RIQUIER.

De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque (suite et fin)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 167-181
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__167_0>

DE

L'EXISTENCE DES INTÉGRALES

DANS UN

SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE

(SUITE ET FIN),

PAR M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN (¹).

Réduction d'un système différentiel quelconque à la forme harmonique passive.

18. *Étant donné un système différentiel $\mathfrak{S}$ dont les seconds membres sont nuls et les premiers olotropes dans quelque système de cercles, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations finies impossibles, en déduire sans intégration un second système admettant les mêmes solutions, et composé : 1° d'un groupe de relations finies exprimant certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes ; 2° d'un groupe harmonique passif impliquant, avec les mêmes variables, tout ou partie des fonctions inconnues restantes.*

Il va sans dire que *ces deux groupes de relations, dont l'ensemble équivaut au système proposé, peuvent éventuellement se réduire à un seul.*

I. *En désignant par u, v, w, ... diverses fonctions des variables indépendantes x, y, z, ..., par*

$$c_u,\quad c_v,\quad c_w,\quad \ldots,\quad c_x,\quad c_y,\quad c_z,\quad \ldots \tag{25}$$

des cotes respectivement attribuées à ces quantités, et par K *un entier positif donné, on peut, moyennant un choix convenable des constantes* (25),

(¹) *Voir* p. 65 et 123.

faire en sorte que, dans chacun des ordres 1, 2, ..., K, *les dérivées de* u, v, w, ... *aient des cotes toutes distinctes entre elles.*

Il suffit pour cela d'attribuer aux constantes (25) des valeurs (entières) positives satisfaisant aux relations

$$c_x > K c_y, \qquad c_y > K c_z, \qquad \ldots,$$
$$c_u > c_v + K c_x, \qquad c_v > c_w + K c_x, \qquad \ldots.$$

Considérons, en effet, deux dérivées d'un même ordre total au plus égal à K, et supposons d'abord qu'elles appartiennent à la même fonction. En pareil cas, la différence de leurs cotes est visiblement

$$(25\ bis) \qquad (\alpha-\alpha')c_x + (\beta-\beta')c_y + (\gamma-\gamma')c_z + \ldots,$$

où α, β, γ, ..., α', β', γ', ... désignent les ordres partiels respectifs en x, y, z, ... des deux dérivées considérées; d'ailleurs, les quantités $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$, ... ne sont pas toutes nulles, et l'on peut toujours supposer que la première d'entre elles qui ne s'annule pas est positive. Si l'on a $\alpha-\alpha'>0$, la quantité (25 *bis*) est au moins égale à

$$c_x - (\beta' c_y + \gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_x - (\beta' + \gamma' + \ldots)c_y,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_y, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Si l'on a $\alpha-\alpha'=0$, $\beta-\beta'>0$, la quantité (25 *bis*) est au moins égale à

$$c_y - (\gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_y - (\gamma' + \ldots)c_z,$$

différence encore positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_z, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Et ainsi de suite.

Supposons maintenant que les deux dérivées considérées appartiennent à deux fonctions inconnues distinctes. En nommant c et c' les cotes respectives, nécessairement inégales, de ces deux fonctions, et

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots \end{matrix}$$

les ordres partiels respectifs des deux dérivées par rapport à x, y, z, ..., les cotes de ces dernières auront pour différence

$$c - c' + (\alpha - \alpha')c_x + (\beta - \beta')c_y + (\gamma - \gamma')c_z + \ldots.$$

Or, si l'on suppose $c - c' > 0$, ce qui est évidemment permis, l'expression précédente est au moins égale à

$$(c - c') - (\alpha' c_x + \beta' c_y + \gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$(c - c') - (\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots)c_x,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_x, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité.

II. Supposons actuellement que les variables x, y, z, ... et les fonctions u, v, w, ... aient été affectées chacune de p cotes; considérant alors certaines dérivées, en nombre limité ou illimité, de ces fonctions, partageons-les en groupes successifs d'après les valeurs croissantes de leurs ordres, puis les dérivées de chaque groupe en sous-groupes successifs d'après les valeurs croissantes de leurs cotes premières, puis à leur tour les dérivées de chaque sous-groupe en sous-groupes partiels successifs d'après les valeurs croissantes de leurs cotes secondes, et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. De cette opération résultera finalement une suite de groupes, dont nous dirons, pour indiquer d'une manière abrégée son mode de formation, qu'elle est construite *conformément à l'ordre harmonique*.

