. 431 et suiv.
(5) *Loc. cit.*
(6) *B. N.*, *Berichte*, p. 432.
(7) *Loc. cit.*
(8) *Loc. cit.*

suis, dans le quatrième Chapitre, l'étude de cette relation, ou plutôt celle de la courbe qu'elle représente; je cherche ensuite les conditions que doit remplir cette courbe pour pouvoir servir à la définition d'une classe de courbes possédant un point de Weierstrass A d'espèce déterminée; cela me donne le moyen de vérifier si un tableau formé par la méthode du Chapitre III est effectivement un tableau d'ordres manquants.

A ce Chapitre est joint le tableau des systèmes d'ordres manquants pour $p = 3, 4, 5, 6, 7$. J'ai donné dans chaque cas la courbe que je prends pour définir la classe, avec les conditions qui la caractérisent et qui, toutes, portent sur ses points multiples.

Enfin le dernier Chapitre contient une application de ce qui précède à la définition des courbes gauches comme transformées point par point des courbes planes, avec quelques remarques préalables sur les courbes gauches déduites de groupes spéciaux quelconques.

Voici la liste des périodiques ou des Mémoires que j'aurai à citer, avec l'indication des abréviations par lesquelles je les désignerai :

Journal de Crelle.	(*J. C.*)
Mathematische Annalen.	(*M. A.*)
Brill et Nœther, *Ueber die algebraischen Functionen, etc.* (*M. A.*, t. VII)	(*B. N.-A. F.*)
Brill et Nœther, *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. III, p. 92-93)	(*B. N.-B.*)
Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (*Journal de l'École Polytechnique*, 52e Cahier).	(*Ha.*)
Hurwitz, *Ueber algebraischen Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (*M. A.*, t. XLI)	(*Hu.*)
Nœther, *Beweis und Erweiterung eines algebraischen functionen-theoretischen Satz* (*J. C.*, t. 97).	(*N.-S.*)
Nœther, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (*J. C.*, t. 93).	(*N.-R.*)
Schottky, *Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebene Fläche* (*J. C.*, t. 83)	(*Sc.*)

CHAPITRE I.

THÉORÈMES DE M. NŒTHER SUR LES FAMILLES DÉRIVÉES D'UN GROUPE DE POINTS.

Dans ce qui va suivre, j'emploierai, pour désigner les groupes de points situés sur une courbe, et les familles formées de ces groupes, les notations généralement adoptées et dues à MM. Brill et Nœther ([1]). De plus, j'appellerai ordre ou degré d'un groupe G_Q le nombre Q de ses points. Ce sera aussi l'ordre ou le degré de la famille dérivée de G_Q.

Quant à la courbe algébrique elle-même, je la désignerai par C ou f, $f(x,y) = 0$ étant son équation en coordonnées cartésiennes. J'aurai souvent à considérer les courbes adjointes d'ordre $n-3$, n étant le degré de C; je représenterai leur équation par

$$\varphi = 0,$$

et j'appellerai ces courbes *des courbes* φ.

Je rappelle enfin, une fois pour toutes, le caractère d'invariance que possèdent les groupes spéciaux, relativement aux transformations birationnelles de la courbe C dans les autres courbes de sa classe (au sens de Riemann); j'en profiterai, en particulier, pour substituer à C une courbe de même classe convenablement choisie, s'il y a lieu, lorsque j'aurai à étudier un groupe spécial déterminé.

1. Théorème ([2]). — *Pour que d'un groupe* G_Q^q, *on puisse déduire une famille* $\gamma_{Q-\rho}^q$ *de groupes, corrésiduels entre eux et au groupe formé par* $Q-\rho$ *points de* G_Q^q, *il faut et il suffit que l'on puisse trouver dans ce der-*

([1]) *B. N.-A. F.*
([2]) *N. S.*

nier $Q - \rho$ *points par lesquels passent* ρ *courbes* φ, *linéairement indépendantes, qui ne passent pas par les* ρ *autres points.*

Soient $G^q_{Q-\rho}$ la partie de G^q_Q corrésiduelle des groupes de $\gamma^q_{Q-\rho}$, $r+1$ le nombre des courbes φ linéairement indépendantes passant en tous les points de G^q_Q, $r'+1$ le nombre de celles qui passent seulement aux points de $G^q_{Q-\rho}$.

La loi de réciprocité de Brill et Nœther (¹) nous donne

$$q = Q - p + 1 + r = Q - \rho - p + 1 + r',$$

d'où

$$r' = r + \rho;$$

il passe donc par $G^q_{Q-\rho}$ ρ courbes φ qui ne passent pas par les ρ points restants de G^q_Q.

Supposons maintenant cette condition remplie, soient q et q' les multiplicités respectives des familles dérivées de G_Q et de $G_{Q-\rho}$.

On a

$$q = Q - p + 1 + r,$$

et

$$q' = Q - \rho - p + 1 + (r + \rho) = Q - p + 1 + r = q.$$

Soit Γ^r_R un groupe résiduel de G^q_Q; Γ^r_R et les ρ points de G^q_Q, autres que ceux qui forment $G^q_{Q-\rho}$, constituent un groupe résiduel de ce dernier, $\Gamma^{r+\rho}_{R+\rho}$; on voit immédiatement que le système des $q+1$ courbes φ qui passent en Γ_R ne peut différer de celui des $q+1$ courbes φ qui passent en $\Gamma_{R+\rho}$. On en conclut que la famille dérivée de G^q_Q coïncide avec celle dérivée de $G^q_{Q-\rho}$; le théorème précédent donne donc aussi *la condition nécessaire et suffisante pour que la famille dérivée d'un groupe* G_Q *soit formée de groupes ayant* ρ *points fixes communs.*

2. Théorème (²). — *Soit* G_Q *un groupe de* Q *points par lesquels passent* $r+1$ *courbes* φ *linéairement indépendantes. On peut toujours ranger les points du groupe dans un ordre*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_Q,$$

(¹) *B. N.-A. F.*, p. 282.
(²) *N. S.*

tel que parmi les groupes

$$G_1 = (a_1), \qquad G_2 = (a_1, a_2), \qquad \ldots, \qquad G_\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_\mu), \qquad \ldots,$$

il y en ait $p - r - 1$ qui ne donnent naissance à aucune famille de groupes corrésiduels dont tous les points soient variables.

Soient

$$G_{\mu_0} = (a_1, a_2, \ldots . a_{\mu_0})$$

le premier de ces groupes donnant naissance à une famille de groupes de points variables, et $g^q_{\mu_0}$ cette famille. Tous ses groupes ne peuvent avoir en commun le point a_{μ_0}, car ils formeraient alors une $g^q_{\mu_0-1}$ dérivée de G_{μ_0-1}, ce qui est impossible; d'autre part, les groupes qui contiennent le point a_{μ_0} forment d'après cela une $g^{q-1}_{\mu_0-1}$. Comme elle aussi est dérivée de G_{μ_0-1}, elle se réduit au groupe unique G_{μ_0}; on a donc

$$q - 1 = 0,$$

et, par suite,

$$q = 1.$$

La famille dérivée de G_{μ_0} est donc une $g^1_{\mu_0}$.

De là résulte immédiatement, en vertu de la loi de réciprocité, qu'il passe, par les points de G_{μ_0}, $p - \mu_0 + 1$ courbes φ linéairement indépendantes. Il peut se faire que ces courbes passent *toutes* encore par un certain nombre d'autres points de G_Q; soient $a_{\mu_0+1}, a_{\mu_0+2}, \ldots, a_{\mu_1-1}$ ces points. Je forme, en les adjoignant à G_{μ_0} dans l'ordre d'ailleurs arbitraire où ils ont été numérotés, les groupes $G_{\mu_0+1}, G_{\mu_0+2}, \ldots, G_{\mu_1-1}$. Soit maintenant a_{μ_1} l'un des points restants de G_Q, je forme avec lui et G_{μ_1-1} le groupe G_{μ_1}. Parmi toutes les courbes φ passant par G_{μ_1-1}, il y en a une et une seule qui ne passe pas en a_{μ_1}. Donc tous les groupes de la famille dérivée de G_{μ_1} ont en commun le point a_{μ_1} et ne sont pas formés de μ_1 points variables.

Les $p - \mu_0$ courbes φ, qui passent par les points de G_{μ_1}, peuvent encore passer *toutes* par d'autres points de G_Q, $a_{\mu_1+1}, a_{\mu_1+2}, \ldots, a_{\mu_2-1}$, à l'aide desquels je formerai les groupes $G_{\mu_1+1}, \ldots, G_{\mu_2-1}$. Soit a_{μ_2} un des autres points de G_Q, avec lequel je forme G_{μ_2}; une et une seule des $p - \mu_0$ courbes φ, qui passent en G_{μ_2-1}, ne passant pas en a_{μ_2}, G_{μ_2} donne naissance à une famille de groupes ayant en commun a_{μ_2} et ne contenant que $\mu_2 - 1$ points variables, au maximum.

En continuant ainsi, on arrive à former une suite de groupes

$$G_{\mu_3},\quad G_{\mu_4},\quad \ldots,\quad G_{\mu_i},\quad \ldots$$

ne donnant pas naissance à des familles de groupes de $\mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_i, \ldots$ points variables respectivement.

Comme par G_{μ_i} passent $p - \mu_0 + 1 - i$ courbes φ linéairement indépendantes, et que par G_Q il en passe $r + 1$, on a

$$i \leqq p - \mu_0 - r.$$

D'autre part, en vertu de l'hypothèse faite sur μ_0, les groupes G_1, $G_2, \ldots, G_{\mu_0 - 1}$, formés en rangeant dans un ordre quelconque $\mu_0 - 1$ points pris dans G_Q, ne donnent pas naissance à des familles de groupes de points variables. En les réunissant aux groupes G_{μ_1}, $G_{\mu_2}, \ldots, G_{\mu_{p-\mu_0-r}}$, on voit qu'il y a en tout

$$p - \mu_0 - r + \mu_0 - 1 = p - r - 1$$

groupes G_μ, dont on ne peut faire dériver des familles de groupes de μ points variables.

D'après la remarque qui suit le premier théorème, les groupes dérivés de $G_{\mu_i - 1}$ et G_{μ_i} sont découpés par le même système de courbes φ; les familles dérivées de $G_{\mu_i - 1}$ et G_{μ_i} coïncident donc. Le nombre des courbes φ, linéairement indépendantes, passant par les points des divers groupes

$$G_1,\quad G_2,\quad \ldots,\quad G_{\mu_0 -},\quad G_{\mu_1},\quad G_{\mu_2},\quad \ldots,\quad G_{\mu_{p-\mu_0-r}}$$

est respectivement égal à

$$p-1,\quad p-2,\quad \ldots,\quad p-\mu_0+1,\quad p-\mu_0,\quad \ldots,\quad r+1.$$

Pour les groupes $G_{\mu_{i-1}+1}$, $G_{\mu_{i-1}+2}, \ldots, G_{\mu_{i+1}-1}$, compris entre G_{μ_i} et $G_{\mu_{i+1}}$, ce nombre est constamment égal à $p - \mu_0 - i + 1$. Ce sont là des conséquences immédiates de la démonstration précédente. Elle nous fait voir également comment sont formés les groupes

$$G_1,\quad G_2,\quad \ldots,\quad G_{\mu_0},\quad G_{\mu_0+1},\quad \ldots,$$

et, en particulier, l'arbitraire qui préside à leur formation (¹).

(¹) On peut établir des théorèmes analogues relatifs à des groupements plus arbitraires encore; voir *N.-S.*

3. Supposons que G_{μ_0} ait été choisi de façon que μ_0 soit le plus petit possible. On peut alors affirmer que, dans les groupes des familles dérivées de

$$G_{\mu_0}, \quad G_{\mu_0+1}, \quad \ldots, \quad G_Q,$$

tous les points sont variables; sauf pour les familles dérivées de G_{μ_1}, G_{μ_2}, ..., dont tous les groupes ont en commun les points a_{μ_1}, a_{μ_2}, ..., respectivement.

En effet, considérons d'abord la famille $g^1_{\mu_0}$, dérivée de G_{μ_0}; si tous ses groupes possédaient un point fixe commun, ils constitueraient, en réalité, une g_{μ_0-1}, ce qui est contraire à l'hypothèse sur μ_0. Prenons G_{μ_0+1} toutes les courbes φ, qui passent par G_{μ_0}, passent par G_{μ_0+1}, donc le point a_{μ_0+1} ne peut être commun à tous les groupes de la famille dérivée de G_{μ_0+1}; s'ils ont un point commun, c'est un point a_h différent de a_{μ_0+1}; or ce point appartiendrait en particulier à tous les groupes de la famille qui contiennent a_{μ_0+1}, et qui forment une famille identique à la $g^1_{\mu_0}$ dérivée de G_{μ_0}, ce qui est impossible, comme nous venons de le voir. La démonstration se poursuivrait de même pour les groupes suivants, jusqu'à G_{μ_1-1} inclusivement. Quant à la famille dérivée de G_{μ_1}, elle coïncide avec celle dérivée de G_{μ_1-1}, et ses groupes n'ont de commun que le point a_{μ_1}. Passons à G_{μ_1+1}, on verrait, comme plus haut, que les groupes qui en dérivent ne peuvent avoir en commun un point a_h différent de a_{μ_1} et a_{μ_1+1}. Or, ce dernier, nous le savons, ne peut être commun à tous ces groupes. Il en est de même de a_{μ_1}, car G_{μ_1+1} et la famille dérivée ne sont pas changés, si l'on échange a_{μ_1} et a_{μ_1+1} dans les définitions respectives de G_{μ_1} et de G_{μ_1+1}. Et ainsi de suite pour les groupes suivants.

Nous pouvons donc énoncer, comme il suit, le théorème précédent:

Soit G_Q *un groupe de* Q *points de* C, *où passent* $r+1$ *courbes* φ, *linéairement indépendantes. On peut toujours ranger ces points dans un ordre*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_Q,$$

tel que, sur les groupes $G_\mu = (a_1, a_2, \ldots, a_\mu)$, *il y en ait* $p-r-1$, *et* $p-r-1$ *seulement, dont on ne puisse faire dériver une famille exactement d'ordre* μ; *pour ceux-là, si la famille existe, elle est d'ordre* $\mu-1$.

Du théorème, ainsi présenté, résulte le fait suivant : *Les groupes* G_μ *étant formés d'une manière convenable à l'aide des points de* G_Q, *il y a dans la suite*

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad Q,$$

$p - r - 1$ *nombres qui ne peuvent être les ordres de familles dérivées des groupes* G_μ. *Ces nombres sont dits « les ordres manquants ». Quant aux ordres existants, ils sont au nombre de* $Q - p + r + 1 = q$; *c'est précisément la multiplicité de la famille dérivée de* G_Q.

4. En ce qui concerne la multiplicité des familles dérivées des groupes G_μ, on voit sans peine que les groupes $G_{\mu_0}, G_{\mu_0+1}, \ldots, G_{\mu_1-1}$ donnent naissance à des familles de multiplicités respectives $1, 2, \ldots, h_1$, en posant $h_1 = \mu_1 - \mu_0$; que plus généralement, les groupes G_{μ_i-1} et G_{μ_i} donnent une famille unique de multiplicité $h_i = \mu_i - \mu_0 - i + 1$, et le groupe $G_{\mu_i+l} (\mu_i + l \leq \mu_{i+1})$ une famille de multiplicité $h_i + l$.

Posons $\mu = \mu_i + l$, et *soit k le nombre des ordres manquants, inférieurs ou égaux à* μ. On a $k = \mu_0 + i - 1$ et par suite :

$$h_i + l = \mu - k.$$

Donc la multiplicité de la famille g_μ (*ou* $g_{\mu-1}$ *si* μ *est un ordre manquant*), *dérivée de* G_μ, *est égale à* $\mu - k$.

Considérons en second lieu les courbes φ qui passent par les divers groupes G_μ, et celles qui découpent les familles dérivées de ces groupes. Pour les premières, on peut choisir les $p - \mu_0 + 1$ courbes φ qui passent en G_{μ_0} :

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{p-\mu_0},$$

de façon que :

en	G_{μ_0},	G_{μ_0+1},	$\ldots$,	G_{μ_1-1},	passent	φ_0,	φ_1,	$\ldots$,	$\varphi_{p-\mu_0}$,
en	G_{μ_1},	G_{μ_1+1},	$\ldots$,	G_{μ_2-1},	»	φ_0,	φ_1,	$\ldots$,	$\varphi_{p-\mu_0-1}$,
	....	.....	....	.....		...	...	....	....
en	$G_{\mu_{p-\mu_0+1}}$,		$\ldots$,	G_Q,	»	φ_0,	φ_1,	$\ldots$,	φ_r.

Quant aux secondes, pour les avoir, je remarque que le résidu de G_μ peut être formé de la manière suivante : du groupe Γ_μ des points de G_Q qui n'entrent pas dans G_μ, et du résidu R de G_Q que détermine la courbe φ_0. Cela posé, le système des courbes φ, linéairement indépendantes, passant par ces divers résidus, peut être formé de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lllll}
\text{pour} & (\Gamma_{\mu_0}, \mathrm{R})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_0, & \varphi'_1, & \\
\text{pour} & (\Gamma_{\mu_0+1}, \mathrm{R})\ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_0, & \varphi'_1, & \varphi'_2, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\text{pour} & (\Gamma_{\mu}, \mathrm{R})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_0, & \varphi'_1, & \ldots, \quad \varphi'_{\mu-k};
\end{array}
$$

le système relatif à $(\Gamma_{\mu_i}, \mathrm{R})$ étant identique au système relatif à $(\Gamma_{\mu_i-1}, \mathrm{R})$, μ_i désignant toujours un ordre manquant. Il en résulte que la famille $g_\mu^{\mu-k}$, dérivée de G_μ, est découpée par le système $\infty^{\mu-k}$ de courbes :

$$\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi'_1 + \ldots + \alpha_{\mu-k}\varphi'_{\mu-k} = 0.$$

Soit enfin la fonction rationnelle de x et de y

$$\frac{\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi'_1 + \ldots + \alpha_{\mu-k}\varphi'_{\mu-k}}{\varphi_0};$$

elle est infinie du 1^er^ ordre en tous les points de G_μ, si l'on a $\mu \neq \mu_i$, en tous les points de G_{μ_i-1}, si $\mu = \mu_i$. On sait du reste que c'est la fonction rationnelle la plus générale, infinie du 1^er^ ordre aux points de G_μ. Son ordre étant égal au nombre de ses infinis (puisqu'ils sont simples), on voit que :

Parmi les nombres 1, 2, 3, ..., Q, *il y en a toujours et seulement* $p - r - 1$, *qui ne peuvent être les ordres de fonctions infinies du premier ordre en tous les points d'un groupe* G_μ, *tiré de* G_Q.

On voit sur l'expression précédente que la fonction la plus générale, infinie du 1^er^ ordre en tous les points d'un groupe G_μ, contient $\mu - k + 1$ arbitraires.

CHAPITRE II.

POINTS DE WEIERSTRASS. THÉORÈME SUR LES ORDRES MANQUANTS.

1. Soit A un point de C, et supposons qu'il existe *une seule courbe* φ *coupant* C *en* $p+s$ *points confondus en* A, *mais non en* $p+s+1$. Considérons ce point comme un groupe de $p+s+1$ points confondus, $p+s$ d'entre eux étant les points de rencontre avec C de la courbe φ, que j'appellerai φ_0. J'ai ainsi un groupe G_Q ($Q=p+s+1$), pour lequel on a $r+1=0$. Donc, d'après les théorèmes du Chapitre précédent :

Parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, p+s+1$, *il y en a* p *qui ne peuvent être l'ordre d'une famille de groupes de points variables, dérivée d'un groupe formé avec un certain nombre des* $p+s+1$ *points confondus en* A.

Ou encore :

Parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, p+s+1$, *il y en a* p *qui ne peuvent être les ordres de fonctions rationnelles, infinies en* A *seulement.*

Si le point A est un point quelconque de C, il n'existera pas de courbe φ la coupant en plus de $p-1$ points confondus en A, mais il y en aura toujours une la coupant en $p-1$ points; on a donc $s=-1$, et les ordres manquants sont

$$1, 2, 3, \ldots, p;$$

c'est la proposition bien connue, qui sert de base à la définition du genre, d'après M. Weierstrass. Les points A, où s est différent de -1, sont par suite des points particuliers de C. Nous les appellerons, comme je l'ai déjà dit, *des points de Weierstrass.*

En un tel point, s est nécessairement supérieur à -1. S'il est égal à o, nous dirons que A est un point de Weierstrass ordinaire. Si s est supérieur à o, le point de Weierstrass équivaut à un certain nombre m de pareils points ordinaires, qui le donnent par leur superposition : *m sera dit l'ordre de multiplicité du point de Weierstrass.* Un point de

Weierstrass ordinaire a l'unité pour ordre de multiplicité. On peut établir sur ces ordres la proposition suivante :

La somme des ordres de multiplicité des points de Weierstrass d'une courbe de genre p est égale à $(p-1)p(p+1)$.

Des diverses démonstrations qui en ont été données ([1]), j'indiquerai la suivante due à Roch ([2]). Elle se rapporte au cas où tous les points de Weierstrass sont ordinaires; il suffit évidemment de n'examiner que celui-là. Mais, auparavant, je dois rappeler une propriété de la fonction ϑ attachée à une courbe de genre p.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$, p points quelconques et variables, β un point fixe de la courbe, $u_i^{(k)}$ et β_i les valeurs que prend en ε_k et β respectivement l'intégrale normale de première espèce u_i, relative à un système canonique de coupures de la surface de Riemann correspondant à la courbe; la constante d'intégration est déterminée comme le fait Riemann. *La fonction* $\vartheta(u_i^{(1)}+u_i^{(2)}+\ldots+u_i^{(k)}-\beta_i)$ *ne s'annule que si les p points ε sont sur une même courbe φ, ou si l'un d'eux vient coïncider avec* β. Cela posé, considérons la fonction

$$\vartheta(p\,u_i-\beta_i), \tag{1}$$

qui résulte de la précédente lorsque les p points $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ viennent se confondre en un point variable unique ε. Elle ne s'annulera que si le point ε vient en un des points de Weierstrass, ou au point β, et ce dernier zéro est évidemment d'ordre p. Or la fonction (1), considérée comme fonction de ε, possède p^3 zéros sur la surface de Riemann; donc le nombre des points de Weierstrass est égal à

$$p^3-p=(p-1)\,p\,(p+1).$$

2. Pour rendre plus claire l'application des théorèmes du Chapitre I, je vais préciser la formation, dans le cas actuel, des groupes G_μ. Si l'on cherche les courbes φ indépendantes qui coupent C en un, deux, trois, etc., points confondus en A, on en trouve tout d'abord respectivement

$$p-1,\quad p-2,\quad \ldots$$

([1]) En particulier : DE JONQUIÈRES (*J. C.*, t. LXVI), BRILL (*M. A.*, t. IV, p. 530).
([2]) *J. C.*, t. LXVI.

Le point A étant un point de Weierstrass, cette loi cesse de se vérifier nécessairement à partir d'un certain rang; supposons que ce soit pour les courbes φ coupant en μ_0 points confondus. Leur nombre sera $p-\mu_0+1$, car il ne peut être inférieur à $p-\mu_0$, et d'autre part il ne peut dépasser le nombre des courbes φ coupant en μ_0-1 points confondus. Ces courbes coupent en μ_0 points confondus au moins; supposons qu'elles coupent exactement en μ_1-1 points confondus ($\mu_1-1 \geqq \mu_0$). Nous prendrons pour G_{μ_0}, G_{μ_0+1}, ..., G_{μ_1-1} les groupes formés par μ_0, μ_0+1, ..., μ_1-1 points confondus en A.

