ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LOUIS RAFFY

Sur les spirales harmoniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 145-196

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__145_0>

SUR

LES SPIRALES HARMONIQUES,

PAR M. L. RAFFY,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES SOLUTIONS.

1. L'objet de ce travail (1) est la *détermination de tous les éléments linéaires harmoniques qui conviennent à des surfaces spirales*.

Tel est, par exemple, le suivant

$$(m) \qquad ds^2 = (au^m - bv^m)(du^2 + dv^2),$$

où les lettres a, b, m désignent des constantes arbitraires. En effet, d'après une proposition due à M. Maurice Lévy, tout élément linéaire homogène, de degré autre que -2, appartient à une infinité de spirales.

Du type précédent on peut d'ailleurs déduire deux autres solutions du problème. En effet, si nous faisons

$$m = \frac{1}{n}, \qquad a = n\alpha^{\frac{1}{n}}, \qquad b = n\beta^{\frac{1}{n}},$$

(1) Troisième Partie de mes *Recherches sur les surfaces harmoniques*, qui ont obtenu de l'Académie des Sciences une mention honorable dans le concours pour le prix Bordin (1892). L'auteur, ne devant pas se faire connaître, ne pouvait renvoyer à ses travaux antérieurs. La citation en sera faite en note, entre crochets. La première Partie de ces *Recherches* paraît dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, la seconde a paru dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1894).

l'expression (m) peut s'écrire

$$ds^2 = \left[n\left(\sqrt[n]{\alpha u} - 1\right) - n\left(\sqrt[n]{\beta v} - 1\right)\right](du^2 + dv^2).$$

Quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres n, α, β, elle donne un élément linéaire de surface spirale. Faisant croître n indéfiniment, on arrive à la formule

$$(l) \qquad ds^2 = (\log \alpha u - \log \beta v)(du^2 + dv^2).$$

De même, dans l'expression (m) posons

$$a = m^2 \alpha^m, \qquad b = m^2 \beta^m, \qquad u = \frac{u'}{m} + \frac{1}{\alpha}, \qquad v = \frac{v'}{m} + \frac{1}{\beta};$$

il viendra

$$ds^2 = \left[\left(1 + \frac{\alpha u'}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{\beta v'}{m}\right)^m\right](du'^2 + dv'^2).$$

Faisant croître m indéfiniment et supprimant les accents, nous trouvons le nouvel élément linéaire

$$(e) \qquad ds^2 = (e^{\alpha u} - e^{\beta v})(du^2 + dv^2).$$

Mais il serait téméraire d'affirmer que *tous* les éléments linéaires harmoniques appartenant à des spirales rentrent dans le type (m), dont les expressions (l) et (e) ne sont que des dégénérescences. Ce serait admettre qu'ils ne peuvent prendre la forme harmonique que quand on les exprime au moyen de variables qui les rendent homogènes; or nous verrons qu'il n'en est rien.

2. Il y a donc lieu de rechercher ces éléments linéaires par un procédé propre à les donner tous. A cet effet, nous résoudrons complètement, pour le cas des spirales, l'équation indéterminée

$$2X(\omega''_{x^2} + \omega'^2_x) - 2Y(\omega''_{y^2} + \omega'^2_y) + 3X'\omega'_x - 3Y'\omega'_y + X'' - Y'' = 0,$$

qui exprime que l'élément linéaire $e^\omega dx\,dy$ acquiert la forme harmonique

$$[\varphi(x' + y') - f(x' - y')]\,dx'\,dy'$$

par le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

L'élément linéaire des spirales pouvant toujours être écrit

$$ds^2 = e^{2v}\,\mathrm{U}(u)\,(du^2 + dv^2) = e^{-i(x-y)}\,\psi(x+y)\,dx\,dy,$$

nous prendrons

$$\omega = -\,i(x-y) + \int \mathrm{T}(t)\,dt, \qquad t = x + y;$$

en sorte que notre équation de départ deviendra

$$(\mathrm{F}) \qquad \begin{cases} \mathrm{F} \equiv 2\,\mathrm{X}[\mathrm{T}' + (\mathrm{T} - i)^2] - 2\,\mathrm{Y}[\mathrm{T}' + (\mathrm{T} + i)^2] \\ \qquad + 3\,\mathrm{X}'(\mathrm{T} - i) - 3\,\mathrm{Y}'(\mathrm{T} + i) + \mathrm{X}'' - \mathrm{Y}'' = 0. \end{cases}$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre dans toute sa généralité. On ne peut espérer qu'une pareille équation, où figurent trois fonctions inconnues, l'une X dépendant de x seulement, l'autre Y de y, la troisième T dépendant de $x + y$, soit d'une solution facile et prompte. Mais, si l'analyse qu'elle exige est longue et délicate, elle fournit presque à chaque stade de la discussion des résultats nouveaux. Elle permet, en outre, de distinguer, ce qui est indispensable, les éléments linéaires simplement harmoniques de ceux qui le sont doublement. Un raisonnement direct montre qu'un élément linéaire de spirale ne peut être simplement harmonique que si X et Y se réduisent à des constantes ou à des exponentielles (*voir* la note p. 195). C'est pourquoi nous allons examiner à part ces deux hypothèses.

Solutions où X et Y sont des constantes.

3. Quand on suppose X et Y constants, l'équation (F) se réduit à

$$(\mathrm{X} - \mathrm{Y})(\mathrm{T}' + \mathrm{T}^2 - 1) - 2i(\mathrm{X} + \mathrm{Y})\mathrm{T} = 0.$$

Il n'y a pas lieu d'admettre $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$; on aurait $\mathrm{T} = 0$, ce qui ne donne que des surfaces développables. Soit donc $\mathrm{X} - \mathrm{Y} \neq 0$. Si nous faisons

$$\frac{\mathrm{X} + \mathrm{Y}}{\mathrm{X} - \mathrm{Y}} = i \cot 2\alpha,$$

l'équation précédente devient

$$\mathrm{T}' + \mathrm{T}^2 + 2\,\mathrm{T}\cot 2\alpha - 1 = 0.$$

Elle s'intègre par une quadrature et donne

$$T = -\cot 2\alpha + \frac{d}{dt}\log\left(e^{\frac{t-t_0}{\sin 2\alpha}} - e^{-\frac{t-t_0}{\sin 2\alpha}}\right).$$

De là on remonte facilement à l'élément linéaire

$$ds^2 = e^{i(x-y)}\, e^{\int T\,dt}\, dx\, dy = C\, e^{-i(x-y)}\, e^{-(t-t_0)\cot 2\alpha}\left(e^{\frac{t-t_0}{\sin 2\alpha}} - e^{-\frac{t-t_0}{\sin 2\alpha}}\right) dx\, dy,$$

où C et t_0 sont deux constantes arbitraires. La seconde étant inutile, nous écrirons

$$ds^2 = Ce^{-i(x-y)}\left[e^{(x+y)\tang\alpha} - e^{-(x+y)\cot\alpha}\right] dx\, dy.$$

Pour ramener cet élément linéaire à la forme harmonique, effectuons le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Comme ici X et Y sont deux constantes assujetties à la seule condition

$$\frac{X+Y}{X-Y} = i\cot 2\alpha,$$

nous aurons, ρ étant une indéterminée,

$$\frac{X}{\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha} = \frac{Y}{\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha} = \rho^2;$$

d'où résulte

$$x = \rho(\cos\alpha - i\sin\alpha)x', \qquad y = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)y'.$$

L'élément linéaire devient alors

$$ds^2 = C\left(e^{-i\rho\frac{x'-y'}{\cos\alpha}} - e^{-\rho\frac{x'+y'}{\sin\alpha}}\right) dx'\, dy' = -C(e^{au} - e^{bv})(du^2 + dv^2).$$

C'est la seconde forme dégénérée du type (m).

Solutions où X et Y sont des exponentielles.

4. L'équation fondamentale (F), quand on y met pour X et Y les exponentielles

$$X = A e^{2rx}, \qquad Y = A e^{-2ry},$$

prend la forme

$$\begin{aligned}&[T' + T^2 - 1 + (3r - 2i)T + r(2r - 3i)]e^{rt}\\ &\quad = [T' + T^2 - 1 - (3r - 2i)T + r(2r - 3i)]e^{-rt},\end{aligned}$$

t désignant toujours la somme $x + y$. C'est une équation de Riccati

$$T' + T^2 + (3r - 2i)\frac{e^{rt} + e^{-rt}}{e^{rt} - e^{-rt}}T + 2r^2 - 3ir - 1 = 0,$$

que nous avons à intégrer sans particulariser la constante r. Nous poserons $r = \sigma i$, ce qui donne à l'équation cette forme nouvelle, d'aspect réel,

$$T' + T^2 + (3\sigma - 2)T\cot\sigma t - (\sigma - 1)(2\sigma - 1) = 0.$$

Pour intégrer, faisons le changement de variable

$$z = \cot\frac{\sigma t}{2}, \qquad dt = -\frac{2}{\sigma}\frac{dz}{z^2 + 1};$$

l'équation devient

$$(\rho) \qquad 2T^2 + (3\sigma - 2)\frac{z^2 - 1}{z}T - 2(\sigma - 1)(2\sigma - 1) - \sigma(z^2 + 1)\frac{dT}{dz} = 0,$$

et l'on vérifie aisément qu'elle admet la solution particulière

$$T_1 = (1 - \sigma)z,$$

quelle que soit la valeur attribuée au paramètre σ. Posons donc

$$T = T_1 + \frac{1}{\zeta};$$

la nouvelle fonction inconnue ζ sera déterminée par l'équation linéaire

$$(\zeta) \qquad \sigma(z^2 + 1)\frac{d\zeta}{dz} + \frac{(2 - \sigma)z^2 + 2 - 3\sigma}{z}\zeta + 2 = 0.$$

Intégrons d'abord l'équation

$$\sigma\frac{d\zeta}{dz} + \frac{(2 - \sigma)z^2 + 2 - 3\sigma}{z(z^2 + 1)}\zeta = 0;$$

on trouve aisément, en désignant par M la constante arbitraire,

$$\zeta = \mathrm{M}\frac{z^{3-\frac{2}{\sigma}}}{z^2+1}.$$

Pour que cette valeur vérifie l'équation (ζ), il faut que M, considérée comme fonction de z, ait pour dérivée

$$\frac{d\mathrm{M}}{dz} = -\frac{2}{\sigma}z^{\frac{2}{\sigma}-3},$$

ce qui conduit à distinguer deux cas, suivant que σ est égal à 1 ou différent de 1.

Traitons d'abord le cas particulier $\sigma = 1$. En désignant par $2\log\gamma$ la constante d'intégration, nous aurons

$$\mathrm{M} = 2\log\gamma - 2\log z = 2\log\frac{\gamma}{z}, \qquad \zeta = \frac{2z}{z^2+1}\log\frac{\gamma}{z};$$

et, comme actuellement T_1 se réduit à zéro, l'intégrale générale de l'équation (ρ) sera

$$\mathrm{T} = \frac{(z^2+1)}{2z\log\frac{\gamma}{z}} = \frac{1}{\sin t\log\left(\gamma\,\mathrm{tang}\,\frac{t}{2}\right)}.$$

Il n'y a plus qu'à effectuer la quadrature

$$\int \mathrm{T}\,dt = -2\int \mathrm{T}\frac{dz}{z^2+1} = \int\frac{dz}{z\log\frac{z}{\gamma}} = \log\log\frac{z}{\gamma} + \text{const.},$$

pour arriver à l'élément linéaire

$$ds^2 = \mathrm{C}e^{-i(x-y)}\log\left(\gamma\,\mathrm{tang}\,\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy.$$

Soit maintenant $\sigma \neq 1$. Il est commode de poser $\frac{2}{\sigma} = n$ et l'on trouve immédiatement

$$\mathrm{M} = c - \frac{n}{n-2}z^{n-2}, \qquad \zeta = \frac{z^{3-n}}{z^2+1}\left(c - \frac{n}{n-2}z^{n-2}\right),$$

ce qui donne pour intégrale générale de l'équation (ρ)

$$\mathrm{T} = \frac{n-2}{n}z + \frac{(n-2)(z^2+1)z^{n-3}}{(n-2)c - nz^{n-2}}.$$

Exprimons T au moyen de t, en ayant égard à la relation $z = \cot\frac{t}{n}$; nous aurons

$$T = \frac{n-2}{n}\cot\frac{t}{n} - \frac{n-2}{n\sin^2\frac{t}{n}}\,\frac{\cot^{n-3}\frac{t}{n}}{\cot^{n-2}\frac{t}{n} - \frac{n-2}{n}c}.$$

Si l'on fait $(n-2)c = n\gamma$, il vient par une intégration immédiate

$$\int T\,dt = \log\sin^{n-2}\frac{t}{n} + \log\left(\cot^{n-2}\frac{t}{n} - \gamma\right) + \text{const.} = \log\left(\alpha\sin^{n-2}\frac{t}{n} - \beta\cos^{n-2}\frac{t}{n}\right).$$

Remplaçant enfin $n-2$ par m, nous arrivons à l'élément linéaire

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\left(\alpha\sin^m\frac{x+y}{m+2} - \beta\cos^m\frac{x+y}{m+2}\right)dx\,dy,$$

qui dépend de trois constantes arbitraires α, β, m.

5. Il nous reste à mettre sous forme harmonique les deux éléments linéaires que nous venons de trouver. A cet effet, nous poserons

$$x' = \int -\frac{2i}{m+2}\frac{dx}{\sqrt{e^{\frac{4ix}{m+2}}}} = e^{-\frac{2ix}{m+2}}, \qquad y' = \int \frac{2i}{m+2}\frac{dy}{\sqrt{e^{-\frac{4iy}{m+2}}}} = e^{\frac{2iy}{m+2}},$$

d'où l'on déduit facilement

$$e^{-i(x-y)}\,dx\,dy = \frac{(m+2)^2}{4}(x'y')^{\frac{m}{2}}\,dx'\,dy'$$

et aussi

$$\sin\frac{x+y}{m+2} = \frac{1}{2i}\frac{x'-y'}{\sqrt{x'y'}}, \qquad \cos\frac{x+y}{m+2} = \frac{1}{2}\frac{x'+y'}{\sqrt{x'y'}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'élément linéaire

$$ds^2 = \left(\alpha\sin^m\frac{x+y}{m+2} - \beta\cos^m\frac{x+y}{m+2}\right)e^{-i(x-y)}\,dx\,dy,$$

on trouve, en désignant par a et b deux nouvelles constantes arbitraires,

$$ds^2 = \left[a\left(\frac{x'+y'}{2}\right)^m - b\left(-i\frac{x'-y'}{2}\right)^m\right]dx'\,dy' = (au^m - bv^m)(du^2 + dv^2).$$

C'est l'élément linéaire du type général (m) signalé au début.