Si l'opération précédente, exécutée sur un nombre *limité* de dérivées, fournit une suite de groupes dont quelqu'un contienne plus d'un terme, on peut toujours, en attribuant à chacune des variables et des fonctions une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ convenablement choisie, faire en sorte que le nouveau fractionnement qui en résulte conduise à des groupes composés chacun d'une dérivée unique. Il suffit pour cela, si l'on désigne par K l'ordre total maximum des dérivées considérées, de choisir les nouvelles cotes conformément aux indications de l'alinéa précédent (I).

III. *Lorsqu'un système différentiel se compose de relations ayant leurs premiers membres tous distincts, et dont chacune, considérée séparément, est harmonique* (12, III), *on peut, sans changer les cotes des variables indépendantes ni des fonctions inconnues, former un second système, harmonique dans son ensemble* (1), *équivalent au premier, et composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.* (On suppose, comme nous l'avons toujours fait, les seconds membres du système donné olotropes à l'intérieur de quelque système de cercles.)

Les diverses relations dont se compose le système donné $\mathfrak{S}$ satisfont, par hypothèse, à la deuxième des conditions énoncées au n° 1. Si elles satisfont en même temps à la troisième, le système $\mathfrak{S}$ se trouve de lui-même être harmonique. Dans le cas contraire, on désignera par K l'ordre maximum des dérivées qui y figurent; puis on considérera, parmi les dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, K$ des diverses fonctions inconnues impliquées par le système $\mathfrak{S}$, celles qui coïncident avec quelqu'un de ses premiers membres ou quelqu'une de leurs dérivées, et de l'ensemble des relations déduites de $\mathfrak{S}$ par différentiations, on extraira un groupe $\mathfrak{S}'$ choisi de telle sorte que, dans le système simultané

$$(26) \qquad (\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S}'),$$

chacune des dérivées dont nous venons de parler figure comme premier membre une fois et une seule. Les équations du système (26), rangées à la suite les unes des autres dans un ordre convenable (*voir* 3, II), sont successivement résolubles par rapport aux dérivées qui figurent dans leurs premiers membres, et en effectuant cette résolution, nous sommes conduit à un système

$$(27) \qquad (\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}'),$$

composé de deux groupes d'équations dont les premiers membres sont respectivement identiques à ceux des groupes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$. Nous allons démontrer maintenant que, au point de vue de l'intégration, le système $\mathfrak{R}$, dont la nature harmonique est facile à apercevoir, équivaut au système $\mathfrak{Q}$.

1° *Toute solution de* $\mathfrak{Q}$ *vérifie* $\mathfrak{R}$.

Car elle vérifie (26), et par conséquent aussi (27).

2° *Toute solution de* $\mathfrak{R}$ *vérifie* $\mathfrak{Q}$.

Effectivement, les équations du système (26) étant disposées les unes à la suite des autres dans leur ordre de résolution successive, et celles du système (27) dans l'ordre correspondant, désignons par $\mathfrak{q}_i$ et $\mathfrak{r}_i$ les équations de rang i de ces deux systèmes respectifs. Si l'on observe que la relation $\mathfrak{r}_1$ fait nécessairement partie du groupe $\mathfrak{R}$, que $\mathfrak{q}_1$ est identique à $\mathfrak{r}_1$, et que, par suite, toute solution de $\mathfrak{R}$ vérifie $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{r}_1$, il nous suffit évidemment de faire voir qu'en supposant vérifiées les diverses équations du système $\mathfrak{R}$ et celles des deux suites

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{q}_1, & \mathfrak{q}_2, & \ldots, & \mathfrak{q}_h, \\ \mathfrak{r}_1, & \mathfrak{r}_2, & \ldots, & \mathfrak{r}_h, \end{array}$$

les équations $\mathfrak{q}_{h+1}$, $\mathfrak{r}_{h+1}$ le sont également. Or, si $\mathfrak{r}_{h+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{R}$, elle est vérifiée par hypothèse : donc aussi $\mathfrak{q}_{h+1}$, qui peut être considérée comme une combinaison de $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_h, \mathfrak{r}_{h+1}$. Si $\mathfrak{r}_{h+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{q}_{h+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{Q}'$, et peut se déduire par différentiation de quelqu'une des équations $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_h$; elle est donc vérifiée en même temps que ces dernières, par suite aussi $\mathfrak{r}_{h+1}$, qui s'obtient par une combinaison de $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_h, \mathfrak{q}_{h+1}$.