Les courbes φ, coupant en μ_1 points confondus en A, seront au nombre de $p-\mu_0$; soit μ_2-1 le nombre exact de leurs points d'intersection avec C, confondus en A; nous définirons, de la même manière que plus haut, les groupes G_{μ_1}, G_{μ_1-1}, ..., G_{μ_2-1}, et ainsi de suite jusqu'à G_{p+s+1}.

A ces groupes adjoignons les groupes $G_1, G_2, \ldots, G_{\mu_0}-1$, formés respectivement de $1, 2, \ldots, \mu_0-1$ points confondus en A, et nous aurons l'ensemble complet des groupes G_μ. On voit que :

Les groupes G_μ, ne donnant pas naissance à une famille de groupes variables d'ordre μ, sont

$$G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_{\mu_0-1}, \quad G_{\mu_1}, \quad G_{\mu_2}, \quad \ldots, \quad G_{\mu_{p-\mu_0}}, \quad G_{p+s+1};$$

et, par suite, que :

Les p ordres manquants sont les nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad \mu_0-1, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_{p-\mu_0}, \quad p+s+1.$$

Les résultats du n° 4 du Chapitre I, s'appliquent ici sans modification. Nous pouvons donc former un système de fonctions φ, linéairement indépendantes, tel que :

$$\begin{array}{llllcllll}
\varphi_0, & \varphi_1, & \ldots, & \varphi_{p-\mu_0} & \text{coupent en} & G_{\mu_0}, & G_{\mu_0+1}, & \ldots, & G_{\mu_1-1}, \\
\varphi_0, & \ldots, & \ldots, & \varphi_{p-\mu_0-1}, & \text{»} & G_{\mu_1}, & G_{\mu_1+1}, & \ldots, & G_{\mu_2-1}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\varphi_0, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \text{»} & G_{\mu_{p-\mu_0}}, & \ldots\ldots, & \ldots, & G_{p+s};
\end{array}$$

c'est-à-dire respectivement en μ_1-1, μ_2-1, ..., $\mu_{p-\mu_0}-1$, $p+s$ points confondus en A.

Quant aux familles $g_{\mu}^{\mu-k}$, dérivées des groupes G_{μ}, elles sont découpées par les systèmes de courbes $\infty^{\mu-k}$

$$\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi'_1 + \ldots + \alpha_{\mu-k} \varphi'_{\mu-k} = 0,$$

et la fonction la plus générale, infinie du premier ordre aux points de G_{μ}, c'est-à-dire la fonction d'ordre μ infinie en A la plus générale, sera

$$\frac{\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi'_1 + \ldots + \alpha_{\mu-k} \varphi'_{\mu-k}}{\varphi_0}.$$

Les courbes $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots$ passent par le résidu R de G_{p+s}, relatif à φ_0, et coupent C respectivement en

$$p+s-\mu_0, \quad p+s-\mu_0-1, \quad \ldots, \quad p+s-\mu_1+1, \quad p+s-\mu_1-1, \quad \ldots$$

points confondus en A, qui constituent les groupes Γ_{μ}.

Cette dernière condition s'exprime sous une forme très simple, qui nous servira plus tard. Soient rangés, par ordre de grandeur croissante, les $s+1$ ordres existants

$$d_0, \quad d_1, \quad \ldots, \quad d_s$$

(on a $d_0 = \mu_0$ et $d_s = p+s$). *La courbe φ'_i coupe C en $d_s - d_i$ points confondues en* A. Il en est de même, quels que soient les α, de la courbe

$$\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi'_1 + \ldots + \alpha_i \varphi'_i = 0.$$

3. Je passe maintenant au théorème fondamental sur les ordres manquants, mais auparavant je dois établir le point suivant :

On peut trouver une infinité de systèmes de p intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, infiniment petites en A, $v_1, v_2, \ldots, v_p$, *dont les ordres infinitésimaux $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, forment une suite toujours croissante. Cette suite est unique.*

Supposons que le point A soit un point à distance finie et ordinaire de la surface de Riemann correspondant à l'équation $f(x, y) = 0$ de la courbe C. Soit

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

un système de p intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, dont je suppose les constantes d'intégration déterminées de façon qu'elles s'annulent toutes en A. L'une au moins d'entre elles n'est infiniment petite que du premier ordre, sans cela tous les du_i seraient nuls, et toutes les courbes φ passeraient par A. L'intégrale la plus générale de première espèce, infiniment petite en A,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p,$$

y est donc infiniment petite du premier ordre. Cela posé, nous pouvons remplacer les intégrales (u) par leurs développements en séries entières en $x - x_0$, x_0 étant l'abscisse de A, et profiter de l'indétermination des λ pour faire disparaître successivement

$$x - x_0, \quad (x - x_0)^2, \quad \ldots.$$

Il pourra arriver que la disparition de $(x - x_0)^i$ entraîne celle de $(x - x_0)^{i+1}$, $(x - x_0)^{i+2}$, $\ldots$, $(x - x_0)^{i+h-1}$; alors, après avoir fait disparaître $(x - x_0)^i$, on fera disparaître $(x - x_0)^{i+h}$. Dans tous les cas, à chaque nouvelle opération, on n'introduit qu'une équation nouvelle, permettant de déterminer un seul des λ encore arbitraires en fonction des autres, et, au bout de $p - 1$ opérations, on aura un système de p intégrales de première espèce

$$(v) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

infiniment petites en A, dont les ordres infinitésimaux $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ vérifieront les inégalités

$$\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_p \qquad \text{(avec } \rho_1 = 1\text{)}.$$

Cette propriété entraîne leur indépendance; d'autre part, il y a une infinité de systèmes (v), car v_i contient encore $p - i + 1$ paramètres λ arbitraires.

Enfin, le système des ordres ρ_i est unique; en effet, soient v_1, $v_2, \ldots, v_p$ les intégrales d'un système (v) particulier.

Une intégrale de première espèce quelconque, infiniment petite en A, pourra se mettre sous la forme

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_p v_p,$$

et sur cette expression on voit immédiatement que son ordre infinitésimal ne peut être que l'un des nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$.

Pour lever la restriction imposée au point A, il suffirait de substituer, aux développements en séries entières, les développements propres à chacun des cas que j'ai écartés.

Le théorème que je me propose de démontrer est le suivant (¹) :

Les ordres manquants en un point quelconque A *de* C *sont les nombres* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, *relatifs à ce point.*

Voici une première démonstration de ce théorème; je supposerai, comme dans la démonstration précédente, que le point A est à distance finie et n'est pas de ramification; cette restriction se lèverait comme plus haut.

Aux courbes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-\mu_0}$ du n° 2 de ce Chapitre, ajoutons les $\mu_0 - 1$ courbes $\varphi_{p-\mu_0+1}, \varphi_{p-\mu_0+2}, \ldots, \varphi_{p-1}$, coupant C respectivement en $\mu_0 - 2, \mu_0 - 3, \ldots, 0$ points confondus en A. Considérons, en particulier, φ_i, et soit, pour un instant, k le nombre de ses points de rencontre avec C confondus en A; formons l'intégrale de première espèce

$$\varpi_{p-i} = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\varphi_i \, dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Le point A n'étant pas de ramification, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'y annule pas; quant à φ_i, son développement en série entière, suivant les puissances de $x - x_0$, sera de la forme

$$\varphi_i(x, y) = a(x - x_0)^k + b(x - x_0)^{k+1} + \ldots;$$

celui de ϖ_{p-i} sera du type

$$\alpha(x - x_0)^{k+1} + \beta(x - x_0)^{k+2} + \ldots;$$

donc ϖ_{p-i} est infiniment petite en A d'ordre $k + 1$.

On en conclut que les nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ sont égaux respecti-

(¹) Ce théorème est dû à M. Weierstrass, voir *B. N.* (*B.*), p. 433.

vement aux ordres manquants

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \mu_0 - 1, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad p+s+1,$$

rangés par ordre de grandeur croissante.

Cette démonstration met en évidence le fait suivant : *la suite des ordres manquants est unique;* il résulte aussi de la considération des fonctions infinies en A seulement, ou même de celle des courbes φ_i du n° 2.

4. La seconde démonstration est moins simple et moins précise, en ce sens qu'elle ne montre qu'une chose, que les nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ forment un système d'ordres manquants.

Elle sera surtout une occasion d'étudier l'expression, à l'aide des intégrales de deuxième espèce, d'une fonction infinie en A seulement.

Supposons, tracé sur la surface de Riemann, un système canonique de coupures a, b, c; soient

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

le système d'intégrales normales de première espèce, relatif à ce système de coupures, et t_A l'intégrale normale de deuxième espèce attachée à A.

L'expression de la fonction la plus générale, infinie d'ordre μ en A seulement, sera

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 t_A + \alpha_2 t'_A + \ldots + \alpha_\mu t_A^{(\mu-1)},$$

le symbole $t_A^{(k)}$ désignant la dérivée $\dfrac{d^k t_A}{dx^k}$ de t_A par rapport au paramètre x_0. Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ vérifient les p relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u''_1 + \ldots + \alpha_\mu u_1^{(\mu)} = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ \alpha_1 u'_p + \alpha_2 u''_p + \ldots + \alpha_\mu u_p^{(\mu)} = 0, \end{array} \right.$$

où $u_i^{(k)}$ représente la valeur en A de $\dfrac{d^k u_i}{dx^k}$.

Pour étudier ces équations, j'introduirai un système particulier d'intégrales (v), que je désignerai par

$$[v] \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

défini par les conditions suivantes : Sur les coupures b, les modules de périodicité de v_j sont donnés par le Tableau suivant :

$$\left|\frac{b_1}{\beta_{1j}}\right|\frac{b_2}{\beta_{2j}}\left|\frac{\ldots}{\ldots}\right|\frac{b_{j-1}}{\beta_{j-1,j}}\left|\frac{b_j}{\pi\sqrt{-1}}\right|\frac{b_{j+1}}{0}\left|\frac{\ldots}{\ldots}\right|\frac{b_p}{0}\right|.$$

Ce système existe et est unique; on le voit par la considération du nombre des paramètres arbitraires qui entrent dans l'intégrale v_i la plus générale. Les intégrales (u) et $[v]$ sont reliées entre elles par des relations de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} u_1 = v_1 + \gamma_1, \\ u_2 = A_{21} v_1 + v_2 + \gamma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p = A_{p1} v_1 + A_{p2} v_2 + \ldots + v_p + \gamma_p. \end{cases}$$

Cela posé, je forme le Tableau des v_i^k, $\left(v_i^k = \frac{dv_i^k}{dx^k} \text{ pour } x = x_0\right)$, poussé jusqu'à une valeur de $k \geqq \mu$. Puisque $\rho_1 = 1$, je peux écrire la suite des nombres ρ sous la forme

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \nu_0 - 1, \quad \rho_{\nu_0}, \quad \rho_{\nu_0+1}, \quad \ldots, \quad \rho_p,$$

ν_0 étant au moins égal à 2, et il est manifeste que la suite de ces nombres se présentera toujours ainsi. D'autre part, j'écrirai le développement de v_j, en série entière en $x - x_0$, comme il suit :

$$v_j = \frac{a_{j\rho_j}}{(\rho_j)!}(x - x_0)^{\rho_j} + \frac{a_{j+1,\rho_j}}{(\rho_j + 1)!}(x - x_0)^{\rho_{j+1}} + \ldots.$$

Le Tableau sera donc

$k=1$	2	...	ν_0-1	ν_0	...	ρ_{ν_0}	ρ_{ν_0+1}	...
v_1 a_{11}	a_{12}	...	a_{1,ν_0-1}	a_{1,ν_0}	...	$a_{1,\rho_{\nu_0}}$	$a_{1,\rho_{\nu_0+1}}$	...
v_2 0	a_{22}	...	a_{2,ν_0-1}	a_{2,ν_0}	...	$a_{2,\rho_{\nu_0}}$	$a_{2,\rho_{\nu_0+1}}$	...
... .	..	...	....	......	...	....	......	...
v_{ν_0-1} 0	0	...	a_{ν_0-1,ν_0-1}	a_{ν_0-1,ν_0}	...	$a_{\nu_0-1,\rho_{\nu_0}}$	$a_{\nu_0-1,\rho_{\nu_0+1}}$	...
v_{ν_0} 0	0	...	0	0	..	$a_{\nu_0,\rho_{\nu_0}}$	$a_{\nu_0,\rho_{\nu_0+1}}$	...
v_{ν_0+1} 0	0	...	0	0	...	.....	$a_{\nu_0+1,\rho_{\nu_0+1}}$	...
... .	.	...	.	.	...	.....	....	...

.

Ce Tableau correspond à celui des coefficients $u_i^{(k)}$ des équations (1). Pour avoir les relations qui lient les déterminants homologues tirés des deux Tableaux, prenons le déterminant

$$U_{\binom{k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_h}{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_h}} = \begin{vmatrix} u_{i_1}^{(k_1)} & \ldots & u_{i_1}^{(k_h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i_1}^{(k_1)} & \ldots & u_{i_1}^{(k_h)} \end{vmatrix},$$

$i_1, i_2, \ldots, i_h$ désignant une combinaison h à h des p nombres 1, 2, 3, ..., p; ce déterminant, de degré $h < p$, est, d'après les équations (2), égal au produit par colonnes des deux Tableaux rectangles

$$\begin{Vmatrix} v_1^{k_1} & \ldots & v_1^{k_h} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_p^{k_1} & \ldots & v_p^{k_h} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} A_{i_1 1} & \ldots & A_{i_h 1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{i_1 p} & \ldots & A_{i_h p} \end{Vmatrix},$$

où, pour simplifier l'écriture, je n'ai pas distingué les termes nuls ou égaux à l'unité d'après les hypothèses. Par suite, on a

$$U_{\binom{k_1,\, \ldots,\, k_h}{i_1,\, \ldots,\, i_h}} = \Sigma_\lambda A_\lambda V_\lambda,$$

λ désignant une même combinaison h à h des indices 1, 2, 3, ..., p des k et des i, A_λ et V_λ les déterminants des Tableaux des $A_{i,k}$ et des $v_i^{(k)}$ correspondant à cette combinaison, et la sommation Σ_λ étant étendue à toutes les combinaisons λ.

Ces préliminaires étant établis, je reviens aux équations (1). Soient ρ_{ν_0+i-1} et ρ_{ν_0+i} les deux nombres ρ comprenant μ, de sorte que l'on ait

$$\rho_{\nu_0+i-1} \leqq \mu < \rho_{\nu_0+i}.$$

Je considère les deux déterminants suivants :

$$U^i = \begin{vmatrix} u'_1 & u''_1 & \ldots & u_1^{(\nu_0-1)} & u_1^{\rho_{\nu_0}} & \ldots & u_1^{\rho_{\nu_0+i-1}} \\ u'_2 & u''_2 & \ldots & u_2^{(\nu_0-1)} & u_2^{\rho_{\nu_0}} & \ldots & u_2^{\rho_{\nu_0+i-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u'_{\nu_0+i-1} & u''_{\nu_0+i-1} & \ldots & u_{\nu_0+i-1}^{(\nu_0-1)} & u_{\nu_0+i-1}^{\rho_{\nu_0}} & \ldots & u_{\nu_0+i-1}^{\rho_{\nu_0+i-1}} \end{vmatrix}$$

et

$$U^i_{l,n} = \begin{vmatrix} \vdots & \cdots\cdots\cdots & u_1^{(n)} \\ \vdots & U^i & \vdots \\ u'_l & \cdots\cdots\cdots & u_l^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} l = \nu_0 + i,\ \nu_0 + i + 1,\ \ldots,\ p \\ n = \nu_0,\ \nu_0 + 1,\ \ldots,\ \rho_{\nu_0} - 1;\ \rho_{\nu_0} + 1,\ \ldots,\ \rho_{\nu_0+i-1} - 1;\ \rho_{\nu_0+i-1} + 1,\ \ldots,\ \mu \end{array}\right).$$

D'après la formule (3), on a :

1° $U^i = V^i$; or

$$V^i = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{\nu_0-1,\nu_0-1}\, a_{\nu_0\rho_{\nu_0}} \ldots a_{\nu_0+i-1\,\rho_{\nu_0+i-1}},$$

et est différent de o; donc

$$U^{(i)} \neq 0;$$

2° $U^i_{ln} = 0$, quels que soient l et n.

Il en résulte que U^i *est un déterminant principal du système* (1), *et qu'on peut résoudre ce dernier en tirant des* $\nu_0 + i - 1$ *premières équations*

(4) $$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_{\nu_0-1},\quad \alpha_{\rho_{\nu_0}},\quad \alpha_{\rho_{\nu_0+1}},\quad \ldots,\quad \alpha_{\rho_{\nu_0+i-1}},$$

en fonction des autres α *qui restent arbitraires.*

Soient α_l l'un des α précédents, α_h un quelconque de ceux qui restent arbitraires, $(U^i)^l_h$ le déterminant déduit de U^i, en y remplaçant les éléments de la colonne de rang l par les coefficients de α_h dans les $\nu_0 + i - 1$ premières équations (1). J'ai

$$\alpha_l = -\frac{\Sigma_h (U^i)^l_h \alpha_h}{U^i} = -\frac{\Sigma_h (V^i)^l_h \alpha_h}{V^i},$$

car, en vertu de (3), $(U^i)^l_h$ est égal au déterminant similaire du Tableau des $\varphi_i^{(k)}$. Si h est plus petit que l, le nombre des éléments pouvant être différents de zéro est plus grand dans la colonne de rang l que dans celle de rang h du tableau des $\varphi_i^{(k)}$. Par suite, la diagonale principale de $(V^i)^l$ contient nécessairement un zéro; et, comme tous les éléments situés à gauche de cette diagonale sont nuls, $(V^i)^l_h$ est nul pour $h < l$. On en conclut *que α_l ne contient que les α_h dont l'indice est supérieur à l.*

En particulier, $\alpha_{\rho_{\nu_0+i-1}}$ *ne contient que* $\alpha_{\rho_{\nu_0+i-1}+1}, \alpha_{\rho_{\nu_0+i-1}+2}, \ldots, \alpha_\mu$.

Donc, si $\mu = \rho_{\nu_0+i-1}$, *on a* $\alpha_\mu = 0$.

Par conséquent, il n'existe pas de fonction ζ d'ordre ρ_{ν_0+i-1}, et les nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ sont les ordres manquants en A.

5. D'après l'analyse précédente, les expressions des α_l sont :

Pour $l \leqq \nu_0 - 1$:

$$\alpha_l = -\frac{\sum\limits_{h=\nu_0}^{h=\mu} (V^i)^l_h \alpha_h}{V^i}, \qquad h \neq \rho_{\nu_0}, \rho_{\nu_0+1}, \ldots.$$

Pour $l > \nu_0 - 1$ et $l = \rho_{\nu_0+n}$:

$$\alpha_l = -\frac{\sum\limits_{h=\rho_{\nu_0+n+1}}^{h=\mu} (V^i)^l_h \alpha_h}{V^i}, \qquad h \neq \rho_{\nu_0+n+1}, \rho_{\nu_0+n+2}, \ldots;$$

ζ est donc de la forme

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_{\nu_0}\zeta_{\nu_0} + \alpha_{\nu_0+1}\zeta_{\nu_0+1} + \ldots + \alpha_h\zeta_h + \ldots + \alpha_\mu\zeta_\mu,$$

$\zeta_{\nu_0}, \zeta_{\nu_0+1}, \ldots, \zeta_h, \ldots$ étant des fonctions particulières, infinies en A, d'ordres respectivement égaux à $\nu_0, \nu_0+1, \ldots, h, \ldots$, et dont l'expression générale est

$$\zeta_h = h_1 t_A + h_2 t'_A + \ldots + h_{\nu_0-1} t_A^{(\nu_0-2)} + h_{\nu_0} t_A^{(\rho_{\nu_0}-1)} + \ldots + t_A^{(h-1)}.$$

On remarquera que ζ_h ne contient, en dehors du terme en $\frac{1}{(x-x_0)^h}$, que les puissances de $\frac{1}{x-x_0}$, dont les exposants sont les ordres manquants inférieurs à h. Quant aux coefficients h_l, leur valeur est, toutes réductions faites,

$$h_l = (-1)^{k-l+1} \frac{\begin{vmatrix} a_{l\rho_{l+1}} & a_{l+1\rho_{l+1}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & . & \dots & . \\ \dots & \dots & . & \dots & 0 \\ a_{l\rho_k} & \dots & . & \dots & a_{k\rho_k} \\ a_{lh} & \dots & . & \dots & a_{kh} \end{vmatrix}}{a_{l\rho_l} a_{l+1\rho_{l+1}} \dots a_{k\rho_k}},$$

si l est différent de k, et

$$h_k = -\frac{a_{kh}}{a_{k\rho_k}},$$

si l est égal à k, k désignant l'entier tel que l'on ait

$$\rho_k < h < \rho_{k+1};$$

pour écrire ces formules, j'ai repris l'ancienne notation des nombres ρ, à savoir $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$. L'expression de ζ_h ne contient que l'intégrale normale de deuxième espèce t_A, ses dérivées et les coefficients des puissances de $x - x_0$ inférieures ou égales à h dans les développements des intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ du système $[\varphi]$. Cette fonction est donc indépendante des fonctions ζ dans lesquelles elle peut figurer. D'autre part, la façon même dont nous la trouvons montre que c'est une fonction rationnelle de x et de y; elle est, par suite, indépendante du système de coupures auquel se rapportent les intégrales t_A et $[\varphi]$. *Elle ne dépend donc que de la courbe* C *et du point* A.

En ce qui concerne les fonctions ζ, on voit qu'elles sont complètement déterminées par les constantes $\alpha_0, \alpha_{\nu_0}, \dots, \alpha_\mu$, dont le nombre est égal à $\mu - k + 1$, k désignant ici le nombre des ordres manquants inférieurs ou égaux à μ, résultat conforme à celui du n° 2. La détermination des constantes $\alpha_{\nu_0}, \alpha_{\nu_0+1}, \dots, \alpha_\mu$, pour une fonction ζ donnée, se fait très simplement. Si A_h est le coefficient de $\frac{1}{(x-x_0)^h}$ dans le développement de ζ, suivant les puissances de $x - x_0$, on a

$$\alpha_h = \frac{(-1)^{h-1} A_h}{(h-1)!};$$

h étant un ordre existant, on voit que ζ est déterminé, à la constante additive α_0 près, *par les coefficients, dans son développement, des puissances de* $\frac{1}{x - x_0}$, *dont les exposants sont des ordres existants.*

6. Si le point A est un point de Weierstrass, il existe au moins une valeur de μ, supérieure ou égale à p, pour laquelle le nombre k des ordres manquants, inférieurs ou égaux à μ, est plus petit que p. Le système (1) du n° 4 devant admettre une solution contenant $\mu - k$ arbitraires, son déterminant principal est de degré inférieur à p. On en conclut que tous les déterminants de degré p du Tableau des u sont nuls. En particulier, il en résulte que

$$U = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{d^2 u_1}{dx^2} & \cdots & \frac{d^p u_1}{dx^p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_p}{dx} & \frac{d^2 u_p}{dx^2} & \cdots & \frac{d^p u_p}{dx^p} \end{vmatrix}$$

s'annule pour $x = x_0$ et $y = y_0$. Réciproquement, si ce déterminant s'annule pour $x = x_0$, $y = y_0$, le point A est un point de Weierstrass, car les équations (1) peuvent se résoudre pour $\mu = p$.

