ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

K. WEIERSTRASS

Nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert. Exposition française par C. Bourlet

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 317-335
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__317_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION

DU

THÉORÈME DE DALEMBERT,

PAR M. WEIERSTRASS.

EXPOSITION FRANÇAISE,

PAR M. C. BOURLET,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Le théorème de Dalembert, qui est un des théorèmes fondamentaux de la théorie des équations algébriques entières, a été maintes fois démontré d'une façon absolument rigoureuse. La plupart des démonstrations prouvent l'existence d'*une* racine pour une équation entière sans donner le procédé du Calcul numérique de cette racine et beaucoup d'entre elles font appel au Calcul intégral. Il était du plus haut intérêt de posséder une démonstration de ce théorème ne s'appuyant que *sur l'emploi des séries entières* et donnant, en même temps, un *procédé de calcul numérique des racines.*

En septembre 1891, M. Méray a publié, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* une démonstration basée sur ces principes. Deux mois après, M. Weierstrass communiquait à l'Académie des Sciences de Berlin une démonstration, toute différente, qui remplissait les mêmes conditions [1]. Nous avons pensé rendre service

---

[1] *Neuer Beweis des Satzes, dass jede rationale Function.... K. Weierstrass* (Sitzungsberichte der K. P. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 17 déc. 1891).

aux mathématiciens français en faisant une exposition française du Mémoire de M. Weierstrass.

Nous n'avons pas fait une traduction *littérale* de ce travail. Pour dégager la partie essentielle de la démonstration, nous nous sommes permis d'en séparer deux lemmes que nous avons placés au début. Sauf cette légère modification de forme et quelques changements de détails, nous avons conservé le texte même du Mémoire presque en entier par crainte de lui enlever le cachet de parfaite rigueur que M. Weierstrass donne à tout ce qu'il fait.

I.

LEMME I. — *Étant donnée une fonction entière $f(x)$*

$$f(x) \equiv x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

à coefficients réels ou complexes, si elle n'admet aucun diviseur commun avec sa dérivée première, c'est-à-dire si son discriminant est différent de zéro, on pourra déterminer un nombre positif h_0 tel que ceci ait aussi lieu pour toute fonction $\varphi(x)$

$$\varphi(x) \equiv x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

telle que l'on ait

$$|C_1 - A_1| < h_0, \qquad |C_2 - A_2| < h_0, \qquad \ldots, \qquad |C_n - A_n| < h_0.$$

Posons, en effet,

$$C_1 - A_1 = h_1, \qquad C_2 - A_2 = h_2, \qquad \ldots, \qquad C_n - A_n = h_n,$$

et désignons par $\Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ le discriminant de $\varphi(x)$. On aura

$$\Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n) \equiv \Delta(C_1, C_2, \ldots, C_n) - \{h_1, h_2, \ldots, h_n, C_1, C_2, \ldots, C_n\},$$

où l'expression $\{h_1, \ldots, h_n, C_1, \ldots, C_n\}$ désigne un polynome entier en $h_1, \ldots, h_n, C_1, \ldots, C_n$, c'est-à-dire une somme de termes dont chacun est un produit de puissances entières et positives de $h_1, \ldots, h_n$, $C_1, \ldots, C_n$ par un nombre (positif, négatif ou complexe). Dans chacun de ces termes, remplaçons alors le coefficient par sa valeur absolue, l'expression $\{h_1, \ldots, h_n, C_1, \ldots, C_n\}$ se transformera en un nouveau polynome que nous désignerons par $[h_1, \ldots, h_n, C_1, \ldots, C_n]$. Désignons ensuite par $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ n nombres positifs, tels que l'on ait

$$|C_1| < \overline{C}_1, \qquad |C_2| < \overline{C}_2, \qquad \ldots, \qquad |C_n| < \overline{C}_n,$$

et par h un nombre positif supérieur aux modules de toutes les quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n$, on aura évidemment

$$|\{h_1, h_2, \ldots, h_n, C_1, C_2, \ldots, C_n\}| < [h, h, \ldots, h, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n].$$

Mais $[h, h, \ldots, h, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n]$, que nous désignerons plus brièvement par $[h]$, est une fonction entière de h à coefficients réels et *positifs*, sans terme indépendant de h : on pourra donc déterminer un nombre h_0 (positif) tel que, pour toutes les valeurs de h plus petites ou au plus égales à h_0, $[h]$ soit plus petite qu'un nombre donné à l'avance. Si donc on choisit h_0 de telle façon que pour

$$h \leqq h_0$$

on ait

$$[h] < |\Delta(C_1, \ldots, C_n)|,$$

on aura certainement

$$|\Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n)| > 0;$$

le discriminant $\Delta(A_1, \ldots, A_n)$ sera, pour les valeurs de $h_1, h_2, \ldots, h_n$, telles que

$$|h_1| < h_0, \qquad \ldots, \qquad |h_n| < h_0,$$

certainement différent de o.