Les mêmes transformations conviennent à l'élément linéaire trouvé tout à l'heure

$$ds^2 = C e^{-i(x-y)} \log\left(\gamma \operatorname{tang}\frac{x+y}{2}\right) dx\, dy$$
$$= C\left[\log\left(\alpha \cos\frac{x+y}{2}\right) - \log\left(\beta \sin\frac{x+y}{2}\right)\right] e^{-i(x-y)}\, dx\, dy,$$

sous la seule condition de faire $m = 0$; on trouve ainsi

$$ds^2 = C\left[\log\frac{\alpha(x'+y')}{2} - \log\frac{\beta(x'-y')}{2i}\right] dx'\, dy' = C(\log \alpha u - \log \beta v)(du^2 + dv^2).$$

C'est la première forme dégénérée du type (m).

Résumons dans un Tableau les premiers résultats que nous venons d'obtenir :

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} &T = -\cot 2\alpha + \frac{d}{dt}\log\left(e^{\frac{t}{\sin 2\alpha}} - e^{-\frac{t}{\sin 2\alpha}}\right),\\ &X = \rho^2 e^{-2\alpha i}, \qquad Y = \rho^2 e^{2\alpha i};\\ &ds^2 = C e^{-i(x-y)}\left[e^{(x+y)\operatorname{tang}\alpha} - e^{-(x+y)\cot\alpha}\right] dx\, dy\\ &\quad = C'\left(e^{-\rho\frac{x'+y'}{\sin\alpha}} - e^{-i\rho\frac{x'-y'}{\cos\alpha}}\right) dx'\, dy'. \end{aligned}\right.$$

$$(l)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{T} = \sin t \log\left(\gamma \operatorname{tang}\frac{t}{2}\right),\\ &X = A e^{2ix}, \qquad Y = A e^{-2iy};\\ &ds^2 = C e^{-i(x-y)}\log\left(\gamma \operatorname{tang}\frac{x+y}{2}\right) dx\, dy\\ &\quad = C'[\log(x'+y') - \log(x'-y') + \gamma']\, dx'\, dy'. \end{aligned}\right.$$

$$(m)\quad \left\{\begin{aligned} &T = \frac{m}{m+2}\cot\frac{t}{m+2} + \frac{1}{\sin\frac{2t}{m+2}\left(\gamma' \operatorname{tang}^m\frac{t}{m+2} - \frac{m+2}{2m}\right)},\\ &X = A e^{\frac{4ix}{m+2}}, \qquad Y = A e^{-\frac{4iy}{m+2}};\\ &ds^2 = e^{-i(x-y)}\left(\alpha \sin^m\frac{x+y}{m+2} - \beta\cos^m\frac{x+y}{m+2}\right) dx\, dy\\ &\quad = [a'(x'+y')^m - b'(x'-y')^m]\, dx'\, dy'. \end{aligned}\right.$$

Élément linéaire des spirales applicables sur des surfaces de révolution.

6. En vue de simplifier une discussion à venir et de détacher un résultat intéressant par lui-même, nous allons déterminer les éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

Il est clair que, si l'on fait soit $a = 0$, soit $b = 0$ dans le type (m) signalé au début, on trouve un élément linéaire

$$ds^2 = C u^m (du^2 + dv^2)$$

qui répond à la question. Nous allons montrer que c'est le seul (¹).

Pour qu'un élément linéaire $e^\omega \, dx \, dy$ soit réductible à la forme

$$ds^2 = e^{-i(x-y)} \, e^{\int T(x+y) \, d(x+y)} \, dx \, dy$$

qui convient aux spirales, il faut et il suffit qu'après un changement de variables approprié

$$dx = \frac{dx'}{\xi(x')}, \qquad dy = \frac{dy'}{\eta(y')},$$

on ait identiquement

$$\omega + \log \xi + \log \eta = -i(x-y) + \int T(x+y) \, d(x+y).$$

Pour éliminer la fonction inconnue T, différentions par rapport à x et à y; nous aurons

$$\xi\left(\frac{\partial\omega}{\partial x'} + \frac{\xi'}{\xi}\right) = T - i, \qquad \eta\left(\frac{\partial\omega}{\partial y'} + \frac{\eta'}{\eta}\right) = T + i;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\xi' - \eta' + \xi \frac{\partial\omega}{\partial x'} - \eta \frac{\partial\omega}{\partial y'} = -2i.$$

Si l'élément linéaire $e^\omega \, dx' \, dy'$ convient à une surface de révolution,

---

(¹) [L. Raffy, *Sur la déformation des surfaces spirales* (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. XIX, p. 65; 1891)].

on peut faire

$$\omega = \varphi(x' + y'), \qquad \frac{\partial\omega}{\partial x'} = \frac{\partial\omega}{\partial y'} = \varphi'.$$

L'équation du problème devient alors

$$(\xi - \eta)\varphi' + \xi' + \eta' + 2i = 0. \tag{1}$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre prise par rapport à x' et à y'; nous trouvons

$$(\xi - \eta)\varphi''' + (\xi' - \eta')\varphi'' = 0. \tag{2}$$

Or la dérivée φ'' doit être supposée différente de zéro si l'on exclut les surfaces développables. On peut alors tirer $\xi' - \eta'$ de l'équation (2) et porter sa valeur dans l'équation (1), ce qui donne

$$(\xi - \eta)\left(\varphi' - \frac{\varphi'''}{\varphi''}\right) + 2i = 0.$$

En conséquence, la différence $\xi - \eta$ ne dépend que de $x' + y'$. Il suit de là que les dérivées ξ' et η' sont deux constantes égales et de signes contraires

$$\xi' = -\eta' = ni.$$

Intégrant et négligeant les constantes additives, nous avons

$$\xi = nix', \qquad \eta = -niy'.$$

L'équation (1) devient alors

$$\varphi' = -\frac{2(n+1)}{n(x'+y')} = \frac{m}{x'+y'}.$$

On en déduit immédiatement $\omega = m\log(x'+y')$, d'où l'élément linéaire cherché

$$ds^2 = C(x'+y')^m\,dx'\,dy'.$$

Par le changement de variables

$$dx = \frac{dx'}{nix'} = \frac{-2\,dx'}{(m+2)ix'}, \qquad dy = \frac{-dy'}{niy'} = \frac{2\,dy'}{(m+2)iy'},$$

il acquiert la forme propre aux spirales

$$ds^2 = C'e^{-i(x-y)}\cos^m\frac{x+y}{m+2}\,dx\,dy.$$

De là résulte pour la fonction T cette expression

$$T = -\frac{m}{m+2}\operatorname{tang}\frac{t}{m+2}.$$

Remarquons enfin que l'élément linéaire précédent n'est *doublement harmonique* que quand on suppose $m = 1$. Car les deux formules que nous avons données dans la seconde Partie de ces *Recherches* [1]

$$\lambda = P(e^{ht} + e^{-ht})^{-2} + Q(e^{ht} - e^{-ht})^{-2}, \qquad \lambda = P_1 e^{2ht} + Q_1 e^{ht},$$

pour représenter l'élément linéaire $\lambda\, dx\, dy$ des surfaces de révolution doublement harmoniques, ne conduisent à $\lambda = Ct^m$ que quand $m = 1$ ou $m = -2$, hypothèse actuellement exclue parce que les surfaces correspondantes ont leur courbure totale constante et qu'il ne peut en être ainsi des spirales sans qu'elles se réduisent à des développables. (*Voir* le paragraphe suivant.)

CHAPITRE II.

RECHERCHE GÉNÉRALE DES SPIRALES HARMONIQUES.

1. Nous nous proposons maintenant de trouver toutes les solutions de l'équation fondamentale

$$\text{(I)}\quad F = 2X(\omega''_{x^2} + \omega'^2_x) - 2Y(\omega''_{y^2} + \omega'^2_y) + 3X'\omega'_x - 3Y'\omega'_y + X'' - Y'' = 0,$$

en attribuant à la fonction ω la forme qui convient aux spirales

$$\omega = -i(x-y) + \int T\, dt \qquad (t = x + y).$$

A cette équation nous adjoindrons l'équation dérivée $F''_{xy} = 0$, savoir

$$\text{(II)}\quad \left\{ \begin{aligned} & 2X(\omega''_{x^2} + \omega'^2_x)''_{xy} - 2Y(\omega''_{y^2} + \omega'^2_y)''_{xy} + X[5(\omega''_{xy})'_x + 4\omega'_x\omega''_{xy}] \\ & \qquad - Y[5(\omega''_{xy})'_y + 4\omega'_y\omega''_{xy}] + 3(X'' - Y'')\omega''_{xy} = 0, \end{aligned} \right.$$

---

(1) [L. RAFFY, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVIII; 1889, p. 493, et aussi *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. $XIII_2$; 1889, p. 161)].

qui ne se réduit à une identité que dans le cas des surfaces développables ($\omega''_{xy} = 0$).

En éliminant $X'' - Y''$ entre les équations (I) et (II), on obtient une relation que nous pouvons écrire ainsi

$$\text{(III)} \quad \tfrac{2}{5}X(\theta'^2_x + \theta''_{x^2} + 4\omega'_x\theta'_x) - \tfrac{2}{5}Y(\theta'^2_y + \theta''_{y^2} + 4\omega'_y\theta'_y) + X'\theta'_x - Y'\theta'_y = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -2\omega''_{xy}e^{-\omega} = -2e^{\theta},$$

ce qui conduit pour les spirales à cette expression de θ

$$\theta = i(x-y) + \log T' - \int T\,dt.$$

L'équation (III) ne se réduit visiblement à une identité que quand $\theta = \text{const.}$, c'est-à-dire pour les surfaces à courbure totale constante. Or, d'après la formule

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -2\omega''_{xy}e^{-\omega} = -2T'e^{-\int T\,dt}e^{i(x-y)},$$

la courbure totale d'une spirale, étant le produit d'une fonction de $x+y$ par l'exponentielle $e^{i(x-y)}$, ne peut être constante que si elle se réduit à zéro. Ainsi se trouve justifiée une assertion émise à la fin du paragraphe précédent. Laissant de côté les développables, nous pourrons désormais considérer l'équation (III) comme n'étant pas une identité.

Si on la différentie par rapport à x et à y, on obtient deux relations qui font connaître, l'une X'', l'autre Y'', et, portant ces valeurs dans l'équation (I), on arrive à un résultat qu'on peut écrire

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} & X\left[\frac{A'_x}{\theta'_x} + \frac{A'_y}{\theta'_y} - 2(\omega''_{x^2} + \omega'^2_x)\right] - Y\left[\frac{B'_x}{\theta'_x} + \frac{B'_y}{\theta'_y} - 2(\omega''_{y^2} + \omega'^2_y)\right] \\ & \quad + X'\left(\frac{A + \theta''_{x^2}}{\theta'_x} + \frac{\theta''_{xy}}{\theta'_y} - 3\omega'_x\right) - Y'\left(\frac{B + \theta''_{y^2}}{\theta'_y} + \frac{\theta''_{xy}}{\theta'_x} - 3\omega'_y\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$A = \tfrac{2}{5}(\theta''_{x^2} + \theta'^2_x + 4\omega'_x\theta'_x), \qquad B = \tfrac{2}{5}(\theta''_{y^2} + \theta'^2_y + 4\omega'_y\theta'_y).$$

J'ai démontré (¹) que le déterminant des inconnues X' et Y' dans le système formé par les équations (III) et (IV) ne se réduit à zéro que pour les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Comme nous venons de trouver l'élément linéaire de toutes les spirales de cette espèce, nous pouvons désormais supposer ce déterminant différent de zéro et tirer du système considéré les expressions de X' et Y', qui seront des fonctions linéaires et homogènes de X et de Y.

Les deux équations (III) et (IV) et, par suite, les formules de résolution seraient extrêmement longues à écrire, malgré la forme relativement simple de ω dans le cas présent, et leurs coefficients dépendraient de la fonction inconnue T et de ses dérivées. Mais nous allons pouvoir déterminer *a priori* ces coefficients. Remarquons, en effet, que les coefficients de X, Y, X', Y', X'', Y'' dans l'équation (I) ne dépendent que de la seule variable $t = x + y$. En conséquence, les coefficients de X, Y, X', Y' dans les équations (III) et (IV), déduites de la première par de simples différentiations, ne dépendent que de cette même variable. Nous avons donc à résoudre ces deux équations

$$X' = T_1 X + T_2 Y, \qquad Y' = T_3 X + T_4 Y,$$

où figurent quatre fonctions inconnues T_i de la variable $t = x + y$, outre les deux fonctions X et Y, qui ne dépendent, l'une que de x, l'autre que de y.

Résolution des deux équations fonctionnelles.

2. Soit à résoudre les deux équations différentielles indéterminées

$$X' = T_1 X + T_2 Y, \qquad Y' = T_3 X + T_4 Y. \tag{1}$$

Différentions la première par rapport à y, la seconde par rapport à x; il vient

$$T'_1 X + T'_2 Y + T_2 Y' = 0, \qquad T'_3 X + T'_4 Y + T_3 X' = 0,$$

(¹) [L. RAFFY, *Sur les spirales harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII; 1891, p. 518). *Sur une classe de surfaces harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII; 1891, p. 424)].

ou, en remplaçant X′ et Y′ par leurs expressions données,

$$(2)\qquad \begin{cases} (T_1' + T_2T_3)X + (T_2' + T_2T_4)Y = 0, \\ (T_3' + T_1T_3)X + (T_4' + T_2T_3)Y = 0. \end{cases}$$

Si ces deux relations ne sont pas des identités, on en tirera

$$\frac{Y}{X} = f(x+y),$$

ce qui entraîne, comme on sait,

$$X = Ae^{rx}, \qquad Y = Be^{-ry},$$

A, B, r désignant trois constantes dont la dernière peut être nulle. Les équations de départ deviennent alors

$$Ar = AT_1 + BT_2e^{-r(x+y)}, \qquad -Br = AT_3e^{r(x+y)} + BT_4,$$

et l'on peut choisir arbitrairement l'une des fonctions qui figurent dans chacune d'elles.

Nous n'avons pas à revenir sur la solution

$$X = Ae^{rx}, \qquad Y = Be^{-ry},$$

qui a été déjà discutée (Chapitre I, n[os] 3, 4 et 5).