Les points de Weierstrass sont donc déterminés par l'équation $U = 0$.

Les intégrales u_i qui figurent dans U ne sont pas nécessairement des intégrales normales; on peut prendre pour les u_i un système quelconque d'intégrales indépendantes de première espèce. Ceci va nous permettre de calculer la multiplicité m d'un point de Weierstrass pour lequel les ordres manquants sont les nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$. Il suffit de prendre pour les intégrales u_i un système d'intégrales v_i. On obtient alors à la place de U un déterminant V, dont la comparaison avec le Tableau des v_i^k permet de voir que son développement, en série entière en $x - x_0$, est divisible par

$$(x - x_0)^{\sum_i \rho_i - \frac{p(p+1)}{2}}.$$

On en conclut que l'équation $V = 0$ admet la racine x_0 au degré

$$\sum \rho_i - \frac{p(p+1)}{2}$$

de multiplicité et que, par suite,

$$m = \sum \rho_i - \frac{p(p+1)}{2}.$$

A ceci se rattache tout naturellement la question suivante :

Quel est le nombre de conditions imposées à une courbe de genre p par l'existence d'un point de Weierstrass d'espèce déterminée? J'entendrai dorénavant par là un point de Weierstrass *correspondant à un système d'ordres manquants donné*.

Pour y répondre, on peut se proposer de former un système d'intégrales v_i, en partant d'un système quelconque d'intégrales indépendantes de première espèce infiniment petites du premier ordre en A, et d'évaluer le nombre de conditions qui doivent être remplies pour que l'on puisse former ce système.

On voit sans peine que le passage de v_i à v_{i+1} entraîne

$$(\rho_{i+1} - \rho_i - 1)(p - i)$$

conditions nouvelles, en apparence indépendantes de celles que l'on a trouvées en formant les intégrales précédentes $v_1, v_2, \ldots, v_i$, si toutefois on suppose que l'on soit parti de la courbe la plus générale de genre p. Le nombre total d'équations de condition que l'on trouve ainsi est

$$\sum_{i=1}^{i=p-1} (\rho_{i+1} - \rho_i - 1)(p - i) = \sum \rho_i - \frac{p(p+1)}{2} = m.$$

Ces équations contiennent les coordonnées x_0, y_0 du point A, qui sont liées d'autre part par la relation

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe. L'élimination de x_0, y_0 entre toutes ces relations *donnera en définitive $m - 1$ conditions*, ce qui est aussi le nombre des conditions pour que m points de Weierstrass ordinaires soient réunis en un point d'ordre m.

Mais, de ce que nous verrons dans la suite, il résultera que ces conditions peuvent ne pas être toujours indépendantes; tout ce que l'on est en droit d'affirmer, c'est que *le nombre des conditions imposées à* *une courbe par l'existence d'un point de Weierstrass d'ordre m d'espèce déterminée est au plus égal à* $m - 1$.

Du reste, on peut se rendre compte de ce fait que les conditions peuvent n'être pas indépendantes, en remarquant que leur indépendance ne peut avoir lieu que dans l'hypothèse d'une courbe de genre p absolument générale. Or on conçoit qu'au moment où l'on passe de la formation de l'intégrale v_i à celle de l'intégrale v_{i+1}, cette condition ait cessé d'être remplie; en effet, l'existence du système partiel d'intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_i$ peut entraîner que la courbe appartienne à une *classe spéciale* (¹).

7. En dehors de son importance théorique, le théorème des nᵒˢ 3 et suivants fournit un moyen de déterminer les ordres manquants en un point d'une courbe donnée. Prenons par exemple la courbe de genre 6

$$x^5 + y^5 - y = 0,$$

et étudions le point $x = 0$, $y = 0$. Ici $n - 3 = 2$; l'intégrale générale de première espèce est

$$\int \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f}{5y^4 - 1} dx.$$

Le système (v) se forme sans peine, et l'on trouve pour les ordres manquants les nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6, \quad 7, \quad 11.$$

On pourrait étudier de la même manière les points

$$x = 0, \qquad y^4 - 1 = 0,$$

ainsi que les points à l'infini.

Les fonctions, d'ordre inférieur à 11, infinies au point $x = 0$, $y = 0$,

---

(¹) Un exemple caractéristique est fourni par les courbes hyperelliptiques de genre p; quand on a écrit que $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$, on a écrit que la courbe est hyperelliptique, et cela donne bien le nombre $p - 2$ de conditions auxquelles elle est assujettie :

$$[2p - 1 = 3p - 3 - (p - 2)].$$

rangées par ordres croissants, sont

$$\frac{\beta xy+\gamma y^2}{y^2},\quad \frac{\beta xy+\gamma y^2+\varepsilon y}{y^2},\quad \frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\varepsilon y}{y^2},$$
$$\frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y}{y^2},\quad \frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\varphi}{y^2}.$$

On vérifiera aisément qu'elles sont formées comme il a été dit au n° 2.

CHAPITRE III.

FORMATION DES TABLEAUX D'ORDRES MANQUANTS. FONCTIONS u_i.

1. Soient ζ_1 et ζ_2 deux fonctions rationnelles de x et de y, infinies en A, d'ordres d et d' respectivement ([1]). Le produit $\zeta_1\zeta_2$ est une fonction infinie en A d'ordre $d+d'$. Donc, *si d et d' sont deux ordres existants, $d+d'$ sera aussi un ordre existant*. De là résulte la proposition suivante :

Si ρ est un ordre manquant, d'un ordre existant, la différence $\rho-d$ est un ordre manquant.

En effet, si $\rho-d$ existait, $(\rho-d)+d=\rho$ existerait aussi.

Soit dorénavant α *le plus petit ordre existant*. Les nombres

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad \alpha-1$$

seront des ordres manquants. Soit i l'un de ces nombres; il y a certainement au moins un ordre manquant ρ tel que l'on ait $\rho\equiv i \pmod{\alpha}$, puisque i est un pareil ordre.

Je désignerai par r_i le plus grand d'entre eux, et je poserai

$$r_i=\alpha\mu_i+i,$$

([1]) *Hu.*, p. 307.

l'entier μ_i étant nul, si le seul ordre manquant, congru à i suivant le module α, est i lui-même. Les ordres

$$r_i, \quad r_i - \alpha, \quad \ldots, \quad r_i - \mu_i \alpha$$

manqueront tous, et, comme le dernier est i lui-même, on en conclut que ce sont tous les ordres manquants $\equiv i \pmod{\alpha}$. Si on les écrit dans l'ordre inverse, leur suite est

$$i, \quad i + \alpha, \quad \ldots, \quad i + \alpha\mu_i.$$

Le Tableau des ordres manquants est donc

$$\begin{array}{llll}
1, & 1+\alpha, & \ldots, & 1+\alpha\mu_1, \\
2, & 2+\alpha, & \ldots, & 2+\alpha\mu_2, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\alpha-1, & \alpha-1+\alpha, & \ldots, & \alpha-1+\alpha\mu_{\alpha-1}.
\end{array}$$

Le nombre des termes de ce Tableau est égal à p. Évaluons-le sur le Tableau lui-même ([1]); on voit immédiatement qu'il est égal à

$$(\mu_1+1)+(\mu_2+1)+\ldots+(\mu_{\alpha-1}+1) = \sum_{i=1}^{i=\alpha-1} \mu_i + \alpha - 1.$$

Nous avons donc l'égalité

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha-1} \mu_i = p - \alpha + 1. \tag{1}$$

La détermination des ordres manquants est donc ramenée à la résolution en nombres entiers, positifs ou nuls, de cette équation, ou plus exactement à la recherche d'un certain nombre de ses solutions, comme on va le voir.

Nous pouvons en effet remarquer en premier lieu que, si le nombre maximum des points d'intersection d'une courbe φ avec C confondus en A est $p+s$, l'ordre manquant maximum sera $p+s+1$ (Chap. II,

([1]) *Hu.*, *loc. cit.*

n° 2); $p+s$ ne pouvant surpasser $2p-2$, *les ordres manquants seront tous inférieurs ou égaux à* $2p-1$.

En second lieu, nous avons établi plus haut que, si d et d' étaient deux ordres existants, $d+d'$ existait; par conséquent, si une solution de l'équation (1), après nous avoir conduits à reconnaître l'existence des deux ordres d et d', nous donne dans le Tableau des ordres manquants le nombre $d+d'$, nous devons la rejeter.

De ces deux remarques, nous pourrions tirer des inégalités entre les nombres μ_i, qui seraient des règles d'exclusion relativement aux solutions impropres de l'équation (1). Mais une disposition convenable de l'opération va nous permettre de tenir compte de ces remarques, sans avoir à recourir à ces inégalités.

2. Rangeons, par ordre croissant, les nombres

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad 2p-1$$

dans un Tableau dont chaque ligne, sauf en général la dernière, contiendra α nombres. Soit

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & \ldots, & \alpha, \\ \alpha+1, & \alpha+2, & \ldots, & 2\alpha, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

ce Tableau. Les termes de la colonne de rang i sont tous $\equiv i \pmod{\alpha}$, et le dernier, en bas, est le plus grand de ces nombres qui soit inférieur à $2p-1$; *on en conclut que le nombre des termes de la colonne de rang i diminué d'une unité est la limite supérieure de* μ_i. Cette limite supérieure ainsi déterminée par la simple inspection du Tableau, je forme les solutions de (1) qui satisfont à cette première condition. Soit

$$\mu_1,\quad \mu_2,\quad \ldots,\quad \mu_{\alpha-1} \tag{2}$$

une de ces solutions. Je barre dans le Tableau : 1° tous les termes de la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne; 2° tous les termes de la $i^{\text{ième}}$ colonne situés au-dessous du $(\mu_i+1)^{\text{ième}}$. Il reste alors p termes qui pourront former un système d'ordres manquants, si la seconde condition est remplie. Pour le voir, je forme la suite des ordres existants possibles, autres que α; car, en ce qui concerne α, la condition est satisfaite par le fait même de l'opération précédente. Soient donc d_1, d_2, ... ces ordres rangés en suite croissante. Tous les termes de d_1 en d_1 à partir de d_1, de d_2 en d_2 à partir de d_2, de d_2 en d_2 à partir de d_1, etc. inclusivement, doivent avoir été barrés, *sinon la solution* (2) *est inacceptable*. Bien entendu, j'arrête la suite des ordres existants, qui est illimitée, à l'ordre existant immédiatement inférieur à $2p-1$; dans ces conditions, la suite à considérer est formée tout simplement des nombres barrés dans le Tableau, autres que les multiples de α. Le nombre des vérifications à faire est en général fort limité, car les termes des suites

$$d_1, \quad 2d_1, \quad \ldots; \quad d_2, \quad 2d_2, \quad \ldots; \quad d_1+d_2, \quad d_1+2d_2, \quad \ldots; \quad \ldots$$

arrivent très rapidement à dépasser $2p-1$.

Prenons, à titre d'exemple, le cas de $p=11$, $\alpha=4$. On a ici

$$\alpha-1=3, \qquad 2p-1=21.$$

L'équation (1) est

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=8, \tag{1'}$$

et le Tableau

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21			

On a donc $\mu_1 \leqq 5$, $\mu_2 \leqq 4$, $\mu_3 \leqq 4$. Le nombre des solutions de (1'), satisfaisant à ces conditions, est 19. Soient, par exemple, les deux suivantes : $\mu_1=2$, $\mu_2=4$, $\mu_3=2$; et $\mu_1=1$, $\mu_2=4$, $\mu_3=3$; elles nous fournissent les deux Tableaux

1	2	3	~~4~~
5	6	7	8
9	10	11	~~12~~
~~13~~	14	~~15~~	~~16~~
~~17~~	18	~~19~~	~~20~~

1	2	3	~~4~~
5	6	7	8
9	10	11	~~12~~
~~13~~	14	15	~~16~~
~~17~~	18	~~19~~	~~20~~

Dans le premier $d_1 = 13$, $2d_1 = 26$; la solution est évidemment acceptable. Dans le second $d_1 = 9$, $2d_1 = 18$; or, 18 n'a pas été barré, donc la seconde solution considérée est à rejeter.

Les deux règles d'exclusion, l'une *a priori*, l'autre *a posteriori*, que nous avons déduites des remarques du n° 1, nous donnent des conditions nécessaires que doit remplir un Tableau d'ordres manquants. Il est naturel de se demander si elles sont suffisantes. Ce n'est que plus tard que nous pourrons répondre, négativement du reste, à cette question. Auparavant je dois étudier les relations qui existent entre les fonctions rationnelles infinies en A; c'est ce que je vais faire.

3. D'après ce qui précède, le plus petit ordre existant $\equiv i \pmod \alpha$ est égal à $\alpha(\mu_i + 1) + i$; je désignerai par u_i une fonction quelconque de cet ordre, infinie en A seulement, et par u une quelconque des fonctions analogues, d'ordre α. Dans la suite de fonctions

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{\alpha-1},$$

je distinguerai celles dont l'ordre, et par suite l'indice, est premier avec α, et *je les appellerai des fonctions d'ordre primitif.*

Je me propose actuellement de chercher la forme de la relation qui lie u et une fonction d'indice primitif u_i. En premier lieu, je vais établir l'existence de cette relation à l'aide de la proposition suivante (¹) :

Toute fonction rationnelle, infinie en A seulement, peut être mise sous la forme

$$\zeta = g_0(u) + g_1(u)u_1 + g_2(u)u_2 + \ldots + g_{\alpha-1}(u)u_{\alpha-1},$$

$g_0, g_1, \ldots, g_{\alpha-1}$ *étant des polynomes entiers en* u.

Soient δ_1 l'ordre de ζ; δ_2, δ_3, ... les ordres existants inférieurs à δ_1, rangés en suite décroissante; η_{δ_1}, η_{δ_2}, ... des fonctions rationnelles quelconques, infinies en A seulement, d'ordres $\delta_1, \delta_2, \ldots$; je conviendrai cependant de prendre $\eta_{\delta_k} = u_i$, si δ_k égale $\alpha(\mu_i + 1) + i$. Du n° 5 du Chapitre II on déduit sans peine que l'on a

$$\zeta = A_{\delta_1}\eta_{\delta_1} + A_{\delta_2}\eta_{\delta_2} + \ldots + A_\alpha u + A_0.$$

(¹) *Sc.*, p. 308.

Cela posé, soit $\delta_j \equiv i \pmod{\alpha}$, et posons $\delta_j = \alpha(\nu_j + \mu_i + 1) + i$; la fonction $u^{\nu_j} u_i$ est d'ordre δ_j, et si je lui applique la formule précédente, j'ai l'égalité

$$u^{\nu_j} u_i = A^i_{\delta_j} \eta_{\delta_j} + A^i_{\delta_j+1} \eta_{\delta_j+1} + \ldots + A^i_0.$$

A chaque ordre δ_k, différent de l'un des ordres $\alpha(\mu_i + 1) + i$, correspond une pareille équation. Je peux donc, entre ces équations et l'équation (1), éliminer les fonctions η_{δ_k} différentes des u_i, et l'expression que j'obtiens ainsi pour ζ est de la forme demandée.

Appliquons cette proposition aux fonctions (1)

$$u_i^2, \quad u_i^3, \quad \ldots, \quad u_i^\alpha;$$

nous aurons $\alpha - 1$ égalités de la forme

$$(1) \qquad u_i^h = g_{h0} + g_{h1} u_1 + g_{h2} u_2 + \ldots + g_{h,\alpha-1} u_{\alpha-1} \qquad (h = 2, 3, \ldots \alpha);$$

les degrés, ou plutôt les limites supérieures des degrés en u, des polynomes $g_{h,l}$ se déterminent par la condition que u_i^h est infini en A d'ordre $h[\alpha(\mu_i + 1) + i]$. Soient q_h et r_h le quotient et le reste de la division de hi par α; δ_l le degré de $g_{h,l}$; on a :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \text{Pour} & l = 0 \ldots\ldots\ldots & \delta_l \leqq h(\mu_i + 1) + q_h, \\ \text{Pour} & l < r_h \ldots\ldots\ldots & \delta_l \leqq h(\mu_i + 1) - (\mu_l + 1) + q_h, \\ \text{Pour} & l = r_h \ldots\ldots\ldots & \delta_l = h(\mu_i + 1) - (\mu_l + 1) + q_h, \\ \text{Pour} & l > r_h. \ldots\ldots & \delta_l \leqq h(\mu_i + 1) - (\mu_l + 1) + q_h - 1; \end{array} \right.$$

on remarquera que, pour le polynome g_{h,r_h}, le degré est toujours égal à sa limite supérieure; le produit $g_{h,r_h} u_{r_h}$ est en effet le seul dont l'ordre soit égal à celui de u_i^h.

Écrivons les équations (1) de la façon suivante :

$$u_i^h - g_{h,i} u_i - g_{h,0} = g_{h,1} u_1 + \ldots + g_{h,\alpha-1} u_{\alpha-1} \qquad (h = 2, 3, \ldots, \alpha),$$

et entre ces $\alpha - 1$ équations, éliminons les $\alpha - 2$ quantités $u_2, u_3, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_\alpha$; nous obtenons une équation de la forme

$$(3) \qquad \gamma_0 u_i^\alpha + \gamma_1 u_i^{\alpha-1} + \ldots + \gamma_\alpha = 0,$$

---

(1) *Sc.*, *ibid.*, et p. 218.

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\alpha$ désignant des polynomes entiers en u, qui s'expriment à l'aide des g_{hl} par des déterminants faciles à former.

4. L'existence de la relation entre u et u_i étant ainsi établie, il s'agit de préciser sa forme. Les deux fonctions u et u_i, n'ayant d'autre infini que le point A, u_i ne peut devenir infini que si u l'est aussi. La forme définitive de la relation est donc

$$u_i^\alpha + g_1 u_i^{\alpha-1} + \ldots + g_\alpha = 0, \tag{4}$$

$g_1, g_2, \ldots, g_\alpha$ étant des polynomes en u, dont il nous faut connaître le degré, et la façon dont ils se rattachent aux polynomes γ. Pour y arriver, il suffit d'étudier les déterminants qui représentent les polynomes γ. Je n'exposerai pas cette étude, un peu longue, mais sans difficultés particulières; d'autant plus que, dans ce qui suit, j'indiquerai un moyen beaucoup plus rapide d'arriver au point le plus important pour moi, la détermination des degrés des polynomes g_1, $g_2, \ldots, g_\alpha$. Je ne donnerai donc que les résultats de cette étude.

1° Le polynome γ_0 est d'un degré déterminé, au-dessous duquel il ne peut s'abaisser; par suite les polynomes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\alpha$ sont tous divisibles par γ_0, et l'on a

$$g_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}.$$

2° Le degré du polynome g_h est

$$\delta_h \leqq h(\mu_i + 1) + q_h,$$

et pour le polynome g_α, on a exactement

$$\delta_\alpha = \alpha(\mu_i + 1) + q_\alpha = \alpha(\mu_i + 1) + i = d_i,$$

d_i désignant l'ordre de u_i.

Le terme de plus haut degré, par rapport à u et à u_i, dans (4), est précisément le terme de plus haut degré de g_α. *Donc la relation* (4) *est, par rapport à u et à u_i, de degré d_i.*

Je désignerai constamment dans la suite l'équation (4) par

$$F(u, u_i) = 0.$$

Je vais continuer l'étude de cette équation en cherchant le nombre de paramètres arbitraires qu'elle contient. L'équation la plus générale, de même forme que $F(u, u_i) = 0$, renferme

$$\sum_{h=1}^{h=\alpha} (\delta_h + 1)$$

coefficients; en remplaçant, puisque l'équation est supposée complète, δ_i par sa limite supérieure, on trouve

$$\sum_{h=1}^{h=\alpha} (\delta_h + 1) = \sum_{h=1}^{h=\alpha} [h(\mu_i + 1) + q_h + 1] = \frac{(\alpha+1)}{2} [\alpha(\mu_i + 1) + i + 1),$$

c'est-à-dire $\frac{(\alpha+1)(d_i+1)}{2}$. Si nous revenons à la relation (4), nous voyons que le nombre des arbitraires qu'elle renferme est nécessairement moindre. En effet, d'une part, il faut remarquer que la relation (4) a lieu entre deux fonctions u et u_i, quelconques de leur ordre, et contenant ensemble $d_i - k + 1 + 2 = d_i - k + 3$ arbitraires, k étant le nombre des ordres manquants inférieurs à d_i; d'autre part, la relation $F(u, u_i) = 0$ est une équation algébrique de même classe que l'équation $f(x, y) = 0$ de la courbe C. Il en résulte en premier lieu que le nombre trouvé plus haut doit être diminué, pour la relation (4), de $d_i - k + 3$ unités, soit que, laissant arbitraires les paramètres des fonctions u et u_i, on les considère comme figurant pour $d_i - k + 3$ unités dans le nombre d'arbitraires que peut contenir le premier membre de (4), soit que, profitant de leur indétermination, on réduise à des valeurs numériques un égal nombre de coefficients de ce premier membre. En second lieu, la relation (4) est de genre p et appartient à une classe possédant un point de Weierstrass d'espèce déterminée; il existe de ce fait un certain nombre de relations entre ses coefficients. Le nombre exact de ces relations sera déterminé plus tard; pour le moment nous ne retiendrons de ce qui précède que ceci : *en laissant de côté les conditions relatives au genre et à la classe, on peut considérer le premier membre de la relation* (4) *comme contenant*

$$\frac{(\alpha+1)(d_i+1)}{2} - d_i + k - 3 = \frac{(\alpha-1)(d_i+1)}{2} + k - 2$$

paramètres arbitraires.

5. L'existence de la relation (4) pouvait aussi s'établir *a priori*, en ayant recours aux principes de la théorie des fonctions algébriques. Plus généralement, on peut en déduire l'existence d'une relation entre deux fonctions quelconques ζ_i et ζ_k, infinies en A seulement, de même forme que la relation (4) et de degré d_i en ζ_k, de degré d_k en ζ_i, d_i et d_k étant les ordres respectifs de ζ_i et ζ_k. Cette relation sera donc du type

$$(5) \qquad \zeta_i^{d_k} + g_1(\zeta_k)\zeta_i^{d_k-1} + \ldots + g_{d_k}(\zeta_k) = 0,$$

$g_1, g_2, \ldots, g_{d_k}$ étant des polynomes en ζ_k, dont le dernier g_{d_k} est nécessairement de degré d_i. Pour déterminer les degrés, ou les limites supérieures des degrés des autres, je me servirai de la remarque suivante :

Soit $f(x,y) = 0$ une équation algébrique; formons pour cette équation le parallélogramme de Newton, et traçons le contour polygonal fermé contenant à son intérieur ou sur ses côtés tous les points de la figure, en procédant comme pour la ligne polygonale de Puiseux, et en complétant cette ligne si elle existe. La portion concave vers l'origine de ce contour permet de trouver le premier terme du développement de celles des déterminations de y qui sont infinies pour x finie, et de toutes les déterminations de y pour x infinie, tout comme la ligne polygonale de Puiseux le permet pour les déterminations de y infiniment petites avec x, lorsqu'il y en a.