Remarque. — *Étant donné un nombre positif quelconque Δ_0 plus petit que la valeur absolue de $\Delta(C_1, \ldots, C_n)$, on pourra même toujours choisir h_0 de telle façon que l'on ait*

$$|\Delta(A_1, \ldots, A_n)| > \Delta_0$$

chaque fois que

$$|h_1| < h_0, \qquad \ldots, \qquad |h_n| < h_0.$$

Remarquons, en effet, que, puisque $[h]$ a tous ses coefficients positifs, l'inégalité $h < h_0$ entraîne l'inégalité de $[h] < [h_0]$. Soit, alors,

D^0 un nombre positif plus petit que le module de $\Delta(C_1, \ldots, C_n)$ et plus grand que Δ_0, choisissons h_0 de façon que

$$[h_0] \overline{\overline{<}} D^0 - \Delta_0,$$

on aura

$$|\Delta(A_1, \ldots, A_n| > D^0 - [h_0]$$

pour toutes les valeurs pour lesquelles

$$|h_1| < h_0, \qquad \ldots, \qquad |h_n| < h_0,$$

par suite

$$|\Delta(A_1, \ldots, A_n)| > \Delta_0 + (D^0 - \Delta_0 - [h_0]),$$

et comme

$$D^0 - \Delta_0 - [h_0] \overline{\overline{>}} 0,$$

on aura donc

$$|\Delta(A_1, \ldots, A_n)| > \Delta_0.$$

II.

Lemme II. — *Soient*

$$\left.\begin{aligned} f_0(x) &\equiv x^n + \sum_\nu C_\nu^0 x^{n-\nu} \\ f_1(x) &\equiv x^n + \sum_\nu C_\nu^1 x^{n-\nu} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

deux fonctions entières de x, de même degré; soit z un paramètre arbitraire; posons

$$f(x, z) \equiv (1 - z) f_0(x) + z f_1(x);$$

$f(x, z)$, considérée comme fonction de x, a un discriminant $D(z)$ qui est une fonction entière de z. On peut déterminer un nombre réel k et un nombre positif D^0 tels que, quel que soit le nombre réel $t > 1$, $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ soit différent de zéro et que, de plus, on ait

$$\left| D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)\right| > D^0,$$

si les discriminants de $f_0(x)$ et $f_1(x)$ ne sont pas nuls.

Remarquons d'abord que $D(z)$ n'est pas identiquement nul, car c'est une fonction entière de z différente de zéro pour $z = 0$ et $z = 1$.

On peut donc assurer que $D(z)$ ne s'annule que pour un nombre *fini* de valeurs de z. Posons

$$z = \frac{1+si}{t+si},$$

t et s étant réels. A chaque valeur de z, sauf pour o et 1, correspond un couple de valeurs de s et t et, par suite, il ne peut exister qu'un nombre *fini* de couples (s, t) pour lesquels

$$D\left(\frac{1+si}{t+si}\right) = 0.$$

Donc, si l'on donne à s une valeur k ne figurant dans aucun de ces couples, $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ sera une fonction de t *qui ne s'annulera pour aucune valeur de* t.

L'existence du nombre k est donc établie; il reste à montrer comment on pourra déterminer une valeur telle que k, *sans connaître les valeurs pour lesquelles* $D(z) = 0$. Pour cela, mettons $D(z)$ sous la forme

$$D(z) = \sum_{\mu} (\alpha_{\mu} + \beta_{\mu} i) z^{m-\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

m étant le degré de $D(z)$ et α_{μ}, β_{μ} des constantes réelles.

On a alors

$$D\left(\frac{1+si}{t+si}\right) = \frac{1}{(t+si)^m} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu} + \beta_{\mu} i)(1+si)^{m-\mu}(t+si)^{\mu};$$

on peut donc poser

$$D\left(\frac{1+si}{t+si}\right) = \frac{G(t,s) + i H(t,s)}{(t+si)^m}, \tag{1}$$

où $G(t, s)$ et $H(t, s)$ désignent des fonctions entières de t et de s à coefficients réels. On voit alors immédiatement que, si l'on donne à s une valeur déterminée k, $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ ne peut s'annuler que dans le cas où les deux fonctions $G(t, k)$ et $H(t, k)$ s'annulent *simultanément* pour une valeur *finie* de t [car $G(t, k) + i H(t, k)$ est une fonction entière de t dans laquelle le coefficient de t^m est $\alpha_m + \beta_m i = D(0)$, qui est différent de zéro]. On en conclut que, si l'on forme le résultant des deux équations

$$(2) \qquad G(t, s) = 0, \qquad H(t, s) = 0,$$

obtenu en éliminant t, qui est une fonction entière $R(s)$ à coefficients réels, *il suffira de prendre pour k un nombre réel tel que* $R(k)$ *soit différent de zéro,* ce qui sera possible pourvu que $R(s)$ ne soit pas identiquement nul.