Supposons maintenant que les relations (2) soient des identités; on aura

$$(3)\qquad T_1' + T_2T_3 = 0, \qquad T_2' + T_2T_4 = 0, \qquad T_3' + T_1T_3 = 0, \qquad T_4' + T_2T_3 = 0.$$

Les deux relations extrêmes donnent

$$T_4' = T_1'.$$

Soient donc, en introduisant une fonction auxiliaire τ',

$$(4)\qquad T_1 = -\tau' + c, \qquad T_4 = -\tau' - c, \qquad c = \text{const.}$$

Les équations (3) donnent

$$T_2' - (\tau' + c)T_2 = 0, \qquad T_3' - (\tau' - c)T_3 = 0.$$

On en tire, en intégrant,

$$(5)\qquad T_2 = b_2e^{\tau+ct}, \qquad T_3 = b_3e^{\tau-ct}.$$

Si l'une des fonctions T_2 et T_3 était nulle, il suffirait, dans ce qui va suivre, de faire $b_2 = 0$ ou $b_3 = 0$; si les deux fonctions étaient nulles, on supposerait nulles les deux constantes d'intégration b_2 et b_3.

Substituons les expressions (4) et (5) dans les équations (1): il vient

$$(1') \qquad X' + (\tau' - c)X = b_2 Y e^{\tau + ct}, \qquad Y' + (\tau' + c)Y = b_3 X e^{\tau - ct}.$$

Appliquons à ces formules la différentiation

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y},$$

pour laquelle t doit être considéré comme constant; nous aurons

$$(6) \qquad X'' + (\tau' - c)X' = -b_2 Y' e^{\tau + ct}, \qquad Y'' + (\tau' + c)Y' = -b_3 X' e^{\tau - ct}.$$

Des quatre équations (1') et (6) on déduit

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X'Y' + YX'' + (\tau' - c)(XY' + YX') = 0, \\ X'Y' + XY'' + (\tau' + c)(XY' + YX') = 0, \end{array} \right.$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$XY'' + 2X'Y' + YX'' + 2\tau'(XY' + YX') = 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(XY' + YX') + 2\tau'(XY' + YX') = 0;$$

de sorte que, quand $XY' + YX'$ ne sera pas nul, on aura

$$(8) \qquad \tau' = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\log(XY' + YX'),$$

formule qui fera connaître τ' et, par suite, les fonctions T_1, T_2, T_3, T_4, dès que X et Y seront connus.

D'autre part, en retranchant membre à membre les équations (7), on obtient

$$XY'' - YX'' + 2c(XY' + YX') = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{X'' - 2cX'}{X} = \frac{Y'' + 2cY'}{Y}.$$

Les deux membres, ayant même valeur, sont nécessairement constants. Soit $-\gamma$ leur valeur commune. Nous avons, pour déterminer X et Y, ces deux équations

$$X'' - 2cX' + \gamma X = 0, \qquad Y'' + 2cY' + \gamma Y = 0; \tag{9}$$

d'où deux cas à distinguer, suivant que γ est égal à c^2 ou différent de c^2.

3. *Premier cas :* $\gamma = c^2$. — L'intégration des équations (9) donne

$$X = (Ax + \alpha)e^{cx}, \qquad Y = (By + \beta)e^{-cy}, \tag{10}$$

avec les dégénérescences possibles provenant de l'évanouissement de l'une ou de plusieurs des constantes arbitraires A, B, α, β, c.

Portant ces valeurs de X et Y dans la formule (8), on trouve

$$\tau' = -\frac{AB}{ABt + A\beta + B\alpha},$$

d'où, en désignant par μ une constante d'intégration,

$$e^{\tau} = \frac{\mu}{ABt + A\beta + B\alpha}.$$

Les formules (4) et (5) donnent alors

$$T_1 = \frac{AB}{ABt + A\beta + B\alpha} + c, \qquad T_4 = \frac{AB}{ABt + A\beta + B\alpha} - c, \tag{11}$$

$$T_2 = \frac{b_2 \mu e^{ct}}{ABt + A\beta + B\alpha}, \qquad T_3 = \frac{b_3 \mu e^{-ct}}{ABt + A\beta + B\alpha}. \tag{12}$$

Il n'y a plus qu'à substituer les expressions (10), (11) et (12) dans les équations (1), qui sont vérifiées identiquement, pourvu qu'on prenne

$$b_2 \mu = A^2, \qquad b_3 \mu = B^2.$$

Nous avons ainsi, pour les équations proposées, un système de solutions correspondant au cas où les équations caractéristiques des équations (9) ont une racine double, savoir

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{aligned}
&X = (Ax+\alpha)e^{cx}, && Y = (By+\beta)e^{-cy},\\
&T_1 = \frac{AB}{ABt+A\beta+B\alpha}+c, && T_3 = \frac{B^2e^{-ct}}{ABt+A\beta+B\alpha},\\
&T_2 = \frac{A^2e^{ct}}{ABt+A\beta+B\alpha}, && T_4 = \frac{AB}{ABt+A\beta+B\alpha}-c.
\end{aligned}\right.$$

4. *Second cas :* $\gamma - c^2 \neq 0$. — Pour intégrer les équations (9), nous poserons

$$c = r+h, \qquad \gamma = 4rh, \qquad (r-h\neq 0),$$

de sorte que les racines des équations caractéristiques seront $2r$ et $2h$ pour X, $-2r$ et $-2h$ pour Y. Nous aurons alors

$$\text{(13)}\qquad X = le^{2rx}+Ae^{2hx}, \qquad Y = me^{-2ry}+Be^{-2hy},$$

avec les dégénérescences possibles provenant de l'évanouissement de l'une ou de plusieurs des constantes A, B, l, m, r, h. Nous excluons toutefois les hypothèses $l=m=0$ ou $A=B=0$, qui ramèneraient à une solution déjà étudiée, ainsi que les hypothèses $A=l=0$ ou $B=m=0$, qui donneraient pour X ou Y la valeur inacceptable zéro.

Des intégrales (13) on déduit aisément

$$\begin{aligned}
XY'+YX' &= 2(r-h)(Ble^{2rx-2hy}-Ame^{2hx-2ry})\\
&= 2(r-h)e^{(r+h)(x-y)}(Ble^{(r-h)(x+y)}-Ame^{-(r-h)(x+y)}),
\end{aligned}$$

d'où, en vertu de la formule (8),

$$\tau' = -(r-h)\frac{Ble^{(r-h)t}+Ame^{-(r-h)t}}{Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t}}.$$

L'intégration introduit une nouvelle constante arbitraire μ et donne

$$e^{\tau} = \frac{\mu}{Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t}}.$$

Les formules (4) et (5) deviennent alors, c étant remplacé par $r+h$,

$$\text{(14)}\quad T_1 = 2\frac{Blre^{(r-h)t}-Amhe^{-(r-h)t}}{Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t}}, \qquad -T_4 = 2\frac{Blhe^{(r-h)t}-Amre^{-(r-h)t}}{Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t}},$$

$$\text{(15)}\quad T_2 = \frac{b_2\mu e^{(r+h)t}}{Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t}}, \qquad T_3 = \frac{b_3\mu e^{-(r+h)t}}{Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t}}.$$

Substituons les expressions (13), (14) et (15) dans les équations (1); pour qu'elles soient vérifiées identiquement, il faut et il suffit qu'on prenne

$$b_2\mu = -2Al(r-h), \qquad b_3\mu = -2Bm(r-h).$$

Nous avons, en conséquence, ce nouveau système de solutions des équations (1)

$$\text{(II)}\left\{\begin{array}{ll} X = le^{2rx} + Ae^{2hx}, & Y = me^{-2ry} + Be^{-2hy}, \\ T_1 = 2\dfrac{Blre^{(r-h)t} - Amhe^{-(r-h)t}}{Ble^{(r-h)t} - Ame^{-(r-h)t}}, & T_3 = -2\dfrac{Bm(r-h)e^{-(r+h)t}}{Ble^{(r-h)t} - Ame^{-(r-h)t}}, \\ T_2 = -2\dfrac{Al(r-h)e^{(r+h)t}}{Ble^{(r-h)t} - Ame^{-(r-h)t}}, & -T_4 = 2\dfrac{Blhe^{(r-h)t} - Amre^{-(r-h)t}}{Ble^{(r-h)t} - Ame^{-(r-h)t}}, \end{array}\right.$$

Il nous reste à rechercher si les solutions (I) et (II) conviennent ou ne conviennent pas à notre problème.

5. Nous allons substituer ces solutions dans l'équation de départ

$$(1)\quad 2(\mathfrak{I} - 2iT)X - 2(\mathfrak{I} + 2iT)Y + 3(T-i)X' - 3(T+i)Y' + X'' - Y'' = 0,$$

où nous faisons, pour abréger,

$$\mathfrak{I} = T' + T^2 - 1.$$

Qu'il s'agisse de la solution (I) ou de la solution (II), nous pouvons toujours écrire

$$X'' = 2(r+h)X' - 4rhX, \qquad Y'' = -2(r+h)Y' - 4rhY,$$

sauf à faire ensuite $2r = 2h = c$, s'il s'agit de la solution (I). Ces valeurs, portées dans l'équation (1), la transforment en cette autre

$$\begin{aligned}(2\mathfrak{I} - 4rh - 4iT)X - (2\mathfrak{I} - 4rh + 4iT)Y \\ + [3T + (2r+2h-3i)]X' - [3T - (2r+2h-3i)]Y' = 0.\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant X' et Y' par leurs expressions trouvées

$$X' = T_1X + T_2Y, \qquad Y' = T_3X + T_4Y;$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned}&\{2\mathfrak{I} - 4rh - 4iT + [3T + (2r+2h-3i)]T_1 - [3T - (2r+2h-3i)]T_3\}X \\ =&\{2\mathfrak{I} - 4rh + 4iT - [3T + (2r+2h-3i)]T_2 + [3T - (2r+2h-3i)]T_4\}Y.\end{aligned}$$

On voit que, si le coefficient de X et celui de Y n'étaient pas nuls tous les deux, le rapport $Y : X$ serait une fonction de $x + y$, ce qui exigerait que l'on eût

$$X = \alpha e^{nx}, \qquad Y = \beta e^{-ny},$$

α, β, n étant trois constantes dont la dernière seule pourrait être nulle. Mais ces solutions ont déjà été discutées. Donc nous devons égaler à zéro le coefficient de X et celui de Y; d'où les deux équations

$$2\mathfrak{J} - 4rh = [4i + 3(T_3 - T_1)]T - (2r + 2h - 3i)(T_3 + T_1),$$
$$-(2\mathfrak{J} - 4rh) = [4i + 3(T_4 - T_2)]T - (2r + 2h - 3i)(T_4 + T_2).$$

En les combinant par addition et soustraction, on les remplace par les deux suivantes

$$(\mathrm{T}) \quad [8i - 3(T_1 + T_2 - T_3 - T_4)]T = (2r + 2h - 3i)(T_1 + T_2 + T_3 + T_4),$$

$$(\mathfrak{J}) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2(2\mathfrak{J} - 4rh) \\ & \quad = 4(T' + T^2 - 2rh - 1) \\ & \quad = -3(T_1 - T_2 - T_3 + T_4)T - (2r + 2h - 3i)(T_1 - T_2 + T_3 - T_4). \end{aligned} \right.$$

Telles sont les deux équations dans lesquelles nous allons maintenant substituer les deux systèmes de solutions à essayer.

Discussion du système (I).

6. Dans les équations (T) et ($\mathfrak{J}$) faisons

$$T_1 = \frac{AB}{\Delta} + 2r, \qquad T_2 = \frac{A^2 e^{2rt}}{\Delta}, \qquad T_3 = \frac{B^2 e^{-2rt}}{\Delta}, \qquad T_4 = \frac{AB}{\Delta} - 2r,$$
$$\Delta = ABt + A\beta + B\alpha,$$

et rappelons-nous les valeurs correspondantes de X et Y,

$$X = (Ax + \alpha)e^{2rx}, \qquad Y = (By + \beta)e^{-2ry}.$$

Comme A et B ne sont pas nuls tous les deux (cas déjà étudié), le dénominateur Δ est différent de zéro. La substitution indiquée conduit aux deux relations

$$(\mathrm{T}_1)\quad [4(2i-3r)\Delta-3(\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt})(\mathrm{A}e^{rt}-\mathrm{B}e^{-rt})]\mathrm{T}=(4r-3i)(\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt})^2,$$

$$(\mathfrak{T}_1)\quad \left\{\begin{aligned}&4\Delta(\mathrm{T}'+\mathrm{T}^2-2r^2-1)\\&\quad=3(\mathrm{A}e^{rt}-\mathrm{B}e^{-rt})^2\mathrm{T}-(4r-3i)[4r\Delta-(\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt})(\mathrm{A}e^{rt}-\mathrm{B}e^{-rt})],\end{aligned}\right.$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}&4(2i-3r)\Delta\mathrm{T}\\&\quad=(\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt})[3(\mathrm{A}e^{rt}-\mathrm{B}e^{-rt})\mathrm{T}+(4r-3i)(\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt})],\\&4\Delta[\mathrm{T}'+\mathrm{T}^2+(r-i)(2r-i)]\\&\quad=(\mathrm{A}e^{rt}-\mathrm{B}e^{-rt})[3(\mathrm{A}e^{rt}-\mathrm{B}e^{-rt})\mathrm{T}+(4r-3i)(\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt})].\end{aligned}$$

On en déduit, en éliminant la grande parenthèse qui figure dans les seconds membres,

$$(\mathrm{R})\qquad \mathrm{T}'+\mathrm{T}^2+(3r-2i)\frac{\mathrm{A}e^{rt}-\mathrm{B}e^{-rt}}{\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt}}\mathrm{T}+(r-i)(2r-i)=0.$$

C'est une équation de Riccati qui doit être vérifiée par la fonction

$$(16)\qquad \mathrm{T}=\frac{(4r-3i)(\mathrm{A}e^{rt}+\mathrm{B}e^{-rt})^2}{4(2i-3r)\Delta-3(\mathrm{A}^2e^{2rt}-\mathrm{B}^2e^{-2rt})},$$

tirée de l'équation (T_1).

Je dis d'abord qu'on ne peut pas supposer $r=0$. En effet, dans cette hypothèse, l'équation (R) devient

$$\mathrm{T}'+\mathrm{T}^2-2gi\mathrm{T}-1=0,\qquad g=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}};$$

elle donne pour T une fonction périodique de t,

$$\mathrm{T}=ig-\sqrt{g^2-1}\,\mathrm{tang}\sqrt{g^2-1}\,(t-t_0),$$

tandis que l'expression de T devrait être rationnelle

$$\mathrm{T}=\frac{-3i(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2}{8i\Delta-3(\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2)},\qquad \Delta=\mathrm{AB}t+\mathrm{A}\beta+\mathrm{B}\alpha.$$

La période ne deviendrait infinie que dans l'hypothèse $g^2=1$, qui revient à $AB = 0$; mais alors T se réduirait à une constante, solution exclue comme conduisant à des surfaces développables.

