

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 10 (1893), p. 183-230

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__183_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POTENTIEL THERMODYNAMIQUE

ET LA

PRESSION HYDROSTATIQUE,

PAR P. DUHEM.

INTRODUCTION.

Nous avons indiqué ailleurs ⁽¹⁾ de quelle manière on pouvait déterminer la forme générale du potentiel thermodynamique interne d'un système dont la nature varie d'un point à l'autre d'une manière continue. Mais, préoccupé surtout des applications à l'électricité et au magnétisme, nous avons dû glisser rapidement sur quelques questions qui auraient nécessité une discussion rigoureuse; d'ailleurs cette discussion exigeait l'examen préalable d'un grand nombre de difficultés relatives aux principes de la Thermodynamique, et cet examen n'était pas à sa place dans un Ouvrage qui n'était pas consacré à cette branche de science.

Depuis l'époque où a paru l'Ouvrage dont nous parlons, nous avons repris l'étude détaillée de la Thermodynamique ⁽²⁾; les résultats obtenus dans cette étude nous permettent aujourd'hui d'aborder avec toute la rigueur et toute la généralité désirables la détermination du potentiel thermodynamique interne d'un système hétérogène.

Moyennant certaines hypothèses, que nous avons cherché à mettre

⁽¹⁾ *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. I, Liv. III, Chap. II.

⁽²⁾ *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII et t. IX).

clairement en évidence, on trouve que la forme générale de ce potentiel est la suivante :

$$\mathcal{F} = \int G \, dV + \frac{E}{2} \iint F \, dV \, dV'.$$

Chacune des intégrations s'étend au volume entier du système; G dépend des variables, telles que la température, la densité, etc., qui définissent les propriétés du système en un point de l'élément dV ; F dépend des propriétés de la matière en un point de l'élément dV et en un point de l'élément dV' ; toutefois, les températures T et T' en ces deux points n'y figurent pas.

Ce théorème domine l'étude de la Capillarité, de l'Électrostatique, du Magnétisme; nous en avons déjà fait de nombreuses applications et nous espérons en donner d'autres encore dans de prochains Mémoires. Dans ce Mémoire-ci, nous en faisons l'application à l'étude de l'équilibre des fluides.

Le cas le plus simple de l'Hydrostatique est celui où l'on suppose nulle la fonction F . Si l'on désigne par ρ la densité du fluide en un point de l'élément dV , la fonction G devient une simple fonction de ρ et de T , $\varphi(\rho, T)$ et le potentiel thermodynamique interne prend la forme

$$\mathcal{F} = \int \varphi(\rho, T) \, dV.$$

Dans ce cas, les divers éléments du fluide n'exercent les uns sur les autres aucune action. La plupart des propositions relatives à ce cas simple sont bien connues; nous en avons donné ailleurs⁽¹⁾ un exposé complet et rigoureux.

Un autre cas, plus général que le précédent, est celui où l'on a

$$EF = \rho\rho' \psi(r),$$

ρ et ρ' étant les densités des deux éléments dV , dV' et r leur distance. Dans ce cas, deux éléments, de masses dm et dm' , pris au sein du fluide, exercent l'un sur l'autre une action répulsive, soumise à la loi

(1) *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*. Cours professé à la Faculté des Sciences de Lille en 1890-1891. T. I, Liv. II.

de l'égalité entre l'action et la réaction, et ayant pour grandeur

$$dm \, dm' f(r) \quad \left[f(r) = - \frac{d\psi(r)}{dr} \right].$$

C'est à ce cas que se rapporte, en particulier, la théorie de la figure des planètes. La plupart des théorèmes généraux, vrais pour le premier cas, le sont également pour ce cas plus général.

Mais ce cas n'est pas le plus général qui se puisse concevoir; dans le cas le plus général, on a

$$EF = \rho \rho' \psi(\rho, \rho', r).$$

Dans ce cas, la force qu'exercent l'une sur l'autre deux particules de masses dm et dm' ne s'obtient plus en multipliant le produit de leurs masses par une fonction de leur seule distance; cette force est de la forme

$$dm \, dm' f(\rho, \rho', r) \quad \left[f(\rho, \rho', r) = - \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) \right].$$

On sait que M. Faye attribue précisément à une force de ce genre la formation de la queue des comètes.

Mais, et c'est là ce qui distingue le cas général des cas particuliers précédents, cette force ne représente pas, à elle seule, l'action totale de la particule dm' sur la particule dm : il faut y joindre une autre action qui est non plus une force, mais qui est ce que nous avons appelé ailleurs ⁽¹⁾ une *influence*; cette influence, qui tend à accroître la densité de l'élément dm , sans tendre à déplacer le centre de gravité de cet élément, a pour grandeur $-\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r) dm \, dm'$.

La masse dm exerce une influence analogue sur la masse dm' , en sorte que, pour avoir le travail total des *actions mutuelles* de ces deux masses, il faut ajouter au travail $-\frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) dm \, dm' \delta r$ de la *force mutuelle* le travail $-\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r) \delta \rho + \frac{\partial}{\partial \rho'} \psi(\rho, \rho', r) \delta \rho' \right] dm \, dm'$ des *influences réciproques*.

⁽¹⁾ *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, I^{re} Partie, Chap. III.

L'introduction de ce nouvel élément, que ne connaît pas la Mécanique rationnelle, montre que le problème de l'Hydrostatique, ainsi généralisé, échappe aux prises de la Statique classique; en revanche, il peut être abordé par la Thermodynamique, et l'étude de ce problème se montre féconde en résultats imprévus.

Le plus important de ces résultats, que nous avons déjà entrevu ailleurs (¹), est celui-ci :

Dans le cas général, la densité du fluide en un point n'est pas déterminée par la seule connaissance de la pression au même point.

Cette proposition fondamentale : *A une température donnée, la densité est une fonction déterminée de la pression*, proposition que les Traités d'Hydrostatique présentent comme une hypothèse première et universelle, n'est vraie que pour les deux cas particuliers que nous avons signalés tout d'abord.

Le résultat précédent peut encore se mettre sous la forme que voici :

Les surfaces d'égale pression ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.

A ce résultat, on peut en joindre deux autres :

Les surfaces équipotentielles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale pression.

Les surfaces équipotentielles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.

Deux de ces trois familles de surfaces : surfaces d'égale pression, surfaces d'égale densité, surfaces équipotentielles, ne coïncident que dans les deux cas particuliers énumérés tout d'abord, et alors elles coïncident toutes trois.

Des théorèmes fondamentaux de l'Hydrostatique classique, un seul demeure vrai pour le cas général; c'est celui-ci :

Une surface d'égale pression est normale en chaque point à la force, tant intérieure qu'extérieure, qui agit en ce point.

(¹) *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. I, pp. 355-359.

CHAPITRE I.

LE POTENTIEL THERMODYNAMIQUE INTERNE D'UN SYSTÈME CONTINU.

Considérons un corps, dont les propriétés varient d'un point à l'autre d'une manière continue ou discontinue, les discontinuités se produisant le long de certaines surfaces. Divisons ce corps en n parties, de telle façon que la nature de chacune de ces parties varie d'un point à l'autre d'une manière continue, les surfaces de discontinuité se trouvant au nombre des surfaces de division qui découpent le corps en ces n parties. Imaginons, en outre, que chacune de ces n parties ait une température uniforme, cette température n'étant pas forcément la même pour les diverses parties 1, 2, ..., n .

Nous supposons que ces n parties puissent être considérées isolément et que chacune d'elles soit divisible à l'infini en parties qui puissent, elles aussi, être considérées isolément.

Considérons isolément la partie 1. Supposons qu'elle admette un potentiel thermodynamique interne. Ce potentiel est susceptible d'une infinité de déterminations; soit \mathfrak{F}_1 une de ces déterminations; c'est une quantité dont la valeur est donnée lorsque l'état de la partie 1 est donné. L'énergie interne et l'entropie de cette partie 1 seront déterminées par les égalités

$$(1) \quad EY_1 = \mathfrak{F}_1 - T \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T},$$

$$(2) \quad E\Sigma_1 = - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T}.$$

Au sujet des parties 2, ..., n , nous pouvons répéter des considérations analogues.

Considérons simultanément les parties 1, 2, ..., n , en ne les supposant pas en contact. Leur ensemble admet pour potentiel thermodyna-

mique interne, pour énergie interne et pour entropie les quantités \mathcal{F} , \mathfrak{O} , s , déterminées par les égalités

$$(3) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \dots + \mathcal{F}_n + E\Psi,$$

$$(4) \quad \mathfrak{O} = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \dots + \Upsilon_n + \Psi,$$

$$(5) \quad s = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n,$$

dans lesquelles Ψ est une quantité dont la valeur est donnée lorsque l'état des diverses parties 1, 2, ..., n et leur position relative sont donnés; cette quantité Ψ tend vers zéro lorsque les diverses parties 1, 2, ..., n s'éloignent indéfiniment les unes des autres.

Lorsque les diverses parties 1, 2, ..., n sont au contact, le potentiel thermodynamique interne, l'énergie interne et l'entropie ont des valeurs qui sont les limites respectives vers lesquelles tendent les quantités \mathcal{F} , \mathfrak{O} , s , déterminées par les égalités (3), (4), (5), lorsque les parties 1, 2, ..., n , primitivement isolées, tendent à se mettre en contact.

Ce que nous venons de dire est très général; nous allons maintenant particulariser davantage, en introduisant quelques hypothèses.

La PREMIÈRE HYPOTHÈSE que nous ferons est une hypothèse sur la nature de laquelle nous avons déjà appelé l'attention dans un autre travail ⁽¹⁾; elle consiste à supposer que l'on a

$$(6) \quad \begin{aligned} \Psi = & \Psi_{12} + \Psi_{13} + \dots + \Psi_{1n} \\ & + \Psi_{23} + \dots + \Psi_{2n} \\ & + \dots + \dots \\ & + \Psi_{n-1,n}, \end{aligned}$$

Ψ_{ij} étant la fonction, analogue à Ψ , qui se rapporte au système que composeraient les deux parties i et j , si on les prenait seules; en sorte que le potentiel thermodynamique interne de ce dernier système aurait pour valeur

$$\mathcal{F}_i + \mathcal{F}_j + E\Psi_{ij}.$$

L'égalité (6) peut encore se mettre sous la forme suivante, dont nous

⁽¹⁾ *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, I^{re} Partie (*Journal de Mathématiques* de C. Jordan, t. VIII, p. 315; 1892).

qu'il est intéressant de considérer donneraient lieu à des raisonnements semblables à ceux que nous allons développer.