Il est, d'ailleurs, facile de voir que $R(s)$ n'est pas identiquement nul. Ceci ne pourrait arriver, en effet, que si les coefficients de t^m dans $G(t, s)$ et $H(t, s)$ étaient *tous les deux* nuls ou si ces deux fonctions avaient un diviseur commun en t, quel que soit s. Or, le coefficient de t^m dans $G(t, s) + iH(t, s)$ est $\alpha_m + i\beta_m = D(0)$ qui est différent de zéro; donc, les coefficients de t^m dans G et H ne sont pas nuls tous les deux.

D'autre part, si $G(t, s)$ et $H(t, s)$ avaient un diviseur commun en t, quel que soit s, ce diviseur commun serait entier en s et t, et il ne pourrait arriver que deux cas : 1° Ce diviseur est indépendant de s; dans ce cas, il devrait diviser les coefficients de toutes les puissances de s dans G et H; en particulier, les coefficients de s^m qui sont deux *constantes* dont l'une au moins n'est pas nulle, car le coefficient de s^m dans $G(t, s) + iH(t, s)$ est $i^m D(1)$ qui est différent de zéro. 2° Ce diviseur dépend de s; ce serait alors un diviseur commun de $G(t, s)$ et $H(t, s)$ considérées comme fonctions de s. Or, $G(t, s)$ et $H(t, s)$ ne peuvent pas avoir un diviseur commun en s, quel que soit t, car le résultant $R_1(t)$ des équations (2), obtenu en éliminant s, n'est pas identiquement nul. On a, en effet, en faisant, dans la relation (1), $t = 1$,

$$G(1, s) + iH(1, s) \equiv D(1)[1 + si]^m,$$

ce qui montre que $G(1, s)$ et $H(1, s)$ ne peuvent avoir un diviseur commun, à coefficients réels, puisque $D(1) \neq 0$. Donc $R_1(1)$ est différent de zéro, $R_1(t)$ n'est pas identiquement nul, et il en est de même de $R(s)$.

Cela étant, k ayant été choisi de façon que $R(k) \neq 0$, formons, ce qui est toujours possible, deux fonctions entières de t et k, à coefficients réels, telles que l'on ait l'identité

$$G_2(t, k)\, G(t, k) + H_2(t, k)\, H(t, k) \equiv t^{2m-1} R(k)$$

et soient, par rapport à t, de degré au plus égal à $(m-1)$. Posons

$$t=\frac{1}{\tau},\qquad G(t,k)=\tau^{-m}\ \varphi(\tau,k),\qquad H(t,k)=\tau^{-m}\ \psi(\tau,k),$$
$$G_2(t,k)=\tau^{-m+1}\varphi_1(\tau,k),\qquad H_2(t,k)=\tau^{-m+1}\psi_1(\tau,k).$$

Si t reste supérieur à 1, τ restera compris entre 0 et 1. On aura, d'ailleurs,

$$\varphi_1(\tau,k)\,\varphi(\tau,k)+\psi_1(\tau,k)\,\psi(\tau,k)\equiv R(k),$$

et, comme on a évidemment

$$[\varphi_1^2(\tau,k)+\psi_1^2(\tau,k)]\,[\varphi^2(\tau,k)+\psi^2(\tau,k)]$$
$$\geqq[\varphi_1(\tau,k)\,\varphi(\tau,k)+\psi_1(\tau,k)\,\psi(\tau,k)]^2,$$

on en conclut que

$$\left|D\left[\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right]\right|^2>\frac{R^2(k)}{(1+k^2\tau^2)^m\,[\varphi_1^2(\tau,k)+\psi_1^2(\tau,k)]}.$$

Choisissons alors un nombre K tel que pour toutes les valeurs de τ, comprises entre 0 et 1, on ait

$$\varphi_1^2(\tau,k)+\psi_1^2(\tau,k)<K;$$

on aura, par suite, pour toutes les valeurs de τ,

$$\left|D\left[\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right]\right|^2>\frac{R^2(k)}{(1+k^2)K}.$$

Désignons alors par D^0 un nombre positif tel que

$$(D^0)^2=\frac{R^2(k)}{(1+k^2)K}$$

pour toutes les valeurs de τ comprises entre 0 et 1; on aura

$$\left|D\left[\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right]\right|>D^0,$$

c'est-à-dire que, pour toutes les valeurs de t plus grandes que 1, on aura

$$\left|D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)\right|>D^0.$$

III.