Supposant donc désormais r différent de zéro, nous pouvons, si le produit AB n'est pas nul, remplacer t par $t + t_0$, la constante t_0 étant choisie telle que B devienne égal à $-A$. De la sorte notre équation de Riccati sera

$$T' + T^2 + (3r - 2i)\frac{e^{rt} + e^{-rt}}{e^{rt} - e^{-rt}}T + (r - i)(2r - i) = 0.$$

Or, si nous faisons $r = \sigma i$, nous arriverons à l'équation

$$T' + T^2 + (3\sigma - 2)T\cot\sigma t - (\sigma - 1)(2\sigma - 1) = 0,$$

dont l'intégrale générale a été trouvée précédemment (Chap. I, n° 4).

Quand σ est égal à l'unité, on a

$$T = \frac{1}{\sin t \log\left(\gamma \operatorname{tang}\frac{t}{2}\right)},$$

fonction multiforme et périodique, tandis que T est uniforme et non périodique, en vertu de la formule (16).

Dans l'hypothèse $\sigma - 1 \neq 0$, nous avons trouvé

$$T = (1 - \sigma)\cot\frac{\sigma t}{2} + \frac{1}{\sin\frac{\sigma t}{2}\cos\frac{\sigma t}{2}\left[c\left(\cot\frac{\sigma t}{2}\right)^{-2\frac{1-\sigma}{\sigma}} - \frac{1}{1-\sigma}\right]},$$

fonction périodique, tandis que T ne l'est pas, puisque AB est différent de zéro.

Soit maintenant $AB = 0$. Nous supposerons $B = 0$. L'équation (R) devient

$$T' + T^2 - (2 - 3\sigma)iT - (\sigma - 1)(2\sigma - 1) = 0.$$

On en déduit, par intégration,

$$2T = (2 - 3\sigma)i - \sigma \operatorname{tang}\frac{\sigma(t - t_0)}{2},$$

ce qui est une fonction périodique, de période $2\pi : \sigma$, tandis que la formule (16) donne

$$T = \frac{(4\sigma - 3)\,i\mathrm{A}^2 e^{2\sigma i t}}{4(2-3\sigma)\,i\mathrm{A}\beta - 3\mathrm{A}^2 e^{2\sigma i t}},$$

fonction dont la période est $\pi : \sigma$. Il y a contradiction.

Donc, en résumé, la solution (I) ne convient dans aucun cas, en dehors des deux hypothèses déjà étudiées où $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$, avec $r = 0$ ou $r \neq 0$.

Discussion du système (II).

7. Reprenons les équations (T) et (ϑ)

$$(\mathrm{T}) \quad [8i - 3(\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_4)]\mathrm{T} = (2r + 2h - 3i)(\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3 + \mathrm{T}_4),$$

$$(\vartheta) \left\{ \begin{aligned} & 4(\mathrm{T}' + \mathrm{T}^2 - 2rh - 1) \\ & \quad = -3(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_3 + \mathrm{T}_4)\mathrm{T} - (2r + 2h - 3i)(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_4), \end{aligned} \right.$$

pour y substituer les expressions qui composent le système (II), savoir :

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} & \Delta\mathrm{T}_1 = +2\mathrm{B}lre^{(r-h)t} - 2\mathrm{A}mhe^{-(r-h)t}, \qquad \Delta\mathrm{T}_2 = -2\mathrm{A}\,l\,(r-h)e^{(r+h)t}, \\ & \Delta\mathrm{T}_4 = -2\mathrm{B}lhe^{(r-h)t} + 2\mathrm{A}mre^{-(r-h)t}, \qquad \Delta\mathrm{T}_3 = -2\mathrm{B}m(r-h)e^{-(r+h)t}, \\ & \qquad \Delta = \mathrm{B}le^{(r-h)t} - \mathrm{A}me^{-(r-h)t}. \end{aligned} \right.$$

La quantité $r - h$ est essentiellement différente de zéro; les valeurs correspondantes de X et Y sont

$$\mathrm{X} = le^{2rx} + \mathrm{A}e^{2hx}, \qquad \mathrm{Y} = me^{-2ry} + \mathrm{B}e^{-2hy},$$

et nous rappelons qu'on ne peut faire aucune des quatre hypothèses

$$l = m = 0, \qquad \mathrm{A} = \mathrm{B} = 0, \qquad l = \mathrm{A} = 0, \qquad m = \mathrm{B} = 0,$$

en sorte que la fonction Δ ne peut se réduire à zéro.

Cela posé, substituons les solutions (II) dans les équations (T) et (ϑ); nous trouvons ainsi

$$(\mathrm{T}_2) \left\{ \begin{aligned} & [(4i - 3r - 3h)(\mathrm{B}le^{(r-h)t} - \mathrm{A}me^{-(r-h)t}) + 3(r-h)(\mathrm{A}le^{(r+h)t} - \mathrm{B}me^{-(r+h)t})]\mathrm{T} \\ & \quad - (r-h)(2r + 2h - 3i)(\mathrm{B}le^{(r-h)t} + \mathrm{A}me^{-(r-h)t} - \mathrm{A}le^{(r+h)t} - \mathrm{B}me^{-(r+h)t}) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(\vartheta_2) \left\{ \begin{aligned} & 2\Delta(\mathrm{T}' + \mathrm{T}^2 - 2rh - 1) + 3(r-h)(\mathrm{B}le^{(r-h)t} + \mathrm{A}me^{-(r-h)t} + \mathrm{A}le^{(r+h)t} + \mathrm{B}me^{-(r+h)t})\mathrm{T} \\ & \quad + (r+h)(2r + 2h - 3i)\Delta + (r-h)(2r + 2h - 3i)(\mathrm{A}le^{(r+h)t} - \mathrm{B}me^{-(r+h)t}) = 0. \end{aligned} \right.$$

En vue de faciliter la discussion de ces deux équations, nous énoncerons un lemme dont nous aurons plusieurs fois à faire usage.

LEMME. — *Pour que l'expression*

$$\sum_{i=1}^{i=n} (M_i e^{a_i t} + M'_i e^{-a_i t}),$$

où les M_i, M'_i *sont des coefficients constants en nombre fini et les* a_i *des constantes différentes de zéro et différentes les unes des autres, soit nulle quelque valeur qu'on attribue à la variable* t, *il faut et il suffit que les coefficients* M_i, M'_i *soient tous nuls.*

On s'en assure en développant chaque exponentielle en série et annulant les coefficients des puissances de t jusqu'à t^{2n-1} inclusivement. On obtient ainsi, d'une part, n équations linéaires et homogènes par rapport aux n sommes $M_i + M'_i$, d'autre part, n équations linéaires et homogènes par rapport aux n différences $M_i - M'_i$. Le déterminant du premier système est le déterminant de Van der Monde

$$\Pi_{i,j}(a_i^2 - a_j^2).$$

Celui du second système est égal au précédent multiplié par

$$a_1^2 a_2^2 \ldots a_i^2 \ldots a_n^2.$$

D'après les hypothèses de l'énoncé, ces deux déterminants sont différents de zéro. On a donc

$$M_i + M'_i = 0, \qquad M_i - M'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui prouve que les coefficients M_i, M'_i sont tous nuls. D'ailleurs ces conditions sont évidemment suffisantes.

8. Revenons aux équations (T_2) et (Θ_2). Nous devons avant tout rechercher si la première ne peut pas se réduire à une identité. En égalant à zéro le coefficient de T et le terme indépendant, nous obtenons deux équations, dont la première est

$$\begin{aligned}(4i - 3r - 3h)&[Bl e^{(r-h)t} - Am e^{-(r-h)t}]\\ &+ 3(r-h)[Al e^{(r+h)t} - Bm e^{-(r+h)t}] = 0,\end{aligned}$$

et dont la seconde peut s'écrire

$$(2r+2h-3i)(le^{rt}-me^{-rt})(Ae^{ht}-Be^{-ht})=0.$$

De ces trois facteurs, les deux derniers ne peuvent être identiquement nuls, ce qui entraînerait, d'après le lemme, l'une des hypothèses exclues

$$l=m=0, \qquad A=B=0.$$

Il faut donc supposer $2r+2h-3i=0$. Il en résulte que $r+h$ n'est pas nul, non plus que $r-h$. Le premier membre de l'identité précédente est une somme de quatre exponentielles, auxquelles le lemme s'applique, si tous les exposants sont inégaux, c'est-à-dire si le produit rh est différent de zéro. Alors les coefficients de toutes les exponentielles sont nuls; on a donc

$$Bl=Am=Al=Bm=0,$$

ce qui entraîne l'une des quatre hypothèses exclues

$$l=m=0, \qquad A=B=0, \qquad l=A=0, \qquad m=B=0.$$

Ainsi nous devons supposer $rh=0$. A raison de la symétrie des formules, il suffit de supposer $h=0$; alors $r=\frac{3i}{2}$, et il vient

$$l(9A-B)e^{\frac{3i}{2}t}+m(9B-A)e^{-\frac{3i}{2}t}=0;$$

d'où résulte

$$l(9A-B)=0, \qquad m(9B-A)=0.$$

Comme l et m ne sont pas nuls tous les deux, non plus que A et B, il faut supposer nuls l'un des paramètres l et m, ainsi que le coefficient de l'autre. Soit par exemple $m=0$; il en résulte $B=9A$. Nos hypothèses actuelles

$$h=0, \qquad m=0, \qquad B=9A$$

donnent pour X et Y ces expressions

$$X=le^{3ix}+A, \qquad Y=9A.$$

Quant à la fonction T, elle est déterminée par l'équation (ϑ_2), qui se réduit ici à

$$T' + T^2 + \frac{5i}{2}T - 1 = 0.$$

Intégrant et négligeant la constante qui s'ajouterait à t, on trouve

$$T = -\frac{5i}{4} - \frac{3}{4}\operatorname{tang}\frac{3t}{4}.$$

Pour avoir l'élément linéaire correspondant, il n'y a plus qu'à effectuer la quadrature

$$\int T\,dt = -\frac{5i}{4}(t - t_0) + \log\cos\frac{3t}{4},$$

d'où l'on conclut

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\, e^{\int T\,dt}\, dx\, dy = C e^{-i(x-y)}\, e^{-\frac{5i}{4}(x+y)} \cos\frac{3(x+y)}{4}\, dx\, dy.$$

Si l'on prenait $l = 0$ avec $A = 9B$, il suffirait de changer x en $-y$ et y en $-x$ pour retrouver la même solution.

L'élément linéaire précédent est donc le seul qui corresponde à l'hypothèse où l'équation (T_2) se réduit à une identité. Il ne convient qu'à des spirales imaginaires.

Nous allons le ramener à la forme harmonique, en effectuant le changement de variables habituel

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Nous pouvons ici, sans restreindre la généralité, prendre

$$X = le^{3ix} + \tfrac{1}{9}, \qquad Y = 1,$$

ce qui revient à garder la variable y et à remplacer x par l'intégrale x' de l'équation

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{le^{3ix} + \frac{1}{9}}}.$$

Or on tire aisément de là

$$le^{-3ix} = -9\cos^2\frac{x'}{2}.$$

Substituant cette expression de x dans l'élément linéaire et désignant par γ une constante proportionnelle à $\sqrt{l}$, on trouve

$$ds^2 = C'\left[e^{i\frac{x'+y}{2}} - e^{-i\frac{x'-y}{2}} + \gamma\left(e^{-i(x'+y)} - e^{i(x'-y)}\right)\right] dx'\,dy \qquad (\gamma \neq 0).$$

Il résulte du lemme énoncé page 147 que l'élément linéaire considéré est doublement harmonique.

Dans le calcul précédent, on suppose essentiellement que l ne soit pas nul, comme on doit le faire, puisque nous excluons actuellement (*voir* n° 7) l'hypothèse $l = m = 0$ étudiée au Chapitre I. Pour voir ce qu'elle donne ici, on pourra prendre

$$X = \tfrac{1}{9}, \qquad Y = 1,$$

ce qui permet de garder la variable y et de remplacer x par $-3x'$. On trouve ainsi cette autre forme de l'élément linéaire

$$ds^2 = \left(e^{\frac{i(x'+y)}{2}} + e^{i(x'-y)}\right) dx'\,dy,$$

qui rentre visiblement dans le type (e) déjà rencontré.

9. Nous pouvons désormais supposer que l'équation (T_2) ne se réduit pas à une identité. Nous en tirerons T, et nous substituerons son expression dans l'équation ($\mathfrak{S}_2$), qui devra être vérifiée. Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$\Delta = B\,le^{(r-h)t} - A\,me^{-(r-h)t}, \qquad \Theta = A\,le^{(r+h)t} - B\,me^{-(r+h)t},$$
$$\Delta_1 = B\,le^{(r-h)t} + A\,me^{-(r-h)t}, \qquad \Theta_1 = A\,le^{(r+h)t} + B\,me^{-(r+h)t};$$

et nous remarquerons la double identité

$$\Delta^2 - \Delta_1^2 = \Theta^2 - \Theta_1^2 = -4AB\,lm.$$

Avec ces notations, nous tirerons de l'équation (T_2)

$$(T_3) \qquad \begin{aligned} T &= (r-h)(2r+2h-3i)\frac{\Delta_1 - \Theta_1}{D}, \\ D &= (4i - 3r - 3h)\Delta + 3(r-h)\Theta. \end{aligned}$$

Différentions maintenant l'expression de T; il viendra

$$T' = (r-h)(2r+2h-3i)\frac{N}{D^2},$$

en posant

$$N = [(r-h)\Delta - (r+h)\Theta]D - (r-h)(\Delta_1 - \Theta_1)[(4i-3r-3h)\Delta_1 + 3(r+h)\Theta_1].$$

Substituons T et T' dans l'équation ($\mathfrak{I}_2$) et chassons le dénominateur D^2; nous trouvons

$$(\mathfrak{I}_3)\left\{\begin{aligned} &2\Delta[(r-h)(2r+2h-3i)N + (r-h)^2(2r+2h-3i)^2(\Delta_1-\Theta_1)^2 - (2rh+1)D^2] \\ &\qquad + (2r+2h-3i)D[3(r-h)^2(\Delta_1^2-\Theta_1^2) + (r+h)\Delta D + (r-h)\Theta D] = 0.\end{aligned}\right.$$

Dans les termes dont la somme multiplie D à la seconde ligne, remplaçons D par sa valeur; il vient après réduction

$$3(r-h)^2(\Delta_1^2 - \Theta_1^2 + \Theta^2) + (r+h)(4i-3r-3h)\Delta^2 + 4i(r-h)\Delta\Theta;$$

mais on a identiquement

$$\Delta_1^2 - \Theta_1^2 + \Theta^2 = \Delta^2,$$

comme nous venons de le remarquer. Ainsi Δ est facteur de tous les termes dans le groupe que nous calculons; ce groupe peut donc s'écrire

$$\Delta[3(r-h)^2\Delta + (r+h)(4i-3r-3h)\Delta + 4i(r-h)\Theta];$$

et maintenant le facteur 2Δ est commun à tous les termes de l'équation ($\mathfrak{I}_3$); comme il n'est pas nul, nous pouvons le supprimer. Par cette mise en évidence d'un facteur, nous avons notablement simplifié l'équation à discuter. Elle devient

$$\begin{aligned}&(r-h)(2r+2h-3i)N + (r-h)^2(2r+2h-3i)^2(\Delta_1-\Theta_1)^2 - (2rh+1)D^2 \\ &\qquad + 2i(2r+2h-3i)[(r+h+3irh)\Delta + (r-h)\Theta]D = 0.\end{aligned}$$