La fonction \mathcal{F}_i étant déterminée, quel que soit i , de manière à satisfaire à l'hypothèse précédente, nous admettrons que la fonction Ψ_{ij} satisfait à une TROISIÈME HYPOTHÈSE que voici :

Soient, autour de deux points déterminés M_i, M_j du système, deux particules i et j qui tendent à se réduire à zéro. Le rapport $\frac{\Psi_{ij}}{V_i V_j}$ demeure fini et, de plus, il tend vers une limite déterminée lorsque les deux volumes V_i, V_j sont obtenus par un mode déterminé de subdivision du système. Nous laisserons en suspens, pour le moment, la question de savoir si cette limite est la même quel que soit le mode de subdivision du système.

Enfin, nous ferons une QUATRIÈME HYPOTHÈSE.

Soit M_i un point du système; soit S une surface qui entoure le point M_i ; prenons un volume quelconque intérieur à cette surface et contenant le point M_i ; divisons ce volume d'une manière quelconque en un nombre quelconque de parties $i, a, b, \dots l$, dont l'une, i , renferme le point M_i . On peut toujours prendre la surface S assez voisine en tous ses points du point M_i pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(7) \quad |\Psi_{ia} + \Psi_{ib} + \dots + \Psi_{il}| \leq \varepsilon V_i,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Voyons quelles sont les conséquences de ces quatre hypothèses.

Nous allons prouver en premier lieu que le rapport $\frac{\mathcal{F}_i}{V_i}$ tend toujours vers la même limite, quel que soit le mode de division du système qui fait tendre vers zéro la particule entourant le point M_i .

Imaginons d'abord que l'on divise le système en cubes infiniment petits, qui ont leurs arêtes respectivement parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz , et dont la longueur d'arête décroît suivant une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Le rapport $\frac{\mathcal{F}_i}{V_i}$ tendra alors vers une limite finie et déterminée, qui dépendra uniquement de la position du point M_i . Si donc nous désignons par f_i et u les valeurs de \mathcal{F}_i

et V_i relatives à un tel petit cube, nous aurons

$$\lim \frac{f_i}{u} = G(x_i, y_i, z_i) = G_i,$$

G étant une fonction uniforme et continue des coordonnées x_i, y_i, z_i du point M_i , si, au voisinage de ce point, les propriétés de la matière varient d'une manière continue.

En vertu de notre quatrième hypothèse, autour de tout point M_j d'un certain domaine D dont fait partie le point M_i , on peut tracer une sphère qui jouisse de la propriété suivante :

Si, à l'intérieur de cette sphère, on prend un volume contenant le point M_j , et si on le divise en diverses parties j, a, b, \dots, l , dont l'une, j , contient le point M_j , on sera assuré que l'on a

$$|\Psi_{ja} + \Psi_{jb} + \dots + \Psi_{jl}| \leq \varepsilon V_j.$$

Le rayon de cette sphère dépend, en général, du point M_j que l'on choisit dans le domaine D ; mais, pour les divers points du domaine D , il admet une limite inférieure R , différente de zéro.

Du point M_i comme centre, décrivons une sphère de rayon inférieur à $\frac{R}{2}$. A l'intérieur de cette sphère, prenons un volume quelconque V_i , renfermant le point M_i , et divisons ce volume en parties quelconques $\alpha, \beta, \dots, \lambda$. Nous serons assuré d'avoir

$$\begin{aligned} |\Psi_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\gamma} + \dots + \Psi_{\alpha\lambda}| &\leq \varepsilon V_\alpha, \\ |\Psi_{\beta\alpha} + \Psi_{\beta\gamma} + \dots + \Psi_{\beta\lambda}| &\leq \varepsilon V_\beta, \\ &\dots\dots\dots, \\ |\Psi_{\lambda\alpha} + \Psi_{\lambda\beta} + \dots + \Psi_{\lambda\lambda}| &\leq \varepsilon V_\lambda, \end{aligned}$$

et, en remarquant que

$$\begin{aligned} V_\alpha + V_\beta + \dots + V_\lambda &= V_i, \\ |\Psi_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\gamma} + \dots + \Psi_{\alpha\lambda} &+ \Psi_{\beta\alpha} + \Psi_{\beta\gamma} + \dots + \Psi_{\beta\lambda} \\ + \dots\dots\dots &+ \Psi_{\lambda\alpha} + \Psi_{\lambda\beta} + \dots + \Psi_{\lambda\lambda}| \leq \varepsilon V_i. \end{aligned}$$

Ainsi, quelle que soit la forme du volume V_i qui entoure le point M_i et

quelle que soit la manière dont on l'a subdivisé en parties $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, on peut toujours prendre le volume V_i assez petit pour que l'on ait

$$(8) \quad \begin{aligned} & |\Psi_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\gamma} + \dots + \Psi_{\alpha\lambda} \\ & \quad + \Psi_{\beta\gamma} + \dots + \Psi_{\beta\lambda} \\ & \quad + \dots \dots \dots \\ & \quad + \Psi_{\alpha\lambda} | \leq \frac{\varepsilon}{2} V_i, \end{aligned}$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée d'avance.

Prenons un tel volume V_i . Soit \mathcal{F}_i son potentiel thermodynamique interne. Si nous traçons les petits cubes considérés, il renfermera certains de ces petits cubes $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, et, en outre, des parties résiduelles, μ, ν, \dots . Nous aurons, d'après l'égalité (3),

$$(9) \quad \mathcal{F}_i = f_\alpha + f_\beta + \dots + f_\lambda + \mathcal{F}_\mu + \mathcal{F}_\nu + \dots + E\Psi.$$

Le volume V_i ayant été pris assez petit pour que l'inégalité (8) soit satisfaite, nous sommes assurés d'avoir

$$(10) \quad |E\Psi| \leq \eta V_i,$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée d'avance.

En vertu de la deuxième hypothèse, on aura

$$|\mathcal{F}_\mu + \mathcal{F}_\nu + \dots| = K(V_\mu + V_\nu + \dots),$$

K étant un rapport qui demeure fini lorsque les volumes V_μ, V_ν, \dots tendent vers zéro; mais on peut pousser assez loin la division en cubes pour que le volume de la partie résiduelle ($V_\mu + V_\nu + \dots$) soit une fraction, aussi petite que l'on voudra, du volume V_i . On peut donc prendre les éléments cubiques assez petits pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(11) \quad |\mathcal{F}_\mu + \mathcal{F}_\nu + \dots| \leq \eta V_i.$$

En vertu de la deuxième hypothèse, on peut prendre les cubes $\alpha,$

β, \dots, λ assez petits pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(12) \quad \begin{cases} |f_\alpha - u G_\alpha| \leq \eta u, \\ |f_\beta - u G_\beta| \leq \eta u, \\ \dots\dots\dots, \\ |f_\lambda - u G_\lambda| \leq \eta u, \end{cases}$$

$G_\alpha, G_\beta, \dots, G_\lambda$ étant les valeurs de la fonction $G(x, y, z)$, en des points $M_\alpha, M_\beta, \dots, M_\lambda$ des cubes $\alpha, \beta, \dots, \lambda$.

La fonction $G(x, y, z)$ étant continue et les points $M_i, M_\alpha, M_\beta, M_\lambda$ étant tous intérieurs au volume V_i , on pourra toujours prendre celui-ci assez petit pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(13) \quad \begin{cases} |G_\alpha - G_i| \leq \eta, \\ |G_\beta - G_i| \leq \eta, \\ \dots\dots\dots, \\ |G_\lambda - G_i| \leq \eta. \end{cases}$$

Les inégalités (12) et (13) permettent d'écrire l'inégalité

$$|f_\alpha + f_\beta + \dots + f_\lambda - N u G(x_i, y_i, z_i)| \leq 2 \eta N u,$$

N étant le nombre des volumes cubiques que contient le volume V_i .

Mais la somme $N u$ des volumes cubiques que renferme le volume V_i ne pouvant surpasser ce volume V_i , l'inégalité précédente entraîne l'inégalité

$$(14) \quad |f_\alpha + f_\beta + \dots + f_\lambda - N u G(x_i, y_i, z_i)| \leq 2 \eta V_i.$$

L'égalité (9), jointe aux inégalités (10), (11) et (14), nous montre que l'on peut toujours prendre le volume V_i assez petit et pousser assez loin la subdivision en cubes pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(15) \quad |\bar{f}_i - N u G(x_i, y_i, z_i)| \leq 4 \eta V_i.$$

On peut toujours aussi pousser la subdivision en cubes assez loin pour que le volume résiduel $V_\mu + V_\nu + \dots = V_i - N u$ soit une fraction aussi petite que l'on voudra du volume V_i ; assez loin, par conséquent, pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(16) \quad \frac{V_i - N u}{V_i} \leq \frac{\eta}{|G(x_i, y_i, z_i)|}.$$

Les inégalités (15) et (16) nous montrent que l'on peut toujours prendre le volume V_i assez petit et pousser la subdivision en cubes assez loin pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(17) \quad |\bar{\mathcal{F}}_i - V_i G(x_i, y_i, z_i)| \leq 5\eta V_i.$$

Mais la valeur des deux membres de cette inégalité ne dépend plus que du volume V_i et nullement du degré auquel a été poussée la division en cubes. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Quelle que soit la forme du volume V_i , qui entoure le point $M_i(x_i, y_i, z_i)$, nous pouvons toujours assigner à ce volume une limite supérieure telle que, pour tout volume inférieur à cette limite, nous soyons assuré d'avoir

$$(17 \text{ bis}) \quad \left| \frac{\bar{\mathcal{F}}_i}{V_i} - G(x_i, y_i, z_i) \right| \leq 5\eta,$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Cette proposition entraîne, à titre de conséquence, le théorème que nous voulions démontrer :

Lorsque le volume V_i tend à s'évanouir au point M_i en passant par une suite quelconque de formes, le rapport $\frac{\bar{\mathcal{F}}_i}{V_i}$ tend vers une limite finie et déterminée, qui dépend d'une manière uniforme des coordonnées du point M_i , et qui varie d'une manière continue avec ces coordonnées, lorsque le point M_i se déplace dans une région où les propriétés de la matière varient d'une manière continue.

Ce théorème entraîne immédiatement cet autre :

Lorsque l'on augmente indéfiniment le nombre des parties en lesquelles le système est divisé, de manière que les dimensions de chacune de ces parties tendent vers zéro, la somme $(\bar{\mathcal{F}}_1 + \bar{\mathcal{F}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{F}}_n)$ tend vers une limite finie, dont la valeur est indépendante de la loi de subdivision adoptée, et l'on a

$$(18) \quad \lim (\bar{\mathcal{F}}_1 + \bar{\mathcal{F}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{F}}_n) = \int G(x, y, z) dV,$$

dV étant un élément de volume du système, (x, y, z) un point de cet élément, et l'intégrale s'étendant au volume entier du système.