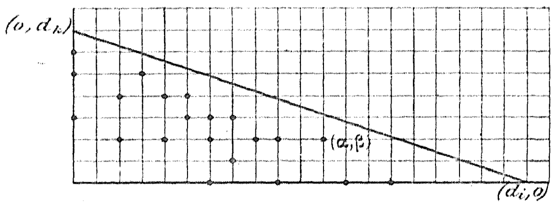
Ici, ζ_i et ζ_k sont infinis simultanément; d'autre part, ζ_i et ζ_k, considérées comme fonctions rationnelles de x et de y, sont infinies en A seulement, et leurs développements en séries de puissances de $x - x_0$ seront de la forme

$$\zeta_i = \frac{A_i}{(x - x_0)^{d_i}} + \ldots, \qquad \zeta_k = \frac{A_k}{(x - x_0)^{d_k}} + \ldots;$$

les puissances allant, bien entendu, en croissant; par suite les d_k déterminations de ζ_i, fournies par l'équation (5), se développent toutes en séries procédant suivant les puissances décroissantes de ζ_k et du type :

$$\zeta_i = \alpha^{\frac{d_i}{d_k}} \zeta_i^{\frac{d_i}{d_k}} + \ldots.$$

Il en résulte que, pour cette équation, la partie concave vers l'origine du contour précédent se réduit à la droite allant du point $(0, d_k)$ au point $(d_i, 0)$, et que tous les points du parallélogramme, autres que ces derniers, sont en dehors de cette droite; ceci est plus particulièrement une conséquence de ce fait, que le premier coefficient du développement est racine d'une équation binome de degré d_k.



Il en résulte que pour un point quelconque de la figure, de coordonnées (α, β), on a

$$\frac{\alpha}{d_i} + \frac{\beta}{d_k} - 1 < 0,$$

l'inégalité ne se changeant jamais en égalité, sauf pour les deux points $(0, d_k)$ et $(d_i, 0)$. Soit δ_h le degré de g_h, appliquons ceci au terme $\zeta_k^{\delta_h}\zeta_i^{d_k-h}$; il vient $\delta_h < \frac{h d_i}{d_k}$: donc δ_h *a pour limite supérieure l'entier immédiatement inférieur à* $\frac{h d_i}{d_k}$, *sauf si* $h = d_k$; *on a alors* $\delta_{d_k} = d_i$.

Revenons à la relation (4); nous retrouvons, en faisant $d_k = \alpha$, pour les degrés des polynomes g_h, ou pour leurs limites supérieures, les nombres donnés au n° 4, et c'est là le mode de détermination de ces nombres auquel j'ai fait allusion. Je ferai une seconde application de ce qui précède à la relation entre u et une fonction u_i d'ordre non primitif; ici encore je dois faire $d_k = \alpha$, mais il y a lieu de distinguer deux cas dans la recherche de l'entier *immédiatement inférieur* à $\frac{h d_i}{\alpha}$: soit D le plus grand commun diviseur de ι et de α_i; si $h \not\equiv 0 \left(\bmod \frac{\alpha}{D}\right)$, cet entier est $h(\mu_i + 1) + q_h$, et l'on a encore

$$\delta_h \leqq h(\mu_i + 1) + q_h;$$

si au contraire $h \equiv 0 \left(\bmod \frac{\alpha}{D}\right)$, $\frac{h d_i}{\alpha}$ est entier et égal à $h(\mu_i + 1) + q_h$; on a donc

$$\delta_h \leqq h(\mu_i + 1) + q_h - 1,$$

le cas de $h = \alpha$ étant excepté et δ_α étant toujours égal à d_i.

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATION PAR UNE ÉQUATION $F(u, u_i) = 0$ D'UNE CLASSE DE COURBES DE GENRE p POSSÉDANT UN POINT DE WEIERSTRASS D'ESPÈCE DÉTERMINÉE.

1. Je vais désormais me replacer au point de vue géométrique et envisager, au lieu de relations algébriques entre deux variables, les courbes qu'elles représentent en coordonnées cartésiennes. Les conditions imposées par l'existence d'un point de Weierstrass se présenteront ainsi sous une forme plus nette et plus intéressante. D'autre part, comme on peut définir une classe de courbes algébriques par l'une quelconque d'entre elles, je prendrai, pour définir une classe, la courbe représentée par l'une des relations (4)

$$F(u, u_i) = 0$$

du n° 4 du Chapitre précédent, lorsqu'on y regarde u et u_i comme les coordonnées cartésiennes d'un point du plan; u_i sera donc une *fonction d'ordre primitif*.

Cette courbe est de degré d_i; le point de Weierstrass A est pour elle le point à l'infini dans la direction de l'axe des u_i. Par ce point passent $d_i - \alpha$ branches tangentes à la droite de l'infini; ce point est donc multiple en général, tandis que sur la courbe fondamentale primitive il était supposé simple; ce fait résulte du rôle que joue le point A dans la transformation birationnelle qui permet de passer d'une courbe à l'autre. Pour caractériser davantage ce point multiple, j'ajouterai que ce qui suit montre qu'il est analogue à celui que présente à l'origine des coordonnées la courbe $y^{d_i-\alpha} - Kx^{d_i} = 0$, l'axe des x jouant ici le même rôle que la droite de l'infini plus haut. On voit en particulier que la droite de l'infini rencontre la courbe en d_i points confondus en A. Nous désignerons cette courbe par $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$.

Nous allons tout d'abord reprendre l'équation de cette courbe

$$F(u, u_i) = 0 \tag{1}$$

pour faire d'une façon plus précise l'étude des déterminations de u_i pour $u = \infty$. Si nous appliquons à cette étude la remarque faite à la fin du Chapitre précédent, nous voyons que les développements en série, pour $u = \infty$, des α déterminations de u_i sont tous de la forme

$$u_i = A_0 u^{\frac{d_i}{\alpha}} + \ldots,$$

A_0 étant racine de l'équation binome $z^\alpha + K = 0$, où K désigne le coefficient du terme de plus haut degré de g_α. On en conclut que les α déterminations de u_i forment un système circulaire unique, et par suite que les α feuillets de la surface de Riemann, correspondant à l'équation (1), se ramifient tous entre eux au point $u = \infty$, de manière à former un point de ramification unique d'ordre $\alpha - 1$. De là résulte l'importante proposition que voici : *Toute équation* $F(u, u_i) = 0$, *entre* u *et une fonction* u_i *d'ordre primitif, est irréductible.*

Disons à ce propos, pour n'avoir plus à y revenir, un mot sur les relations entre u et les fonctions d'ordres non primitifs. Pour ces relations la surface de Riemann est formée d'α feuillets, se ramifiant au point $u = \infty$ par groupes de $\frac{\alpha}{D}$ feuillets [1], de manière à former D points de ramification d'ordre $\frac{\alpha}{D} - 1$ superposés en ce point. On ne peut donc plus conclure à l'irréductibilité de la relation; cependant, si l'on traite des cas particuliers, on voit que la relation entre la fonction u et une fonction u_i d'ordre non primitif i est irréductible en général, c'est-à-dire si l'on prend pour u_i une fonction suffisamment générale de son ordre; qu'elle ne cesse de l'être que pour des fonc-

---

(1) D désigne ici comme au n° 5 du Ch. III le plus grand commun diviseur entre i et α.

tions u_i particulières. Par conséquent, on doit admettre que la relation entre u et une fonction u_i d'ordre non primitif est irréductible, sauf peut-être pour certaines fonctions particulières u'_i de cet ordre. Ceci revient en somme à admettre que les formules $x' = u$, $y' = u_i$ définissent une transformation birationnelle de la courbe fondamentale primitive C, tandis que les formules $x' = u$, $y' = u'_i$ n'en définissent pas, et ne donnent qu'une transformation unirationnelle de cette courbe. Le fait qu'on n'est pas absolument certain de l'irréductibilité d'une pareille relation, et aussi celui que les calculs qui vont suivre sont beaucoup plus compliqués pour elle que pour une relation correspondant à une fonction d'ordre primitif, m'ont conduit à adopter les courbes représentées par ces dernières pour la définition de la classe, bien qu'elles ne soient pas toujours aussi simples que celles qui correspondent aux premières. Cependant, je me servirai de celles-ci dans l'application aux courbes gauches.

Je passe maintenant à la détermination du nombre des points doubles, ou de l'équivalent en points doubles du nombre des points multiples que présente la courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ en dehors de A. Soit w la somme des ordres des points de ramification de la surface de Riemann précédente; elle a α feuillets et est de genre p; j'ai donc

$$w = 2(p + \alpha - 1);$$

w est formé de l'ordre $\alpha - 1$ du point de ramification à l'infini et de la somme des ordres des points de ramification à distance finie. Si N est le degré du discriminant par rapport à u_i de $F(u, u_i)$, et δ le nombre des points doubles, cette dernière somme est égale à $N - 2\delta$; j'ai par suite $w = \alpha - 1 + N - 2\delta$ et

$$\delta = \frac{N}{2} - \frac{\alpha - 1}{2} - p.$$

Pour calculer N, j'écris le discriminant sous la forme $\Pi(u_i^{(h)} - u_i^{(l)})^2$, $u_i^{(h)}, u_i^{(l)}$ désignant des déterminations quelconques, mais différentes de u_i, et je remplace toutes ces déterminations par leurs développements en série suivant les puissances décroissantes de u; le degré du terme de plus haut degré du produit sera précisément N. Or, si je borne chaque développement à son premier terme, qui est en $u^{\frac{d_i}{\alpha}}$, j'obtiens un terme qui ne disparaîtra pas (car son coefficient est le discriminant de l'équation binome déjà considérée $z^\alpha + K = 0$ et est par suite différent de zéro), et qui sera manifestement le terme de plus haut degré du produit. Ce terme est de degré

$$2\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{d_i}{\alpha} = (\alpha-1)d_i.$$

Donc $N = (\alpha - 1)d_i$ et l'on a

$$\delta = \frac{(\alpha-1)(d_i-1)}{2} - p. \tag{2}$$

Pour une courbe correspondant à une relation $F(u, u_i) = 0$, u_i n'étant pas d'ordre primitif, on aurait, D ayant toujours la même signification,

$$\delta = \frac{(\alpha-1)(d_i-1)-(D-1)}{2} - p. \tag{3}$$

2. Je considère enfin l'intégrale de première espèce la plus générale attachée à la courbe. Comme $F(u, u_i) = 0$ est de degré α en u_i et que le coefficient u_i^α est indépendant de u, je peux écrire cette intégrale sous la forme

$$w = \int \frac{\varphi(u, u_i)}{\dfrac{\partial F}{\partial u_i}}du$$

$\varphi(u, u_i)$ étant une fonction entière de u et de u_i, de degré $\alpha - 1$ au plus en u_i, telle que w reste finie sur toute la surface de Riemann; je représenterai cette fonction par

$$g_{\beta_1}u_i^{\alpha-1} + g_{\beta_2}u_i^{\alpha-2} + \ldots + g_{\beta_\alpha},$$

g_{β_1}, g_{β_2}, ... étant des polynomes entiers en u respectivement de degrés β_1, β_2, ... Comme je peux, sans restreindre la généralité dans une certaine mesure [1], supposer que $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ n'a en dehors du point A que des points doubles ordinaires, je ferai, pour plus de simplicité, cette hypothèse dans tout ce qui suit. Dans ces conditions, $\varphi(u, u_i)$ est assujettie à s'annuler aux δ points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$, et, de plus, pour que w reste finie pour $u = \infty$, à être d'une forme que je vais déterminer.

---

[1] Au moins en ce qui concerne l'exposition.

Pour cela, je vais chercher le premier terme du développement de l'intégrale ϖ suivant les puissances décroissantes de u. Si je pose pour un instant $\frac{d_i}{\alpha} = \nu$, je vois tout d'abord que le développement de $\frac{\partial F}{\partial u_i}$, effectué comme je viens de le dire, commence par un terme en $u^{(\alpha-1)\nu}$. Pour avoir le premier terme du développement de $\varphi(u, u_i)$, je remarque que ceux de ces termes qui proviennent d'un produit $g_{\beta_l} u_i^{\alpha-l}$ ne peuvent se réduire avec ceux qui proviennent d'un autre produit analogue $g_k u_i^{\alpha-k}$, et qu'ils ne peuvent pas davantage se réduire entre eux; par suite, le terme cherché est donné par le terme de plus haut degré d'un seul de ces produits que je désignerai par $g_{\beta_h} u_i^{\alpha-h}$, et sera de degré $\beta_h + (\alpha - h)\nu$. Comme le produit $g_{\beta_l} u_i^{\alpha-l}$ donne des termes au plus de degré $\beta_l + (\alpha - l)\nu$, on en conclut l'inégalité

$$(4) \qquad \beta_l + (\alpha - l)\nu < \beta_h + (\alpha - h)\nu.$$

De tout ceci, il résulte que le développement de $\frac{d\varpi}{du}$, suivant les puissances décroissantes de u, est de la forme

$$\frac{d\varpi}{du} = \frac{A}{u^{(h-1)\nu-\beta_h}} + \ldots,$$

et que, pour que l'intégrale reste finie pour $u = \infty$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(h-1)\nu - \beta_h > 1.$$

On a donc $\beta_h < (h-1)\nu - 1$; d'où, en vertu de (4) et quel que soit l,

$$(5) \qquad \beta_l < (l-1)\nu - 1.$$

Une première conséquence de cette inégalité est que l'on ne peut avoir $l = 1$, car β_l est positif ou nul; donc :

$\varphi(u, u_i)$ n'est que de degré $\alpha - 2$ au plus en u_i.

De plus, si je remplace ν par sa valeur $\frac{d_i}{\alpha} = \frac{\alpha(\mu_i + 1) + i}{\alpha}$, je trouve pour le degré β_l, ou pour sa limite supérieure,

$$(6) \qquad \beta_l \leqq (l-1)(\mu_i + 1) + q_{l-1} - 1.$$

Si l'on désigne par δ_{l-1}, non plus nécessairement le degré du polynome g_{l-1} qui figure dans $F(u, u_i)$, mais sa limite supérieure (Chap. III, n° 4), on voit que l'on a

$$\beta_l \leqq \delta_{l-1} - 1.$$

En résumé, le polynome $\varphi(u, u_i)$ le plus général est un polynome de la forme

$$g_{\beta_2} u_i^{\alpha-2} + g_{\beta_3} u_i^{\alpha-3} + \ldots + g_{\beta_\alpha},$$

s'annulant aux δ points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$, et les degrés $\beta_2, \beta_3, \ldots$ des polynomes $g_{\beta_2}, g_{\beta_3}, \ldots$ vérifiant l'inégalité (6).

De l'analyse précédente, il résulte évidemment qu'en égalant ce polynome à zéro on obtient l'équation de la courbe φ la plus générale attachée à la courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$. On peut du reste vérifier aisément qu'elle contient p paramètres arbitraires sous forme linéaire et homogène; en effet, le nombre de ses coefficients est $\frac{(\alpha-1)(d_i-1)}{2}$, et elle est assujettie à δ conditions linéaires; or, d'après l'égalité (2), on a précisément $\frac{(\alpha-1)(d_i-1)}{2} - \delta = p$. De plus, le degré de cette courbe est égal à $d_i - 3 - \mu_i$, par conséquent au plus égal à $d_i - 3$.

Si μ_i est différent de zéro on doit ajouter, à $\varphi(u, u_i) = 0$, la droite de l'infini comptée μ_i fois, si l'on veut avoir une courbe adjointe de degré $d_i - 3$ effectivement.

3. Je vais actuellement aborder la recherche des conditions imposées à la courbe $F(u, u_i) = 0$ par l'existence du point de Weierstrass. Pour cela, je commence par former le système d'intégrales de première espèce v_k, correspondant à ce point (Chap. II, n° 3). Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ les ordres manquants en A, et

$$v_k = \int_\infty^u \frac{\varphi_k(u, u_i)\, du}{\frac{\partial F}{\partial u_i}}$$

l'intégrale correspondant à ρ_k; $\varphi_k(u, u_i)$ désigne ici le polynome $\varphi(u, u_i)$ particulier

$$g_{\beta_2^k} u_i^{\alpha-2} + g_{\beta_3^k} u_i^{\alpha-3} + \ldots + g_{\beta_\alpha^k};$$

je poserai de plus $\rho_k = \alpha\mu + \rho$, ρ étant un des nombres $1, 2, \ldots, \alpha - 1$, et μ l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \mu_\rho$. L'intégrale v_k, étant infiniment petite au point A d'ordre ρ_k, doit être, puisque le point A correspond à $u = \infty$, infiniment petite d'ordre ρ_k par rapport à $\frac{1}{u}$. Comme le point $u = \infty$ est un point de ramification d'ordre α de la surface de Riemann (1), et que, d'après le développement donné au numéro précédent, on a

$$v_k = \frac{A_1}{u^{(h-1)\nu - \beta_h^k - 1}} + \ldots,$$

on voit que

$$\rho_k = \alpha[(h-1)\nu - \beta_h^k - 1] = (h-1)d_i - \alpha(\beta_h^k + 1),$$

ou, en introduisant la nouvelle forme de ρ_k et l'expression de d_i en fonction de α,

$$\alpha\mu + \rho = (h-1)[\alpha(\mu_i + 1) + i] - \alpha(\beta_h^k + 1).$$

De là résulte tout d'abord

$$(7) \qquad (h-1)i \equiv \rho \pmod{\alpha};$$

cette congruence, *toujours possible puisque i est premier avec α*, admet une solution et une seule comprise dans la suite $2, 3, \ldots, \alpha$; le nombre h est égal à cette solution et si, effectuant la division de $(h-1)i$ par α, je pose de nouveau $(h-1)i = \alpha q_{h-1} + r_{h-1}$, j'ai $r_{h-1} = \rho$. En second lieu je trouve

$$(8) \qquad \beta_h^k = (h-1)(\mu_i + 1) + q_{h-1} - 1 - \mu = \beta_h - \mu,$$

en désignant, comme je l'ai déjà fait pour δ_i, par β_h, non pas forcément ce nombre lui-même, mais sa limite supérieure.

Donc, *le polynome $g_{\beta_h^k}$ est toujours dans φ_k de degré $\beta_h - \mu$, h désignant le nombre unique de la suite $2, 3, \ldots, \alpha$ qui vérifie la congruence* (7).

Ceci revient à dire que φ_k contient nécessairement le terme $u^{\beta_h - \mu} u_i^{\alpha - h}$; j'appellerai ce terme *le terme caractéristique de la fonction φ_k*.

Quant aux degrés des autres polynomes $g_{\beta_l^k}$, on voit, en tenant compte de l'inégalité (4), que l'on a

$$\beta_l^k \leqq \beta_l - \mu + \frac{r_{l-1} - \rho}{\alpha},$$

β_l et r_{l-1} ayant le même sens que β_h et r_{h-1} tout à l'heure.

On a donc en définitive le système de formules

$$(9)\qquad \begin{cases} r_{l-1} < \rho, & \beta_l^k \leqq \beta_l - \mu - 1, \\ r_{h-1} = \rho, & \beta_h^k = \beta_k - \mu, \\ r_{l-1} > \rho, & \beta_l^k \leqq \beta_l - \mu, \end{cases}$$

qui comprend tous les cas.

Il importe de remarquer que ces formules entraînent une limitation du degré de φ_k, non seulement par rapport à u, mais aussi par *rapport à* u_i. On doit avoir, en effet, suivant la valeur de l, soit $\beta_l - \mu \geqq 0$, soit $\beta_l - \mu - 1 \geqq 0$. Comme β_l croît avec l, il existe un entier l_1 que je peux toujours supposer $\geqq 2$, tel que pour toutes les valeurs de l de la suite $l_1, l_1 + 1, \ldots, \alpha$ l'inégalité qu'il convient de prendre soit vérifiée. Par suite, le terme de plus haut degré de φ_k en u_i sera de degré $\alpha - l_1$. De plus, *comme φ_k contient nécessairement son terme caractéristique, on doit avoir*

$$(10)\qquad h \geqq l_1.$$

4. La courbe $\varphi_k = 0$ passe par les δ points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$; de plus, comme v_k est supposée l'intégrale de première espèce la plus générale infiniment petite d'ordre ρ_k en A, φ_k doit contenir sous forme homogène $p - k + 1$ paramètres arbitraires et $p - k + 1$ seulement. Soit N_k le nombre des termes, et, par suite, des coefficients de la fonction φ_k la plus générale; la courbe $\varphi_k = 0$ passant par les δ points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$, ces coefficients sont liés par δ relations linéaires et homogènes, et comme $p - k + 1$ d'entre eux restent arbitraires, on doit avoir $p - k + 1 \geqq N_k - \delta$, dans tous les cas.

On a donc, en faisant successivement $k = 1, 2, \ldots, p$,

$$(11)\qquad \begin{cases} N_1 \leqq p + \delta, \\ N_2 \leqq p + \delta - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ N_p \leqq \delta + 1. \end{cases}$$

N_1 étant le nombre des coefficients de la fonction $\varphi(u, u_i)$ la plus générale, la première de ces inégalités est toujours une égalité (n° 2). Il convient donc de distinguer deux cas. Si $N_k = p + \delta - k + 1$, les coefficients de φ_k forment une solution des équations considérées contenant $p - k + 1 = N_k - \delta$ arbitraires, ce qui est le nombre d'arbitraires que comporte en général un système de δ équations à N_k inconnues. Il n'existe pas dans ce cas de relations entre les points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$, du moins du chef de la courbe $\varphi_k = 0$. Si, au contraire,

$$N_k < p + \delta - k + 1,$$

le nombre $p - k + 1$ d'arbitraires que renferme cette solution est supérieur à $N_k - \delta$; donc l'existence de $\varphi_k = 0$ entraîne ici un certain nombre de relations entre les points doubles.

Pour en trouver le nombre et la nature, je dois former le système d'équations linéaires que je viens d'envisager; à cet effet, j'écrirai la fonction φ_k sous la forme suivante :

$$\varphi_k = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_{N_k} b_{N_k},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ désignant les coefficients des termes, et $b_1, b_2, \ldots, b_{N_k}$ la partie des termes qui contient u et u_i; le dernier terme sera toujours le terme caractéristique de φ_k; quant aux autres, je ne supposerai rien sur leur ordre. Soient, de plus, $[u^{(\lambda)}, u_i^{(\lambda)}]$ les coordonnées d'un point double de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$, $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \delta)$, et b_j^λ le résultat de leur substitution dans b_j.

Cela posé, je prends la fonction $\varphi_p(u, u_i)$, qui contient un seul paramètre arbitraire sous forme homogène, en facteur par conséquent. Le système d'équations correspondant est

$$(A_1) \qquad \alpha_1 b_1^\lambda + \alpha_2 b_2^\lambda + \ldots + \alpha_{N_p} b_{N_p}^\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \delta);$$

le Tableau des coefficients des α

$$(T_1) \qquad \begin{Vmatrix} b_1^1 & \ldots & b_{N_p}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^\delta & \ldots & b_{N_p}^\delta \end{Vmatrix}$$

admet un déterminant principal, de même forme que le déterminant

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_1^1 & \ldots & b_{N_p-1}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^{N_p-1} & \ldots & b_{N_p-1}^{N_p-1} \end{vmatrix},$$

que je peux supposer être B_1 lui-même, l'existence d'un déterminant principal de cette forme résultant de la présence du terme caractéristique dans φ_p. Ceci entraîne que tous les déterminants, obtenus en bordant B_1 avec les éléments de la dernière colonne et des lignes restant dans T_1, sont nuls; d'où $\delta + 1 - N_p$ conditions que remplissent les points doubles.