Remplaçons D et N par leurs expressions déjà trouvées

$$D = (4i-3r-3h)\Delta + 3(r-h)\Theta,$$

$$N = [(r-h)\Delta - (r+h)\Theta]D - (r-h)(\Delta_1-\Theta_1)[(4i-3r-3h)\Delta_1 + 3(r+h)\Theta_1].$$

Nous arrivons, tous calculs faits, à l'équation suivante :

$$(r-h)^2(2r+2h-3i)(\Delta_1-\Theta_1)[(5r+5h-7i)\Delta_1-(5r+5h-3i)\Theta_1] \\ +[(4i-3r-3h)\Delta+3(r-h)\Theta](\rho\Delta-\rho'\Theta)=0,$$

en posant, pour abréger,

$$\rho=(r+h)[2r^2+2h^2-10rh+\ \ i(r+h)+9]+22irh-4i,$$
$$\rho'=(r-h)[2r^2+2h^2+10rh-7i(r+h)-3].$$

Il n'y a plus qu'à substituer les fonctions que représentent Δ, Θ, Δ_1, Θ_1 pour obtenir le résultat définitif

$$(\Sigma)\quad\left\{\begin{aligned} &10AB[g-k(r+h-i)](l^2e^{2rt}+m^2e^{-2rt})\\ &\quad-10lm[g+k(r+h-i)](A^2e^{2ht}+B^2e^{-2ht})\\ &\quad+[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)](B^2l^2e^{2(r-h)t}+A^2m^2e^{-2(r-h)t})\\ &\quad+[k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)](A^2l^2e^{2(r+h)t}+B^2m^2e^{-2(r+h)t})\\ &\quad+2ABlm[10k(r+h-i)+\rho(3r+3h-4i)+3\rho'(r-h)]\qquad=0,\end{aligned}\right.$$

où nous avons posé

$$10g=3(r-h)\rho+(3r+3h-4i)\rho',\qquad k=(r-h)^2(2r+2h-3i).$$

Telle est l'équation qui doit avoir lieu *quel que soit* t. Son premier membre est linéaire par rapport à huit exponentielles, sur lesquelles on ne peut faire évidemment que trois hypothèses :

1° Tous les exposants sont différents de zéro et différents les uns des autres;

2° Tous les exposants sont différents de zéro, mais ne sont pas distincts;

3° Certains exposants sont nuls.

Nous allons discuter successivement ces trois hypothèses.

10. Première hypothèse. — Tous les exposants sont différents de zéro et différents les uns des autres. Nous verrons que cette hypothèse doit être écartée. Mais les calculs que nous allons faire nous serviront dans l'étude de la deuxième hypothèse.

Pour pouvoir appliquer le lemme à l'équation (Σ), différentions-la par rapport à t. Le premier membre devient une fonction linéaire et *homogène* des huit exponentielles. Il faut donc que leurs huit coefficients soient nuls. Mais ces coefficients ne diffèrent de ceux des mêmes exponentielles dans l'identité (Σ) que par des facteurs supposés différents de zéro. Donc, dans cette identité (Σ), les coefficients des huit exponentielles et par suite aussi le terme constant sont nuls. D'où les neuf équations suivantes :

$$AB\,lm[10k(r+h-i)+\rho(3r+3h-4i)+3\rho'(r-h)]=0,$$

$$AB\;l^2[10g-10k(r+h-i)]=0, \qquad A^2lm[10g+10k(r+h-i)]=0,$$

$$AB\,m^2[10g-10k(r+h-i)]=0, \qquad B^2lm[10g+10k(r+h-i)]=0,$$

$$B^2l^2[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]=0,$$

$$A^2l^2[k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]=0,$$

$$A^2m^2[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]=0,$$

$$B^2m^2[k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]=0.$$

Deux cas sont à distinguer, suivant que le produit $ABlm$ est nul ou différent de zéro.

Premier cas. — Le produit $ABlm$ est nul. Supposons soit $l=0$, ce qui entraîne $ABm\neq 0$ d'après une remarque antérieure, soit $m=0$, ce qui entraîne $ABl\neq 0$. Nous trouvons ainsi trois équations entre r et h, savoir

$$(1) \qquad 10g-10k(r+h-i)=0,$$

$$(2) \qquad k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)=0,$$

$$(3) \qquad k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)=0.$$

Pour discuter ce système, nous poserons

$$r+h=p+i, \qquad r-h=\gamma.$$

Si l'on se rappelle les définitions de k, ρ, ρ' et g,

$$k=(r-h)^2(2r+2h-3i),$$

$$\rho=(r+h)[2r^2+2h^2-10rh+i(r+h)+9]+22irh-4i,$$

$$\rho'=(r-h)[2r^2+2h^2+10rh-7i(r+h)-3],$$

$$10g=3(r-h)\rho+(3r+3h-4i)\rho',$$

on trouvera sans difficulté

$$\begin{aligned} k &= \gamma^2(2p-i), \\ 2\rho &= \gamma^2(7p-4i) - p(p-i)(3p-i), \\ 2\rho' &= \gamma(7p^2+1-3\gamma^2), \\ 10g &= 3\gamma\rho + (3p-i)\rho'. \end{aligned}$$

Or, si l'on remplace r et h par p et γ dans les équations (1), (2) et (3), en y laissant subsister ρ et ρ', il vient

$$(1') \qquad 3\gamma\rho + (3p-i)\rho' = 10p(2p-i)\gamma^2,$$

$$(2') \qquad \gamma^2(2p-i)(5p-2i) = (3p-i)\rho.$$

$$(3') \qquad \gamma^2(2p-i)(5p+2i) = 3\gamma\rho',$$

Dans l'équation (3′) substituons l'expression de ρ'. Comme $\gamma = r-h$ n'est pas nul, il vient simplement

$$(3'') \qquad 9\gamma^2 = (p+i)^2.$$

Dans l'équation (2′) substituons l'expression de ρ; il vient

$$(2'') \qquad p(p-i)[\gamma^2-(3p-i)^2] = 0.$$

Cette équation donne trois solutions : $p=i$, $p=0$, $\gamma^2=(3p-i)^2$.

La solution $p-i=r+h=0$ est exclue, puisque nous supposons tous les exposants différents de zéro et que $2(r+h)$ est l'un d'eux.

Faisons $p=0$; alors la formule (3″) donne $\gamma = r-h = \pm\frac{i}{3}$. On a donc

$$r+h=i, \qquad r-h=\pm\frac{i}{3},$$

d'où l'on tire deux systèmes de valeurs

$$r=\frac{2i}{3}, \qquad h=\frac{i}{3}, \qquad r=2h; \qquad r=\frac{i}{3}, \qquad h=\frac{2i}{3}, \qquad h=2r.$$

Mais, quand $r=2h$, on a $r-h=h$ et quand $h=2r$, on a $r-h=-r$; dans les deux cas les exposants ne sont plus tous distincts. Donc p ne peut être supposé nul.

Soit enfin $\gamma^2=(3p-i)^2$. En comparant avec la formule (3″), on trouve

$$9(3p-i)^2=(p+i)^2,$$

ou bien

$$(2p-i)(5p-i)=0.$$

Or $2p-i$ est différent de zéro; sans quoi k et, par suite, T seraient nuls. Il reste donc

$$p=\frac{i}{5}, \qquad \gamma^2=-\frac{4}{25}.$$

La substitution de ces valeurs de p et de γ^2 dans l'équation (1') donne

$$\gamma=\frac{2i}{5},$$

ce qui s'accorde avec la relation

$$\gamma^2=-\frac{4}{25}.$$

Mais, d'après les valeurs obtenues pour p et pour γ, nous avons

$$r+h=\frac{6i}{5}, \qquad r-h=\frac{2i}{5}.$$

D'où l'on conclut

$$r=\frac{4i}{5}, \qquad h=\frac{2i}{5}, \qquad r=2h.$$

Les exposants ne seraient plus tous distincts. Ce cas doit être écarté.

Si dans les neuf équations initiales nous supposions soit $B=0$ avec $Alm\neq 0$, soit $A=0$ avec $Blm\neq 0$, nous trouverions les trois équations

$$\begin{gathered}10g+10k(r+h-i)=0,\\ k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)=0,\\ k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)=0.\end{gathered}$$

Elles ne diffèrent des précédentes que par le changement de r en h et de h en r. Il n'y a donc pas à les discuter.

Résumons la discussion du premier cas.

Les deux systèmes qui correspondent à l'hypothèse $ABlm=0$ n'ont d'autres solutions que les suivantes :

1° $r+h=0$. (Cette solution sera discutée en son lieu.)

2° $r+h=i$, d'où $r=\frac{2i}{3}$ avec $h=\frac{i}{3}$ et $r=\frac{i}{3}$ avec $h=\frac{2i}{3}$,

3° $r+h=\frac{6i}{5}$, d'où $r=\frac{4i}{5}$ avec $h=\frac{2i}{5}$ et $r=\frac{2i}{5}$ avec $h=\frac{4i}{5}$.

Deuxième cas. — Le produit $ABlm$ est différent de zéro. Les neuf équations auxquelles équivaut l'identité (Σ) se réduisent à cinq, savoir

$$\begin{aligned} g - k(r + h - i) &= 0,\\ g + k(r + h - i) &= 0,\\ k(5r + 5h - 7i) - \rho(3r + 3h - 4i) &= 0,\\ k(5r + 5h - 3i) - 3\rho'(r - h) &= 0,\\ 10k(r + h - i) + \rho(3r + 3h - 4i) + 3\rho'(r - h) &= 0. \end{aligned}$$

Comme k n'est pas nul, les deux premières entraînent

$$r + h = i, \qquad g = 0,$$

c'est-à-dire

$$r + h = i, \qquad 3(r - h)\rho = i\rho'.$$

Les trois suivantes se réduisent alors à deux

$$2ik = i\rho, \qquad i\rho = 3\rho'(r - h).$$

Rapprochons-en les deux équations trouvées d'abord

$$i\rho' = 3\rho(r - h), \qquad r + h = i.$$

Retranchant membre à membre les deux équations qui contiennent $r - h$, on trouve

$$(3r - 3h + i)(\rho - \rho') = 0.$$

Soit d'abord $3r - 3h + i = 0$. Nous avons alors

$$r - h = -\frac{i}{3}, \qquad r + h = i,$$

d'où l'on déduit

$$r = \frac{i}{3}, \qquad h = \frac{2i}{3}, \qquad h = 2r.$$

Les exposants $r - h$ et $-r$ sont égaux, contrairement à notre hypothèse. On ne peut donc supposer $\rho - \rho' \neq 0$.

Soit maintenant $\rho = \rho'$. Il vient $3(r - h) = i$. Nous avons donc

$$r - h = \frac{i}{3}, \qquad r + h = i.$$

Ces équations ne diffèrent des précédentes que par le changement de r en h et de h en r. Elles conduisent donc à $r = 2h$. D'où l'égalité des deux exposants $r - h$ et h. Donc le second cas de la première hypothèse ne donne rien.

En résumé, la première hypothèse ne donne pas de solution; c'est-à-dire qu'on ne peut supposer tous les exposants différents de zéro et différents les uns des autres.

11. Deuxième hypothèse. — Les exposants sont tous différents de zéro, mais ne sont pas tous différents les uns des autres.

Nous excluons les quatre hypothèses

$$r = 0, \qquad h = 0, \qquad r - h = 0, \qquad r + h = 0.$$

Écrivons les huit quantités

$$r, \quad -r, \quad h, \quad -h, \quad r-h, \quad -(r-h), \quad r+h, \quad -(r+h),$$

et comparons chacune d'elles avec les suivantes :

Le nombre r ne peut être égalé qu'à $-(r-h)$ ou à $-(r+h)$; d'où $h = \pm 2r$.

Le nombre $-r$ ne peut être égalé qu'à $+(r-h)$ ou à $+(r+h)$; d'où $h = \pm 2r$.

Le nombre h ne peut être égalé qu'à $+(r-h)$ ou à $-(r+h)$; d'où $2h = \pm r$.

Le nombre $-h$ ne peut être égalé qu'à $-(r-h)$ ou à $+(r+h)$; d'où $2h = \pm r$.

Les nombres $\pm(r-h)$, $\pm(r+h)$ ne peuvent être égalés à aucun de ceux qui les suivent.

Il n'y a donc que quatre combinaisons possibles $h = \pm 2r$, $r = \pm 2h$. Mais, si l'on observe que les fonctions X et Y ne changent pas, non plus que le premier membre de (Σ), quand on change r en h, l en A, m en B, et inversement, on voit qu'il suffit de traiter les deux cas $h = \pm 2r$. Les équations que l'on obtient dans les deux cas corrélatifs $h = 2r$ et $r = 2h$ se déduisent les unes des autres par cet échange de lettres. Les solutions du second cas se déduiront donc de celles du premier par ce même échange; de même pour les deux cas corrélatifs $h = -2r$ et $r = -2h$.

11'. *Premier cas*. — Nous supposons $h = 2r$; d'où $r - h = -r$,

$r+h=3r$. N'introduisons d'abord cette hypothèse que dans les exposants des exponentielles, et laissons subsister r et h dans leurs coefficients. Il viendra pour l'identité (Σ)

$$\begin{aligned}
&\{[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]A^2m^2+10[g-k(r+h-i)AB\,l^2]\}e^{2rt}\\
+&\{[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]B^2l^2+10[g-k(r+h-i)AB\,m^2]\}e^{-2rt}\\
&\quad -10\,lm[g+k(r+h-i)](A^2e^{4rt}+B^2e^{-4rt})\\
&\quad +[k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)](A^2l^2e^{6rt}+B^2m^2e^{-6rt})\\
&\quad +2AB\,lm[10k(r+h-i)+\rho(3r+3h-4i)+3\rho'(r-h)]=0.
\end{aligned}$$

Une pareille identité exige, en vertu d'un raisonnement fait au commencement du paragraphe 10, que les coefficients de chaque exponentielle et le terme constant soient nuls.