Chacune des quantités $\frac{\Psi_{\alpha m}}{u V_m}, \dots, \frac{\Psi_{\lambda p}}{u V_p}$ tend vers une limite finie lorsque les volumes $u_\alpha, \dots, u_\lambda, V_m, \dots, V_p$ tendent vers zéro, la valeur de cette limite dépendant *peut-être* de la manière dont ces volumes tendent vers zéro. On peut donc poser

$$\Psi_{\alpha m} + \dots + \Psi_{\lambda p} = K N u (V_m + \dots + V_p),$$

N étant le nombre des cubes que renferme le volume V_i , et K un rapport qui demeure fini quelque loin que l'on pousse la division du système.

De même, on pourra poser

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu \alpha} + \dots + \Psi_{\pi i} &= K' N' u (V_\mu + \dots + V_\pi), \\ \Psi_{\mu m} + \dots + \Psi_{\pi p} &= K'' (V_\mu + \dots + V_\pi) (V_m + \dots + V_p), \end{aligned}$$

N' étant le nombre des cubes que renferme le volume V_j , et K', K'' étant des rapports analogues à K .

Mais $\frac{N u}{V_i}, \frac{N' u}{V_j}$ sont des rapports dont la valeur ne peut surpasser 1; on peut, d'autre part, pousser assez loin la division en cubes pour que les deux rapports

$$\frac{V_\mu + V_\nu + \dots + V_\pi}{V_i},$$

$$\frac{V_m + V_n + \dots + V_p}{V_j}$$

soient aussi voisins de zéro que l'on voudra.

Donc, les deux volumes V_i, V_j étant donnés d'une manière quelconque, on pourra pousser la division en cubes assez loin pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(21) \quad \begin{cases} |\Psi_{\alpha m} + \dots + \Psi_{\lambda p}| \leq \eta V_i V_j, \\ |\Psi_{\mu \alpha} + \dots + \Psi_{\mu i}| \leq \eta V_i V_j, \\ |\Psi_{\mu m} + \dots + \Psi_{\pi p}| \leq \eta V_i V_j, \end{cases}$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

D'autre part, en vertu de l'égalité (19), on peut toujours pousser

la division en cubes assez loin, pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi_{\alpha\alpha} - F_{\alpha\alpha} u^2| \leq \eta u^2, \\ \dots\dots\dots, \\ |\psi_{\lambda\lambda} - F_{\lambda\lambda} u^2| \leq \eta u^2. \end{array} \right.$$

Mais la fonction $F(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j)$ est une fonction continue de x_i, y_i, z_i et de x_j, y_j, z_j . Comme les points $M_\alpha, \dots, M_\lambda, M_i$ sont tous intérieurs au volume V_i et que les points $M_\alpha, \dots, M_\lambda, M_j$ sont tous intérieurs au volume V_j , on pourra toujours supposer que, avant toute division en cubes, on ait pris les volumes V_i, V_j assez petits pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F_{\alpha\alpha} - F_{ij}| \leq \eta, \\ \dots\dots\dots, \\ |F_{\lambda\lambda} - F_{ij}| \leq \eta. \end{array} \right.$$

Les inégalités (22) et (23) donnent l'inégalité

$$|\psi_{\alpha\alpha} + \dots + \psi_{\lambda\lambda} - NN' u^2 F_{ij}| \leq 2\eta NN' u^2.$$

Comme on a d'ailleurs

$$Nu \leq V_i, \quad N'u \leq V_j,$$

cette inégalité entraînera cette autre

$$(24) \quad |\psi_{\alpha\alpha} + \dots + \psi_{\lambda\lambda} - NN' u^2 F_{ij}| \leq 2\eta V_i V_j.$$

Cette inégalité, jointe à l'égalité (20) et à l'inégalité (21), entraîne le résultat suivant :

On peut toujours prendre les deux volumes V_i, V_j assez petits, puis, une fois ceux-ci choisis, pousser la subdivision en cubes assez loin, pour que l'on soit assuré d'avoir l'inégalité

$$(25) \quad |\Psi_{ij} - NN' u^2 F_{ij}| \leq 5\eta V_i V_j.$$

D'ailleurs, les volumes V_i, V_j étant donnés, on peut toujours pousser la division en cubes assez loin pour que l'on soit assuré d'avoir

$$\frac{V_i - Nu}{V_i} \leq \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{|F_{ij}|}}, \quad \frac{V_j - N'u}{V_j} \leq \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{|F_{ij}|}}$$

et, par conséquent,

$$(26) \quad |V_i V_j F_{ij} - NN' u^2 F_{ij}| \leq \eta V_i V_j,$$

inégalité qui, jointe à l'inégalité (25), donnera

$$(27) \quad |\Psi_{ij} - V_i V_j F_{ij}| \leq 6\eta V_i V_j.$$

Ainsi, on peut toujours, autour des deux points M_i, M_j , tracer deux volumes V_i, V_j assez petits, puis, une fois ces volumes choisis, les découper en cubes assez petits pour que l'inégalité (27) soit assurément satisfaite.

Mais la division du système en cubes infiniment petits et le degré auquel cette division est poussée n'influent en aucune façon sur la valeur des deux membres de l'inégalité (27); nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Quelle que soit la forme des volumes V_i, V_j qui entourent respectivement deux points donnés M_i, M_j , nous pouvons toujours assigner à ces volumes une limite supérieure telle que, pour tous les volumes V_i, V_j , inférieurs à cette limite, nous soyons assurés d'avoir l'inégalité

$$(27 \text{ bis}) \quad \left| \frac{\Psi_{ij}}{V_i V_j} - F(x_i, y_i, z_i; x_j, y_j, z_j) \right| \leq 6\eta,$$

η étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

De ce théorème découle la proposition que nous voulions démontrer.

Lorsque les deux volumes V_i, V_j tendent respectivement à s'évanouir aux points donnés M_i, M_j , en passant par une suite quelconque de formes, le rapport $\frac{\Psi_{ij}}{V_i V_j}$ tend vers une limite finie et déterminée; cette limite dépend d'une manière uniforme des coordonnées du point M_i et des coordonnées du point M_j ; elle varie d'une manière continue avec ces coordonnées, pourvu que les propriétés de la matière varient d'une manière continue dans le domaine du point M_i et dans le domaine du point M_j .

Ce théorème établi, nous allons nous proposer de démontrer la proposition suivante :

La fonction $F(x, y, z; x', y', z')$ est d'une nature telle que l'intégrale

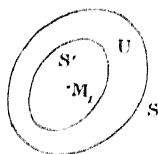
$$\int F(x, y, z; x', y', z') dV'$$

ait un sens même lorsque le point (x, y, z) fait partie du volume auquel s'étend l'intégration.

Cette proposition n'est nullement évidente de soi, car, si nous savons que la fonction $F(x, y, z; x', y', z')$ est finie et déterminée pour tout couple de points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, il n'est nullement démontré ni assuré que cette fonction tende vers une limite finie et déterminée lorsque le point M' tend vers le point M par un trajet quelconque.

Autour du point $M_1(x, y, z)$ (fig. 1), on peut toujours, en vertu de

Fig. 1.



notre quatrième hypothèse, tracer une surface S assez petite pour que l'on ait

$$(7 \text{ bis}) \quad |\Psi_{1\alpha} + \Psi_{1\beta} + \dots + \Psi_{1\lambda}| \leq \varepsilon V_1,$$

V_1 étant un volume intérieur à la surface S et contenant le point M_1 ; $V_\alpha, V_\beta, \dots, V_\lambda$ des volumes connexes avec le volume V_1 , qui, avec le volume V_1 , remplissent en tout ou en partie l'espace intérieur à la surface S , et ε une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

A l'intérieur de la surface S , traçons une autre surface quelconque S' . Nous pourrions toujours prendre le volume V_1 assez petit pour qu'il soit en entier contenu dans la surface S' . Soient $V_\alpha, \dots, V_\lambda$ d'autres volumes qui, avec le volume V_1 , achèvent de remplir la surface S' . Soient V_μ, \dots, V_π des volumes qui remplissent l'espace U compris entre les surfaces S et S' . L'inégalité précédente nous donnera

$$|\Psi_{1\alpha} + \dots + \Psi_{1\lambda} + \Psi_{1\mu} + \dots + \Psi_{1\pi}| \leq \varepsilon V_1$$

et aussi

$$|\Psi_{1\alpha} + \dots + \Psi_{1\lambda}| \leq \varepsilon V_1.$$

Ainsi, autour du point M_1 , on peut toujours tracer une surface fermée S assez petite pour que la propriété suivante soit vérifiée :

Quelle que soit la surface S' , intérieure à la surface S , dont on entoure le point M_1 , on pourra toujours prendre les volumes V_1, V_μ, \dots, V_π assez petits pour que l'on ait

$$(31 \text{ bis}) \quad \left| \int F(x_1, y_1, z_1, x', y', z') dV' \right| \leq 4\varepsilon,$$

l'intégrale s'étendant à l'espace U compris entre les surfaces S et S' , et ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Mais rien, dans la valeur du premier membre de l'inégalité (31 bis), ne dépend des dimensions des volumes V_1, V_μ, \dots, V_π ; nous pourrions donc remplacer l'énoncé précédent par celui-ci :

Autour du point M_1 , on peut toujours tracer une surface fermée S assez petite pour que l'on ait l'inégalité (31 bis), ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance, et l'intégrale s'étendant à l'espace compris entre la surface S et n'importe quelle autre surface S' , intérieure à la surface S et enveloppant le point M_1 .

C'est le caractère général, indiqué par M. du Bois-Reymond, pour reconnaître que l'intégrale

$$\int F(x, y, z, x', y', z') dV'$$

a un sens, même dans le cas où, le point (x, y, z) faisant partie du domaine auquel s'étend l'intégration, la fonction F pourrait cesser d'être, en ce point, déterminée, finie et continue. La proposition énoncée est donc démontrée.

Proposons-nous maintenant d'évaluer la limite vers laquelle tend la somme

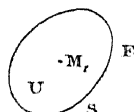
$$\Psi_{12} + \Psi_{13} + \dots + \Psi_{1n},$$

lorsque le nombre des parties en lesquelles le système a été divisé augmente au delà de toute limite, les dimensions de chacune de ces parties tendant vers zéro.

Soit $M_1(x_1, y_1, z_1)$ le point où le volume V_1 tend à s'évanouir. En-

tourons le point M_i d'une surface fermée S (fig. 2). Soient V_1, V_2, \dots, V_l les parties qui composent l'espace U intérieur à la surface S ; soient

Fig. 2.