Théorème. — *Étant donnée la fonction entière*

$$f(x) \equiv x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *désignent* n *nombres, réels ou complexes, on peut trouver* n *nombres, réels ou complexes,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *tels que l'on ait l'identité*

$$f(x) \equiv \Pi_\nu (x - x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarquons, tout d'abord, qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $f(x)$ n'a aucun diviseur commun avec sa dérivée première, c'est-à-dire dans le cas où son discriminant est différent de zéro. Nous savons, en effet, que, dans le cas où le discriminant de $f(x)$ est nul, on peut, par de simples opérations algébriques, décomposer $f(x)$ en un produit de facteurs de même forme, mais pour chacun desquels le discriminant est différent de zéro. Si le théorème est vrai pour chacun des facteurs, il sera vrai pour leur produit $f(x)$.

Nous supposerons donc dans tout ce qui va suivre que le discriminant $\Delta(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ de $f(x)$ soit différent de zéro.

Désignons par

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

le coefficient de $x^{n-\nu}$ dans le développement de

$$\Pi_\nu (x - x_\nu) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Pour démontrer la proposition, il suffira de prouver que, étant données n quantités quelconques $C_1, C_2, \ldots, C_n$, il existe toujours un système de valeurs bien déterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant les n égalités

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu = C_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient $\overline{C_1}, \overline{C_2}, \ldots, \overline{C_n}$ n nombres positifs respectivement supérieurs aux modules de $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Déterminons deux nombres positifs h_0 et Δ_0 satisfaisant aux conditions du lemme I, c'est-à-dire en gardant les mêmes notations, tels que

$$(3) \qquad [h_0] \leqq D^0 - \Delta_0.$$

Admettons d'abord qu'on puisse trouver n quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$, telles que, si l'on pose

$$A_\nu = (a_1, a_2, \ldots, a_n)_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on ait

$$|C_\nu - A_\nu| < h_0,$$

et satisfaisant, en outre, à d'autres conditions restrictives que nous définirons plus tard. On aura alors

$$|A_\nu| < \overline{C_\nu} + h_0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et, par suite, pour toute valeur de x,

$$\left|\sum_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu}\right| < \sum_\nu \frac{\overline{C_\nu} + h_0}{|x|^\nu}.$$

Choisissons un nombre positif α tel que

$$(4) \qquad \sum_\nu \frac{\overline{C_\nu} + h_0}{\alpha^\nu} \leqq 1,$$

on aura alors, pour toutes les valeurs de x dont le module est plus grand ou égal à α,

$$\left|\sum_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu}\right| < 1, \qquad |x| \geqq \alpha.$$

Donc en posant

$$\varphi(x) = \Pi_\nu(x - a_\nu) = x^n + \sum_\nu A_\nu x^{n-\nu},$$

on en conclut que le module de $\varphi(x)$

$$|\varphi(x)| = \left| x^n \left\{ 1 + \sum_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu} \right\} \right|$$

sera différent de zéro pour toutes les valeurs de x dont le module est supérieur ou égal à α. Or, comme $\varphi(x)$ s'annule pour $x = a_\nu$, on en conclut que

$$|a_\nu| < \alpha \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et, par suite, que

$$|\varphi'(a_\nu)| < n\alpha^{n-1} + \sum_\nu (n - \nu)\left(\overline{C_\nu} + h_0\right)\alpha^{n-\nu-1}.$$

Posons encore

$$\beta = n\alpha^{n-1} + \sum_\nu (n-\nu)(\overline{C}_\nu + h_0)\alpha^{n-\nu-1},$$

on a, comme on sait,

$$\Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \Pi_\nu \varphi'(a_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc

$$\frac{1}{\varphi'(a_\nu)} = \frac{\Pi'_\mu \varphi'(a_\mu)}{\Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n)} \qquad \text{pour} \qquad \mu \neq \nu$$

et, par conséquent,

$$\left|\frac{1}{\varphi'(a_\nu)}\right| < \frac{\beta^{n-1}}{\Delta_0}.$$

Cela étant, posons

$$\psi(x) \equiv f(x) - \varphi(x) \equiv \sum_\nu (C_\nu - A_\nu)x^{n-\nu},$$

$$\xi_\nu = -\frac{f(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} = -\frac{\psi(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)};$$

et considérons les n nombres

$$a'_\nu = a_\nu + \xi_\nu = a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

formons la fonction

$$\varphi_1(x) \equiv \Pi_\nu(x - a'_\nu) \equiv x^n + \sum_\nu A'_\nu x^{n-\nu},$$

$$A'_\nu = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)_\nu,$$

et cherchons une limite supérieure des modules des différences

$$C_\nu - A'_\nu.$$

Pour cela, remarquons que

$$(5)\quad \varphi_1(x) \equiv \Pi_\nu(x - a_\nu - \xi_\nu) \equiv \varphi(x) - \sum_\nu \frac{\varphi(x)}{x - a_\nu}\xi_\nu - \sum_\mu [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu x^{n-\mu}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n), \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m),$$