Je passe maintenant à φ_{p-1}; le système d'équations linéaires est ici

$$(A_2) \qquad \alpha_1 b_1^\lambda + \ldots + \alpha_{N_p} b_{N_p}^\lambda + \ldots + \alpha_{N_{p-1}} b_{N_{p-1}}^\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \delta),$$

et le Tableau des coefficients des α

$$(T_2) \qquad \left\| \begin{array}{ccccc} b_1^1 & \ldots & b_{N_p}^1 & \ldots & b_{N_{p-1}}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^\delta & \ldots & b_{N_p}^\delta & \ldots & b_{N_{p-1}}^\delta \end{array} \right\|.$$

Comme φ_{p-1} contient deux paramètres arbitraires, et qu'il existe une fonction φ'_{p-1} renfermant le terme caractéristique et ne renfermant pas le terme b_{N_p}, un déterminant principal de ce Tableau est de la forme

$$B_2 = \left| \begin{array}{cccccc} b_1^1 & \ldots & b_{N_p-1}^1 & b_{N_p+1}^1 & \ldots & b_{N_{p-1}-1}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^\delta & \ldots & b_{N_p-1}^\delta & b_{N_p+1}^\delta & \ldots & b_{N_{p-1}-1}^\delta \end{array} \right|;$$

je supposerai que c'est B_2 lui-même. Il en résulte que tous les déterminants obtenus en bordant B_2 avec les éléments des autres lignes de T_2 et avec les éléments, soit de la colonne de rang N_p, soit de celle de rang N_{p-1}, sont nuls. Or une application convenable de la règle de Laplace montre que les premiers, ceux qui contiennent des éléments de la colonne de rang N_p, sont nuls en vertu des conditions précédentes, relatives à φ_p. On trouve donc $\delta + 2 - N_{p-1}$ conditions nouvelles, en général indépendantes de celles déjà trouvées. Prenant ensuite φ_{p-2}, et continuant de proche en proche, je vois que l'existence de φ_k entraîne que le Tableau T_{p-k+1} des coefficients des α dans les équations A_{p-k+1} admet un déterminant principal, du type B_{p-k+1}, que je peux toujours supposer être B_{p-k+1} lui-même; que parmi les déterminants qui, d'après cela, sont nuls, il n'y en a que $\delta+p-k+1-N_k$ qui ne le soient pas en vertu des conditions relatives à T_1, T_2, ..., T_{p-k}; que, par suite, *on a entre les points doubles* $\delta + p - k + 1 - N_k$ *relations nouvelles, indépendantes en général de celles qui résultent de l'existence de* φ_p, φ_{p-1}, ..., φ_{k+1}.

Les $\delta + p - k + 1 - N_k$ *déterminants qui, égalés à zéro, donnent ces* *conditions, sont ceux que l'on obtient en bordant* B_{p-k+1} *avec les éléments de la colonne de rang* N_k, *et des lignes restant dans* T_{p-k+1}.

Pour interpréter géométriquement ces conditions, je remarque qu'elles expriment que l'on peut prendre, pour les paramètres arbitraires que contient φ_k, les coefficients α_{N_p}, $\alpha_{N_{p-1}}$, .. , α_{N_k}, et, par suite, qu'il existe une fonction φ_k, déterminée à un facteur près, correspondant à $\alpha_{N_p} = \alpha_{N_{p-1}}, \ldots, \alpha_{N_{k+1}} = 0$. Soit φ'_k cette fonction; pour $k = p - 1$ elle se confond, au facteur près, avec la fonction déjà considérée φ'_{p-1}, et pour $k = p$ avec φ_p. Cela posé, considérons la courbe $\varphi'_k = 0$, qui est un cas particulier de $\varphi_k = 0$, dégénérescence elle-même de la courbe générale $\varphi = 0$; nous voyons que les conditions précédentes reviennent à la condition géométrique que voici : *les* δ *points doubles de* $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ *sont sur la courbe* $\varphi'_k = 0$ *déterminée par* $N_k - p + k - 1$ *d'entre eux*.

En résumé, les points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ sont assujettis, du fait de l'existence du point de Weierstrass, à un certain nombre de conditions, toutes les fois que le système (11) renferme des inégalités.

Puisque la courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ existe, elles sont compatibles; de plus, $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ étant irréductible, leurs conséquences géométriques, relatives à la disposition des points doubles sur certaines courbes, n'entraînent rien de contraire à cette irréductibilité. Cependant, je remarquerai que l'hypothèse que j'ai faite, que $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ n'avait que des points doubles ordinaires, peut, dans certains cas particuliers (nous en verrons plus loin), ne pas se réaliser; s'il en est ainsi, les conditions précédentes peuvent être incompatibles, ou entraîner la réductibilité de la courbe, tant qu'on maintient cette hypothèse; il n'en est plus de même si l'on suppose un nombre convenable de points doubles de la courbe confondus en points multiples offrant des singularités plus élevées.

L'analyse qui nous a conduit à ces conditions, ainsi que leur forme, montre qu'elles sont généralement indépendantes. Néanmoins, elles peuvent cesser de l'être dans certains cas, en particulier si quelques-unes des courbes $\varphi_p, \varphi_{p-1}, \ldots, \varphi_k, \ldots$ se décomposent, et comprennent une ou plusieurs des courbes précédentes. Dans tous les cas, soit $\mathfrak{N}$ le nombre de celles de ces conditions qui sont indépendantes; on a

$$\mathfrak{N} \leqq \sum (\delta + p - k + 1 - N_k),$$

et le nombre total de *conditions imposées aux coefficients de l'équation* $F(u, u_i) = 0$ *par le fait qu'elle appartient au genre p et à la classe considérée est* $\delta + \mathfrak{M}$. Si je désigne par N le nombre, déterminé au n° 4 du Chap. III, des paramètres arbitraires que contient $F(u, u_i)$, tant qu'on n'a pas exprimé que les conditions précédentes sont remplies, le nombre définitif des arbitraires qu'elle renferme est $N - \delta - \mathfrak{M}$; on a donc

$$N - \delta - \mathfrak{M} \geqq 0. \tag{12}$$

5. Je récapitule toutes les conditions trouvées, en les groupant en deux catégories. La première, formée des inégalités (10), (11) et (12) des nos 3 et 4, ne comprend que des conditions purement numériques et portant seulement sur les nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, à savoir :

$$h \geqq l_1, \tag{A}$$

$$N_k \leqq \delta + p - k + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{B}$$

$$N \geqq \delta + \mathfrak{M}. \tag{C}$$

Quant à la seconde, elle renfermera l'ensemble des conditions relatives aux points doubles ou multiples de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$:

D. Le nombre des points doubles, ou l'équivalent en points doubles du nombre des points multiples de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ est $\delta = \dfrac{(\alpha-1)(d_i-1)}{2} - p$;

E. Ces points doubles ou multiples sont assujettis, s'il y a lieu, à $\mathfrak{M}$ conditions consistant en ce que, si l'on a $N_k < \delta + p - k + 1$, une certaine courbe adjointe particulière $\varphi'_k = 0$ soit déterminée par $N_k - p + k - 1$ d'entre eux et passe par tous les autres; et cela sans que la courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ cesse d'être irréductible.

Ce qui précède montre que *l'ensemble de ces conditions est nécessaire,* pour qu'il existe une classe de courbes possédant un point de Weierstrass correspondant au système d'ordres manquants donnés $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$.

Il est aussi suffisant. Supposons, en effet, ces conditions remplies pour un système donné de nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, et un nombre i premier avec le nombre α correspondant, i appartenant à la suite $1, 2, \ldots, \alpha - 1$. En vertu de (C) et de (E), je peux former l'équation $F(u, u_i) = 0$ d'une courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ *irréductible,* possédant δ points doubles, ou des points multiples équivalents à δ points doubles, ces points étant tels que la courbe $\varphi'_{k1} = 0$, déterminée par $N_k - p + k - 1$ d'entre eux, passe par tous les autres et y remplisse les conditions nécessaires pour être adjointe; et cela toutes les fois que les conditions (B), remplies d'après l'hypothèse, donnent pour N_k l'inégalité

$$N_k < p - k + 1 + \delta,$$

au lieu de l'égalité

$$N_k = p - k + 1 + \delta.$$

Quant aux courbes φ'_k, leur existence résulte à la fois de (B), (E) et de (A); cette dernière condition entraîne la présence dans φ'_k du terme caractéristique b_{N_k}. Cela posé, la courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ est, d'après (D), de genre p, et l'intégrale

$$v'_k = \int_{\infty}^{u} \frac{\varphi'_k(u, u_i)}{\frac{\partial F}{\partial u_i}}\, du$$

est infiniment petite d'ordre ρ_k en l'unique point à l'infini A de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$: *donc les ordres manquants en* A *sont* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ *et il existe une courbe irréductible* $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ *définissant une classe de courbes possédant un point de Weierstrass de l'espèce donnée.*

6. Il me reste à examiner quelles sont les conséquences de ce qui précède, relativement aux Tableaux que nous avons appris à former au Chapitre III. Les conditions numériques (A), (B), (C) semblent s'ajouter, si toutefois elles ne sont pas remplies d'elles-mêmes pour un pareil Tableau, à celles que nous avons trouvées là, et former avec elles un système de conditions nécessaires pour que ce Tableau soit un Tableau d'ordres manquants. Mais, comme on ne peut pas affirmer qu'il existe, quel que soit le Tableau remplissant ces conditions, un système de δ points distincts ou confondus, tel que les conditions (D) et (E) soient satisfaites, rien ne prouve qu'elles soient suffisantes. Tout ce que l'on pourra tirer de ces conditions (A), (B), (C) sera donc des règles d'exclusion analogues à celles du Chapitre III, plus étroites peut-être. Mais il n'en faudra pas moins, pour pouvoir affirmer qu'un Tableau qui y satisfait est un Tableau d'ordres manquants, vérifier que les conditions (D) et (E) peuvent être remplies et, par suite, pousser jusqu'au bout la formation des équations $F(u, u_i) = 0$

et $\varphi_k = 0$. En somme, les considérations précédentes ne nous conduisent qu'à une méthode de vérification des Tableaux d'ordres manquants.

Je vais maintenant examiner de plus près les conditions (A), (B), (C) et, à cet effet, les former. On voit immédiatement que, bien qu'il existe un système de pareilles conditions pour tout nombre i inférieur à α et premier avec lui, il suffit d'en former un seul relatif à une valeur particulière de i; car, si ce système et les conditions (D) et (E) correspondantes sont vérifiées pour un Tableau, il y aura une classe de courbes possédant le point de Weierstrass de l'espèce définie par ce Tableau, et ce dernier sera acceptable.

Je prendrai $i = 1$, et je vais former d'abord (A). La congruence (7) est ici $h - 1 \equiv \rho \pmod{\alpha}$. J'ai donc $h = 1 + \rho$, et $\beta_h^k = \rho(\mu + 1) - (1 + \mu)$; l'inégalité (A) revient, par suite, à

$$\rho(\mu_1 + 1) \geqq 1 + \mu,$$

et, comme on a $\mu \leqq \mu_\rho$, à

$$\mu_\rho + 1 \leqq \rho(\mu_1 + 1).$$

Or, cette dernière inégalité peut s'écrire

$$\alpha(\mu_\rho + 1) + \rho \leqq \rho[\alpha(\mu_1 + 1) + 1].$$

Comme $[\alpha(\mu_\rho + 1) + \rho]$ est le plus petit ordre existant $\equiv \rho$, que l'ordre $\rho[\alpha(\mu_1 + 1) + 1]$ est aussi existant (Chap. III, n° 1) et de plus $\equiv \rho$, on voit que cette inégalité a toujours lieu; ce n'est, en réalité, qu'une application de la seconde condition donnée à l'endroit cité.

Donc la condition (A) se ramène à celle-là.

De même, les conditions (B) doivent être supprimées, car elles sont toujours vérifiées, quel que soit le Tableau. Pour le montrer, je les écris

$$p + \delta - k + 1 - N_k \geqq 0,$$

et je remarque que, $p + \delta - N_1$ étant nul, il suffit de faire voir que le premier membre ne décroît jamais quand k augmente et, pour cela, de montrer que $k + N_k$ n'augmente pas avec k; or, k et N_k étant entiers, on n'a qu'à vérifier que N_{k+1} est inférieur à N_k.

Soient $\rho_{k+1} = \alpha\mu' + \rho'$, et l_1, l'_1 les deux nombres qui correspondent à ρ_k, ρ_{k+1} d'après les inégalités du n° 3, qui sont ici

$$(l_1 - 1)(\mu_1 + 1) > 1 + \mu, \qquad (l'_1 - 1)(\mu_1 + 1) > 1 + \mu'.$$

On voit, sur le Tableau même, que l'inégalité $\rho_{k+1} > \rho_k$ entraîne $\mu' \geqq \mu$, donc on a $l'_1 > l_1$ ou $l'_1 = l_1$. Cela posé, les expressions de N_k et N_{k+1} sont

$$N_k = \sum_{j=l_1}^{j=\alpha} (\beta_j^k + 1), \qquad N_{k+1} = \sum_{j=l'_1}^{j=\alpha} (\beta_j^{k+1} + 1),$$

en prenant pour β_j^k, β_j^{k+1} les limites supérieures que donnent les inégalités (9); comme ici, $r_{j-1} = j - 1$, ces expressions peuvent s'écrire, d'après ces mêmes inégalités,

$$N_k = \sum_{l_1}^{\alpha} \beta_i - \rho_k - (l_1 - 1)(\mu + 1), \qquad N_{k+1} = \sum_{l'_1}^{\alpha} \beta_j - \rho_{k+1} - (l'_1 - 1)(\mu' + 1);$$

on en conclut

$$N_k - N_{k+1} = \sum_{l_1}^{l'_1} \beta_j + (\rho_{k+1} - \rho_k) + [(l'_1 - 1)(\mu' + 1) - (l_1 - 1)(\mu + 1)].$$

La dernière partie de cette différence est positive ou nulle, d'après ce que nous venons de voir; les deux premières sont positives, *donc on a* $N_k > N_{k+1}$.

Quant à la condition (C), je peux substituer, au nombre en somme inconnu *a priori* $\mathfrak{N}$, sa limite supérieure

$$\mathfrak{N}' = \sum_{k=1}^{k=p} (p - k + \partial + 1 - N_k)$$

et considérer l'inégalité

$$N - \partial - \mathfrak{N}' > 0;$$

mais la présence dans $\mathfrak{N}'$ des nombres N_k et la dépendance où ils sont de l'entier l_1 en rend le calcul à peu près impossible pour un Tableau qui n'est pas donné numériquement. Cette inégalité est donc à former dans chaque cas particulier et il n'y a rien à dire de général sur elle, sauf toutefois ceci : comme on doit effectuer dans tous les cas la recherche de $F(u, u_i) = 0$ jusqu'au bout, on sera conduit par la suite même des calculs à reconnaître que cette inégalité est vérifiée ou qu'elle ne l'est pas. On peut donc laisser de côté cette condition en tant que règle d'exclusion et ne la considérer que comme une vérification à faire au courant du calcul, au moment où il s'agit de voir que les conditions (D) et (E) ne sont pas incompatibles avec l'existence de $F(u, u_i) = 0$.

En résumé, on voit que les conditions (A), (B) sont à supprimer, et que la condition (C) n'est pas à appliquer *a priori* : il ne nous reste donc, pour l'instant, que les règles d'exclusion du Chapitre III. Mais, si nous revenons aux conditions (D) et (E), on voit qu'elles entraînent deux conditions numériques, à savoir :

$$\delta = \frac{(\alpha - 1)(d_i - 1)}{2} - p > 0, \qquad N_k - p + k - 1 \geqq 0;$$

la dernière ne donne rien, car elle est toujours vérifiée; en effet, $k + N_k$ ne décroît pas quand k décroît, nous l'avons établi plus haut; or, pour $k = p$, l'inégalité devient $N_p \geqq 1$, et N_p est entier positif; elle est donc vérifiée pour la valeur maximum de k, et, par suite, pour toutes les autres. Quant à la première, elle est à conserver, et je vais l'étendre au cas d'un ordre non primitif. D'après la formule (4) du n° 1, le nombre des points doubles d'une $C_{d_i}^{d_i - \alpha}$, correspondant à un pareil ordre, est

$$\delta = \frac{(\alpha - 1)(d_i - 1) - (D - 1)}{2} - p,$$

D étant le plus grand commun diviseur entre i et α. Comme, lorsque i et α sont premiers entre eux, $D = 1$, je puis substituer, dans tous les cas, à la précédente l'inégalité

$$(\alpha - 1)(d_i - 1) \geqq 2p + D - 1. \tag{13}$$

Un exemple va nous montrer que cette nouvelle condition ne se confond pas avec celles du Chapitre III; reprenons le cas que nous y avons traité : $p = 11$, $\alpha = 4$. La solution $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0$ de l'équation $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 8$ nous donne le Tableau d'ordres manquants :

1	2	3	$\cancel{4}$
5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$
9	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$
13	$\cancel{14}$	15	$\cancel{16}$
17	$\cancel{18}$	$\cancel{19}$	$\cancel{20}$
21,			

qui satisfait aux conditions en question. Or, j'ai $d_2 = 6$, $D = 2$ et

$$(\alpha - 1)(d_2 - 1) = 15, \qquad 2p + D - 1 = 23;$$

donc (13) n'est pas vérifiée, les autres conditions étant remplies.

J'ai, en définitive, trois règles d'exclusion, indépendantes les unes des autres, et d'une application facile [1]; les voici :

I. Un Tableau d'ordres manquants ne renferme que des nombres inférieurs à $2p - 1$.

II. Il ne doit renfermer aucun terme qui résulte de l'addition de deux ou de plusieurs ordres existants.

III. Tout ordre $d_i \equiv i \pmod{\alpha}$, dont l'existence résulte du Tableau, doit vérifier l'inégalité

$$(\alpha - 1)(d_i - 1) \geqq 2p + D - 1,$$

α étant le plus petit ordre existant et D le plus grand commun diviseur entre i et α.

J'ai dit plus haut qu'il fallait toujours s'assurer que les conditions (D) et (E) pouvaient être remplies, et incidemment que (C) l'était, en poussant jusqu'au bout la détermination de $F(u, u_i) = 0$ et des $\varphi_k(u, u_i) = 0$. A l'égard de ces conditions, je présenterai une dernière observation. Dans les divers cas que j'ai traités, j'ai toujours trouvé un système de δ points permettant de satisfaire à ces conditions; mais dès que p augmente (et même, des exemples le montreront, pour des valeurs de p assez petites), le nombre δ grandit, et les courbes $\varphi_k = 0$ se compliquent tellement pour certains Tableaux, qu'il me paraît bien difficile d'arriver à une conclusion générale; cependant, étant donné que sur les δ points il en reste toujours un certain nombre d'arbitraires, il est assez probable qu'on peut, dans tous les cas, en disposer de façon que (D) et (E) puissent être remplies. De même pour (C); dans tous les Tableaux que j'ai étudiés, (C) a été vérifié; de plus les valeurs que j'ai trouvées pour $\mathfrak{N}$ sont toutes assez petites relativement, de sorte qu'on peut considérer cette condition

---

(1) On remarquera, à propos de l'inégalité (13), que $(\alpha - 1)(d_i - 1)$ croissant avec d_i, et d'un multiple de $\alpha - 1$ quand on passe de d_i à l'ordre suivant, tandis que $D - 1$ est au plus égal à $\alpha - 1$, il suffit de la vérifier pour l'ordre existant immédiatement supérieur à α.

elle aussi, et peut-être avec une plus grande probabilité, comme toujours vérifiée.

Ma conclusion définitive sera donc que *les conditions nécessaires données par les règles d'exclusion I, II, III ne sont peut-être pas toujours suffisantes; mais que l'on doit regarder comme très probable que les cas qui peuvent leur échapper sont en nombre excessivement restreint, et ne se produisent que pour des valeurs assez élevées de p.*

Tableau des systèmes d'ordres manquants pour $p = 3, 4, 5, 6, 7$.

J'ai réuni dans un Tableau les systèmes d'ordres manquants que l'on peut rencontrer dans les courbes de genre 3, 4, 5, 6, 7. J'ai indiqué pour chacun d'eux la courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ que je prenais pour définir la classe correspondante. Cette courbe correspond toujours au plus petit ordre primitif, bien que dans certains cas les courbes fournies par des ordres non primitifs eussent été plus simples. J'ai donné au début du Chapitre IV les raisons de ce choix, et à ce propos je ferai remarquer combien l'une d'entre elles est justifiée par le rôle important que joue, dans les considérations des n^os^ 2 et 3, l'hypothèse que i est premier avec α.

Cette courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ remplissant les conditions (D) et (E), le nombre des coefficients de son équation restant arbitraires, réduit comme il a été dit au Chapitre III (n° 4), est égal à $N - \delta - \mathfrak{N}$, où

$$N = \frac{(\alpha-1)(d_i+1)}{2} + k - 2,$$

k étant le nombre des ordres non existants inférieurs à d_i (Ch. III. n° 4). Je désignerai par M le nombre de ces coefficients; toutes réductions faites, je trouve

$$M = \alpha + p + k - \mathfrak{N} - 3.$$

Ce nombre M est, on le voit aisément, *le nombre des modules de la classe définie par* $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ (¹).

En même temps que ce nombre M, je donne pour chaque système

(¹) *B. N. — Be*, p. 433-434.

le nombre δ des points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ [1] et le nombre $\mathfrak{N}$ de conditions auxquelles ils sont assujettis. J'y ajoute l'ordre de multiplicité m du point de Weierstrass correspondant, calculé comme il a été dit au Chapitre II (n° 6), et le nombre $\nu = 3p - 3 - M$ des conditions imposées à la classe par l'existence du point de Weierstrass; sa comparaison avec le nombre $m - 1$ montrera dans quelle mesure s'applique le résultat du n° 6 du Chapitre II. J'ai enfin indiqué, quand il y en a, ce que sont, au point de vue géométrique, les $\mathfrak{N}$ conditions imposées aux points doubles de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$, et à ce propos j'ajouterai que la courbe $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ que j'envisage ne sera plus nécessairement celle du texte, mais sa projection sur un plan quelconque : dans ces conditions le point A et la tangente en ce point seront un point et une droite du plan à distance finie, que je prendrai à plusieurs reprises comme origine et comme axe des x.

Voici succinctement, à titre d'indication, le calcul d'un cas. Soit, pour $p = 6$, $\alpha = 4$, le Tableau suivant :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & \end{matrix}$$

satisfaisant aux conditions I, II, III. Le plus petit ordre primitif existant est $7 \equiv 3 \pmod 4$; j'ai

$$F(u, u_3) = u_3^4 + g_1 u_3^3 + g_3 u_3^2 + g_5 u_3 + g_7 = 0,$$
$$\varphi(u, u_3) = g'_0 u_3^2 + g'_2 u_3 + g'_4,$$

les indices des g et des g' indiquant les degrés de ces polynomes. Du nombre des coefficients de φ je déduis $\delta = 3$. Je forme φ_6

$$\varphi_6(u, u_3) = \alpha_0 u_3 + \alpha_1 u + \alpha_2,$$

les α étant des constantes; j'ai $\delta + 1 - N_6 = 1$, et comme $\varphi_5, \varphi_4, \ldots$ ne donnent pas de conditions, j'en conclus $\mathfrak{N} = 1$; les trois points doubles sont assujettis à une seule condition : *ils sont en ligne droite*.