Nous avons à discuter les sept équations suivantes :

$$\begin{gathered}
AB\,lm[10k(r+h-i)+\rho(3r+3h-4i)+3\rho'(r-h)]=0,\\
10[g-k(r+h-i)]AB\,l^2+[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]A^2m^2=0,\\
10[g-k(r+h-i)]AB\,m^2+[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]B^2l^2=0,\\
lm[g+k(r+h-i)]A^2=0,\qquad [k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]A^2l^2=0,\\
lm[g+k(r+h-i)]B^2=0,\qquad [k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]B^2m^2=0.
\end{gathered}$$

Il faut distinguer suivant que le produit $AB\,lm$ est nul ou différent de zéro.

Soit d'abord $AB\,lm=0$. En supposant soit $l=0$, soit $m=0$, on arrive aux trois équations

$$\begin{aligned}
10g-10k(r+h-i)&=0,\\
k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)&=0,\\
k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)\qquad&=0.
\end{aligned}$$

Ce sont les équations rencontrées dans le premier cas de la première hypothèse. On a vu qu'elles n'admettent de solutions communes que : 1° quand $r+h=0$; 2° quand $r+h=i$; 3° quand $r+h=\frac{6i}{5}$.

Solution $r+h=0$. Elle est présentement exclue.

Solution $r+h=i$; d'où $r=2h=\frac{2i}{3}$, ce qui ne se peut ici, et $h=2r=\frac{2i}{3}$. Ces valeurs doivent vérifier nos trois équations, qui deviennent respectivement

$$g = 0, \qquad \rho' = -2k, \qquad \rho = 2k.$$

Or l'expression générale de g donne ici

$$10g = -i(\rho + \rho').$$

On a donc

$$\rho + \rho' = 0,$$

ce qui s'accorde avec les formules précédentes. Il suffit de calculer

$$\rho' = -\frac{2i}{9}, \qquad k = \frac{i}{9},$$

pour s'assurer qu'on a bien une solution du problème en prenant $r = \frac{h}{2} = \frac{i}{3}$. Cette solution, étant substituée dans l'expression générale de T,

$$T = \frac{(2r + 2h - 3i)(r - h)(\Delta_1 - \Theta_1)}{(4i - 3r - 3h)\Delta + 3(r - h)\Theta},$$

la réduit à

$$T = \pm \frac{i}{3},$$

le signe $+$ correspondant à $m = 0$, le signe $-$ à $l = 0$. La fonction T étant constante, les spirales correspondantes sont des développables; nous les écartons.

Solution $r + h = \frac{6i}{5}$, d'où $r = 2h = \frac{4i}{5}$, ce qui ne se peut ici. Cette solution doit être rejetée.

Soit toujours $ABlm = 0$. Supposons maintenant soit $A = 0$, soit $B = 0$. Nous trouvons les mêmes équations que quand $lm = 0$, sauf changement de r en h et de h en r. Elles n'admettent, d'après ce qui a été vu à propos de la première hypothèse, que les solutions

$$r + h = 0, \qquad r + h = i, \qquad r + h = \frac{6i}{5}.$$

La première est exclue. La seconde donne $r = 2h = \frac{2i}{3}$, ce qui ne se peut ici, et $r = \frac{h}{2} = \frac{i}{3}$, ce qui conduit encore à une valeur constante pour T.

La troisième $r+h=\frac{6i}{5}$ donne (AB étant nul) $r=\frac{h}{2}=\frac{2i}{5}$. Ces valeurs de r et de h doivent vérifier nos trois équations, qui deviennent respectivement

$$10g+2ik=0, \qquad 5k-2\rho=0, \qquad 5k+2\rho'=0.$$

Or, si l'on fait $r=\frac{h}{2}=\frac{2i}{5}$ dans les expressions générales de k, ρ, ρ' et g, on trouve

$$k=\frac{12i}{125}, \qquad \rho=\frac{6i}{25}, \qquad \rho'=-\frac{6i}{25}, \qquad 10g=\frac{24}{125},$$

valeurs qui vérifient les trois relations ci-dessus. Nous avons donc là une nouvelle solution du problème. Dans les formules générales

$$T=\frac{-(2r+2h-3i)(r-h)(le^{rt}-me^{-rt})(Ae^{ht}-Be^{-ht})}{(4i-3r-3h)(Ble^{(r-h)t}-Ame^{-(r-h)t})+3(r-h)(Ale^{(r+h)t}-Bme^{-(r-h)t})},$$

$$X=le^{2rx}+Ae^{2hx}, \qquad Y=me^{-2ry}+Be^{-2hy},$$

introduisons les valeurs $r=\frac{2i}{5}$, $h=\frac{4i}{5}$ avec l'une des deux suppositions $A=0$, $B=0$.

Pour $A=0$, nous trouvons

$$T_A=\frac{3i}{5}\,\frac{le^{\frac{2i}{5}t}-me^{-\frac{2i}{5}t}}{le^{\frac{2i}{5}t}+3me^{-\frac{2i}{5}t}}, \qquad X=le^{\frac{4i}{5}x}, \qquad Y=me^{-\frac{4i}{5}y}+Be^{-\frac{8i}{5}y};$$

pour $B=0$,

$$T_B=\frac{3i}{5}\,\frac{le^{\frac{2i}{5}t}-me^{-\frac{2i}{5}t}}{3le^{\frac{2i}{5}t}+me^{-\frac{2i}{5}t}}, \qquad X=le^{\frac{4i}{5}x}+Ae^{\frac{8i}{5}x}, \qquad Y=me^{-\frac{4i}{5}y}.$$

Ces deux solutions n'en font qu'une, car elles se ramènent l'une à l'autre par le changement de l en m et de m en l, de A en B et de B en A, pourvu qu'on change aussi x en $-y$ et y en $-x$, ce qui ne modifie pas l'élément linéaire des spirales

$$ds^2=e^{-i(x-y)}\,e^{\int T\,dt}\,dx\,dy,$$

l'expression $T_A\,dt$ devenant, par ce changement, identique à $T_B\,dt$.

La fonction T_B peut s'écrire ainsi

$$T_B = \frac{i}{5} - \frac{4i}{5}\,\frac{me^{-\frac{2it}{5}}}{3le^{\frac{2it}{5}} + me^{-\frac{2it}{5}}} = \frac{i}{5} - \frac{4i}{5}\,\frac{me^{-\frac{4it}{5}}}{3l + me^{-\frac{4it}{5}}}.$$

Son intégration est immédiate

$$\int T\,dt = \frac{i(t-t_0)}{5} + \log\left(3l + me^{-\frac{4it}{5}}\right);$$

d'où résulte l'élément linéaire

$$ds^2 = C_0\, e^{-i(x-y)}\, e^{i\frac{x+y}{5}}\left(3l + me^{-4i\frac{x+y}{5}}\right) dx\,dy.$$

Comme le produit lm est différent de zéro, on peut augmenter $x+y$ d'une quantité telle que le coefficient de l'exponentielle $e^{-4i\frac{x+y}{5}}$ devienne égal à $3l$. On pourra donc écrire

$$ds^2 = C\, e^{-i(x-y)}\, e^{i\frac{x+y}{5}}\left(1 + e^{-4i\frac{x+y}{5}}\right) dx\,dy.$$

Cet élément linéaire ne convient qu'à des spirales imaginaires.

Nous allons le mettre sous forme harmonique par le changement de variables connu

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

La remarque précédente permet, dans les formules actuelles

$$X = le^{4i\frac{x}{5}} + Ae^{8i\frac{x}{5}}, \qquad Y = me^{-4i\frac{y}{5}},$$

de faire $m = 3l = 1$; d'où

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3}e^{4i\frac{x}{5}} + Ae^{8i\frac{x}{5}}}}, \qquad dy' = e^{2i\frac{y}{5}}dy,$$

ce qui donne, tous calculs faits,

$$ds^2 = C'\left\{(x'+y')^3 + (x'-y')^3 + \tfrac{75}{4}A[(x'+y') + (x'-y')]\right\} dx'dy'.$$

La constante $A \neq 0$ étant arbitraire, l'élément linéaire est doublement harmonique, en vertu du lemme énoncé p. 147.

Soit maintenant $ABlm \neq 0$. Les sept équations du problème se réduisent aux cinq suivantes :

$$(1) \qquad 10[g - k(r+h-i)]Bl^2 + [k(5r+5h-7i) - \rho(3r+3h-4i)]Am^2 = 0,$$

$$(2) \qquad 10[g - k(r+h-i)]Am^2 + [k(5r+5h-7i) - \rho(3r+3h-4i)]Bl^2 = 0,$$

$$(3) \qquad 10g + 10k(r+h-i) = 0,$$

$$(4) \qquad k(5r+5h-3i) - 3\rho'(r-h) = 0,$$

$$(5) \qquad 10k(r+h-i) + \rho(3r+3h-4i) + 3\rho'(r-h) = 0.$$

La troisième de ces équations n'est autre que

$$(3') \qquad 10k(r+h-i) + \rho'(3r+3h-4i) + 3\rho(r-h) = 0.$$

Si on la retranche de la cinquième, on trouve, k n'étant pas nul,

$$(3h-2i)(\rho-\rho') = 0.$$

Cette équation se décompose en deux : $3h - 2i = 0$ et $\rho - \rho' = 0$.

Soit d'abord $3h = 2i$. On a, par suite, $r = \frac{h}{2} = \frac{i}{3}$ et $r + h = i$. Les équations (4), (5) et (3') se réduisent à deux

$$2k + \rho' = 0, \qquad \rho + \rho' = 0.$$

Or, si l'on fait $r = \frac{i}{3}$, $h = \frac{2i}{3}$ dans les formules générales qui définissent ρ, ρ', g et k, on trouve

$$\rho = \frac{2i}{9}, \qquad \rho' = -\frac{2i}{9}, \qquad g = 0, \qquad k = \frac{i}{9}.$$

Ces valeurs satisfont aux deux équations ci-dessus et, par suite, aux trois équations (3), (4), (5). Grâce à elles, les équations (1) et (2) sont vérifiées, les quatre paramètres A, B, l, m restant quelconques. Nous aurons donc encore une solution du problème, en prenant $r = \frac{h}{2} = \frac{i}{3}$, savoir

$$X = le^{2i\frac{x}{3}} + Ae^{4i\frac{x}{3}}, \qquad Y = me^{-2i\frac{y}{3}} + Be^{-4i\frac{y}{3}}.$$

Pour avoir l'expression correspondante de T, reportons-nous à la formule générale

$$T = \frac{(2r + 2h - 3i)(r - h)(\Delta_1 - \Theta_1)}{(4i - 3r - 3h)\Delta + 3(r + h)\Theta},$$

et remarquons que, dans le cas présent, elle se réduit à

$$T = \frac{i}{3}\,\frac{\Delta_1 - \Theta_1}{\Delta - \Theta}.$$

Or on a identiquement

$$\begin{aligned}
\Delta_1 - \Theta_1 &= (B\,le^{(r-h)t} + A\,me^{-(r-h)t}) - (A\,le^{(r+h)t} + B\,me^{-(r+h)t}) \\
&= -(le^{rt} - me^{-rt})(A\,e^{ht} - B\,e^{-ht}), \\
\Delta - \Theta &= (B\,le^{(r-h)t} - A\,me^{-(r-h)t}) - (A\,le^{(r+h)t} - B\,me^{-(r+h)t}) \\
&= -(le^{rt} + me^{-rt})(A\,e^{ht} - B\,e^{-ht});
\end{aligned}$$

il reste donc simplement

$$T = \frac{i}{3}\,\frac{le^{i\frac{t}{3}} - me^{-i\frac{t}{3}}}{le^{i\frac{t}{3}} + me^{-i\frac{t}{3}}} = \frac{d}{dt}\log\left(le^{i\frac{t}{3}} + me^{-i\frac{t}{3}}\right).$$

En augmentant t d'une quantité convenable, on peut ramener à l'égalité les coefficients des deux exponentielles et prendre en conséquence

$$T = \frac{d}{dt}\log\cos\frac{t}{3}, \qquad e^{\int T\,dt} = C\cos\frac{t}{3}.$$

Alors l'élément linéaire devient

$$ds^2 = Ce^{-i(x-y)}\cos\frac{x+y}{3}\,dx\,dy;$$

il acquiert la forme harmonique par le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{e^{2i\frac{x}{3}} + A\,e^{4i\frac{x}{3}}}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{e^{-2i\frac{y}{3}} + B\,e^{-4i\frac{y}{3}}}},$$

qui conduit à

$$ds^2 = C'\left\{(x'+y')^4 - (x'-y')^4 + 18(A+B)\left[(x'+y')^2 - (x'-y')^2\right]\right\}dx'\,dy'.$$

Il est doublement harmonique, en vertu du lemme énoncé p. 147, parce que A et B sont arbitraires (sauf $AB \neq 0$).

Supposant toujours $ABlm \neq 0$, discutons la solution $\rho = \rho'$. A cet effet, rapprochons la quatrième équation et la cinquième, après avoir remplacé ρ' par ρ :

$$(4') \qquad k(5r + 5h - 3i) - 3\rho(r - h) = 0,$$

$$(5') \qquad 5k(r + h - i) + \rho(3r - 2i) = 0.$$

Comme k ne peut être nul, ces deux équations, linéaires et homogènes en k et ρ, exigent qu'on ait

$$(5r + 5h - 3i)(3r - 2i) + 15(r + h - i)(r - h) = 0.$$

Si l'on remplace h par $2r$, cette équation s'abaisse au premier degré et donne $4r = i$.