$[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu$ désignant une fonction entière de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

de degré μ, et *n'ayant pas de termes de degré inférieur à* 2. De là on tire

$$f(x)-\varphi_1(x)\equiv\psi(x)-\sum_\nu \frac{\varphi(x)}{x-a_\nu}\,\frac{\psi(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}+\sum_\mu [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu x^{n-\mu}.$$

Or, d'après la formule d'interpolation de Lagrange,

$$\psi(x)-\sum_\nu \frac{\varphi(x)}{x-a_\nu}\,\frac{\psi(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}\equiv 0;$$

on a donc

$$f(x)-\varphi_1(x)\equiv\sum_\nu (C_\nu - A'_\nu)x^{n-\nu}\equiv\sum_\mu [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu x^{n-\mu}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n), \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, n);$$

on en conclut

$$C_1 - A'_1 = 0, \qquad C_\mu - A'_\mu = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu.$$

Posons, pour abréger,

$$\Delta = \Delta(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \Pi_\nu\, \varphi'(a_\nu);$$

de l'identité (5) on tire

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta\sum_\mu [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu x^{n-\mu} \\ \quad\equiv -\Delta\,\varphi_1(x)+\Delta\,\varphi(x)-\Delta\sum_\nu \dfrac{\varphi(x)}{x-a_\nu}\xi_\nu \\ \quad\equiv -\Pi_\nu[(x-a_\nu)\varphi'(a_\nu)+\psi(a_\nu)]+\Pi_\nu(x-a_\nu)\varphi'(a_\nu) \\ \qquad + (x-a_2)\ldots(x-a_n)\varphi'(a_2)\ldots\varphi'(a_n)\psi(a_1) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + (x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})\varphi'(a_1)\ldots\varphi'(a_{n-1})\psi(a_n), \end{cases}$$

qui nous prouve que les produits

$$\Delta[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu$$

sont des fonctions entières de $a_1, a_2, \ldots, a_n, \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$; et si nous posons

$$\Delta[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu = \{a_1, \ldots, a_n;\ \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}_\mu,$$

nous en conclurons que les fonctions

$$\{a_1, \ldots, a_n;\ \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}_\mu$$

sont des fonctions entières de $a_1, \ldots, a_n, \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$ qui sont de degré μ par rapport à $\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$, et *ne contiennent pas de termes de degré inférieur à* 2 par rapport à ces quantités, puisque les fonctions $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]_\mu$ sont de cette nature par rapport à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

On a d'ailleurs

$$(7) \qquad C_1 - A'_1 = 0, \qquad C_\mu - A'_\mu = \frac{1}{\Delta}\{a_1, \ldots, a_n; \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}_\mu$$
$$(\mu = 2, 3, \ldots, n).$$

Soit alors δ le plus grand des modules des quantités $C_1 - A_1, \ldots, C_n - A_n$, on aura

$$|\psi(a_\nu)| = \left|\sum_{\nu'}(C_{\nu'} - A_{\nu'})a_\nu^{n-\nu'}\right| < \delta \sum_{\nu'} \alpha^{n-\nu'};$$

car

$$|a_\nu| < \alpha.$$

Posons

$$\gamma = \sum_{\nu'} \alpha^{n-\nu'} \qquad (\nu' = 1, 2, \ldots, n);$$

on aura

$$|\psi(a_\nu)| < \delta\gamma.$$

Désignons, enfin, par

$$\{\{a_1, \ldots, a_n; \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}\}_\mu$$

la fonction de $a_1, \ldots, a_n, \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$ qu'on déduit de

$$\{a_1, \ldots, a_n; \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}_\mu,$$

en remplaçant chaque coefficient négatif par sa valeur absolue, on aura évidemment

$$|\{a_1, \ldots, a_n; \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}_\mu| < \{\{\alpha, \ldots, \alpha; \delta\gamma, \ldots, \delta\gamma\}\}_\mu.$$

Or, puisque la fonction $\{\{a_1, \ldots, a_n; \psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}\}_\mu$ n'a pas de terme de degré inférieur à 2 par rapport à $\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)$, on pourra mettre δ^2 en facteur dans $\{\{\alpha, \ldots, \alpha; \delta\gamma, \ldots, \delta\gamma\}\}_\mu$ et l'écrire sous la forme

$$\{\{\alpha, \ldots, \alpha; \delta\gamma, \ldots, \delta\gamma\}\}_\mu = \delta^2(\alpha, \gamma, \delta)_\mu.$$

$(\alpha, \gamma, \delta)_\mu$ étant une fonction entière de α, γ et δ à coefficients *numériques tous positifs*.