V_m, \dots, V_n les parties en lesquelles est divisé l'espace E extérieur à la surface S . Nous aurons

$$(32) \quad \Psi_{12} + \Psi_{13} + \dots + \Psi_{1n} = \Psi_{12} + \dots + \Psi_{1l} + \Psi_{1m} + \dots + \Psi_{1n}.$$

En vertu de la quatrième hypothèse, nous pourrions toujours prendre la surface S assez petite pour avoir

$$(33) \quad |\Psi_{12} + \dots + \Psi_{1l}| \leq \varepsilon V_1,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance; et cela, quelles que soient les parties V_1, V_2, \dots, V_l , en lesquelles le volume U a été divisé.

D'autre part, nous pourrions toujours rendre les volumes V_1, V_m, \dots, V_n assez petits pour avoir

$$\begin{aligned} |\Psi_{1m} - F_{1m} V_1 V_m| &\leq \frac{\varepsilon}{E} V_1 V_m, \\ &\dots\dots\dots, \\ |\Psi_{1n} - F_{1n} V_1 V_n| &\leq \frac{\varepsilon}{E} V_1 V_n, \end{aligned}$$

$E = (V_m + \dots + V_n)$ étant le volume occupé par le système en dehors de la surface S . Ces inégalités donnent

$$(34) \quad |\Psi_{1m} + \dots + \Psi_{1n} - V_1 (F_{1m} V_m + \dots + F_{1n} V_n)| \leq \varepsilon V_1.$$

On peut aussi rendre les volumes V_m, \dots, V_n assez petits pour avoir

$$(35) \quad \left| F_{1m} V_m + \dots + F_{1n} V_n - \int_E F(x_1, y_1, z_1, x', y', z') dV' \right| \leq \varepsilon,$$

l'intégrale s'étendant à la partie E du système qui est extérieure à la surface S .

Mais, d'après le théorème que nous venons de démontrer, lorsque la surface S tend, par une suite quelconque de formes, à s'évanouir au point M_i , l'intégrale

$$\int_E F(x_1, y_1, z_1, x', y', z') dV'$$

tend vers une limite finie et déterminée qui est, par définition, l'intégrale

$$\int_{(E+U)} F(x_1, y_1, z_1, x', y', z') dV',$$

étendue au volume entier du système. Cette intégrale est une fonction des coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M_i , variable d'une manière continue avec x_1, y_1, z_1 , si les propriétés de la matière varient d'une manière continue au voisinage du point M_i . Si donc nous posons

$$(36) \quad W(x_1, y_1, z_1) = \int F(x_1, y_1, z_1, x', y', z') dV',$$

l'intégrale s'étendant au volume entier du système, nous serons assuré que l'on peut prendre la surface S assez petite pour avoir

$$(37) \quad \left| W(x_1, y_1, z_1) - \int_E F(x_1, y_1, z_1, x', y', z') dV' \right| \leq \varepsilon.$$

L'ensemble des égalités et inégalités (32), (33), (34), (35) et (37) conduit au résultat suivant :

On peut toujours prendre assez petites, d'une part, la surface S qui entoure le point M_i et, d'autre part, les dimensions des parties en lesquelles le système est divisé pour avoir

$$(38) \quad |\Psi_{12} + \Psi_{13} + \dots + \Psi_{1n} - V_1 W(x_1, y_1, z_1)| \leq 4\varepsilon V_1,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Mais les valeurs des deux membres de l'inégalité (38) sont entièrement indépendantes des dimensions attribuées à la surface S . Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Il est toujours possible de pousser assez loin la division du système pour que l'inégalité (38) soit vérifiée.

CHAPITRE II.

EXPRESSION DU POTENTIEL THERMODYNAMIQUE EN FONCTION
DES PROPRIÉTÉS DE LA MATIÈRE EN CHAQUE POINT.

La matière qui forme un système peut être *isotrope* ou *non isotrope*.

En tout point M d'une matière non isotrope, un trièdre trirectangle ($M\xi, M\eta, M\zeta$) est donné, qui définit l'*orientation* de la matière en ce point; cette orientation peut d'ailleurs varier d'un point à l'autre soit d'une manière continue, soit, le long de certaines surfaces, d'une manière discontinue. Si une portion de matière se déplace de manière que ses divers points gardent des positions relatives invariables, et que ses propriétés demeurent invariables, le trièdre qui marque l'orientation de la matière en chaque point est entraîné dans ce mouvement.

L'état de la matière au point M est défini par un certain nombre, que nous supposerons fini, de variables algébriques et de grandeurs géométriques; chacune de ces dernières intervient, dans la définition de cet état, non seulement par sa valeur, mais encore par sa direction par rapport au trièdre ($M\xi, M\eta, M\zeta$); en d'autres termes, chacune d'elles intervient par ses trois composantes suivant $M\xi, M\eta, M\zeta$.

Lorsqu'on aura affaire à une substance isotrope, on pourra attribuer à chaque point un trièdre d'orientation; mais le choix de ce trièdre sera arbitraire et, parmi les conséquences auxquelles on parviendra, on ne devra retenir que ceux qui sont indépendantes de l'orientation attribuée en chaque point à ce trièdre.

Imaginons une portion de matière. L'état de cette portion de la matière est défini par son orientation en chaque point et par la valeur qu'ont, en chaque point, un certain nombre de variables parmi lesquelles est la température absolue T. Les autres variables seront dites *normales* ⁽¹⁾ si elles possèdent la propriété suivante : la portion considérée de la matière ayant la même température en tous ses points, et

⁽¹⁾ P. DUHEM, *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, III^e Partie (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IX).

étant placée en présence de corps étrangers quelconques, une variation infiniment petite de température que n'accompagne ni changement de forme de la portion considérée, ni changement des variables, autres que la température, qui définissent son état en chaque point, n'entraîne aucun travail des actions extérieures. Nous admettons que l'on peut toujours définir l'état de la matière au moyen de variables normales et nous supposons que l'on ait toujours fait choix de telles variables; c'est à cette condition seulement que les équations (1) et (2) sont exactes.

Ces principes brièvement posés, nous allons énoncer deux hypothèses qui se présentent pour ainsi dire d'elles-mêmes.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — M_1 est un point donné du système, situé dans une région de température uniforme; V_1 est un volume qui enferme le point M_1 ; ce volume, considéré isolément, admettrait un potentiel thermodynamique interne \mathcal{F}_1 ; si on le supposait rempli d'une matière *homogène* ayant en chaque point l'orientation et les propriétés qu'a la matière considérée au point M_1 , il admettrait un potentiel thermodynamique interne \mathcal{F}'_1 ; *on peut toujours prendre le volume V_1 assez petit pour que l'on ait*

$$(46) \quad |\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}'_1| \leq \varepsilon V_1,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

DEUXIÈME HYPOTHÈSE. — M_1, M_2 sont deux points donnés du système; chacun d'eux est situé dans une région de température uniforme; V_1 est un volume qui entoure le point M_1 et V_2 un volume qui entoure le point M_2 ; à l'ensemble de ces deux volumes correspond une fonction Ψ_{12} . Si l'on supposait le volume V_1 rempli d'une matière *homogène* ayant, en chaque point, l'orientation et les propriétés qu'a, au point M_1 , la matière qui remplit réellement le volume V_1 ; si l'on supposait le volume V_2 rempli d'une matière homogène ayant, en chaque point, l'orientation et les propriétés qu'a, au point M_2 , la matière qui remplit réellement le volume V_2 , la fonction Ψ_{12} prendrait une valeur nouvelle Ψ'_{12} . *On peut toujours prendre les deux volumes V_1, V_2 assez petits pour que l'on ait*

$$(47) \quad |\Psi_{12} - \Psi'_{12}| \leq \varepsilon V_1 V_2,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Pour déduire les conséquences de la première hypothèse, donnons au volume V_1 la forme d'un cube ayant son centre au point M_1 et ses arêtes parallèles aux arêtes $M_1\xi_1$, $M_1\eta_1$, $M_1\zeta_1$, qui marquent l'orientation de la matière au point M_1 ; supposons ce cube homogène; le potentiel thermodynamique interne \mathcal{F}'_1 de ce cube, considéré isolément, doit être indépendant de la position de ce cube dans l'espace; il ne peut donc dépendre que des variables qui, avec la position qu'il occupe dans l'espace, achèvent de le faire connaître entièrement. Or il est évident que ces variables sont :

- 1° Le volume V_1 ;
- 2° La grandeur des paramètres algébriques $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, T_1$ qui définissent l'état de la matière au point M_1 ;
- 3° La grandeur des trois composantes $a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}$; ...; $l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}$ de chacune des grandeurs géométriques a_1, \dots, l_1 , qui définissent l'état de la matière au point M_1 .

On doit donc avoir

$$\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}'_1(\alpha_1, \dots, \lambda_1, T_1, a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}, \dots, l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}, V_1).$$

Mais on peut prendre le volume V_1 assez petit pour que l'on soit assuré d'avoir

$$(17) \quad |\mathcal{F}'_1 - G_1 V_1| \leq \varepsilon V_1,$$

et, partant, en vertu des inégalités (17) et (46),

$$\left| \frac{\mathcal{F}'_1}{V_1} - G_1 \right| \leq 2\varepsilon.$$

G_1 ne dépendant pas du volume V_1 , cette inégalité montre que, lorsque le volume V_1 tend vers zéro, $\frac{\mathcal{F}'_1}{V_1}$ tend vers une limite qui ne dépend pas de V_1 et qui ne peut dès lors dépendre que des variables $\alpha_1, \dots, \lambda_1, T_1, a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}, \dots, l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}$.

Par conséquent, la fonction G_1 dépend seulement : 1° des grandeurs des paramètres algébriques qui entrent dans la définition de l'état de la matière au point M_1 ; et 2° des trois composantes (suivant les axes qui

indiquent l'orientation de la matière au point M_1) des grandeurs géométriques qui définissent l'état de la matière en ce point.

Dans le cas particulier où la matière est isotrope, le choix des axes $M_1\xi_1$, $M_1\eta_1$, $M_1\zeta_1$ est arbitraire, et les variables que nous venons d'énumérer ne doivent entrer dans l'expression de G_1 que par des combinaisons indépendantes du choix de ces axes; donc, *dans le cas où la matière est isotrope au point M_1 , l'état de la matière en ce point étant défini par certains paramètres analytiques et par certaines grandeurs géométriques, G_1 dépend seulement de la valeur de chacune de ces variables et des angles que les grandeurs géométriques font deux à deux.*

Pour déduire les conséquences de la deuxième hypothèse, prenons le volume V_1 comme nous venons de le faire, et formons le volume V_2 , autour du point M_2 , par un procédé semblable.

La fonction Ψ'_{12} relative au système des deux cubes homogènes V_1 , V_2 ne doit pas dépendre de la position absolue dans l'espace du système formé par ces deux cubes; elle doit dépendre seulement des variables qui, jointes à cette position, achèvent de déterminer entièrement le système formé par ces deux cubes; encore les températures T_1 , T_2 des deux cubes n'y doivent-elles pas figurer.