Pour $r = \frac{i}{4}$, $h = \frac{i}{2}$, les équations (4), (5) et (3′) sont vérifiées, comme on s'en assure aisément en y substituant les valeurs correspondantes

$$\rho = \rho' = -\frac{3i}{32}, \qquad 10g = -\frac{15}{64}, \qquad k = \frac{3i}{32}.$$

Après cette substitution, les deux premières se réduisent à une seule

$$Am^2 = Bl^2,$$

d'où, en introduisant une indéterminée γ,

$$A = \gamma l^2, \qquad B = \gamma m^2.$$

On a donc une solution du problème en prenant

$$X = l e^{i\frac{x}{2}} + \gamma l^2 e^{ix}, \qquad Y = m e^{-i\frac{y}{2}} + \gamma m^2 e^{-iy},$$

et remplaçant, dans la formule générale,

$$T = \frac{-(2r + 2h - 3i)(r - h)(le^{rt} - me^{-rt})(Ae^{ht} - Be^{-ht})}{(4i - 3r - 3h)(Ble^{(r-h)t} - Ame^{-(r-h)t}) + 3(r - h)(Ale^{(r+h)t} - Bme^{-(r+h)t})},$$

les paramètres r, h, A, B par leurs expressions actuelles. On trouve ainsi, en supprimant le facteur $(le^{rt} - me^{-rt})$, commun aux deux termes de la fraction,

$$T = \frac{3i}{2}\,\frac{l^2 e^{i\frac{t}{2}} - m^2 e^{-i\frac{t}{2}}}{3\left(l^2 e^{i\frac{t}{2}} + m^2 e^{-i\frac{t}{2}}\right) + 10\,lm} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{l^2 e^{i\frac{t}{2}} + m^2 e^{-i\frac{t}{2}}}{2} + \frac{5}{3}\,lm\right).$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons faire $l = m = 1$; d'où la solution

$$T = \frac{d}{dt}\log\left(\cos\frac{t}{2} + \frac{5}{3}\right), \qquad X = e^{i\frac{x}{2}} + \gamma e^{ix}, \qquad Y = e^{-i\frac{y}{2}} + \gamma e^{-iy},$$

et l'élément linéaire

$$ds^2 = C\, e^{-i(x-y)}\left(\cos\frac{x+y}{2} + \frac{5}{3}\right) dx\, dy,$$

qu'on peut écrire aussi

$$ds^2 = \frac{8C}{3}\, e^{-i(x-y)}\left(\sin^6\frac{x+y}{8} + \cos^6\frac{x+y}{8}\right) dx\, dy.$$

Sous cette forme, on reconnaît un individu de la famille

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\left(\alpha \sin^m\frac{x+y}{m+2} + \beta\cos^m\frac{x+y}{m+2}\right) dx\, dy,$$

trouvée au Chapitre I (n° 4). Effectuons le changement de variables

$$dx' = -\frac{i\,dx}{4\sqrt{e^{\frac{ix}{2}} + \gamma e^{ix}}}, \qquad dy' = \frac{i\,dy}{4\sqrt{e^{-\frac{iy}{2}} + \gamma e^{-iy}}}.$$

Nous avons, tous calculs faits,

$$ds^2 = C'\left\{(x'+y')^2[(x'+y')^2 - 4\gamma]^2 - (x'-y')^2[(x'-y')^2 - 4\gamma]^2\right\} dx'\, dy',$$

et, comme γ est une constante arbitraire, l'élément linéaire considéré est doublement harmonique. (Lemme de la page 147.)

Résumons les résultats obtenus dans le premier cas de la deuxième hypothèse ($h = 2r$).

1°
$$r = \frac{2i}{5}, \qquad h = \frac{4i}{5}, \qquad \mathrm{B} = 0;$$

$$\mathrm{T} = \frac{3i}{5}\,\frac{le^{\frac{2i}{5}t} - me^{-\frac{2i}{5}t}}{3\,le^{\frac{2i}{5}t} + me^{-\frac{2i}{5}t}}, \qquad \mathrm{X} = le^{\frac{4i}{5}x} + \mathrm{A}\,e^{\frac{8i}{5}x}, \qquad \mathrm{Y} = me^{-\frac{4i}{5}y};$$

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\,e^{i\frac{x+y}{5}}\left(1 + e^{-4i\frac{x+y}{5}}\right)dx\,dy,$$

$$ds^2 = \mathrm{C}\left\{(x'+y')^3 + (x'-y')^3 + \tfrac{75}{4}\mathrm{A}\left[(x'+y') + (x'-y')\right]\right\}dx'\,dy'.$$

2°
$$r = \frac{i}{3}, \qquad h = \frac{2i}{3}, \qquad \mathrm{AB}\,lm \neq 0;$$

$$\mathrm{T} = \frac{i}{3}\,\frac{le^{i\frac{t}{3}} - me^{-i\frac{t}{3}}}{le^{i\frac{t}{3}} + me^{-i\frac{t}{3}}}, \qquad \mathrm{X} = le^{\frac{2i}{3}x} + \mathrm{A}\,e^{\frac{4i}{3}x}, \qquad \mathrm{Y} = me^{-\frac{2i}{3}y} + \mathrm{B}\,e^{-\frac{4i}{3}y};$$

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\cos\frac{x+y}{3}\,dx\,dy,$$

$$ds^2 = \mathrm{C}\left\{(x'+y')^4 - (x'-y')^4 + 18(\mathrm{A}+\mathrm{B})\left[(x'+y')^2 - (x'-y')^2\right]\right\}dx'\,dy'.$$

3°
$$r = \frac{i}{4}, \qquad h = \frac{i}{2}, \qquad \mathrm{AB}\,lm \neq 0;$$

$$\mathrm{T} = \frac{3i}{2}\,\frac{l^2e^{\frac{it}{2}} - m^2e^{-\frac{it}{2}}}{3\left(l^2e^{\frac{it}{2}} + m^2e^{-\frac{it}{2}}\right) + 10\,lm}, \quad \mathrm{X} = le^{i\frac{x}{2}} + \gamma\,l^2e^{ix}, \quad \mathrm{Y} = me^{-i\frac{y}{2}} + \gamma m^2e^{-iy};$$

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\left(\cos\frac{x+y}{2} + \frac{5}{3}\right)dx\,dy$$

$$= \frac{8}{3}e^{-i(x-y)}\left(\sin^6\frac{x+y}{8} + \cos^6\frac{x+y}{8}\right)dx\,dy,$$

$$ds^2 = \mathrm{C}\left\{(x'+y')^2\left[(x'+y')^2 - 4\gamma\right]^2 - (x'-y')^2\left[(x'-y')^2 - 4\gamma\right]^2\right\}dx'\,dy'.$$

Nous avons laissé figurer dans ce Tableau des paramètres arbitraires dont le nombre peut être (et a été) réduit. C'est afin de pouvoir écarter sans nouveau calcul le cas $r = 2h$, corrélatif du premier. Sachant que les solutions correspondantes se déduisent des solutions ci-dessus par le changement de r en h et de h en r, de l en A et de A en l, de m en B et de B en m, on voit immédiatement qu'elles n'en diffèrent que par les notations. Elles ne conduisent donc à aucun élément linéaire nouveau.

11''. *Second cas.* — Nous supposons $h = -2r$. Alors l'équation qu'il s'agit de rendre identique devient

$$\begin{aligned}
&\left\{ 10[g-k(r+h-i)]\mathrm{AB}\,l^2 + [k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]\mathrm{B}^2 m^2 \right\} e^{2rt}\\
+&\left\{ 10[g-k(r+h-i)]\mathrm{AB}\,m^2 + [k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]\mathrm{A}^2 l^2 \right\} e^{-2rt}\\
-&\, 10\,lm[g+k(r+h-i)]\,\mathrm{B}^2 e^{4rt} - 10\,lm[g+k(r+h-i)]\,\mathrm{A}^2 e^{-4rt}\\
+&\,[k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)](\mathrm{B}^2 l^2 e^{6rt} + \mathrm{A}^2 m^2 e^{-6rt})\\
&\qquad + 2\mathrm{AB}\,lm[10k(r+h-i)+\rho(3r+3h-4i)+3\rho'(r-h)] = 0.
\end{aligned}$$

D'après un raisonnement déjà fait, nous devons égaler à zéro les coefficients de chaque exponentielle et le terme constant. D'où sept équations

$$\begin{gathered}
10[g-k(r+h-i)]\mathrm{AB}\,l^2 + [k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]\mathrm{B}^2 m^2 = 0,\\
10[g-k(r+h-i)]\mathrm{AB}\,m^2 + [k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]\mathrm{A}^2 l^2 = 0,\\
\mathrm{A}^2 lm[g+k(r+h-i)] = 0, \qquad [k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]\mathrm{B}^2 l^2 = 0,\\
\mathrm{B}^2 lm[g+k(r+h-i)] = 0, \qquad [k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)]\mathrm{A}^2 m^2 = 0,\\
\mathrm{AB}\,lm[10k(r+h-i)+\rho(3r+3h-4i)+3\rho'(r-h)] = 0.
\end{gathered}$$

Il faut distinguer suivant que $\mathrm{AB}lm$ est nul ou différent de zéro.

Supposons d'abord $\mathrm{AB}lm = 0$ et rappelons-nous que, quand un des facteurs de ce produit est nul, les trois autres sont différents de zéro. En faisant $l = 0$ ou $m = 0$, on trouve trois équations que nous écrivons dans la colonne de gauche; en faisant $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$, on trouve les trois que nous écrivons dans la colonne de droite

$$\begin{aligned}
10g - 10k(r+h-i) &= 0, & 10g + 10k(r+h-i) &= 0,\\
k(5r+5h-3i) - 3\rho'(r-h) &= 0, & k(5r+5h-3i) - 3\rho'(r-h) &= 0,\\
k(5r+5h-7i) - \rho(3r+3h-4i) &= 0, & k(5r+5h-7i) - \rho(3r+3h-4i) &= 0.
\end{aligned}$$

Ces deux systèmes sont précisément ceux que nous avons discutés dans le premier cas de la première hypothèse. Pris dans leur ensemble, ils n'ont de solution que quand $r + h = 0$, ce qui ne se peut ici; quand $r + h = i$, ce qui entraînerait soit $r = 2h$, soit $h = 2r$; ou quand

$r+h=\frac{6i}{5}$, ce qui entraînerait aussi soit $r=2h$, soit $h=2r$. La présente supposition $ABlm=0$ doit donc être écartée.

Soit maintenant $ABlm \neq 0$. Les sept équations du problème se réduisent aux cinq suivantes :

$$(1)\qquad 10[g-k(r+h-i)]Al^2+[k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]Bm^2=0,$$

$$(2)\qquad 10[g-k(r+h-i)]Bm^2+[k(5r+5h-3i)-3\rho'(r-h)]Al^2=0,$$

$$(3)\qquad g+k(r+h-i)=0,$$

$$(4)\qquad k(5r+5h-7i)-\rho(3r+3h-4i)=0,$$

$$(5)\qquad 10k(r+h-i)+\rho(3r+3h-4i)+3\rho'(r-h)=0.$$

Nous allons montrer que les trois dernières sont incompatibles avec notre hypothèse $h=-2r$. En effet, la troisième n'est autre que

$$(3')\qquad 10k(r+h-i)+3\rho(r-h)+\rho'(3r+3h-4i)=0.$$

Si on la retranche de la cinquième, on trouve

$$(3h-2i)(\rho-\rho')=0,$$

équation qui se décompose en deux. Pour la discuter, calculons par les formules générales les expressions de ρ, ρ' et k dans l'hypothèse $h=-2r$; nous trouvons

$$\begin{aligned} \rho &= -30r^3-43ir^2-9r-4i,\\ \rho' &= -30r^3+21ir^2-9r,\\ k &= -9r^2(2r+3i). \end{aligned}$$

Cela posé, faisons $\rho=\rho'$; nous aurons, en rapprochant les deux formules ci-dessus,

$$16r^2+1=0.$$

D'autre part, faisons $\rho'=\rho$ et $h=-2r$ dans les équations (4) et (5); il vient

$$\begin{aligned} k(5r+7i)-\rho(3r+4i)&=0,\\ 5k(r+i)\ -\rho(3r-2i)&=0. \end{aligned}$$

Comme k ne peut être nul, ces deux équations linéaires et homogènes en k et ρ entraînent

$$(5r+7i)(3r-2i)-5(r+i)(3r+4i)=0,$$

ou bien $12r + 17i = 0$, ce qui est contradictoire avec le résultat précédent $4r \pm i = 0$. Ainsi $\rho - \rho'$ ne peut pas être supposé nul.

Soit maintenant $3h - 2i = 0$. Nous déduisons de là

$$h = \frac{2i}{3}, \qquad r = -\frac{i}{3}.$$

Avec cette valeur de r, les formules précédentes donnent

$$\rho = \frac{24i}{9}, \qquad k = \frac{7i}{3}.$$

Substituant dans l'équation (4), on arrive à cette impossibilité $14 = 9$. On ne peut donc pas non plus supposer $3h - 2i = 0$.

En résumé, le second cas de la deuxième hypothèse ($h = -2r$) ne donne rien. Le cas corrélatif $r = -2h$ ne donnera rien non plus, pour des raisons de symétrie déjà exposées plus haut.

12. Troisième hypothèse. — Certains exposants sont nuls. Les huit exposants $\pm r$, $\pm h$, $\pm(r - h)$, $\pm(r + h)$ ne donnent lieu qu'à trois suppositions

$$r = 0, \qquad h = 0, \qquad r + h = 0,$$

puisque $r - h$ est essentiellement différent de zéro.

Premier cas. — Nous supposons $h = 0$. Alors l'équation à rendre identique devient

$$\begin{aligned} &\{10AB[g - k(r - i)] + B^2[k(5r - 7i) - \rho(3r - 4i)] + A^2[k(5r - 3i) - 3\rho' r]\}\, l^2 e^{2rt} \\ +&\{10AB[g - k(r - i)] + A^2[k(5r - 7i) - \rho(3r - 4i)] + B^2[k(5r - 3i) - 3\rho' r]\}\, m^2 e^{-2rt} \\ &- 10lm(A^2 + B^2)[g + k(r - i)] + 2AB\,lm[10k(r - i) + \rho(3r - 4i) + 3\rho' r] = 0 \end{aligned}$$

Avant d'égaler à zéro les coefficients des deux exponentielles et le terme constant, introduisons l'hypothèse $h = 0$ dans la formule générale qui donne T; il vient

$$T = \frac{r(2r - 3i)(B - A)(le^{rt} - me^{-rt})}{[(4i - 3r)B + 3Ar]le^{rt} - [(4i - 3r)A + 3Br]me^{-rt}},$$

ce qui montre qu'on ne peut supposer ni $r = 0$, ni $2r - 3i = 0$, ni

$B = A$, parce que T serait nul; ni $l = 0$, ni $m = 0$, ni $3r - 2i = 0$, parce que T serait constant.