La classe est donc définie *par une* C_7^3 *possédant trois points doubles en ligne droite*. On a de plus $M = 11$, $m = 6$ et $\nu = 4$. La classe dépend

---

[1] δ est, bien entendu, le nombre des points doubles, ou l'équivalent en points doubles des points multiples de $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$, autres que celui qui peut se trouver en A.

de 11 modules; le point de Weierstrass, qui est d'ordre 6, lui impose quatre conditions (au lieu de cinq, comme il semblerait résulter du Chapitre II, n° 6).

I. $p = 3$.

1° $\alpha = 3$.

1, 2, 4 $(m = 1)$, C_3^2, $M = 6$, $\nu = 0$, $\delta = 1$, $\mathfrak{N} = 0$.

2° $\alpha = 2$.

1, 3, 5 $(m = 3)$, C_7^5, $M = 5$, $\nu = 1$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$.

II. $p = 4$.

1° $\alpha = 4$.

1, 2, 3, 5 $(m = 1)$, C_7^3, $M = 9$, $\nu = 0$, $\delta = 5$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 6 $(m = 2)$, C_5^1, $M = 8$, $\nu = 1$, $\delta = 2$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 7 $(m = 3)$, C_5^1, $M = 7$, $\nu = 2$, $\delta = 2$, $\mathfrak{N} = 1$.

Les deux points doubles sont en ligne droite avec A.

2° $\alpha = 3$.

1, 2, 4, 5 $(m = 2)$, C_7^4, $M = 8$, $\nu = 1$, $\delta = 2$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 4, 7 $(m = 4)$, C_5^2, $M = 7$, $\nu = 2$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$.

3° $\alpha = 2$.

1, 3, 5, 7 $(m = 6)$, C_9^7, $M = 7$, $\nu = 2$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$.

III. $p = 5$.

1° $\alpha = 5$.

1, 2, 3, 4, 6 $(m = 1)$, C_7^2, $M = 12$, $\nu = 0$, $\delta = 7$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 4, 7 $(m = 2)$, C_6^1, $M = 11$, $\nu = 1$, $\delta = 5$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 4, 8 $(m = 3)$, C_6^1, $M = 10$, $\nu = 2$, $\delta = 5$, $\mathfrak{N} = 1$.

Les cinq points doubles sont sur une conique passant par A.

$1, 2, 3, 4, 9 \ (m=4)$, C_6^1, $M=9$, $\nu=3$, $\delta=5$, $\mathfrak{N}=2$.

La conique précédente touche C_6^1 au point A.

$2^\circ \ \alpha=4$.

$1, 2, 3, 5, 6 \ (m=2)$, C_7^3, $M=11$, $\nu=1$, $\delta=4$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 5, 7 \ (m=3)$, C_9^5, $M=10$, $\nu=2$, $\delta=7$, $\mathfrak{N}=1$.

Les sept points doubles sont sur une quartique ayant en A un point triple dont deux branches touchent C_9^5 (elles forment un rebroussement).

$1, 2, 3, 6, 7 \ (m=4)$, C_6^1, $M=9$, $\nu=3$, $\delta=1$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 5, 9 \ (m=5)$, C_7^3, $M=9$, $\nu=3$, $\delta=4$, $\mathfrak{N}=1$.

Les quatre points doubles sont sur une conique touchant C_7^3 en A.

$3^\circ \ \alpha=3$.

$1, 2, 4, 5, 7 \ (m=4)$, C_8^5, $M=10$, $\nu=2$, $\delta=2$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 4, 5, 8 \ (m=5)$, C_7^4, $M=9$, $\nu=3$, $\delta=1$, $\mathfrak{N}=0$.

$4^\circ \ \alpha=2$.

$1, 3, 5, 7, 9 \ (m=10)$, C_{11}^9, $M=9$, $\nu=9$, $\delta=\mathfrak{N}=0$.

IV. $p=6$.

$1^\circ \ \alpha=6$.

$1, 2, 3, 4, 5, 7 \ (m=1)$, C_{11}^5, $M=15$, $\nu=0$, $\delta=19$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 4, 5, 8 \ (m=2)$, C_7^1, $M=14$, $\nu=1$, $\delta=9$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 4, 5, 9 \ (m=3)$, C_7^1, $M=13$, $\nu=2$, $\delta=9$, $\mathfrak{N}=1$.

La cubique déterminée par les neuf points passe par A.

$1, 2, 3, 4, 5, 10 \ (m=4)$, C_7^1, $M=12$, $\nu=3$, $\delta=9$, $\mathfrak{N}=2$.

La cubique précédente touche C_7^1 au point A.

$1, 2, 3, 4, 5, 11$ $(m=5)$, C_7^1, $M=11$, $\nu=4$, $\delta=9$, $\mathfrak{N}=3$.

La cubique précédente a un contact du second ordre en A avec C_7^1.

2° $\alpha=5$.

$1, 2, 3, 4, 6, 7$ $(m=2)$, C_8^3, $M=14$, $\nu=1$, $\delta=8$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 4, 6, 8$ $(m=3)$, C_7^2, $M=13$, $\nu=2$, $\delta=6$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 4, 6, 9$ $(m=4)$, C_7^2, $M=12$, $\nu=3$, $\delta=6$, $\mathfrak{N}=1$.

Les six points doubles sont sur une conique.

$1, 2, 3, 4, 6, 11$ $(m=6)$, C_7^2, $M=11$, $\nu=4$, $\delta=6$, $\mathfrak{N}=2$.

La conique précédente passe au point A.

$1, 2, 3, 4, 7, 8$ $(m=4)$, C_6^1, $M=12$, $\nu=3$, $\delta=4$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 4, 7, 9$ $(m=5)$, C_6^1, $M=11$, $\nu=4$, $\delta=4$, $\mathfrak{N}=1$.

Par les quatre points doubles passe une conique touchant C_6^1 en A.

$1, 2, 3, 4, 8, 9$ $(m=6)$, C_6^1, $M=10$, $\nu=5$, $\delta=4$, $\mathfrak{N}=2$.

C_6^1 possède un point triple et un point double, en ligne droite avec A.

3° $\alpha=4$.

$1, 2, 3, 5, 6, 7$ $(m=3)$, C_9^5, $M=13$, $\nu=2$, $\delta=6$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 5, 6, 9$ $(m=5)$, C_7^3, $M=12$, $\nu=3$, $\delta=3$, $\mathfrak{N}=0$.
$1, 2, 3, 5, 6, 10$ $(m=6)$, C_7^3, $M=11$, $\nu=4$, $\delta=3$, $\mathfrak{N}=1$.

Les trois points doubles sont en ligne droite ([1]).

$1, 2, 3, 5, 7, 9$ $(m=6)$, C_{11}^7, $M=11$, $\nu=4$, $\delta=9$, $\mathfrak{N}=2$.

Les neuf points doubles sont la base d'un faisceau de courbes du cinquième degré, ayant en A un point triple formé de trois branches tangentes à C_{11}^7, du type $y^3-kx^5=0$.

$1, 2, 3, 5, 7, 10$ $(m=8)$, C_9^5, $M=10$, $\nu=5$, $\delta=6$, $\mathfrak{N}=2$.

([1]) C'est le cas dont j'ai donné le calcul plus haut.

Par les six points passe une cubique, ayant en A un rebroussement dont les deux branches touchent C_9^5. (Il existe une condition unique relative à φ_5, qui est une conséquence des conditions relatives à φ_6; on a, en effet, $\varphi_5 = g_1 . \varphi_6$.)

1, 2, 3, 6, 7, 11 ($m = 9$), C_5^1, $M = 10$, $\nu = 5$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$ (1).

4° $\alpha = 3$.

1, 2, 4, 5, 7, 8 ($m = 6$), C_{10}^7, $M = 12$, $\nu = 3$, $\delta = 3$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 4, 5, 7, 10 ($m = 8$), C_8^5, $M = 11$, $\nu = 4$, $\delta = 1$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 4, 5, 8, 11 ($m = 10$), C_7^4, $M = 10$, $\nu = 5$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$.

5° $\alpha = 2$.

1, 3, 5, 7, 9, 11 ($m = 15$), C_{13}^{11}, $M = 11$, $\nu = 4$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$.

V. $p = 7$.

1° $\alpha = 7$.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ($m = 1$), C_9^2, $M = 18$, $\nu = 0$, $\delta = 17$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 ($m = 2$), C_8^1, $M = 17$, $\nu = 1$, $\delta = 14$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 ($m = 3$), C_8^1, $M = 16$, $\nu = 2$, $\delta = 14$, $\mathfrak{N} = 1$.

Les quatorze points doubles déterminent une quartique passant par A.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 11 ($m = 4$), C_8^1, $M = 15$, $\nu = 3$, $\delta = 14$, $\mathfrak{N} = 2$.

La quartique précédente touche C_8^1 en A.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 12 ($m = 5$), C_8^1, $M = 14$, $\nu = 4$, $\delta = 14$, $\mathfrak{N} = 3$.

La quartique a un contact du second ordre avec C_8^1 en A.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 13 ($m = 6$), C_8^1, $M = 13$, $\nu = 5$, $\delta = 14$, $\mathfrak{N} = 4$.

La quartique a un contact du troisième ordre avec C_8^1 en A.

---

(1) Ce cas comprend l'exemple traité à la fin du Chapitre II.

$2^o\ \alpha = 6.$

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 $(m=2)$, C^5_{11}, $M=17$, $\nu=1$, $\delta=18$, $\mathfrak{N}=0$.
1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 $(m=3)$, C^5_{11}, $M=16$, $\nu=2$, $\delta=18$, $\mathfrak{N}=1$.

Les 18 points doubles sont sur une courbe du sixième ordre ayant en A un point triple; deux des branches, dont une inflexionnelle, touchent C^5_{11}.

1, 2, 3, 4, 5, 7, 10 $(m=4)$, C^5_{11}, $M=15$, $\nu=3$, $\delta=18$, $\mathfrak{N}=2$.

Les deux branches du point triple qui touchent C^5_{11} se réunissent en un rebroussement du type $y^2 - kx^5 = 0$.

1, 2, 3, 4, 5, 7, 11 $(m=5)$, C^7_{13}, $M=14$, $\nu=4$, $\delta=23$, $\mathfrak{N}=3$.

Les 23 points doubles sont sur une courbe du huitième ordre, ayant en A un point quintuple formé d'une branche ordinaire et de quatre branches du type $y^4 - kx^7 = 0$, ces dernières tangentes à C^7_{13}.

1, 2, 3, 4, 5, 7, 13 $(m=7)$, C^5_{11}, $M=13$, $\nu=5$, $\delta=18$, $\mathfrak{N}=3$.

On retrouve la courbe du sixième ordre des deux avant-derniers cas, seulement ici les trois branches du point triple touchent C^5_{11}; elles sont ordinaires.

1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 $(m=4)$, C^1_7, $M=15$, $\nu=3$, $\delta=8$, $\mathfrak{N}=0$.
1, 2, 3, 4, 5, 8, 10 $(m=5)$, C^1_7, $M=14$, $\nu=4$, $\delta=8$, $\mathfrak{N}=1$.

Par les huit points doubles passe une cubique touchant C^1_7 en A.

1, 2, 3, 4, 5, 8, 11 $(m=6)$, C^1_7, $M=13$, $\nu=5$, $\delta=8$, $\mathfrak{N}=2$.

Le contact de la cubique avec C^1_7 est du second ordre.

1, 2, 3, 4, 5, 9, 10 $(m=6)$, C^1_7, $M=13$, $\nu=5$, $\delta=8$, $\mathfrak{N}=2$.

Le point A est le neuvième point fixe du faisceau de cubiques déterminé par les huit points doubles.

1, 2, 3, 4, 5, 9, 11 $(m=7)$, C^1_7, $M=12$, $\nu=6$, $\delta=8$, $\mathfrak{N}=3$.

Dans le faisceau précédent, il y a une cubique qui a un contact du second ordre avec C_7^1 en A.

1, 2, 3, 4, 5, 10, 11 ($m=8$), C_7^1, $M=11$, $\nu=7$, $\delta=8$, $\mathfrak{N}=4$.

Six des points doubles se confondent en un point quadruple, et les deux autres en un contact de la courbe avec elle-même; ces deux points sont, de plus, en ligne droite avec A.

3° $\alpha=5$.

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ($m=3$), C_9^4, $M=16$, $\nu=2$, $\delta=9$, $\mathfrak{N}=0$.
1, 2, 3, 4, 6, 7, 9 ($m=4$), C_8^3, $M=15$, $\nu=3$, $\delta=7$, $\mathfrak{N}=0$.
1, 2, 3, 4, 6, 7, 11 ($m=6$), C_8^3, $M=14$, $\nu=4$, $\delta=7$, $\mathfrak{N}=1$.

La cubique, passant par les sept points doubles et tangente à C_8^3 en A, a un point d'inflexion en ce point.

1, 2, 3, 4, 6, 7, 12 ($m=7$), C_8^3, $M=13$, $\nu=5$, $\delta=7$, $\mathfrak{N}=1$.

La cubique précédente a un point double en A.

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 ($m=5$), C_7^2, $M=14$, $\nu=4$, $\delta=5$, $\mathfrak{N}=0$.
1, 2, 3, 4, 6, 8, 11 ($m=7$), C_7^2, $M=13$, $\nu=5$, $\delta=5$, $\mathfrak{N}=1$.

La conique déterminée par les cinq points doubles passe par le point A.

1, 2, 3, 4, 6, 8, 13 ($m=9$), C_7^2, $M=12$, $\nu=6$, $\delta=5$, $\mathfrak{N}=2$.

La conique précédente touche C_7^2 au point A.

1, 2, 3, 4, 6, 9, 11 ($m=8$), C_7^2, $M=12$, $\nu=6$, $\delta=5$, $\mathfrak{N}=2$.

C_7^2 a un point triple et deux points doubles en ligne droite avec lui.

1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 ($m=6$), C_6^1, $M=13$, $\nu=5$, $\delta=3$, $\mathfrak{N}=0$.
1, 2, 3, 4, 7, 8, 13 ($m=10$), C_6^1, $M=12$, $\nu=6$, $\delta=3$, $\mathfrak{N}=1$.

Les trois points doubles sont en ligne droite.

4° $\alpha = 4$.

1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 $(m = 5)$, C^7_{11}, $M = 15$, $\nu = 3$, $\delta = 8$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 5, 6, 7, 10 $(m = 6)$, C^5_9, $M = 14$, $\nu = 4$, $\delta = 5$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 5, 6, 7, 11 $(m = 7)$, C^5_9, $M = 13$, $\nu = 5$, $\delta = 5$, $\mathfrak{N} = 1$.

Par les cinq points doubles, on peut faire passer une cubique ayant en A un point de rebroussement dont les branches touchent C^5_9.

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10 $(m = 8)$, C^3_7, $M = 13$, $\nu = 5$, $\delta = 2$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 3, 5, 6, 9, 13 $(m = 11)$, C^3_7, $M = 12$, $\nu = 6$, $\delta = 2$, $\mathfrak{N} = 1$.

Les deux points doubles sont en ligne droite avec A.

1, 2, 3, 5, 7, 9, 11 $(m = 10)$, C^9_{13}, $M = 11$, $\nu = 7$, $\delta = 11$, $\mathfrak{N} = 4$.

Les onze points doubles sont la base d'un système ∞^2 de courbes C^5_7 comprenant en particulier : 1° un faisceau de courbes du sixième degré, ayant en A un point quadruple formé de deux points de rebroussement dont les branches touchent C^9_{13}; 2° une courbe de sixième degré ayant en A un point quintuple formé de deux branches ordinaires, et de trois branches du type $y^3 - kx^4 = 0$, tangentes toutes trois à C^9_{13}.

1, 2, 3, 5, 7, 9, 13 $(m = 12)$, C^7_{11}, $M = 10$, $\nu = 8$, $\delta = 8$, $\mathfrak{N} = 4$.

Les huit points doubles sont la base d'un système ∞^2 de courbes C^3_5 comprenant en particulier : 1° un faisceau de courbes du cinquième degré ayant en A un point quadruple formé de deux branches ordinaires, et d'un rebroussement dont les branches touchent C^7_{11} ; 2° une courbe du quatrième degré ayant en A un point triple formé d'une branche ordinaire et d'un rebroussement, les branches de ce dernier touchant encore C^7_{11}.

5° $\alpha = 3$.

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 $(m = 9)$, C^8_{11}, $M = 14$, $\nu = 4$, $\delta = 3$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 4, 5, 7, 8, 11 $(m = 10)$, C^7_{10}, $M = 13$, $\nu = 5$, $\delta = 2$, $\mathfrak{N} = 0$.
1, 2, 4, 5, 7, 10, 13 $(m = 14)$, C^5_8, $M = 12$, $\nu = 6$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$.

6° $\alpha = 2$.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 $(m = 21)$, C^{13}_{15}, $M = 13$, $\nu = 5$, $\delta = \mathfrak{N} = 0$.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS AUX COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

1. Je vais faire, dans ce Chapitre, quelques applications des résultats précédents à la définition des courbes gauches algébriques comme transformées point par point d'une courbe algébrique plane.

Indiqué sommairement dans le Mémoire fondamental de MM. Brill et Nœther (¹), ce mode de définition a été repris, à des points de vue différents, par M. Nœther (²) et par Halphen (³), dans leurs Mémoires sur la classification des courbes gauches. Comme je me placerai au même point de vue que ce dernier dans les applications qui suivent, je rappelle en quelques mots l'exposition qu'il a donnée de cette définition.

Soit une courbe plane algébrique $f(x, y) = 0$, de genre p; si l'on prend sur cette courbe un groupe de d points

$$(G_d) \qquad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_d, y_d),$$

et si l'on forme trois fonctions rationnelles de (x, y), ξ, η, ζ, infinies du premier ordre en tous les points de G_d, *le point de l'espace qui, rapporté à un système de coordonnées cartésiennes, a pour coordonnées* ξ, η, ζ, *décrit une courbe algébrique, gauche en général, de degré d et de genre p, lorsque le point* (x, y) *décrit la courbe* $f(x, y) = 0$. Si je désigne par $t_{(x_i, y_i)}$ l'intégrale normale de seconde espèce infinie au point (x_i, y_i), les décompositions de ξ, η, ζ en éléments simples seront de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = A + \Sigma_i a_i t_{(x_i, y_i)}, \\ \eta = B + \Sigma_i b_i t_{(x_i, y_i)}, \\ \zeta = C + \Sigma_i c_i t_{(x_i, y_i)}, \end{cases}$$

(¹) *B. N. — A. F.*, § 17.
(²) *N.*, p. 271 et suiv.
(³) *Ha.*, p. 13.

les coefficients a, b, c étant trois solutions du système d'équations

$$(2)\qquad \lambda_1 \frac{du_j}{dx_1} + \lambda_2 \frac{du_j}{dx_2} + \ldots + \lambda_d \frac{du_j}{dx_d} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, p,$$

où u_j désigne une quelconque des intégrales normales de première espèce, correspondant avec les $t_{(x_i, y_i)}$ à un système canonique de coupures de la surface de Riemann relative à $f(x, y) = 0$. Si le groupe G_d est quelconque, la solution la plus générale des équations (2) renferme $d - p$ arbitraires, de sorte que ξ, η, ζ ne dépendent que de $d - p$ combinaisons linéaires distinctes des $t_{(x_i, y_i)}$, qui y entrent linéairement; on en conclut que, si $d - p$ est inférieur à 3, la courbe est plane. Donc, en partant d'un groupe quelconque G_d, on ne peut définir que des courbes gauches de degré $d \geqq p + 3$. Pour avoir des courbes de degré inférieur à cette limite, il faut prendre pour G_d un groupe spécial; mais ici encore, si la courbe $f(x, y) = 0$ appartient à une classe générale de genre p, on ne pourra obtenir que des courbes gauches de degré $\geqq \frac{3}{4}(p + 4)$ (¹). En effet, (2) devant se résoudre avec trois arbitraires au moins, il faut qu'il existe un nombre de relations entre ses coefficients égal ou supérieur à $3(p + 3 - d)$, et comme, si $f(x, y) = 0$ n'est pas à modules spéciaux, ces relations sont indépendantes, on voit que le nombre maximum de points de G_d que l'on peut prendre arbitrairement est $d - 3(p + 3 - d)$. Or, sur ces points, il y en a au moins trois d'arbitraires; on a donc $d - 3(p + 3 - d) \geqq 3$, d'où $d \geqq \frac{3}{4}(p + 4)$. Pour descendre au-dessous de cette limite, il faut prendre le groupe G_d sur une courbe à modules spéciaux.

On voit que la définition de la totalité des courbes gauches, de genre p et de degré $d < p + 3$, exige la connaissance de tous les groupes spéciaux qui peuvent exister sur les courbes planes de genre p à modules quelconques ou spéciaux, si du moins l'on veut les définir comme transformées univoques des courbes planes. Il y a aussi un intérêt évident à connaître les courbes gauches particulières de degré $d \geqq p + 3$, qui dérivent de groupes spéciaux. Je me contenterai dans ce qui suit d'étudier quelques classes de courbes gauches définies à l'aide des groupes spéciaux dérivés d'un point de Weierstrass; mais

(¹) *B. N. — A. F.*, *loc. cit.*

avant je donnerai quelques remarques relatives au cas d'un groupe spécial quelconque.

2. Je vais chercher en premier lieu le nombre ν des arbitraires dont dépend la courbe gauche la plus générale, dérivant d'un pareil groupe. Soient : 1° g_d^q la famille à laquelle appartient le groupe G_d des points (x_i, y_i); 2° τ le nombre de points arbitraires qui déterminent cette famille parmi toutes celles de même espèce (¹); 3° $r+1$ le nombre des courbes φ indépendantes qui passent par G_d; 4° ρ le nombre des relations existant entre les modules de la classe, si celle-ci est spéciale.

Le groupe G_d dépend de $q+\tau$ points arbitraires, chacune des fonctions ξ, η, ζ renferme $q+1$ paramètres arbitraires; on a donc

$$\nu = 4q + 3p + \tau - \rho,$$

ou, en tenant compte de la loi de réciprocité de Brill et Nœther,

$$\nu = 4d - p + 4(r+1) + \tau - \rho. \tag{3}$$

Les formules (F) du § 9 du Mémoire de ces géomètres (²) permettent de transformer cette expression dans le cas où la courbe f n'est pas spéciale, ou encore dans celui où, la courbe étant spéciale, la valeur du nombre τ serait la même. Ces formules donnent pour ce nombre les expressions $\tau = 2p - 2 - d - (q+2)r = p - (q+1)(r+1)$; j'en conclus les deux expressions suivantes de ν :

$$\nu = 3d + p + 2 - r(q-2) - \rho = 4d - (q-3)(r+1) - \rho. \tag{4}$$

Si je suppose, avec Halphen et MM. Brill et Nœther, pour $d \geqq p+3$, $r+1=0$, $\rho=0$, et avec les deux derniers, pour $p+3 > d \geqq \frac{3}{4}(p+4)$, $q=3$, $\rho=0$, je retrouve la formule donnée par ces géomètres

$$\nu = 4d.$$

De même, la première égalité (4) me donne une formule de M. Nœther (³), relative au cas où l'on a $2p-2 \geqq d \geqq p+3$; si je fais avec lui $r=\rho=0$, je trouve

$$\nu = 3d + p + 2.$$

(¹) *B. N.* — *A. F.*, § 2 et suiv.
(²) *Ibid.*, p. 292.
(³) *R.*, p. 282.