Les variables qui déterminent Ψ'_{12} sont donc :

- 1° Les volumes V_1 , V_2 des deux cubes;
- 2° Trois paramètres θ , φ , ψ (par exemple, les trois angles d'Euler), permettant d'orienter les deux trièdres

$$(M_1\xi_1, M_1\eta_1, M_1\zeta_1) \quad \text{et} \quad (M_2\xi_2, M_2\eta_2, M_2\zeta_2)$$

l'un par rapport à l'autre;

- 3° La distance r des centres des deux cubes;

- 4° Les variables algébriques $\alpha_1, \dots, \lambda_1$ (mais non pas la température T_1) dont dépend l'état de la matière au point M_1 ;

- 5° Les composantes $a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}, \dots, l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}$, suivant $M_1\xi_1, M_1\eta_1, M_1\zeta_1$, des grandeurs géométriques a_1, \dots, l_1 , dont dépend l'état de la matière au point M_1 ;

- 6° Les variables algébriques $\alpha_2, \dots, \lambda_2$ (mais non pas la température T_2) dont dépend l'état de la matière au point M_2 ;

- 7° Les composantes $a_{2\xi}, a_{2\eta}, a_{2\zeta}, \dots, l_{2\xi}, l_{2\eta}, l_{2\zeta}$, suivant $M_2\xi_2,$

$M_2\eta_2$, $M_2\zeta_2$, des grandeurs géométriques a_2, \dots, l_2 , dont dépend l'état de la matière au point M_2 .

Autour des points M_1, M_2 , on peut toujours tracer deux volumes V_1, V_2 , assez petits pour avoir

$$(27) \quad |\Psi_{12} - F_{12} V_1 V_2| \leq \varepsilon V_1 V_2.$$

Cette inégalité, jointe à l'inégalité (47), montre que nous pourrons toujours prendre nos deux cubes assez petits pour avoir

$$\left| \frac{\Psi'_{12}}{V_1 V_2} - F_{12} \right| \leq 2\varepsilon.$$

De cette inégalité, on déduit sans peine la proposition suivante.

La fonction F_{12} dépend seulement :

- 1° *De la distance r des deux points M_1, M_2 ;*
- 2° *Des trois paramètres θ, φ, ψ , qui fixent l'orientation mutuelle des deux trièdres $(M_1\xi_1, M_1\eta_1, M_1\zeta_1)$ et $(M_1\xi_2, M_1\eta_2, M_1\zeta_2)$;*
- 3° *Des variables algébriques $\alpha_1, \dots, \lambda_1$ (mais non pas de la température T_1) dont dépend l'état de la matière au point M_1 ;*
- 4° *Des composantes $a_{1\xi}, a_{1\eta}, a_{1\zeta}, \dots, l_{1\xi}, l_{1\eta}, l_{1\zeta}$, suivant $M_1\xi_1, M_1\eta_1, M_1\zeta_1$, des grandeurs géométriques a_1, \dots, l_1 , dont dépend l'état de la matière au point M_1 ;*
- 5° *Des variables algébriques $\alpha_2, \dots, \lambda_2$ (mais non pas de la température T_2) dont dépend l'état de la matière au point M_2 ;*
- 6° *Des composantes $a_{2\xi}, a_{2\eta}, a_{2\zeta}, \dots, l_{2\xi}, l_{2\eta}, l_{2\zeta}$, suivant $M_2\xi_2, M_2\eta_2, M_2\zeta_2$, des grandeurs géométriques a_2, \dots, l_2 , dont dépend l'état de la matière au point M_2 .*

Le lecteur verra sans peine comment ces variables se réduisent dans le cas où la matière est isotrope soit autour de l'un des points M_1, M_2 , soit autour de tous deux.

Supposons que la quantité $\frac{\partial G}{\partial T}$ soit une fonction de (x, y, z) finie dans toute l'étendue du système, et continue dans toute région où les propriétés du système varient d'une manière continue. L'intégrale $\int \frac{\partial G}{\partial T} dV$ aura un sens; de plus, si le système est partagé en parties 1,

2, ..., n, ayant chacune une température uniforme, nous aurons

$$(48) \quad \int \frac{\partial G}{\partial T} dV = \frac{\partial}{\partial T_1} \int_1 G dV_1 + \frac{\partial}{\partial T_2} \int G dV_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial T_n} \int G dV_n.$$

Mais, d'autre part, en désignant par \mathcal{F}_1 le potentiel thermodynamique interne de la partie 1 considérée isolément, nous aurons [égalité (43 bis)]

$$\mathcal{F}_1 = \int_1 G dV_1 + \frac{E}{2} \int_1 \int_1 F dV_1 dV'_1.$$

La fonction F est indépendante de la température commune T, des deux éléments dV_1 , dV'_1 . Nous aurons donc

$$(49) \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} = \frac{\partial}{\partial T_1} \int_1 G dV_1$$

ou bien, en vertu de l'égalité (2),

$$E\Sigma_1 = -\frac{\partial}{\partial T_1} \int_1 G dV_1.$$

On a, de même,

$$E\Sigma_2 = -\frac{\partial}{\partial T_2} \int_2 G dV_2,$$

.....,

$$E\Sigma_n = -\frac{\partial}{\partial T_n} \int_n G dV_n.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (48) devient

$$\int \frac{\partial G}{\partial T} dV = -E(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n)$$

ou bien, en vertu de l'égalité (5),

$$(50) \quad Es = -\int \frac{\partial G}{\partial T} dV.$$

L'égalité (1) donne, en tenant compte de l'égalité (49),

$$EY_1 = \mathcal{F}_1 - T_1 \frac{\partial}{\partial T_1} \int_1 G dV_1.$$

On a, de même,

$$\begin{aligned} EY_2 &= \tilde{\mathcal{E}}_2 - T_2 \frac{\partial}{\partial T_2} \int_2 G dV_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ EY_n &= \tilde{\mathcal{E}}_n - T_n \frac{\partial}{\partial T_n} \int_n G dV_n. \end{aligned}$$

Ces égalités, ajoutées membre à membre, donnent

$$\begin{aligned} E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \\ = \tilde{\mathcal{E}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_2 + \dots + \tilde{\mathcal{E}}_n - \left(T_1 \frac{\partial}{\partial T_1} \int_1 G dV_1 + T_2 \frac{\partial}{\partial T_2} \int_2 G dV_2 + \dots + T_n \frac{\partial}{\partial T_n} \int_n G dV_n \right) \end{aligned}$$

ou bien

$$E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \tilde{\mathcal{E}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_2 + \dots + \tilde{\mathcal{E}}_n - \int T \frac{\partial G}{\partial T} dV.$$

Cette égalité, jointe aux égalités (3) et (4), donne

$$E\psi = \tilde{\mathcal{E}} - \int T \frac{\partial G}{\partial T} dV$$

ou bien, en vertu de l'égalité (43 bis),

$$(51) \quad E\psi = \int \left(G - T \frac{\partial G}{\partial T} \right) dV + \frac{E}{2} \int \int F dV dV'.$$

Les égalités (50) et (51) nous redonnent les résultats contenus dans les égalités (44) et (45); mais, de plus, elles nous enseignent que les fonctions K et H, qui figurent dans ces équations, sont liées à la fonction G par les relations

$$(52) \quad H = - \frac{\partial G}{\partial T},$$

$$(53) \quad K = G - T \frac{\partial G}{\partial T}.$$

Ce que nous avons dit dans ce Chapitre et dans le précédent n'exige pas que la température du système soit uniforme; mais, du moins, cela exige que le système soit décomposable en un nombre limité de parties ayant chacune une température uniforme; c'est, en effet, seulement dans ce cas que sont définies les fonctions s et $\tilde{\mathcal{E}}$ (*Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, III^e Partie, Chap. II, § 6 et

Chap. III, § 7). Mais, si nous considérons maintenant un système dont la température varie d'un point à l'autre d'une manière continue, rien n'empêche de former, pour un tel système, les fonctions \mathfrak{F} , s , \mathfrak{v} , données par les égalités

$$(43 \text{ bis}) \quad \mathfrak{F} = \int \mathbf{G} \, dV + \frac{\mathbf{E}}{2} \int \int \mathbf{F} \, dV \, dV',$$

$$(50) \quad \mathbf{E} s = - \int \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{T}} \, dV,$$

$$(51) \quad \mathbf{E} \mathfrak{v} = \int \left(\mathbf{G} - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{T}} \right) dV + \frac{\mathbf{E}}{2} \int \int \mathbf{F} \, dV \, dV',$$

et de leur étendre les propriétés des fonctions \mathfrak{F} , s , \mathfrak{v} , relatives à un système que l'on peut diviser en parties de température uniforme.

Cette extension, qui permet de traiter des systèmes dont la température varie d'un point à l'autre d'une manière continue, constitue une nouvelle *hypothèse*; mais cette hypothèse se présente si naturellement et les conséquences en sont si aisées à déduire que nous n'insisterons pas sur elle.

CHAPITRE III.

DE LA PRESSION DANS LES FLUIDES.

Les considérations précédentes sont très générales; nous allons maintenant nous occuper d'un cas plus restreint, qui aura l'avantage de nous fournir l'application à un exemple simple des théorèmes que nous venons d'établir.

Imaginons une substance isotrope, définie en chaque point par deux variables normales seulement, la température \mathbf{T} et la densité ρ ; celle-ci variera d'une manière continue à l'intérieur de certains espaces; mais ces espaces pourront confiner les uns aux autres par des surfaces de discontinuité; la matière remplissant chacun de ces espaces prend le nom de *fluide*.

Pour un fluide donné, la fonction G relative à un point (x, y, z) dépend seulement de la densité ρ et de la température T en ce point; nous pouvons poser

$$(54) \quad G = \zeta(\rho, T).$$

La forme de la fonction ζ dépend de la nature du fluide.

La fonction F relative à deux points (x, y, z) et (x', y', z') dépend de la densité ρ au point (x, y, z) ; de la densité ρ' au point (x', y', z') ; enfin de la distance r des deux points (x, y, z) et (x', y', z') ; nous pouvons poser

$$(55) \quad F = \frac{1}{E} \rho \rho' \psi(\rho, \rho', r).$$

La forme de la fonction ψ dépend de la nature du fluide auquel appartient le point (x, y, z) et de la nature du fluide auquel appartient le point (x', y', z') .