Puisque l et m sont différents de zéro, les trois équations du problème seront

$$(1)\quad 10AB[g - k(r-i)] + B^2[k(5r-7i) - \rho(3r-4i)] + A^2[k(5r-3i) - 3\rho' r] = 0,$$

$$(2)\quad 10AB[g - k(r-i)] + A^2[k(5r-7i) - \rho(3r-4i)] + B^2[k(5r-3i) - 3\rho' r] = 0,$$

$$(3)\quad -10(A^2+B^2)[g + k(r-i)] + 2AB[10k(r-i) + \rho(3r-4i) + 3\rho' r] = 0.$$

Retranchons la seconde de la première; nous trouvons

$$[4ik - 3\rho' r + (3r-4i)\rho](A^2 - B^2) = 0.$$

L'hypothèse $A - B = 0$ étant exclue, nous allons égaler successivement à zéro la somme $A + B$ et l'expression entre crochets. Auparavant donnons les expressions de ρ, ρ', g et k dans le cas actuel $h = 0$:

$$\rho = 2r^3 + ir^2 + 9r - 4i, \qquad \rho' = 2r^3 - 7ir^2 - 3r, \qquad k = r^2(2r - 3i).$$

Faisons maintenant $B = -A$. Les équations (1) et (2) n'en font plus qu'une; débarrassée du facteur A, qui n'est pas nul, elle s'écrit

$$(1')\qquad -10g + 20k(r-i) - (3r-4i)\rho - 3\rho' r = 0;$$

de même l'équation (3) devient

$$(3')\qquad 10g + 20k(r-i) + (3r-4i)\rho + 3\rho' r = 0.$$

Ajoutant et retranchant ces deux équations, nous aurons

$$r - i = 0, \qquad 10g + (3r-4i)\rho + 3\rho' r = 0.$$

Mais, d'après la définition de g, nous avons présentement

$$-10g + (3r-4i)\rho' + 3\rho r = 0.$$

La comparaison des deux derniers résultats conduit à

$$(3r - 2i)(\rho + \rho') = 0,$$

et, comme on a vu que $3r - 2i$ n'est pas nul, il nous reste

$$r = i, \qquad \rho + \rho' = 0.$$

Or ces équations sont incompatibles; car, d'après les expressions trouvées pour ρ et ρ', il vient

$$\rho + \rho' = 4r^3 - 6ir^2 + 6r - 4i = 4(r+i)\left(r - \frac{i}{2}\right)(r - 2i),$$

polynôme qui ne s'annule pas pour $r = i$. Ainsi la supposition $A + B = 0$ doit être écartée.

Faisons enfin la supposition

$$4ik - 3\rho' r + (3r - 4i)\rho = 0.$$

En remplaçant ρ, ρ' et k par leurs valeurs connues, on trouve

$$f(r) = 6ir^3 + 13r^2 - 12ir - 4 = 0.$$

En vertu de cette condition, les équations (1) et (2) n'en font qu'une. Nous les remplacerons par celle qu'on obtient en les ajoutant membre à membre

$$(1') \quad 2AB[10g - 10k(r-i)] + (A^2 + B^2)[10k(r-i) - \rho(3r - 4i) - 3\rho' r] = 0.$$

Rappelons l'équation (3)

$$(3) \quad 2AB[10k(r-i) + \rho(3r-4i) + 3\rho' r] - (A^2 + B^2)[10g + 10k(r-i)] = 0,$$

et ajoutons-la membre à membre avec la précédente; il vient

$$-(A - B)^2[10g + \rho(3r - 4i) + 3\rho' r] = 0.$$

Supprimons le facteur $A - B$, qui ne peut être nul, et tenons compte de la définition de g

$$10g = \rho'(3r - 4i) + 3\rho r;$$

nous trouvons ainsi

$$(3r - 2i)(\rho + \rho') = 0,$$

ce qui revient à $\rho + \rho' = 0$, puisque $3r - 2i$ n'est pas nul. En définitive, nous avons à comparer les deux équations

$$\rho + \rho' = 4(r+i)\left(r - \frac{i}{2}\right)(r - 2i) = 0,$$
$$f(r) = 6ir^3 + 13r^2 - 12ir - 4 = 0.$$

En substituant les trois racines de la première dans la seconde, on reconnaît que ces deux équations sont incompatibles.

Donc, au premier cas de la troisième hypothèse $h=0$ ne correspond aucune solution. Il est clair qu'il en est de même pour le cas corrélatif $r=0$.

Second cas. — Nous supposerons $r+h=0$. L'équation (Σ) qu'il s'agit de rendre identique devient

$$\begin{aligned}
&10\,\mathrm{B}\,l[\mathrm{A}\,l(g+ki)-\mathrm{B}\,m(g-ki)]\,e^{2rt}\\
&\quad+10\,\mathrm{A}\,m[\mathrm{B}\,m(g+ki)-\mathrm{A}\,l(g-ki)]\,e^{-2rt}\\
&\quad+(4i\rho-7ik)(\mathrm{B}^2l^2e^{4rt}+\mathrm{A}^2m^2e^{-4rt})\\
&\quad-3(ki+2\rho'r)(\mathrm{A}^2l^2+\mathrm{B}^2m^2)-2\,\mathrm{AB}\,lm(10ki+4i\rho-6\rho'r)=0.
\end{aligned}$$

Avant d'égaler à zéro les coefficients des quatre exponentielles et le terme constant, nous calculerons les valeurs actuelles de ρ, ρ', de k et de g; on trouve

$$\rho=-22ir^2-4i,\qquad \rho'=-6r(2r^2+1),\qquad k=-12ir^2,\qquad 10g=6r\rho-4i\rho',$$

d'où nous déduisons

$$ki+2\rho'r=-12r^4.$$

Écrivons seulement les trois équations qui expriment l'évanouissement des coefficients de e^{2rt} et de e^{-rt}, ainsi que du terme indépendant. Il viendra

$$\begin{gathered}
\mathrm{B}\,l\,[\mathrm{A}\,l(g+ki)-\mathrm{B}\,m(g-ki)]=0,\\
\mathrm{A}\,m[\mathrm{A}\,l(g-ki)-\mathrm{B}\,m(g+ki)]=0,\\
9r^4(\mathrm{A}^2l^2+\mathrm{B}^2m^2)-\mathrm{AB}\,lm(5ki+2i\rho-3\rho'r)=0.
\end{gathered}$$

Nous distinguerons suivant que le produit $\mathrm{AB}lm$ est nul ou différent de zéro.

Si $\mathrm{AB}lm=0$, l'un des quatre facteurs étant nul, on sait que les trois autres sont différents de zéro; mais alors la dernière équation écrite exige que r soit nul, ce qui ne se peut.

Si $\mathrm{AB}lm$ est différent de zéro, les deux premières équations, débarrassées des facteurs $\mathrm{B}l$ et $\mathrm{A}m$, sont linéaires et homogènes par rapport à $\mathrm{A}l$ et $\mathrm{B}m$, produits qui ne peuvent être nuls. Il faut donc égaler à zéro leur déterminant, ce qui donne

$$(g+ki)^2-(g-ki)^2=4igk=0.$$

Comme k n'est pas nul, il reste $g=0$, c'est-à-dire

$$3r\rho-2i\rho'=-54ir^3=0,$$

ce qui est impossible.

Ainsi, que $ABlm$ soit nul ou différent de zéro, l'hypothèse $r+h=0$ ne donne aucune solution.

13. Nous voici parvenu au terme de notre discussion. Nous avons reconnu que la première et la troisième hypothèse ne conduisaient à aucun résultat, et nous avons réuni dans un tableau tous ceux auxquels conduit la seconde. Il convient d'en rapprocher tous ceux que nous avions obtenus antérieurement pour présenter à la fois l'ensemble des solutions de notre problème. Nous les reproduisons dans l'ordre où elles se sont présentées.

1° *Premières solutions.*

$$(e)\qquad ds^2=e^{-i(x-y)}\left[e^{(x+y)\operatorname{tang}\alpha}-e^{-(x+y)\cot\alpha}\right]dx\,dy=\left[e^{a'(x'+y')}-e^{b'(x'-y')}\right]dx'\,dy'.$$

$$(l)\quad\left\{\begin{aligned}ds^2&=e^{-i(x-y)}\log\left(\gamma\operatorname{tang}\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy\\&=\left[\log(x'+y')-\log(x'-y')+\gamma'\right]dx'\,dy'.\end{aligned}\right.$$

$$(m)\quad\left\{\begin{aligned}ds^2&=e^{-i(x-y)}\left[\alpha\sin^m\frac{x+y}{m+2}-\beta\cos^m\frac{x+y}{m+2}\right]dx\,dy\\&=\left[a'(x'+y')^m-b'(x'-y')^m\right]dx'\,dy'.\end{aligned}\right.$$

2° *Éléments linéaires de surfaces de révolution.*

$$(r)\qquad ds^2=e^{-i(x-y)}\cos^m\frac{x+y}{m+2}\,dx\,dy=(x'+y')^m\,dx'\,dy'.$$

Un seul est doublement harmonique :

$$(r'')\qquad ds^2=e^{-i(x-y)}\cos\frac{x+y}{3}\,dx\,dy=(x'+y')\,dx'\,dy'.$$

3° Solutions provenant du système II.

$$ds^2 = e^{-i(x-y)} e^{-5i\frac{x+y}{4}} \cos\frac{3(x+y)}{4}\, dx\, dy$$
$$= \left\{ e^{i\frac{x'+y}{2}} - e^{-i\frac{x'+y}{2}} + \gamma'\left[e^{-i(x'+y)} - e^{i(x'+y)}\right] \right\} dx'\, dy,$$
$$= \left(e^{i\frac{x'+y}{2}} + e^{i(x'-y)} \right) dx'\, dy.$$

$$ds^2 = e^{-i(x-y)} e^{i\frac{x+y}{4}} \left(1 + e^{4i\frac{x+y}{8}}\right) dx\, dy$$
$$= \left\{ (x'+y')^3 + (x'-y')^3 + \gamma'[(x'+y') - (x'-y')] \right\} dx'\, dy'.$$

$$ds^2 = e^{-i(x-y)} \cos\frac{x+y}{3}\, dx\, dy$$
$$= \left\{ (x'+y')^4 - (x'-y')^4 + \gamma'[(x'+y')^2 + (x'-y')^2] \right\} dx'\, dy'.$$

$$ds^2 = e^{-i(x-y)} \left(\sin^6\frac{x+y}{8} + \cos^6\frac{x+y}{8} \right) dx\, dy$$
$$= \left\{ (x'+y')^2[(x'+y')^2 - \gamma']^2 - (x'-y')^2[(x'-y')^2 - \gamma']^2 \right\} dx'\, dy'.$$

Remarque. — La solution (r) rentre dans le type (m). La première des solutions 3° rentre sous sa dernière forme dans le type (e). Les trois suivantes rentrent pour $\gamma' = 0$ dans le type (m). On peut donc dire que le type (m), avec ses formes dégénérées, comprend *tous* les éléments linéaires de spirales harmoniques; mais il ne les représente pas tous sous leur forme la plus générale.

Distinction des spirales simplement harmoniques et des spirales doublement harmoniques.

14. Cette distinction va se faire sans difficulté, par la simple comparaison des résultats que rapproche le tableau précédent.

Rappelons d'abord que toutes les solutions 3° sont doublement harmoniques, en vertu du lemme énoncé p. 147 et démontré dans la Note ci-contre. A la vérité, pour les trois derniers éléments linéaires, deux valeurs différentes de l'arbitraire γ' ne donnent pas deux formes harmoniques différentes, si aucune d'elles n'est nulle, car on passera de l'une de ces formes à l'autre, en remplaçant x' et y' par des variables proportionnelles $x'' = kx'$, $y'' = ky'$; mais, si l'on se reporte au paragraphe 11', on verra que ces deux formes harmoniques se déduisent *aussi* l'une de l'autre par un changement de variables *autre* que $x''=kx'$, $y''=ky'$. Ce dernier est d'ailleurs inefficace quand l'une des deux valeurs de γ' est nulle.

La propriété de l'élément linéaire (r'') d'être doublement harmonique est manifestée par la troisième des solutions 3°.

Cela posé, je dis que les éléments linéaires provenant du système (II) sont les seuls qui soient doublement harmoniques. En effet, pour qu'un élément linéaire soit tel, il est bien connu qu'il doit acquérir la forme harmonique par un changement de variables où X et Y dépendent au moins d'une constante arbitraire autre qu'un facteur commun de proportionnalité. Or, notre discussion générale nous a fait connaître toutes les expressions possibles de X et Y; c'est seulement dans les systèmes (I) et (II) que ces expressions comportent une constante arbitraire. Un seul cas échappait à cette discussion, celui des éléments linéaires convenant à des surfaces de révolution; mais nous l'avons traité directement, et la solution correspondante (r'') coïncide avec l'avant-dernière des solutions 3°.

En résumé, l'élément linéaire (l) n'est jamais doublement harmonique; l'élément (e) est doublement harmonique pour $b'-2a'=0$; l'élément (m) pour $m=3$ avec $a'+b'=0$, pour $m=4$ avec $a'=b'$ et pour $m=6$ avec $a'=b'$.

Le problème que nous nous étions proposé est entièrement résolu.

NOTE.

Lemme de la page 147. — *Si un élément linéaire de surface spirale*

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\psi(x+y)\,dx\,dy$$

acquiert la forme harmonique par un changement de variables autre que

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{A e^{2rx}}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{B e^{-2ry}}},$$

où A, B *et* r *sont trois constantes dont la dernière peut être nulle, cet élément linéaire est doublement harmonique.*

On a, par hypothèse, l'identité

$$ds^2 = e^{-i(x-y)}\psi(x+y)\,dx\,dy = [\varphi(x'+y') - f(x'-y')]\,dx'\,dy'$$

quand on fait le changement de variables

$$x' = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad y' = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}}.$$

Changeant x en $x+c$ et y en $y-c$, c étant une constante quelconque, nous aurons évidemment

$$e^{-i[(x+c)-(y-c)]}\psi(x+c+y-c)\,d(x+c)\,d(y-c) = e^{-2ci}\,ds^2,$$
$$e^{-2ci}\,ds^2 = [\varphi(x''+y'') - f(x''-y'')]\,dx''\,dy'',$$

les fonctions φ et f étant les mêmes que plus haut, si nous posons

$$x'' = \int_{x_0+c}^{x+c} \frac{d(x+c)}{\sqrt{X(x+c)}}, \qquad y'' = \int_{y_0-c}^{y-c} \frac{d(y-c)}{\sqrt{Y(y-c)}}.$$

Grâce à ce dernier changement de variables, l'élément linéaire proposé se trouve donc ramené *d'une seconde manière* à la même forme harmonique.

Cette conclusion ne peut tomber en défaut que quand les deux arguments $x''+y''$ et $x''-y''$ sont respectivement proportionnels à $x'+y'$ et $x'-y'$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\frac{x''+y''}{x'+y'} = \frac{x''-y''}{x'-y'} = \text{const.} = \frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'}.$$

Mais cette proportionnalité entraîne

$$\frac{dx''}{dx'} = \frac{dy''}{dy'} = \text{const.}, \qquad \frac{X(x+c)}{X(x)} = \frac{Y(y-c)}{Y(y)} = \text{const.} = \chi(c).$$

Si la valeur commune $\chi(c)$ des deux rapports est l'unité, les deux fonctions X et Y se réduisent à des constantes. Sinon, nous aurons

$$\frac{1}{X}\,\frac{X(x+c) - X(x)}{c} = \frac{1}{Y}\,\frac{Y(y-c) - Y(y)}{c} = \frac{\chi(c)}{c} - 1;$$

d'où, en faisant tendre c vers zéro,

$$\frac{X'}{X} = -\frac{Y'}{Y} = \text{const.} = 2r,$$

ce qui donne bien

$$X = A\,e^{2rx}, \qquad Y = B\,e^{-2ry},$$

conformément à l'énoncé.