La seconde expression (4) montre que les cas précédents sont les seuls où $\nu = 4d$, car $(q-3)(r+1)$ et ρ sont des nombres essentiellement positifs. De plus, cette expression s'appliquant forcément toutes les fois que la courbe n'appartient pas à une classe spéciale, on voit que l'on ne peut avoir $\nu > 4d$, que *si la courbe est spéciale;* ce résultat se vérifie sur les Tableaux d'Halphen : dans tous les cas où il trouve $\nu > 4d$, on a $d < \frac{3}{4}(p+4)$.

Par contre, dans ces Tableaux ne figure aucune courbe, pour laquelle on ait $\nu < 4d$. Comme sa classification repose sur des propositions établies indépendamment du mode de définition qui nous occupe, on doit en conclure que les courbes gauches, correspondant à $\nu < 4d$, sont des cas particuliers des espèces qu'il a trouvées. C'est ce que montre la comparaison de ses Tableaux avec ceux de Nœther; on peut aussi vérifier l'exactitude de cette conclusion à propos de la formule, rappelée plus haut, $\nu = 3d + p + 2$, correspondant à

$$2p - 2 \geqq d \geqq p + 3,$$

qui donne toujours $\nu < 4d$; cette formule ne s'applique qu'à des courbes gauches dérivant de groupes spéciaux, ce qui, ici, est un cas particulier, puisque l'on a $d \geqq p + 3$.

En second lieu, je calculerai le nombre N_m de conditions imposées à une surface de degré m par le fait de passer par une courbe gauche de degré d et de genre p. Soit $F = 0$ l'équation de la surface; substituons, dans le premier membre de cette équation, aux coordonnées courantes les expressions (1) des coordonnées ξ, η, ζ d'un point de la courbe. Nous obtenons une fonction $F(\xi, \eta, \zeta)$, rationnelle en x, y, infinie d'ordre m en tous les points du groupe G_d, contenant, d'après le théorème de Riemann-Roch, si F, ξ, η, ζ sont absolument générales, un nombre de paramètres égal à $md - p + r' + 1$, r' désignant le nombre des courbes φ linéairement indépendantes qui ont un contact d'ordre $m-1$ avec f en tous les points du groupe G_d. Si la surface contient la courbe, $F(\xi, \eta, \zeta)$ est identiquement nulle, et réciproquement : on en conclut que tous les paramètres qu'elle contient sont nuls, ce qui donne un nombre de conditions égal à

$$N_m = md - p + r' + 1.$$

Ces conditions seraient toujours indépendantes, si le groupe G_d était quelconque, auquel cas on a $r' = 0$ et $N_m = md - p + 1$; mais, le groupe G_d étant spécial, il peut arriver que, en vertu des relations qui existent entre ses points, ces conditions cessent de l'être. Si nous écartons ce cas, nous voyons que l'on a

$$N_m \geqq md - p + 1.$$

Dans ces mêmes conditions, l'inégalité $p < \frac{md+2}{2}$ entraîne

$$N_m = md - p + 1;$$

car cette inégalité revient à la suivante, $md > 2p - 2$, et entraîne qu'il ne peut exister une courbe φ ayant un contact d'ordre $m - 1$ avec f en tous les points de G_d, d'où $r' = 0$. On en conclut que l'on a

$$N_m = md - p + 1,$$

lorsque $p \geqq \frac{md+1}{2}$, résultat trouvé par Halphen (¹), mais seulement pour $p < \frac{md+1}{2}$.

Le cas où l'on a $N_m > md - p + 1$ et, par suite, $r' > 0$ mérite quelque attention. Le groupe G_d correspondant sur la courbe f aux points d'intersection de la courbe gauche avec le plan de l'infini, il correspond sur f, aux points de rencontre de la courbe gauche avec les plans de l'espace, une famille ∞^3 de groupes G'_d, corrésiduels à G_d, découpés par

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta = 0.$$

Comme une transformation homographique permet de substituer, à la surface F, une surface F' de même degré, à la courbe gauche, définie par G_d et situé sur F, une courbe gauche, de même degré et de même genre, définie par un groupe G'_d quelconque et située sur F', il en résulte qu'*il existe sur f une famille ∞^3 de groupes G'_d jouissant de la même propriété que G_d, c'est-à-dire tels que r' courbes φ aient, en tous les points de chacun d'eux, un contact d'ordre $m - 1$ avec f*. Or ceci, exigeant l'évanouissement de la fonction ϑ attachée à la courbe et de ses dérivées partielles, jusqu'à un certain ordre, pour des valeurs des arguments égales à des $m^{\text{ièmes}}$ parties de périodes, ne peut se présenter

---

(¹) *Ha*, p. 41.

que pour des courbes spéciales. Donc, *si l'on a* $N_m > md - p + 1$, *la courbe f et, par suite, la courbe gauche sont spéciales*. Prenons, par exemple, $m = 2$, $d = p - 1$; la courbe f doit être alors une de ces courbes signalées par M. Weber [1], possédant des systèmes une ou plusieurs fois infinis de courbes de contact φ. La première des courbes gauches du huitième degré, donnée par Halphen [2], dérive d'une pareille courbe f.

3. Je terminerai ces généralités par quelques remarques sur des représentations analytiques des courbes gauches se rattachant à ce qui précède.

Le point $(\xi, \eta, 0)$ décrit, dans le plan $\zeta = 0$, une courbe d'ordre d et de genre p, $f_1(\xi, \eta) = 0$, projection sur ce plan de la courbe de l'espace, le centre de projection étant le point $(0, 0, \infty)$. Les deux courbes f et f_1 se correspondent point par point, et ζ est une fonction rationnelle de (ξ, η), comme elle l'était de (x, y); le groupe $\zeta = \infty$ correspond sur f_1 au groupe G_d de f_1 et est lui aussi spécial. Donc $\zeta = \frac{\Phi_1(\xi, \eta)}{\Phi_0(\xi, \eta)}$, Φ_1 et Φ_0 étant deux fonctions φ relatives à f_1; jointe à l'équation $f_1 = 0$, cette équation représente la courbe gauche.

C'est la représentation, fondamentale dans le Mémoire d'Halphen, d'une courbe gauche à l'aide d'un cône et d'une monoïde; je suppose, bien entendu, dans tout ceci que les génératrices du cône ne sont pas toutes des cordes de la courbe. D'après ce que je viens de dire, Φ_1 est, au plus, de degré $d - 3$; quant à Φ_0, il est, au plus, de degré $d - 4$. En effet, ζ devient infinie en tous les points à l'infini de f_1; la courbe $\Phi_0 = 0$ est coupée en d points par la droite de l'infini; comme elle est au plus, elle aussi, de degré $d - 3$, elle doit se décomposer en cette droite et une courbe de degré $d - 4$; c'est-à-dire que Φ_0 doit être de degré $d - 4$ au maximum. Ceci donne, sous une forme plus générale, un résultat indiqué par Halphen [3] et M. Nœther [4]. Considérons les

---

(1) WEBER, *M.-A.*, t. XIII, p. 35 et suiv. *Ueber gewisse Ausnahmefälle*, etc.). *Voir* aussi KRAUSS, *M.-A.*, t. XVI.

(2) *Ha*, p. 165.

(3) *Ha*, p. 32.

(4) *N.-R.*, p. 283.

groupes découpés sur f_1 par $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta = 0$, ils sont formés par les projections des points de rencontre de la courbe gauche avec un plan quelconque; ce sont les transformés des groupes G'_d précédents, ils sont donc corrésiduels du groupe $\zeta = \infty$; si donc l'un de ces groupes est spécial, tous les autres le sont. A la famille g_d^3 qu'ils forment, correspond une famille résiduelle, dont un des groupes est le résidu des points de rencontre de f_1 avec la droite de l'infini, et est découpé par $\Phi_0 = 0$. On en conclut que cette famille est découpée sur f_1 par un système linéaire de courbes adjointes d'ordre $d - 4$ au plus. Soit r la multiplicité de cette famille; comme il peut se faire que g_d^3 fasse partie d'une famille γ_d^q, $q > 3$, on a, h désignant le nombre des points doubles de f_1 :

$$r \geqq p - d + 2 = \frac{(d-4)(d-1)}{2} - h + 1.$$

Cela posé, soit n le degré du dénominateur de ζ; on voit que :

Si les projections des points de rencontre d'une courbe gauche de degré d avec un plan quelconque forment, sur la projection, un groupe spécial : 1° on a $n \leqq d - 4$; 2° les h points doubles de la projection ne fournissent pour les courbes de degré n qui lui sont adjointes que $h - 1$ conditions au plus.

Soient maintenant

$$(5) \qquad \xi = \frac{\psi_1(x,y)}{\psi_0(x,y)}, \qquad \eta = \frac{\psi_2(x,y)}{\psi_0(x,y)}, \qquad \zeta = \frac{\psi_3(x,y)}{\psi_0(x,y)}$$

les expressions de ξ, η, ζ en fonction de x et de y sous forme rationnelle. Si, dans ces expressions, je considère x et y comme des variables indépendantes, elles définissent une surface unicursale passant par la courbe. Plus généralement, à chaque couple de fonctions rationnelles (u, v) de x et de y, attachées à la courbe f, correspond une surface unicursale passant par la courbe gauche, et qui est définie par les expressions de ξ, η, ζ en fonction de u et de v, où l'on regarde ces quantités comme des variables indépendantes. Il est évident que l'on pourra obtenir ainsi toutes les surfaces unicursales passant par la courbe, et arriver en particulier à la détermination de la surface unicursale de degré minimum qui la contient. Soit $F(u, v) = 0$ la relation qui lie u et v; elle représente dans le plan des (u, v) une courbe, transformée point par point de la courbe gauche; elle définit aussi la transformée de cette courbe dans la *représentation uniforme* de la surface unicursale sur ce plan. La correspondance point par point des deux courbes n'est donc que l'application, à une ligne particulière tracée sur la surface, de cette transformation. Ainsi la courbe f, dont nous faisons dériver la courbe gauche, est sa transformée dans la représentation de la surface (5) sur le plan des xy. La considération de cette représentation peut être utile dans les recherches relatives à *la géométrie sur la courbe et la surface;* son étude est facilitée par le fait que, le réseau $\alpha_0\psi_0+\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2+\alpha_3\psi_3=0$ étant formé de courbes adjointes, et découpant sur f une famille de groupes déterminée, ses points de base sont connus. Ces remarques s'appliquent évidemment à toutes les courbes gauches, qu'elles dérivent d'un groupe spécial ou non. Pour les éclaircir par un exemple, je prendrai sur la courbe, déjà envisagée au Chapitre II, n° 7,

$$(f) \qquad x^5+y^5-y=0,$$

les groupes G_8, G_9, G_{10} définis par les équations

$$(G_8) \qquad \alpha_0 x^2+\beta_0 xy+\gamma_0 y^2+\varepsilon_0 y=0,$$

$$(G_9) \qquad \alpha'_0 x^2+\beta'_0 xy+\gamma'_0 y^2+\delta'_0 x+\varepsilon'_0 y=0,$$

$$(G_{10}) \qquad \alpha''_0 x^2+\beta''_0 xy+\gamma''_0 y^2+\delta''_0 x+\varepsilon''_0 y+\varphi''_0=0;$$

à ces groupes correspondent des courbes gauches de degrés 8, 9, 10, que je désignerai par C_8, C_9, C_{10}. Les coordonnées d'un de leurs points seront représentées par des fonctions de la forme

$$(C_8) \qquad \frac{\alpha_i x^2+\beta_i xy+\gamma_i y^2+\varepsilon_i y}{\alpha_0 x^2+\beta_0 xy+\gamma_0 y^2+\varepsilon_0 y},$$

$$(C_9) \qquad \frac{\alpha'_i x^2+\beta'_i xy+\gamma'_i y^2+\delta'_i x+\varepsilon'_i y}{\alpha'_0 x^2+\beta'_0 xy+\gamma'_0 y^2+\delta'_0 x+\varepsilon'_0 y},$$

$$(C_{10}) \qquad \frac{\alpha''_i x^2+\beta''_i xy+\gamma''_i y^2+\delta''_i x+\varepsilon''_i y+\varphi''_i}{\alpha''_0 x^2+\beta''_0 xy+\gamma''_0 y^2+\delta''_0 x+\varepsilon''_0 y+\varphi''_0}, \qquad (i=1, 2, 3).$$

Soient S, S′, S″ les surfaces unicursales correspondantes; leurs sections planes ont pour représentation, sur le plan des xy, des coniques et sont unicursales; ces coniques forment des systèmes ∞^3 ayant respectivement 2, 1 et 0 points fixes. On en conclut que S est une quadrique (un cône), S′ une cubique réglée, et S″ une surface de Steiner.

4. J'arrive maintenant aux applications proprement dites que je me propose de faire. Soit A un point de Weierstrass de la courbe f; si d est un ordre existant, k le nombre des ordres manquants inférieurs à d, il existe une famille g_d^{d-k} de groupes dérivés du groupe G_d formé de d points condensés au point A : c'est une des familles définies au n° 2 du Chapitre II. Les groupes de cette famille seront spéciaux, *si l'on a $k < p$, c'est-à-dire si d est inférieur au plus grand des ordres manquants*. Ce sont les courbes gauches, définies à l'aide de ces groupes spéciaux, que je vais considérer.

Soient $d_0, d_1, \ldots, d_s$ les ordres existants inférieurs au plus grand des ordres manquants; je désignerai dans la suite par G_{d_i} l'un quelconque des groupes de la famille $g_{d_i}^{d_i-k}$. Pour qu'un pareil groupe puisse servir à définir une courbe gauche, il faut que l'on ait $d_i - k \geqq 3$; or $d_i - k = i + 1$, d'où $i \geqq 2$. Donc les groupes de degré minimum d'où l'on peut faire dériver une courbe gauche sont les G_{d_2}. Pour avoir le nombre d'arbitraires dont dépend la courbe gauche la plus générale dérivée de G_{d_i}, je pars de la formule (3) du n° 2; j'ai ici $\tau = 0$, et $r + 1 = p - k$; donc

$$\nu = 4d_i - 4k + 3p - \rho.$$

Mais, comme $d_i - k = i + 1$, je trouve, en posant de nouveau $3p - 3 - \rho = M$ (Chap. IV, introduction au Tableau) :

$$\nu = 4i + M + 7. \tag{6}$$

Quant à N_m, il n'y a rien à changer à la formule du n° 2; il est donc inutile de la rapporter ici.

Je vais maintenant chercher la nature du point de la courbe gauche qui correspond au point A de f; soit (a) ce point. Nous avons vu (Chap. II, n° 2) que l'on pouvait former une suite de courbes φ : φ_0, $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_s$, rencontrant f respectivement en $d_s, d_s - d_0, d_s - d_1, \ldots$ points confondus en A, et que c'était à l'aide de ces courbes que l'on constituait les courbes générales découpant les diverses familles $g_{d_i}^{d_i-k}$. Par suite, nous avons pour la courbe dérivée de G_{d_i} :

$$\xi = \frac{\Phi_1}{\Phi_4}, \qquad \eta = \frac{\Phi_2}{\Phi_4}, \qquad \zeta = \frac{\Phi_3}{\Phi_4},$$

en posant

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi'_1 + \ldots + \alpha_{i+1}\varphi'_{i+1},\\
\Phi_2 &= \beta_0\varphi_0 + \beta_1\varphi'_1 + \ldots + \beta_{i+1}\varphi'_{i+1},\\
\Phi_3 &= \gamma_0\varphi_0 + \gamma_1\varphi'_1 + \ldots + \gamma_{i+1}\varphi'_{i+1},\\
\Phi_4 &= \delta_0\varphi_0 + \delta_1\varphi'_1 + \ldots + \delta_{i+1}\varphi'_{i+1}.
\end{aligned}$$

Le groupe G_{d_i} est découpé par $\Phi_4 = 0$; quant au groupe correspondant aux points d'intersection de la courbe gauche avec un plan quelconque $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta = 0$, il est découpé par la courbe

$$\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 + \gamma\Phi_3 + \delta\Phi_4 = 0,$$

dont je peux encore mettre l'équation sous la forme

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi'_1 + \ldots + \lambda_{i+1}\varphi'_{i+1} = 0.$$

Cela posé, les plans pour lesquels on a $\lambda_{i+1} = 0$ pivotent autour d'un point fixe, et coupent la courbe gauche en $d_i - d_{i-1}$ points confondus en (a); ce point est par suite le point fixe. Les équations $\lambda_{i+1} = 0$, $\lambda_i = 0$ définissent en général un système de plans, faisant partie des précédents, et passant par une droite; comme ils coupent la courbe en $d_i - d_{i-2}$ points confondus en (a), cette droite y rencontre la courbe en un égal nombre de points confondus. Enfin, aux équations $\lambda_{i+1} = 0$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_{i-1} = 0$ correspond en général un plan unique coupant la courbe en $d_i - d_{i-3}$ points confondus en (a). De là et des inégalités $d_i - d_{i-3} > d_i - d_{i-2} > d_i - d_{i-1}$, il résulte que le point (a) est un point d'ordre de multiplicité $d_i - d_{i-1}$, à tangente et à plan osculateur uniques, où la courbe est rencontrée par cette tangente et par ce plan respectivement en $d_i - d_{i-2}$ et $d_i - d_{i-3}$ points confondus. Ce dernier résultat est à modifier si $i = 2$; dans ce cas, le plan osculateur coupe en $d_i = d_2$ points confondus. Il faut remarquer que, pour quelques courbes particulières, il peut y avoir encore d'autres modifications à faire subir à ces nombres; cela arrivera toutes les fois que les équations

$$\lambda_{i+1} = 0, \qquad \lambda_i = 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda_{i-q} = 0$$

sont les conséquences de trois d'entre elles, $\lambda_{i+1} = 0$, $\lambda_{i-h} = 0$, $\lambda_{i-k} = 0$.

Il convient d'examiner quelle est l'influence sur la courbe, au point de vue de sa détermination et de sa classification, de la présence du point (a). Soient μ_1 l'ordre du point (a), μ_2, μ_3 les nombres de points d'intersection de la tangente et du plan osculateur respectivement confondus en ce point; le nombre des conditions imposées à la courbe gauche par l'existence de ce point est égal à $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 7$, toutes les fois que cette différence est positive; il est égal à zéro dans le cas contraire. Ceci porterait à regarder la courbe gauche comme un cas particulier d'une autre courbe, dérivée d'un groupe Γ_{d_i} appartenant à une famille $\gamma_{d_i}^{d_i-k}$ qui ne soit pas issue d'un point de Weierstrass; cette courbe dépendrait de $\nu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 7$ paramètres. Mais on ne peut affirmer en général son existence, et c'est à l'aide d'autres considérations que l'on peut, dans certains cas, rattacher avec certitude la courbe gauche à d'autres plus générales. Considérons le cas où le point (a) est un point multiple; Halphen [1] a indiqué l'existence d'un certain nombre σ, qu'il appelle *l'équivalent du point multiple effectif*, et au sujet duquel il a énoncé le théorème suivant : *Une courbe gauche algébrique, possédant un point multiple effectif d'équivalent σ et h points doubles apparents, est un cas particulier d'une courbe gauche de même degré, sans point multiple effectif et ayant $h + \sigma$ points doubles apparents.* En particulier, l'équivalent d'un point double effectif est nul, quelle que soit la nature de ce point. Cela posé, soient h' le nombre des points doubles de la projection de notre courbe gauche, distincts de la projection de (a), si ce dernier est point double; h'' le nombre des points doubles effectifs distincts également de (a), σ l'équivalent de ce point : *la courbe sera un cas particulier d'une courbe de même degré, sans points multiples effectifs et possédant $h' - h'' + \sigma$ points doubles apparents.* Si le point (a) n'est pas multiple, on arrive à un résultat analogue en prenant $h' - h''$ à la place de $h' - h'' + \sigma$.

Du reste, dans tous les cas que je vais considérer, l'équivalent σ de (a), lorsque ce point est multiple, est nul; je renverrai pour son calcul, qui est assez pénible, au Mémoire d'Halphen.

La détermination de h' se fait comme celle du nombre δ des points doubles d'une $C_{d_i}^{d_i-\alpha}$ (Ch. IV, n° 1); si Δ est le plus grand commun diviseur entre μ_1 et μ_2, on trouve

$$h' = \frac{(d_i - 1)(d_i - 2) - (\mu_1 - 1)(\mu_2 - 1) - (\Delta - 1)}{2} - p.$$

---

[1] *Ha*, p. 43.

Quant à h'', je vais montrer sur des exemples comment on peut le déterminer. Je prendrai, dans le cas de $p=7$, $\alpha=4$, le système d'ordres manquants : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11 ; les ordres existants inférieurs à 11 sont 4, 8, 9, 10; je n'ai donc que deux familles de groupes spéciaux d'où l'on peut faire dériver des courbes gauches. Je désignerai ces deux courbes, qui sont respectivement de degré 9 et 10, par C_9 et C_{10}. Je prendrai, pour définir la classe, la courbe plane C_9^5 du Tableau, qui est représentée par l'équation $F(u, u_1)=0$ entre deux fonctions d'ordre 4 et 9. Ce sera cette courbe qui jouera le rôle de f; cette courbe possède cinq points doubles. D'après ce que nous avons vu au début de ce paragraphe, et aussi au n° 2 du Chapitre II, on peut mettre ξ, η, ζ sous la forme de quotients de trois fonctions d'ordre 9, infinies en A seulement, par une quatrième.

L'expression générale d'une pareille fonction étant

$$\alpha u_1 + \beta u^2 + \gamma u + \delta,$$

on en conclut que ξ, η, ζ ont une valeur unique pour chacun des couples (u, u_1) correspondant aux points doubles de C_9^5, et que la courbe gauche C_9 a, par conséquent, cinq points doubles; je n'ajoute pas en dehors de (a), qui ici est simple. On a donc $h''=5$. Je prends C_{10}; ξ, η, ζ sont les quotients de trois fonctions d'ordre 10 par une quatrième; leur type général est

$$\alpha u_2 + \beta u_1 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon.$$

Elles contiennent la fonction d'ordre 10 particulière u_2, qui, en général, a deux valeurs en chacun des points doubles de C_9^5; à ces points correspondent des couples de valeurs distinctes de ξ, η, ζ, et C_{10} n'a pas de points doubles; donc $h''=0$. Il est à remarquer que, parmi les fonctions u_2, il en est qui n'ont qu'une seule valeur en un certain nombre de points doubles de C_9^5, et l'on voit que ce nombre peut aller jusqu'à quatre; en prenant dans l'expression précédente pour u_2 une de ces fonctions, on obtiendrait des courbes C_{10} ayant 1, 2, 3 ou 4 points doubles.