Si nous désignons par $dm = \rho dV$ et par $dm' = \rho' dV'$ les masses des deux éléments de volume dV, dV' , le potentiel thermodynamique interne d'un fluide pourra, en vertu des égalités (43 bis), (54) et (55), s'écrire

$$(56) \quad \mathcal{F} = \int \zeta(\rho, T) dm + \frac{1}{2} \iint \psi(\rho, \rho', r) dm dm'.$$

Considérons deux éléments de masses dm et dm' , dont $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ sont deux points, situés à une distance finie r ; l'ensemble de ces deux éléments forme un système dont le potentiel thermodynamique interne \mathcal{F} est donné par l'égalité

$$\mathcal{F} = \zeta(\rho, T) dm + \zeta'(\rho', T') dm' + \psi(\rho, \rho', r) dm dm'$$

et l'énergie interne \mathfrak{v} par l'égalité

$$\begin{aligned} E \mathfrak{v} = & \left[\zeta(\rho, T) - T \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} \right] dm \\ & + \left[\zeta'(\rho', T') - T' \frac{\partial \zeta'(\rho', T')}{\partial T'} \right] dm' + \psi(\rho, \rho', r) dm dm'. \end{aligned}$$

Si le système des deux éléments éprouve une modification infiniment petite, le dernier terme de l'expression de $E \mathfrak{v}$ éprouve une variation

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \delta x + \frac{\partial r}{\partial y} \delta y + \frac{\partial r}{\partial z} \delta z + \frac{\partial r}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial r}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial r}{\partial z'} \delta z' \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \delta \rho' \right] dm dm'.$$

Par définition (1), le travail des actions exercées par l'élément dm' sur l'élément dm a pour valeur

$$(57) \quad d\mathfrak{C} = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \partial x + \frac{\partial r}{\partial y} \partial y + \frac{\partial r}{\partial z} \partial z \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \partial \rho \right] dm dm'.$$

Le travail des actions exercées par l'élément dm sur l'élément dm' a, de même, pour valeur

$$(57 \text{ bis}) \quad d\mathfrak{C}' = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x'} \partial x' + \frac{\partial r}{\partial y'} \partial y' + \frac{\partial r}{\partial z'} \partial z' \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \partial \rho' \right] dm dm'.$$

La formule (57) nous montre que les *actions* de l'élément dm' sur l'élément dm se composent :

1° D'une *force*, dirigée de M' vers M , ayant pour grandeur

$$(58) \quad F = - \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) dm dm';$$

2° D'une *influence* (2), tendant à accroître la densité de l'élément dm ,

$$(59) \quad A = - \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r) dm dm'.$$

Les *actions* de l'élément dm sur l'élément dm' se composent, d'après la formule (57 bis) :

1° D'une *force*, dirigée de M vers M' , ayant pour grandeur

$$(58 \text{ bis}) \quad F' = - \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) dm dm';$$

cette force est égale et directement opposée à la force F , donnée par l'égalité (58);

2° D'une *influence*, tendant à accroître la densité de l'élément dm' ,

$$(59 \text{ bis}) \quad A' = - \frac{\partial}{\partial \rho'} \psi(\rho, \rho', r) dm dm'.$$

(1) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, I^{re} Partie, Chap. III, n° 2 (*Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 311; 1892).

(2), Sur la définition de ce mot, voir *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, loc. cit.

Les deux influences A et A' ne sont pas nulles en général; elles ne disparaissent que dans le cas particulier où la fonction $\psi(\rho, \rho', r)$ devient indépendante de ρ et de ρ' et où, par conséquent, elle se réduit à une fonction de la seule variable r . Si l'on pose alors

$$(60) \quad f(r) = - \frac{d\psi(r)}{dr},$$

la force répulsive qui s'exerce entre les deux masses élémentaires dm , dm' aura pour valeur, d'après les formules (58) et (58 bis),

$$(61) \quad F = dm \, dm' f(r),$$

f étant une fonction dont la forme dépend de la nature des deux fluides auxquels appartiennent les éléments dm , dm' . C'est dans ce cas particulier, très important, que se rangent, à titre de cas plus particuliers, les hypothèses faites par Newton tant sur *les forces qui déterminent la gravitation universelle* que sur *les actions moléculaires*; nous nommerons ce cas particulier le *cas de l'hypothèse newtonienne*.

Un cas plus particulier encore est celui où la fonction ψ devient indépendante non seulement des densités ρ et ρ' , mais encore de la distance r ; dans ce cas, comme la fonction ψ doit, par son origine même, être égale à zéro pour deux particules infiniment éloignées, elle sera identiquement nulle; le potentiel thermodynamique interne d'une masse fluide prendra non plus la forme générale (56), mais la forme

$$(62) \quad \mathcal{F} = \int \xi(\rho, T) \, dm;$$

deux éléments dm , dm' du fluide, n'exerceront plus l'un sur l'autre aucune action; c'est le cas que nous avons étudié en détail dans un autre Ouvrage ⁽¹⁾.

Revenons maintenant au cas général auquel correspond l'égalité (56) et proposons-nous de chercher, dans ce cas général, les conditions d'équilibre du fluide.

La première condition sera que la température ait, en tous les points du système, une même valeur égale à la température des corps exté-

(1) P. DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*; cours professé à la Faculté des Sciences de Lille en 1890-1891. Livre II : Les corps fluides.

rieurs. Cette première condition nous faisant connaître la température, nous pourrions ne plus faire figurer explicitement la lettre T dans l'expression de la fonction $\varphi(\rho, T)$.

Les conditions d'équilibre que nous cherchons s'obtiendront en exprimant que, dans toute modification isothermique virtuelle du système, on a

$$(63) \quad d\mathcal{E}_e \leq \partial\mathcal{F},$$

$d\mathcal{E}_e$ étant le travail des forces extérieures appliquées au système.

A l'égard de ce dernier travail, nous supposerons qu'il puisse être mis sous la forme

$$(64) \quad d\mathcal{E}_e = \int (X_e \partial x + Y_e \partial y + Z_e \partial z) dm \\ + \int P [\cos(P, x) \partial x + \cos(P, y) \partial y + \cos(P, z) \partial z] dS,$$

la première intégrale s'étendant aux divers éléments de masse du fluide et la seconde aux divers éléments de la surface qui le limite; les fonctions X_e , Y_e , Z_e peuvent dépendre non seulement des coordonnées (x, y, z) de la particule dm , mais encore de sa nature, de son état, de sa densité.

Nous commencerons par donner au fluide toutes les modifications virtuelles qui laissent invariables le volume et, partant, la densité de ses divers éléments. Pour ces modifications, nous traiterons la condition (63) comme nous l'avons fait dans notre *Cours d'Hydrodynamique* (Livre II, Chap. I, n^{os} 1, 2 et 3). Mais, dans ce cours, le potentiel thermodynamique interne était donné par l'expression (62), en sorte que, dans les modifications dont il s'agit, on avait

$$\partial\mathcal{F} = 0.$$

Ici au contraire, où le potentiel thermodynamique interne est donné par l'égalité générale (56), on aura

$$(65) \quad \partial\mathcal{F} = \frac{1}{2} \partial \int \int \psi(\rho, \rho', r) dm dm'.$$

Pour pousser plus avant la détermination de ce terme, nous nous appuierons sur trois hypothèses rendues nécessaires par ce fait que la

quantité $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ ne demeure pas en général dans un rapport fini avec la quantité $\psi(\rho, \rho', r)$, au voisinage du point $r = 0$.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — Soit $M(x, y, z)$ un point du fluide; soit r la distance du point (x', y', z') au point M ; soit $\lambda(x', y', z')$ une fonction quelconque de (x', y', z') qui demeure finie dans le voisinage du point (x, y, z) ; *quelle que soit cette fonction, on peut toujours entourer le point M d'une surface S assez petite pour que l'on ait*

$$\left| \int \lambda(x', y', z') \frac{\partial \psi}{\partial r} dm' \right| < \varepsilon;$$

l'intégrale s'étend à l'espace U compris entre la surface S et une surface quelconque S' , intérieure à S et enveloppant le point M ; ε est une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Faisons successivement

$$\lambda(x', y', z') = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z},$$

et appliquons le théorème fondamental de M. du Bois-Raymond; nous parviendrons au résultat suivant :

Les trois intégrales

$$(66) \quad \begin{cases} X_i = - \int \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial x} dm', \\ Y_i = - \int \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial y} dm', \\ Z_i = - \int \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial z} dm' \end{cases}$$

ont un sens alors même que le point (x, y, z) fait partie de la masse à laquelle s'étendent les intégrations.

Entourons le point (x, y, z) d'une surface S et supposons que, dans les formules précédentes, les intégrations s'étendent seulement à la masse extérieure à cette surface; les intégrales prendront alors des valeurs X'_i, Y'_i, Z'_i ; les composantes de la force exercée sur la particule dm par le fluide extérieur à la surface S auront pour valeurs,

d'après l'égalité (58),

$$X_i dm, \quad Y_i dm, \quad Z_i dm.$$

Si l'on suppose que la surface S , se contractant, vienne s'évanouir au point (x, y, z) , ces quantités tendront respectivement vers les limites

$$X_i dm, \quad Y_i dm, \quad Z_i dm.$$

C'est pourquoi nous donnerons aux quantités X_i , Y_i , Z_i , définies par les égalités (66), le nom de *composantes, au point (x, y, z) , de la force intérieure*.

DEUXIÈME HYPOTHÈSE. — *On peut toujours entourer le point M d'une surface S assez petite pour que l'on ait*

$$\left| \int \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r) dm' \right| \leq \varepsilon;$$

l'intégrale s'étend à l'espace U compris entre la surface S et une surface quelconque S', intérieure à S et enveloppant le point M; ε est une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Le théorème fondamental de M. E. du Bois-Reymond nous montre alors que l'intégrale

$$(67) \quad \kappa_0 = - \int \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r) dm'$$

a un sens lors même que le point (x, y, z) fait partie de la masse à laquelle s'étend l'intégration.

Une raison analogue à celle qui nous a fait nommer les quantités X_i , Y_i , Z_i les composantes, au point (x, y, z) de la force intérieure, nous fera nommer la quantité κ_0 *l'influence qui tend à accroître la densité au point M (x, y, z) .*

Considérons la fonction

$$(68) \quad V(x, y, z) = \int \psi(\rho, \rho', r) dm',$$

l'intégration s'étendant à la masse entière du fluide; cette fonction existe assurément, car elle n'est autre chose que le produit par $\frac{E}{\sigma}$ de

la fonction $W(x, y, z)$ définie en l'égalité (36). Au sujet de cette fonction, nous ferons l'hypothèse suivante :

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point situé dans une région où la densité ρ varie d'une manière continue; on peut toujours entourer le point M d'une surface S assez petite pour que l'on ait

$$(69) \quad \frac{|V_1(x, y, z) - V_1(x_0, y_0, z_0)|}{\overline{MM_0}} \leq \varepsilon;$$

ε est une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance; V_1 est défini par une égalité analogue à l'égalité (68), mais où l'intégration s'étend seulement à l'espace intérieur à la surface S ; (x, y, z) est n'importe quel point de cet espace.