Des égalités (7) on conclut, alors,

$$C_1 - A'_1 = 0, \qquad |C_\mu - A'_\mu| < \frac{\delta^2(\alpha, \gamma, \delta)_\mu}{\Delta_0} \quad (\mu = 2, 3, \ldots n).$$

Ces limites supérieures trouvées, déterminons une quantité positive d_0, telle que l'on ait *à la fois*

$$(8) \qquad d_0 \leqq h_0, \qquad d_0(\alpha, \gamma, d_0)_\mu \leqq \Delta_0, \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, n),$$

et *supposons, en outre, que les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient telles que tous les modules des différences*

$$C_1 - A_1, \quad \ldots, \quad C_n - A_n$$

soient plus petits que d_0. Nous pourrons poser

$$\delta = \varepsilon d_0, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

et, dans ces conditions, on aura

$$\delta^2(\alpha, \gamma, \delta)_\mu = \varepsilon^2 d_0^2(\alpha, \gamma, \varepsilon d_0)_\mu < \varepsilon^2 d_0 \Delta_0.$$

Si nous désignons, alors, par $\varepsilon' d_0$ le plus grand des modules des différences

$$C_1 - A'_1, \quad \ldots, \quad C_n - A'_n,$$

on aura

$$\varepsilon' < \varepsilon^2.$$

La quantité $\varepsilon' d_0$ joue, par rapport aux nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, le même rôle que εd_0 par rapport aux quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nous pouvons donc énoncer les conclusions suivantes :

d_0 étant un nombre positif satisfaisant aux conditions (8), *s'il existe n quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant les conditions*

$$(9) \qquad |C_\nu - (a_1, a_2, \ldots, a_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on pourra, de proche en proche, déduire de ce système d'autres systèmes

$$a'_1, \quad \ldots, \quad a'_n; \quad a''_1, \quad \ldots, \quad a''_n; \quad \ldots,$$

tels que

$$\left.\begin{array}{l} a'_\nu = a_\nu - \dfrac{f(a_\nu)}{\Pi_\mu(a_\nu - a_\mu)} \\ a''_\nu = a'_\nu - \dfrac{f(a'_\nu)}{\Pi_\mu(a'_\nu - a'_\mu)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r}(\nu = 1, 2, \dots, n), \\ (\mu \neq \nu),\end{array}$$

et les quantités a_ν^λ ainsi définies ($\nu = 1, 2, \dots, n$; $\lambda = 0, 1, 2, \dots$) ont toutes des valeurs *finies*. Si l'on pose, pour chaque valeur de λ,

$$A_\nu^\lambda = (a_1^\lambda, a_2^\lambda, \dots, a_n^\lambda)_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

et si l'on désigne par $\varepsilon^{(\lambda)} d_0$ la plus grande des valeurs absolues des différences

$$C_1 - A_1^\lambda, \quad \dots, \quad C_n - A_n^\lambda,$$

on a

$$\varepsilon' < \varepsilon^2, \qquad \varepsilon'' < \varepsilon'^2 < \varepsilon^4,$$

en général,

$$\varepsilon^{(\lambda)} < \varepsilon^{2\lambda}.$$

Posons

$$\varphi_\lambda(x) \equiv \Pi_\nu(x - a_\nu^\lambda),$$
$$\psi_\lambda(x) \equiv f(x) - \varphi_\lambda(x) \equiv \Sigma_\nu(C_\nu - A_\nu^\lambda)x^{n-\nu},$$

on a, en appliquant les résultats précédents,

$$|f(a_\nu^\lambda)| = |\psi_\lambda(a_\nu^\lambda)| < \gamma\varepsilon^{(\lambda)} d_0 < \gamma\, d_0\, \varepsilon^{2\lambda},$$

car chacune des quantités a_ν^λ est, comme les quantités a_ν, plus petite que α en valeur absolue. D'ailleurs, si l'on appelle $\Delta^{(\lambda)}$ le discriminant de $\varphi_\lambda(x)$, en vertu du lemme I,

$$|\Delta^{(\lambda)}| > \Delta_0,$$

on aura aussi, comme précédemment,

$$|\varphi'_\lambda(a_\mu^\lambda)| < \beta \qquad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

et, par suite, aussi

$$\left|\frac{1}{\varphi'_\lambda(a_\nu^\lambda)}\right| < \frac{\beta^{n-1}}{\Delta_0};$$

donc

$$\left| - \frac{f(a_\nu^\lambda)}{\varphi'_\lambda(a_\nu^\lambda)}\right| < \frac{\gamma\beta^{n-1} d_0}{\Delta_0}\,\varepsilon^{2\lambda}.$$