Les points doubles de la courbe gauche que j'obtiens ainsi correspondent aux points doubles de la courbe plane dont je la fais dériver; ce sont les seuls possibles, tant que les quatre fonctions qui servent à former ξ, η, ζ sont générales, et que, par conséquent, ξ_0, η_0, ζ_0 étant les coordonnées d'un point de la courbe gauche, les équations $\xi - \xi_0 = 0$, $\eta - \eta_0 = 0$, $\zeta - \zeta_0 = 0$, $F(u, u_i) = 0$ n'ont qu'une solution commune, en dehors du cas que je viens d'examiner. J'ajouterai, à l'égard de la courbe $C_{d_i}^{d_i - \alpha}$ ou $F(u, u_i) = 0$ que je prendrai comme courbe fondamentale, que je choisirai pour u_i la fonction d'ordre immédiatement supérieur à α, sans me préoccuper de ce qu'il soit primitif ou non, sauf cependant dans le cas où cet ordre est le double de α et conduit, par suite, à une courbe $C_{2\alpha}^{\alpha}$, ce qui n'est autre chose qu'une conique répétée α fois. Ainsi, dans le cas que je viens de traiter, j'ai dû prendre C_9^5, le second ordre existant étant 8 et conduisant à une $C_8^4 = (C_2^1)^4$.

C'est des expressions précédentes de ξ, η, ζ qu'il conviendrait de partir pour déterminer les surfaces unicursales, et, en particulier, celle de degré minimum, qui passent par la courbe; mais cette détermination exigerait des recherches assez longues sur l'expression des diverses fonctions u_k à l'aide des deux fonctions u et u_i, ou plus généralement de deux quelconques d'entre elles; aussi je ne l'aborderai pas et je me contenterai de signaler les cas où l'on aperçoit immédiatement une de ces surfaces.

Voici l'indication, avec quelques détails, de deux de ces cas. Je reprends la courbe C_9; les expressions de ξ, η, ζ étant de la forme

$$\frac{\alpha_i u_1 + \beta_i u^2 + \gamma_i u + \delta_i}{\alpha_0 u_1 + \beta_0 u^2 + \gamma_0 u + \delta_0} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

on voit que la courbe est située sur une quadrique, dont un système de génératrices rectilignes est formé des lignes $u =$ const.; mais il est visible que, sur toutes ces droites, le point $u_i = \infty$ est le point fixe $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \frac{\alpha_3}{\alpha_0}\right)$; *la quadrique est donc un cône*. Son sommet n'est autre que le point (a) lui-même; il suffit, pour s'en assurer, de remplacer u_1 par son développement, suivant les puissances décroissantes de u, relatif à $u = \infty$. Les génératrices du cône coupent la courbe en cinq points, dont l'un est (a). La courbe est donc à l'intersection de ce cône avec une surface du cinquième ordre, ayant en commun avec le cône une droite passant par (a).

Je prendrai, comme second exemple, la courbe gauche du huitième degré C_8, fournie par le système d'ordres manquants 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, correspondant encore à $p=7$, $\alpha=4$. Les ordres existants sont 4, 7, 8; je prends comme courbe fondamentale C_7^3 correspondant à l'équation $F(u, u_3)=0$; les expressions de ξ, η, ζ seront donc pour C_8 de la forme

$$\frac{\alpha_i u_3+\beta_i u^2+\gamma_i u+\delta_i}{\alpha_0 u_3+\beta_0 u^2+\gamma_0 u+\delta_0} \qquad (i=1, 2, 3),$$

analogue à la précédente. La courbe est encore sur un cône du second degré; mais le sommet de ce cône n'est plus sur la courbe : en effet, il n'est pas au point (a), dont les coordonnées sont ici $\left(\frac{\beta_1}{\beta_0}, \frac{\beta_2}{\beta_0}, \frac{\beta_3}{\beta_0}\right)$ tandis que le sommet du cône est toujours le point $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \frac{\alpha_3}{\alpha_0}\right)$; il ne correspond donc pas à $u=\infty$ et $u_3=\infty$; or on voit aisément qu'il n'existe, en général, aucune valeur finie de u, pour laquelle ξ, η, ζ se réduisent respectivement à $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \frac{\alpha_3}{\alpha_0}\right)$. La courbe C_8 est l'intersection complète de ce cône et d'une surface de quatrième degré. On peut remarquer que C_7^3 a deux points doubles et que les considérations précédentes s'appliquent ici; la courbe C_8 a donc deux points doubles, et les surfaces précédentes sont bitangentes.

J'ajouterai enfin que ces expressions de ξ, η, ζ en fonction de u et des u_k montrent immédiatement que les courbes gauches, dérivant des groupes de certaines familles, sont *des courbes impropres*. Ainsi, prenons, par exemple, dans le cas de $p=7$, $\alpha=3$, le système d'ordres manquants 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11; les ordres existants inférieurs à 11 sont 3, 6, 9, 10. On a donc une famille g_9^3, dont les groupes paraissent devoir donner naissance à une courbe gauche du neuvième ordre; mais on voit tout de suite que les expressions de ξ, η, ζ sont de la forme

$$\frac{\alpha_i u^3+\beta_i u^2+\gamma_i u+\delta_i}{\alpha_0 u^3+\beta_0 u^2+\gamma_0 u+\delta_0} \qquad (i=1, 2, 3);$$

la courbe gauche n'est donc qu'une cubique gauche répétée trois fois; à chaque point de la courbe fondamentale correspond un seul point de la courbe gauche, mais à un point de celle-ci correspondent trois points de celle-là. Il est aussi des cas où le groupe général d'une famille donne naissance à une courbe gauche *propre*, tandis que certains groupes particuliers ne fournissent que des courbes impropres; le Tableau qui termine ce Chapitre en fournirait des exemples, mais je n'insisterai pas davantage là-dessus.

5. Comme première application, je traiterai les deux cas généraux $\alpha = p$ et $\alpha = p - 1$.

1° $\alpha = p$. La suite des ordres manquants sera

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-1, \quad p+h;$$

il n'y aura de groupes spéciaux donnant naissance à des courbes gauches que si h est supérieur à 2. Soit donc $h > 2$, et prenons un entier i tel que l'on ait $2 \leqq i < h$; à l'ordre existant $d_i = p + i$ correspondent des courbes gauches C_{d_i}. Le nombre des arbitraires dont elles dépendent est donné par la formule (6), où je dois faire

$$M = 3p - h - 2$$

(vérifier sur le Tableau du Ch. IV); j'ai donc

$$\nu = 4i + 3p - h + 5 = 4d_i - p - h + 5.$$

Comme j'ai $h \geqq 3$, et que je suppose $p \geqq 3$, on voit que ce nombre est toujours inférieur à $4d_i$; ces courbes ne sont que des cas particuliers de celles de Halphen (n° 2). L'inégalité évidente, $md_i > 2p - 2$, entraîne, relativement à N_m, l'inégalité

$$N_m \leqq md_i - p + 1.$$

Le point (a) est un point simple pour toutes ces courbes et ordinaire, sauf pour les courbes C_{d_2}. Pour ces courbes, on a $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 2$, mais $\mu_3 = p + 2$; on pourrait regarder ces courbes comme des cas particuliers de courbes C'_{d_2} dépendant de $\nu' = \nu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 7 = 4d_i - h + 3$ paramètres; sauf pour $h = 3$, ces courbes seraient particulières. Je signalerai le cas de $p = 4$, $h = 3$, $d_2 = 6$; on a une courbe C_6, intersection d'une quadrique et d'une cubique; elle possède six points doubles apparents, dont les projections se trouvent sur une conique.

2° $\alpha = p - 1$. Ici, il y a deux types différents pour les systèmes d'ordres manquants. Un premier type, particulier, est le suivant :

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-2, \quad p, \quad 2p-1;$$

les ordres existants, auxquels correspondent des courbes gauches, sont donnés par la formule $d_i = p + i$, avec $i \geqq 2$. Comme on a ici $M = 2p - 1$ (*voir* le Tableau du Ch. IV), les courbes C_{d_i} dépendent de $\nu = 4d_i - 2p + 6$ paramètres; on a encore, dans ce cas,

$$N_m \leqq md_i - p + 1.$$

Le point (a) est un point simple ordinaire, sauf pour les courbes C_{d_2} et C_{d_3}; pour C_{d_2} on a $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = p + 2$; pour C_{d_3}, ce point est un point stationnaire ordinaire. Dans le cas particulier où $p = 4$, $d_2 = 6$, la courbe C_6 est située sur une quadrique.

Je ne parlerai pas des courbes C'_{d_2}, qui dépendraient ici de $4d_i - p + 5$ paramètres, le Tableau des courbes du sixième degré d'Halphen (1) montre que C'_6 n'existerait pas.

Le second type des systèmes d'ordres manquants, général celui-ci, est

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad p-2,\quad p+l-1,\quad p+n-1,$$

avec $0 \leqq l < n \leqq p - 2$; le nombre des ordres existants est au plus égal à $p - 3$: il n'y aura donc de courbes gauches dans ce cas que si l'on a $p - 3 \geqq 3$ ou $p \geqq 6$. Je me borne ici à indiquer la nature du point (a) des diverses courbes C_{d_i}, sans m'arrêter aux valeurs que peut avoir ν. Ce point est en général un point simple ordinaire; il ne cesse de l'être que si $i = 2$, ou si, quel que soit i, l'un des ordres manquants, ou les deux, sont intercalés dans la suite d_{i-3}, d_{i-2}, d_{i-1}, d_i. On a en tout quinze cas possibles, six correspondant à $i = 2$ et se déduisant des neuf autres, qui se présentent pour $i > 2$. Voici le Tableau de ces derniers; je n'indique pas les dispositions des ordres manquants, qui ressortent suffisamment des valeurs des nombres μ_1, μ_2, μ_3 :

μ_1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
μ_2	2	2	3	3	4	3	3	4	4
μ_3	4	5	4	5	5	4	5	5	5

Le Tableau des six autres cas résulte du précédent, en y faisant partout $\mu_3 = d_2$. A signaler encore ici le cas de $p = 6$ et $d_2 = 7$; la courbe C_7 est sur une quadrique.

(1) *Ha*, p. 163.

6. Je vais enfin passer en revue les courbes gauches C_{d_i}, correspondant aux diverses espèces de points de Weierstrass qui peuvent exister dans le cas de $p=7$. J'ai réuni ces courbes dans un Tableau, où j'ai suivi le même ordre que dans celui qui termine le Chapitre IV. Pour simplifier, je n'ai inscrit que les ordres existants, et j'ai omis tous les cas où il n'y a pas de groupes spéciaux donnant naissance à des courbes gauches. Je désignerai ces dernières par la notation, que j'ai déjà employée, C_{d_i}; les trois nombres qui suivent ce symbole sont, dans l'ordre, μ_1, μ_2, μ_3, que j'appellerai les *caractéristiques du point* (a). J'y ai joint les nombres ν et ν', ce dernier sous la forme $4d_i \pm q$, et aussi, le cas échéant, les nombres h' et h''; quant au nombre σ, comme il est toujours nul, je ne l'ai pas inscrit. Enfin, quand il y avait lieu, j'ai indiqué, soit ce que pouvait présenter d'intéressant la comparaison des courbes que j'ai trouvées avec celles d'Halphen, soit le degré et la nature de surfaces unicursales les contenant, dont l'existence a été reconnue comme il a été dit au n° 4.

$$\alpha = 7.$$

7, 8, 9.	C_9, $(1, 2, 9)$,	$\nu = 31$,	$\nu' = 4d_i$.
7, 8, 9, 10.	C_9, $(1, 2, 9)$,	$\nu = 30$,	$\nu' = 4d_i - 1$.
	C_{10}, $(1, 2, 3)$,	$\nu = 34 =$	$\nu' = 4d_i - 6$.
7, 8, 9, 10, 11.	C_9, $(1, 2, 9)$,	$\nu = 29$,	$\nu' = 4d_i - 2$.
	C_{10}, $(1, 2, 3)$,	$\nu = 33 =$	$\nu' = 4d_i - 7$.
	C_{11}, $(1, 2, 3)$,	$\nu = 37 =$	$\nu' = 4d_i - 7$.
7, 8, 9, 10, 11, 12.	C_9, $(1, 2, 9)$,	$\nu = 28$,	$\nu' = 4d_i - 3$.
	C_{10}, $(1, 2, 3)$,	$\nu = 32 =$	$\nu' = 4d_i - 8$.
	C_{11}, $(1, 2, 3)$,	$\nu = 36 =$	$\nu' = 4d_i - 8$.
	C_{12}, $(1, 2, 3)$,	$\nu = 40 =$	$\nu' = 4d_i - 8$.

La première C_9 est un cas particulier de la courbe générale du neuvième degré et de genre 7 d'Halphen (1); les trois autres sont des cas particuliers de courbes particulières. Quant aux autres courbes, ce sont aussi des courbes particulières ($\nu' < 4d_i$, n° 2).

---

(1) *Ha*, p. 166.

$\alpha = 6.$

6, 8, 9.	C_9,	$(1, 3, 9)$,	$\nu = 30$,	$\nu' = 4d_i$.		
6, 8, 9, 10.	C_9,	$(1, 3, 9)$,	$\nu = 29$,	$\nu' = 4d_i - 1$.		
	C_{10},	$(1, 2, 4)$,	$\nu = 33 = \nu' = 4d_i - 7$.			
6, 8, 9, 10, 11, 12.	C_9,	$(1, 3, 9)$,	$\nu = 28$,	$\nu' = 4d_i - 2$.		
	C_{10},	$(1, 2, 4)$,	$\nu = 32 = \nu' = 4d_i - 8$.			
	C_{11},	$(1, 2, 3)$,	$\nu = 36 = \nu' = 4d_i - 8$.			
	C_{12},	$(1, 2, 3)$,	$\nu = 40 = \nu' = 4d_i - 8$.			
6, 7, 9.	C_9,	$(2, 3, 9)$,	$\nu = 29$,	$\nu' = 4d_i$,	$h' = 20$,	$h'' = 0$.
6, 7, 9, 10.	C_9,	$(2, 3, 9)$,	$\nu = 28$,	$\nu' = 4d_i - 1$,	$h' = 20$,	$h'' = 0$.
	C_{10},	$(1, 3, 4)$,	$\nu = 32$,	$\nu' = 4d_i - 7$.		
6, 7, 8.	C_8,	$(1, 2, 8)$,	$\nu = 28$,	$\nu' = 4d_i$.		
6, 7, 8, 10.	C_8,	$(1, 2, 8)$,	$\nu = 27$,	$\nu' = 4d_i - 1$.		
	C_{10},	$(2, 3, 4)$,	$\nu = 31$,	$\nu' = 4d_i - 7$,	$h' = 28$,	$h'' = 0$.
6, 7, 8, 9.	C_8,	$(1, 2, 8)$,	$\nu = 26$,	$\nu' = 4d_i - 2$.		
	C_9,	$(1, 2, 3)$,	$\nu = 30 = \nu' = 4d_i - 6$.			

Les courbes pour lesquelles (a) est un point simple donnent lieu aux mêmes remarques que dans le Tableau précédent. Nous avons ici deux C_9 et une C_{10} ayant un point double en (a) (point de rebroussement); ce sont des cas particuliers de courbes du neuvième et du dixième degré, sans points doubles effectifs et toutes deux de genre 8 (¹).

$\alpha = 5.$

5, 8, 9, 10.	C_9,	$(1, 4, 9)$,	$\nu = 29$,	$\nu' = 4d_i$.		
	C_{10},	$(1, 2, 5)$,	$\nu = 33$,	$\nu' = 4d_i - 6$.		
5, 8, 9, 10, 11.	C_9,	$(1, 4, 9)$,	$\nu = 29$,	$\nu' = 4d_i - 1$.		
	C_{10},	$(1, 2, 5)$,	$\nu = 33$,	$\nu' = 4d_i - 6$.		
	C_{11},	$(1, 2, 3)$,	$\nu = 37 = \nu' = 4d_i - 7$.			
5, 7, 9, 10.	C_9,	$(2, 4, 9)$,	$\nu = 28$,	$\nu' = 4d_i$,	$h' = 19$,	$h'' = 0$.
	C_{10},	$(1, 3, 5)$,	$\nu = 32$,	$\nu' = 4d_i - 6$.		

(¹) *Ha.*, p. 166, 167.

$$5, 7, 9, 10, 11, 12. \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_9,\ (2, 4, 9), & \nu = 27, & \nu' = 4d_i - 1, & h' = 19, \quad h'' = 0. \\ C_{10}, (1, 3, 5), & \nu = 31, & \nu' = 4d_i - 7. & \\ C_{11}, (1, 2, 4), & \nu = 35 = & \nu' = 4d_i - 9. & \\ C_{12}, (1, 2, 3), & \nu = 39 = & \nu' = 4d_i - 9. & \end{array} \right.$$

$$5, 7, 8, 10. \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_8,\ (1, 3, 8), & \nu = 27. & \nu' = 4d_i. & \\ C_{10}, (2, 3, 5), & \nu = 31, & \nu' = 4d_i - 6, & h' = 28, \quad h'' = 0. \end{array} \right.$$

$$5, 6, 9, 10, 11, 12. \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_9,\ (3, 4, 9), & \nu = 27, & \nu' = 4d_i, & h' = 18, \quad h'' = 0. \\ C_{10}, (1, 4, 5), & \nu = 31, & \nu' = 4d_i - 6. & \\ C_{11}, (1, 2, 5), & \nu = 35, & \nu' = 4d_i - 8. & \\ C_{12}, (1, 2, 3), & \nu = 39 = & \nu' = 4d_i - 9. & \end{array} \right.$$

Mêmes remarques que précédemment sur les courbes pour lesquelles (a) est simple. Nous avons ici deux C_9 pour lesquelles (a) est un point double provenant de la réunion de deux points doubles (point de contact de la courbe avec elle-même); ce sont des cas particuliers des courbes du neuvième degré et de genre 9 (¹); une C_9 ayant en (a) un point triple, cas particulier des courbes de degré 9 et de genre 10 (¹); enfin une C_{10}, ayant en (a) un point de rebroussement, cas particulier des courbes de degré 10 et de genre 8 (¹).

$$\alpha = 4.$$

$$4, 8, 9. \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_9,\ (1, 5, 9), & \nu = 29, & \nu' = 4d_i + 1, & h' = 21, \quad h'' = 5. \end{array} \right.$$

$$4, 8, 9, 10\ (^2). \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_9,\ (1, 5, 9), & \nu = 28, & \nu' = 4d_i, & h' = 21, \quad h'' = 5. \\ C_{10}, (1, 2, 6), & \nu = 32, & \nu' = 4d_i - 6. & \end{array} \right.$$

$$4, 7, 8\ (^2). \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_8,\ (1, 4, 8), & \nu = 28, & \nu' = 4d_i + 2, & h' = 14, \quad h'' = 2. \end{array} \right.$$

$$4, 7, 8, 10, 11, 12. \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_8,\ (1, 4, 8), & \nu = 27, & \nu' = 4d_i + 1, & h' = 14, \quad h'' = 2. \\ C_{10}, (2, 3, 6), & \nu = 31, & \nu' = 4d_i - 5, & h' = 28, \quad h'' = 0. \\ C_{11}, (1, 3, 4), & \nu = 35, & \nu' = 4d_i - 8. & \\ C_{12}, (1, 2, 4), & \nu = 39 = & \nu' = 4d_i - 9. & \end{array} \right.$$

$$4, 6, 8, 10. \quad \left\{ \begin{array}{llll} C_8,\ (2, 4, 8), & \nu = 26, & \nu' = 4d_i + 1, & h' = 12, \quad h'' = 0. \\ C_{10}, (2, 4, 6), & \nu = 30, & \nu' = 4d_i - 5, & h' = 27, \quad h'' = 0. \end{array} \right.$$

(¹) *Ha.*, p. 165.

(²) Cas examinés dans le texte (n° 4).

4, 6, 8, 10, 11, 12.	C_8, $(2, 4, 8)$,	$\nu = 25$,	$\nu' = 4d_i$,	$h' = 12$,	$h'' = 0$.
	C_{10}, $(2, 4, 6)$,	$\nu = 29$,	$\nu' = 4d_i - 6$,	$h' = 27$,	$h'' = 0$.
	C_{11}, $(1, 3, 5)$,	$\nu = 33$,	$\nu' = 4d_i - 9$.		
	C_{12}, $(1, 2, 4)$,	$\nu = 37 = \nu' = 4d_i - 11$.			

Je ne m'arrêterai qu'aux courbes à points doubles effectifs. Nous avons d'abord deux C_8, ayant deux points doubles effectifs, séparés et non situés en (a), cas particuliers des courbes de degré 8 et de genre 9 (1), et deux autres C_8, cas particuliers des précédentes, dont les deux points doubles sont venus se réunir en (a) pour former un point de contact de la courbe avec elle-même. Ces quatre courbes, comme nous l'avons vu pour une d'elles, sont l'intersection d'un cône du deuxième degré et d'une surface du quatrième; pour les deux premières, ces surfaces sont bitangentes en des points distincts; pour les deux autres, les points de contact sont venus se confondre en (a). Nous avons, en second lieu, deux courbes C_9, ayant cinq points doubles effectifs, qui sont des cas particuliers des courbes de degré 9 et de genre 12 (2). Nous avons vu qu'elles résultaient de l'intersection d'un cône du deuxième degré de sommet (a) et d'une surface du cinquième degré, ayant de plus en commun une droite. Enfin, nous avons trois C_{10}, ayant, la première, un point de rebroussement en (a), les deux autres un point de contact de la courbe avec elle-même; ces courbes sont respectivement des cas particuliers des courbes de degré 10 et de genres 8 et 9 (3). Les deux dernières sont situées sur une cubique réglée.

$$\alpha = 3.$$

3, 6, 9.	$C_9 = (C_3)^3$,	Courbe impropre.			
3, 6, 9, 10.	$C_9 = (C_3)^3$,	Id.			
	C_{10}, $(1, 4, 7)$,	$\nu = 32$,	$\nu' = 4d_i - 3$,	$h' = 29$,	$h'' = 2$.
3, 6, 8, 9, 11, 12.	C_8, $(2, 5, 8)$,	$\nu = 27$,	$\nu' = 4d_i + 3$,	$h' = 12$,	$h'' = 0$.
	C_9, $(1, 3, 6)$,	$\nu = 31$,	$\nu' = 4d_i - 2$.		
	C_{11}, $(2, 3, 5)$,	$\nu = 35$,	$\nu' = 4d_i - 6$,	$h' = 37$,	$h'' = 0$.
	C_{12}, $(1, 3, 6)$,	$\nu = 39$,	$\nu' = 4d_i - 6$.		

(1) Cas examinés dans le texte (n° 4).

(2) *Ha.*, p. 166.

(3) *Ha.*, p. 167.

La courbe C_8 est un cas particulier des deux dernières C_8 du Tableau précédent. La courbe C_{10} est, comme les deux dernières de ce même Tableau, un cas particulier des courbes de degré 10 et de genre 9 (1); elle paraît être plus générale qu'elles, en ce sens qu'elle possède deux points doubles effectifs distincts; elle est située sur un cône du troisième degré ayant son sommet en (a), et dont les génératrices rencontrent la courbe en trois points en dehors de (a). La courbe C_{11} possède un point de rebroussement en (a); c'est un cas particulier des courbes du onzième degré de genre 8 (2), elle est située sur une surface réglée du quatrième degré. Les courbes C_9 et C_{12} du dernier cas sont situées respectivement sur un cône du troisième ordre, et sur une surface réglée du cinquième degré

$\alpha = 2.$

Les groupes spéciaux que nous considérons ne fournissent que des courbes gauches impropres, formées respectivement de courbes unicursales de degrés 3, 4, 5, 6, comptées chacune deux fois.

---

(1) *Ha.*, p. 167.
(2) *Ha.*, p. 168.