Des trois hypothèses que nous venons d'énoncer, nous allons déduire la conséquence suivante :

Si, au voisinage du point (x, y, z) , la densité ρ admet des dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z}$, la fonction V admet, elle aussi, des dérivées partielles du premier ordre, et l'on a

$$(70) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -X_i - \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -Y_i - \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -Z_i - \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial z}. \end{cases}$$

Prenons un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et, autour de ce point, traçons une surface S assez petite pour que l'inégalité (69) soit satisfaite quel que soit le point $M(x, y, z)$ à l'intérieur de cette surface. Nous prendrons le point M sur une parallèle à l'axe des x menée par le point M_0 , et nous poserons

$$x - x_0 = \Delta x,$$

en sorte que nous aurons

$$\overline{MM_0} = |\Delta x|.$$

Nous pouvons poser

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0, z_0) &= V_1(x_0, y_0, z_0) + V_2(x_0, y_0, z_0), \\ V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) &= V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) + V_2(x_0 + \Delta x, y_0, z_0), \end{aligned}$$

la fonction $V_2(x, y, z)$ étant définie par une égalité analogue à l'égalité (68), mais où l'intégration s'étend à l'espace z , extérieur à la surface S .

Les égalités précédentes nous donnent

$$(71) \quad \begin{aligned} & \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \\ &+ \frac{V_2(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_2(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Or, nous avons, par hypothèse,

$$(69 \text{ bis}) \quad \left| \frac{V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \right| \leq \varepsilon.$$

La fonction $V_2(x_0, y_0, z_0)$ admet, par rapport à x_0 , une dérivée partielle du premier ordre qui peut être obtenue par la règle de la différentiation sous le signe \int ; on peut donc choisir Δx assez petit pour que l'on ait

$$(72) \quad \left| \frac{V_2(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_2(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} - \int_z \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho_0, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial x_0} dm' - \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} \int_z \frac{\partial}{\partial \rho_0} \psi(\rho_0, \rho', r) dm' \right| \leq \varepsilon.$$

Mais la définition même des quantités X_i et \mathcal{A} montre que l'on peut toujours prendre la surface S assez petite pour que l'on ait

$$(73) \quad \left| \int_z \frac{\partial}{\partial r} \psi(\rho_0, \rho', r) \frac{\partial r}{\partial x_0} dm' + X_i(x_0, y_0, z_0) \right| \leq \varepsilon,$$

$$(74) \quad \left| \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} \int_z \frac{\partial}{\partial \rho_0} \psi(\rho_0, \rho', r) dm' + \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} \mathcal{A}(x_0, y_0, z_0) \right| \leq \varepsilon.$$

L'égalité (71), jointe aux égalités (69 bis), (72), (73), (74), montre que l'on peut toujours prendre Δx assez voisin de zéro et la surface S assez petite pour avoir

$$(75) \quad \left| \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} + X_i(x_0, y_0, z_0) + \mathcal{A}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} \right| \leq 4\varepsilon,$$

ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, donnée d'avance.

Comme la valeur du premier membre de l'inégalité (75) ne dépend en aucune façon des dimensions attribuées à la surface S, on voit que cette inégalité entraîne l'égalité

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \right] = - \left[X_i(x_0, y_0, z_0) + A_0(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial \rho_0}{\partial x_0} \right].$$

Il suffit de supprimer l'indice zéro, désormais inutile, pour retrouver la première des égalités (70): les deux autres s'établissent de même.

Calculons la quantité

$$(76) \quad J = \int (X_i \partial x + Y_i \partial y + Z_i \partial z + A_0 \partial \rho) dm,$$

$\partial x, \partial y, \partial z, \partial \rho$ étant des fonctions continues de x, y, z , et l'intégrale s'étendant à la masse fluide tout entière.

Nous aurons évidemment

$$(77) \quad \begin{aligned} J &= - \int dm \int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \partial x + \frac{\partial r}{\partial y} \partial y + \frac{\partial r}{\partial z} \partial z \right) + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \partial \rho \right] dm' \\ &= - \int \int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \partial x + \frac{\partial r}{\partial y} \partial y + \frac{\partial r}{\partial z} \partial z \right) + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \partial \rho \right] dm dm'. \end{aligned}$$

Mais l'égalité (76) peut aussi s'écrire

$$J = \int (X'_i \partial x' + Y'_i \partial y' + Z'_i \partial z' + A'_0 \partial \rho') dm',$$

en sorte que l'on a aussi

$$(78) \quad J = - \int \int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x'} \partial x' + \frac{\partial r}{\partial y'} \partial y' + \frac{\partial r}{\partial z'} \partial z' \right) + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho'} \partial \rho' \right] dm dm'.$$

Les égalités (76), (77), (78) montrent que l'on a

$$(79) \quad \begin{aligned} &2 \int (X_i \partial x + Y_i \partial y + Z_i \partial z + A_0 \partial \rho) dm \\ &= - \int \int \left[\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \partial x + \frac{\partial r}{\partial y} \partial y + \frac{\partial r}{\partial z} \partial z + \frac{\partial r}{\partial x'} \partial x' + \frac{\partial r}{\partial y'} \partial y' + \frac{\partial r}{\partial z'} \partial z' \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \partial \rho + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho'} \partial \rho' \right] dm dm', \end{aligned}$$

quels que soient $\partial x, \partial y, \partial z, \partial \rho$.

Supposons maintenant ces quantités infiniment petites ; nous aurons

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \partial x + \frac{\partial r}{\partial y} \partial y + \frac{\partial r}{\partial z} \partial z + \frac{\partial r}{\partial x'} \partial x' + \frac{\partial r}{\partial y'} \partial y' + \frac{\partial r}{\partial z'} \partial z' \right) \\ & + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} \partial \rho + \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho'} \partial \rho' = \partial \psi(\rho, \rho', r), \end{aligned}$$

et l'égalité (79) deviendra

$$2 \int (X_i \partial x + Y_i \partial y + Z_i \partial z + A_i \partial \rho) dm = - \int \int \partial \psi(\rho, \rho', r) dm dm',$$

ou encore, en remarquant que chacun des éléments de masse dm, dm' , auquel s'étend l'intégration double, demeure nécessairement invariable,

$$(80) \quad \int (X_i \partial x + Y_i \partial y + Z_i \partial z + A_i \partial \rho) dm = - \frac{1}{2} \partial \int \int \psi(\rho, \rho', r) dm dm'.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (65), montre que, toutes les fois que l'on déplace les divers éléments du fluide sans faire varier la densité, on a

$$\partial \mathcal{F} = - \int (X_i \partial x + Y_i \partial y + Z_i \partial z) dm.$$

Les raisonnements exposés dans notre *Cours d'Hydrodynamique* (Livre II, Chap. I, n^{os} 1, 2 et 3) conduisent alors aux résultats suivants :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z)$, uniforme, finie et continue en tous les points de la masse fluide, telle que l'on ait

$$(81) \quad \rho [(X_i + X_e) dx + (Y_i + Y_e) dy + (Z_i + Z_e) dz] = d\Pi.$$

Cette fonction n'est négative en aucun point de la masse fluide. En tout point de la surface du fluide, on a

$$(82) \quad \begin{cases} P \cos(P, x) = \Pi \cos(n_i, x), \\ P \cos(P, y) = \Pi \cos(n_i, y), \\ P \cos(P, z) = \Pi \cos(n_i, z), \end{cases}$$

n_i étant la normale à la surface du fluide dirigée vers l'intérieur du fluide.

Ces résultats obtenus, nous écrirons que l'inégalité (63) doit être également vérifiée par une modification virtuelle dans laquelle la

densité varie; dans ce cas nous aurons, en vertu des égalités (56) et (80),

$$\delta \mathcal{F} = \int \frac{d\zeta}{d\rho} \delta \rho \, dm - \int (X_i \delta x + Y_i \delta y + Z_i \delta z + \mathfrak{A} \delta \rho) \, dm.$$

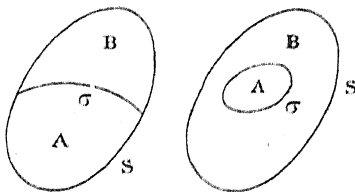
En raisonnant comme nous l'avons fait dans notre *Cours d'Hydrodynamique* (Livre II, Chap. I, n° 4) nous trouverons que *l'on doit avoir, en tous les points de la masse fluide,*

$$(83) \quad \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi + \rho^2 \mathfrak{A}.$$

L'ensemble des conditions (81), (82), (83) représente l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la masse fluide.

Partageons le fluide en deux masses A et B; soit σ la surface nouvelle qui, soit seule (*fig. 3*), soit avec une partie de l'ancienne surface terminale du fluide, limite la masse A.

Fig. 3.



Supprimons l'obstacle que la présence de la masse B apporte au déplacement de la masse A, SANS SUPPRIMER AUCUNE DES ACTIONS (FORCES OU INFLUENCES) QUE LA MASSE B EXERCE SUR LA MASSE A. Pour parler d'une manière plus explicite, supprimons la masse B, de manière que la masse A puisse, sans déplacer aucune masse étrangère, franchir la surface σ ; mais, aux corps étrangers qui exercent déjà :

1° Sur tout élément dm de la masse A, une force dont les composantes sont $X_e dm, Y_e dm, Z_e dm$;

2° Sur tout élément dS de la partie de la surface S qui peut confiner à A, une force dont les composantes sont

$$P \cos(P, x) dS, \quad P \cos(P, y) dS, \quad P \cos(P, z) dS,$$

adjoignons des corps étrangers qui, *sans toucher le corps A*, exercent

3° Sur tout élément dm de A, une force dont les composantes sont $X'_i dm, Y'_i dm, Z'_i dm, X'_i, Y'_i, Z'_i$ étant définis par des égalités, analogues aux égalités (66), mais où les intégrations s'étendent à la masse B seulement;

4° Sur tout élément dm de A, une influence dont le travail élémentaire est $\mathfrak{A}' \delta \rho dm$, \mathfrak{A}' étant défini par une égalité analogue à l'égalité (67), mais où l'intégration s'étend seulement à la masse B.

En général, la masse A ne sera plus en équilibre; mais on en rétablira certainement l'équilibre en adjoignant aux forces extérieures précédentes :

5° Une force, appliquée à chaque élément $d\sigma$ de la surface σ , et ayant pour composantes

$$(84) \quad \Pi \cos(\nu_i, x) d\sigma, \quad \Pi \cos(\nu_i, y) d\sigma, \quad \Pi \cos(\nu_i, z) d\sigma,$$

ν_i étant la normale à l'élément $d\sigma$ vers l'intérieur de la masse A.