Posons, enfin,

$$x_\nu = a_\nu - \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{f(a_\nu^\lambda)}{\varphi'_\lambda(a_\nu^\lambda)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des quantités bien définies, car ce sont des sommes de séries convergentes. Chaque terme de l'une de ces séries est plus petit que le terme correspondant de la série

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\lambda} \frac{\gamma\beta^{n-1} d_0}{\Delta_0} \varepsilon^{2\lambda},$$

qui est une progression géométrique décroissante, puisque

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Mais, si nous désignons par r un nombre entier quelconque, on a

$$a_\nu^r = a_\nu - \sum_{0}^{r-1}{}_{\lambda} \frac{f(a_\nu^\lambda)}{\varphi'_\lambda(a_\nu^\lambda)},$$

d'où

$$|x_\nu - a_\nu^r| < \frac{\gamma\beta^{n-1} d_0}{\Delta_0} \sum_{r}^{\infty}{}_{\lambda} \varepsilon^{2\lambda};$$

ce qui montre qu'on peut choisir r suffisamment grand pour que les différences $x_\nu - a_\nu^r$ soient plus petites qu'un nombre donné à l'avance. A_ν^r étant une fonction entière de $a_1^r, \ldots, a_n^r$, on pourra donc choisir r assez grand pour que les différences

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu - A_\nu^r$$

soient plus petites qu'un nombre donné à l'avance; comme, d'ailleurs, il en est de même pour les différences

$$C_1 - A_1^r, \quad \ldots, \quad C_n - A_n^r,$$

on en conclut, comme

$$|(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu - C_\nu| \leqq |(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu - A_\nu^r| + |A_\nu^r - C_\nu|,$$

que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_\nu = C_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que

$$f(x) \equiv \Pi_\nu (x - x_\nu).$$

Le théorème est donc démontré si l'on peut trouver n quantités a_1, a_2, …, a_n vérifiant les conditions (9); c'est ce qu'il nous reste à prouver.

Pour cela, gardons les mêmes notations que dans le lemme II, et désignons, pour abréger, par $f(x;\tau)$ la fonction $f\left[x, \frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right]$.

Posons

$$f(x;\tau) \equiv x^n + \sum_\nu C_\nu^\tau x^{n-\nu},$$

on aura

$$C_\nu^\tau = \frac{(1-\tau)C_\nu^0 + (1+ki)\tau C_\nu^1}{1+k\tau i},$$

et on pourra, évidemment, déterminer n nombres $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, …, $\overline{C}_n$ tels que, pour toutes les valeurs de τ comprises entre 0 et 1, on ait

$$\overline{C}_1 > |C_1^\tau|, \ldots, \overline{C}_n > |C_n^\tau|.$$

Par suite, toujours avec les notations précédentes, on aura

$$\left|\{h_1, \ldots, h_n, C_1^\tau, \ldots, C_n^\tau\}\right| < [h]$$

lorsque

$$|h_1| < h, \qquad \ldots, \qquad |h_n| < h.$$

De plus, D^0 étant le nombre déterminé dans le lemme II, si l'on choisit deux nombres Δ_0 et h_0 tels que

$$\Delta_0 + [h_0] \leqq D_0,$$

et, si l'on désigne toujours par α, β, γ, d_0 les mêmes quantités, on remarquera que ces quantités ne dépendent que de Δ_0, h_0, $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, …, $\overline{C}_n$, et non des coefficients C_1, C_2, …, C_n de $f(x)$. Il est donc évident que la quantité d_0, définie par les relations (8), a la même signification pour *toutes* les fonctions $f(x;\tau)$ que celle qu'elle avait précédemment pour $f(x)$, quel que soit τ compris entre 0 et 1. *Si l'on peut* *trouver n* quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ telles que

$$|C_\nu^\tau - (a_1, \ldots, a_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on pourra donc, comme précédemment, au moyen des formules où $f(x)$ est remplacé par $f(x;\tau)$, déduire du système $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un autre système $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ tel que les modules des différences

$$C_\nu^\tau - (\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)_\nu$$

soient tous plus petits qu'un nombre donné à l'avance, aussi petit qu'on le voudra.