Ces forces sont les *forces de liaison* équivalentes à l'obstacle que la présence de la masse B apportait aux mouvements de la masse A.

C'est pour cette raison que $\Pi(x, y, z)$ se nomme la *pression au point* (x, y, z) .

Il faudrait bien se garder de supprimer la masse B en remplaçant seulement les forces $X'_i dm, Y'_i dm, Z'_i dm$, que la masse B exerce sur chacun des éléments dm de la masse A, sans remplacer en même temps l'influence $\mathfrak{A}' dm$, tendant à augmenter la densité de l'élément dm , que cette même masse B exerce sur l'élément dm ; les pressions (84) ne suffiraient plus alors à rétablir l'équilibre de la masse A.

Il ne sera permis, en général, d'opérer ainsi que dans le cas particulier où l'influence \mathfrak{A}' serait égale à zéro pour tout élément dm de la masse A. Cette condition ne sera pas généralement remplie, à moins que l'on n'ait

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \rho', r) = 0.$$

Si cette condition est réalisée, ψ est indépendant de ρ , et aussi de ρ' , car ψ dépend symétriquement de ρ et de ρ' . C'est donc seulement dans le cas de l'hypothèse newtonienne que l'on peut opérer de la sorte.

A plus forte raison ne pourrait-on pas, en général, supprimer la

masse B sans remplacer ni les forces ni les influences qu'elle exerce sur les divers éléments dm de A; les pressions (84) ne rétabliraient pas l'équilibre de la masse; il n'est permis d'opérer ainsi que dans le cas où la masse B est sans action sur la masse A. Ce cas, où la fonction ψ est égale à zéro, et où, par conséquent, toutes les actions intérieures disparaissent, est celui que nous avons traité en détail dans notre *Cours d'Hydrodynamique*.

Dans un fluide dont les éléments n'exercent les uns sur les autres aucune action, ou bien encore dans un fluide dont les éléments exercent les uns sur les autres une action soumise à l'hypothèse newtonienne, on a $\mathfrak{A} = 0$, et l'équation (83) devient

$$\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = \Pi,$$

en sorte que la densité en un point est, pour un fluide déterminé, une fonction de la seule pression au même point; mais ce théorème n'a pas lieu dans le cas général; *en dehors du cas de l'hypothèse newtonienne, la densité du fluide en un point ne dépend pas seulement de la pression en ce point*. Cette proposition, qui limite à un cas particulier une loi que presque tous les physiciens regardent comme universelle, nous paraît mériter l'attention ⁽¹⁾.

Supposons que les forces extérieures X_e , Y_e , Z_e admettent une fonction potentielle U; nous aurons

$$X_e dx + Y_e dy + Z_e dz + dU = 0.$$

D'autre part, les égalités (70) donnent

$$X_i dx + Y_i dy + Z_i dz + dV + \mathfrak{A} d\rho = 0.$$

Si l'on désigne par

$$\Omega = V + U$$

la fonction potentielle totale de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui agissent sur les éléments fluides, les deux égalités précédentes donneront l'égalité

$$(X_e + X_i) dx + (Y_e + Y_i) dy + (Z_e + Z_i) dz + d\Omega + \mathfrak{A} d\rho = 0.$$

⁽¹⁾ P. DUHÉM, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. I, p. 355, 359.

Cette égalité, jointe à l'égalité (81), devient

$$(86) \quad \rho d\Omega + \mathfrak{A}_0 \rho d\rho + d\Pi = 0.$$

Les surfaces d'égale pression auront pour équation différentielle

$$d\Omega + \mathfrak{A}_0 d\rho = 0,$$

ou bien

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \mathfrak{A}_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \mathfrak{A}_0 \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \mathfrak{A}_0 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz = 0.$$

En vertu des égalités (70) cette égalité devient

$$(85 \text{ bis}) \quad (X_i + X_e) dx + (Y_i + Y_e) dy + (Z_i + Z_e) dz = 0.$$

Cette équation nous montre qu'une surface d'égale pression est normale en chaque point à la force, tant intérieure qu'extérieure, qui agit en ce point.

D'autre part, l'égalité (83), différentiée, donne

$$\rho \left[2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho \frac{d^2 \zeta(\rho)}{d\rho^2} \right] d\rho - 2 \mathfrak{A}_0 \rho d\rho - \rho^2 d\mathfrak{A}_0 - d\Pi = 0$$

ou, en posant

$$(86) \quad \Theta(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \left[2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho \frac{d^2 \zeta(\rho)}{d\rho^2} \right] d\rho,$$

$$(87) \quad \rho [d\Theta(\rho) - 2 \mathfrak{A}_0 d\rho - \rho d\mathfrak{A}_0] - d\Pi = 0.$$

Ajoutons membre à membre les égalités (85) et (87), et divisons par ρ les deux membres de l'égalité obtenue, nous trouverons

$$d\Omega - d(\rho \mathfrak{A}_0) + d\Theta(\rho) = 0.$$

Cette égalité s'intègre immédiatement et donne

$$(88) \quad \Omega - \rho \mathfrak{A}_0 + \Theta(\rho) = \text{const.}$$

Dans le cas de l'hypothèse newtonienne, on a

$$\mathfrak{A}_0 = 0,$$

en sorte que l'équation précédente se réduit à

$$\Omega + \Theta(\rho) = \text{const.}$$

Il en résulte que les deux équations

$$\Omega = \text{const.}, \quad \rho = \text{const.}$$

définissent la même famille de surfaces; mais cela n'a pas lieu, en général, lorsque l'hypothèse newtonienne n'est plus vérifiée.

Ainsi, *hors de l'hypothèse newtonienne, les surfaces équipotentiellles ne coïncident pas, en général, avec les surfaces d'égale densité.*

Dans le cas de l'hypothèse newtonienne, l'équation (85) se réduit à

$$\rho d\Omega + d\Pi = 0.$$

Elle nous apprend que l'égalité $d\Pi = 0$ entraîne l'égalité $d\Omega = 0$ et inversement, en sorte que les surfaces équipotentiellles sont en même temps surfaces d'égale pression. Mais, lorsque λ est différent de zéro, il n'en peut être de même, car il faudrait que l'égalité $d\rho = 0$ eût lieu en même temps que les deux précédentes, ce que nous savons être impossible; ainsi, *hors le cas de l'hypothèse newtonienne, les surfaces équipotentiellles ne sont pas surfaces d'égale pression.*

Donc *dans le problème général de l'Hydrostatique, les trois familles de surfaces*

$$\Omega = \text{const.}, \quad \rho = \text{const.}, \quad \Pi = \text{const.}$$

sont essentiellement distinctes; pour que deux de ces familles se confondent en une seule, il faut que l'hypothèse newtonienne soit vérifiée; mais, dans ce cas, elles se confondent toutes trois en une seule famille.

Ces divers résultats montrent quelles précautions minutieuses on devra prendre lorsqu'on voudra étudier l'équilibre d'une masse fluide dont les divers éléments exercent les uns sur les autres des actions non soumises à l'hypothèse newtonienne.

Il est un problème de Mécanique céleste auquel il y aurait lieu d'appliquer les remarques précédentes; M. Faye, pour expliquer la forme de la queue des comètes, a imaginé de remplacer la loi de la gravitation universelle par la loi suivante: Entre deux particules de masses dm, dm' , de densités ρ et ρ' , situées à la distance r , s'exercerait une force répulsive

$$(89) \quad F = \frac{dm dm'}{r^2} [\varphi(\rho, \rho') - K],$$

K étant une constante positive, le coefficient de l'attraction universelle, et $\theta(\rho, \rho')$ une fonction toujours positive, sensiblement égale à zéro lorsque les densités ρ et ρ' ne sont pas très faibles, mais prenant une valeur notable lorsqu'une de ces densités devient comparable à la densité des gaz qui forment la queue d'une comète.

L'égalité

$$\frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} = \frac{K - \theta(\rho, \rho')}{r^2}$$

nous donne

$$\psi(\rho, \rho', r) = \frac{\theta(\rho, \rho') - K}{r} + g(\rho, \rho').$$

D'ailleurs, comme la fonction ψ doit tendre vers zéro lorsque r croît au delà de toute limite, on aura

$$g(\rho, \rho') = 0$$

et, par conséquent,

$$(90) \quad \psi(\rho, \rho', r) = \frac{\theta(\rho, \rho') - K}{r}.$$

Cette fonction vérifie bien les diverses hypothèses que nous avons admises au sujet de la fonction ψ et des diverses autres fonctions que l'on peut former avec celle-là.

L'influence que nous avons désignée par A [égalité (59)] aura pour valeur

$$(91) \quad A = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \rho} \theta(\rho, \rho') dm dm'.$$

La quantité \mathfrak{A} [égalité (67)] aura pour valeur

$$(92) \quad \mathfrak{A} = -\int \frac{1}{r} \frac{\partial \theta(\rho, \rho')}{\partial \rho} dm'.$$

L'équation des *surfaces équipotentiellles* s'obtiendra en écrivant que l'on a

$$(93) \quad \Omega = \int \frac{1}{r} [\theta(\rho, \rho') - K] dm' = \text{const.}$$

L'équation des *surfaces d'égale densité* s'obtiendra, d'après l'éga-

lité (88), en écrivant que l'on a

$$(94) \quad \Omega - \rho \mathfrak{A} = \int \frac{1}{r} \left[\theta(\rho, \rho') + \rho \frac{\partial \theta(\rho, \rho')}{\partial \rho} - \mathbf{K} \right] dm' = \text{const.}$$

L'équation différentielle des *surfaces d'égale pression* sera, en vertu de l'égalité (85),

$$d\Omega + \mathfrak{A} d\rho = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (85 *bis*) et des égalités (66),

$$(95) \quad \begin{aligned} & dx \int [\theta(\rho, \rho') - \mathbf{K}] \frac{x' - x}{r^3} dm' \\ & + dy \int [\theta(\rho, \rho') - \mathbf{K}] \frac{y' - y}{r^3} dm' \\ & + dz \int [\theta(\rho, \rho') - \mathbf{K}] \frac{z' - z}{r^3} dm' = 0. \end{aligned}$$

On voit bien que ces trois familles de surfaces, définies par les égalités (93), (94) et (95), sont essentiellement distinctes.

Ces diverses remarques ne doivent pas être oubliées, si l'on veut, avec E. Roche et M. Resal ⁽¹⁾, déduire de la considération de semblables forces la figure de la queue des comètes.

Ces considérations montrent l'intérêt qui s'attache à la conception nouvelle d'*influence*, qui doit prendre place à côté de la notion de *force*, dans l'étude des *actions* mutuelles des corps.

(1) E. RESAL, *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, 2^e édition (Chapitre VI, § 2).