Ceci posé, prenons n nombres *différents*, d'ailleurs quelconques, $a_1^0, \ldots, a_n^0$, et posons

$$f_0(x) = \Pi_\nu(x - a_\nu^0) = x^n + \sum_\nu C_\nu^0 x^{n-\nu},$$

le discriminant de $f_0(x)$ est différent de zéro.

D'autre part, prenons pour la fonction $f_1(x)$ du lemme II la fonction $f(x)$ elle-même

$$C_\nu^1 = C_\nu.$$

Soit g un nombre entier. Donnons à τ les valeurs

$$0, \quad \frac{1}{g}, \quad \frac{2}{g}, \quad \ldots, \quad \frac{g-1}{g}, \quad 1.$$

Nous allons montrer que, en prenant g suffisamment grand, on pourra calculer g systèmes de valeurs

$$a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \quad \ldots, \quad a_{1,n}; \quad a_{2,1}, \quad \ldots, \quad a_{2,n}; \quad \ldots; \quad a_{g,1}, \quad \ldots, \quad a_{g,n}$$

pour lesquelles les modules des différences

$$C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} - (a_{\lambda,1}, \ldots, a_{\lambda,n})_\nu \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, g \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

soient *tous* plus petits que d_0. On a, en effet,

$$C_\nu^{\frac{\lambda+1}{g}} - C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} = \frac{1+ki}{g\left[1+\dfrac{(\lambda+1)ki}{g}\right]\left(1+\dfrac{\lambda ki}{g}\right)}(C_\nu - C_\nu^0)$$

pour $\lambda = 0, 1, \ldots, g-1$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Choisissons alors g de façon que

$$|(1+ki)(C_\nu - C_\nu^0)| < gd_0,$$

on aura

$$\left| C_\nu^{\frac{\lambda+1}{g}} - C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} \right| < d_0.$$

On en conclut, comme

$$f(x;0) \equiv f_0(x) \equiv \Pi_\nu(x - a_\nu^0)$$

et

$$C_\nu^0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0)_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

que les conditions

$$\left| C_\nu^{\frac{1}{g}} - (a_{1,1}, \ldots, a_{1,n})_\nu \right| < d_0$$

sont remplies si l'on prend

$$a_{1,1} = a_1^0, \qquad \ldots, \qquad a_{1,n} = a_n^0.$$

D'une manière générale, si l'on a trouvé un système

$$a_{\lambda,1}, \quad a_{\lambda,2}, \quad \ldots, \quad a_{\lambda,n},$$

tel que

$$\left| C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} - (a_{\lambda,1}, \ldots, a_{\lambda,n})_\nu \right| < d_0,$$

en appliquant la marche précédente, où $f\left(x; \frac{\lambda}{g}\right)$ remplace $f(x)$ et $a_{\lambda,1}, \ldots, a_{\lambda,n}$ remplacent $a_1, \ldots, a_n$, on pourra, comme nous venons de l'expliquer, trouver un nouveau système

$$a_{\lambda+1,1}, \quad a_{\lambda+1,2}, \quad \ldots, \quad a_{\lambda+1,n},$$

tel que les modules des différences

$$C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots, a_{\lambda+1,n})_\nu$$

soient tous plus petits qu'un nombre positif donné à l'avance $\bar{\delta}$. On a, alors,

$$\begin{aligned} &\left| C_\nu^{\frac{\lambda+1}{g}} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots, a_{\lambda+1,n})_\nu \right| \\ &\quad = \left| C_\nu^{\frac{\lambda+1}{g}} - C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} + C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots, a_{\lambda+1,n})_\nu \right| < \left| C_\nu^{\frac{\lambda+1}{g}} - C_\nu^{\frac{\lambda}{g}} \right| + \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Si donc on prend $\overline{\overline{\delta}}$ suffisamment petit, on aura

$$\left| \overset{\lambda+1}{\overline{C_{\nu}^{g}}} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots, a_{\lambda+1,n})_{\nu} \right| < d_0.$$

Ayant déterminé $a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}$, on pourra donc déterminer $a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}$ et ainsi de suite; de proche en proche, on parviendra à un système $a_{g,1}, \ldots, a_{g,n}$, tel que si l'on prend

$$a_1 = a_{g,1}, \qquad a_2 = a_{g,2}, \qquad \ldots, \qquad a_n = a_{g,n},$$

les modules des différences

$$C_1 - (a_1, \ldots, a_n)_1, \quad \ldots, \quad C_n - (a_1, \ldots, a_n)_n$$

soient tous plus petits que d_0, puisque, pour $\tau = 1$,

$$f(x; 1) \equiv f(x).$$