IV. Considérant diverses fonctions

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w \tag{28}$$

des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad z,$$

et deux groupes formés chacun avec des dérivées de ces fonctions, nous dirons, pour abréger, que le second groupe est *étranger au premier et à sa descendance*, s'il ne contient aucune des dérivées du premier groupe ni aucune de leurs propres dérivées. Dans un système harmonique par exemple, tout groupe de dérivées paramétriques est étranger au groupe des premiers membres et à sa descendance.

Cela posé, *si l'on forme successivement, avec des dérivées des fonctions* (28), *un premier groupe quelconque, un second étranger au premier et à sa descendance, un troisième étranger aux deux premiers et à leur descendance, et ainsi de suite, le nombre de ces groupes est forcément limité.*

Plaçons-nous, en effet, dans l'hypothèse contraire, et supposons qu'on puisse former une suite *indéfinie* de groupes, dont chacun ne contienne que des dérivées étrangères à tous les précédents et à leur descendance. En pareil cas, quelqu'une des fonctions (28), u par exemple, fournit certainement des dérivées à un nombre illimité de groupes. Si l'on désigne par G′ l'un des groupes dont il s'agit, et par

$$\frac{d^{\lambda'+\mu'+\ldots+\nu'}u}{dx^{\lambda'}\,dy^{\mu'}\ldots dz^{\nu'}} \tag{29}$$

l'une des dérivées de u qui y figurent, il y a encore, à la suite de G′, un nombre illimité de groupes contenant des dérivées de la fonction u; pour chacune de ces dérivées, l'un au moins des ordres partiels λ, μ, ..., ν, relatifs à x, y, ..., z, est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (29), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\lambda'+1)+(\mu'+1)+\ldots+(\nu'+1)$$

catégories que définissent respectivement les relations

$$\begin{array}{lllll}
\lambda=0; & \lambda=1; & \lambda=2; & \ldots; & \lambda=\lambda'; \\
\mu=0; & \mu=1; & \mu=2; & \ldots; & \mu=\mu'; \\
\ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots; & \ldots\ldots; \\
\nu=0; & \nu=1; & \nu=2; & \ldots; & \nu=\nu'.
\end{array}$$

Des diverses catégories ci-dessus définies, une au moins, par exemple

$$\lambda=l, \tag{30}$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité de groupes postérieurs à G′. Si l'on désigne par G″ l'un des groupes dont il s'agit, et par

$$\frac{d^{l+\mu''+\ldots+\nu''}u}{dx^l\,dy^{\mu''}\ldots dz^{\nu''}} \tag{31}$$

l'une des dérivées de u de la catégorie (30) qui y figurent, il y a encore, à la suite de G″, un nombre illimité de groupes contenant des dérivées de u de cette même catégorie; pour chacune des dérivées en question, l'un au moins des ordres partiels $\mu, \ldots, \nu$ relatifs à $y, \ldots, z$ est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (31), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\mu''+1)+\ldots+(\nu''+1)$$

catégories que définissent respectivement les couples de relations

$$\begin{array}{ccccc}
\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 0;\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 1;\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 2;\end{array}\right. & \ldots; & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = \mu'';\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots; & \ldots\ldots\ldots; & \ldots; & \ldots\ldots\ldots; \\
\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 0;\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 1;\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 2;\end{array}\right. & \ldots; & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = \nu''.\end{array}\right.
\end{array}$$

De ces nouvelles catégories, une au moins, par exemple

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = m,\end{array}\right.$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité de groupes postérieurs à G″. En poursuivant ce raisonnement et désignant par ..., n des entiers convenablement choisis, on arrivera à cette conclusion absurde que la catégorie

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = m,\\ \ldots\ldots,\\ \nu = n,\end{array}\right.$$

ne comprenant évidemment qu'une seule dérivée de u, en fournit à un nombre illimité de groupes.

V. Pour démontrer la proposition contenue dans notre énoncé général, nous attribuerons d'abord aux variables et aux fonctions inconnues engagées dans le système $\mathfrak{S}$ des cotes choisies de telle façon que le groupement, d'après l'ordre harmonique, des dérivées effectivement contenues dans $\mathfrak{S}$ conduise à une suite de groupes composés chacun d'une dérivée unique (I) (II). Cela posé, nous résoudrons par rapport au dernier terme de cette suite l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes : nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système $\mathfrak{S}'$ contenant une équation de moins que le proposé. Pour obtenir, rangées suivant l'ordre harmonique (II), les dérivées effectivement contenues dans $\mathfrak{S}'$, il suffit de prendre la suite analogue relative à $\mathfrak{S}$, et d'y supprimer, avec certains autres parfois, le dernier terme, qui ne figure plus maintenant que dans la formule de résolution. Résolvant par rapport au dernier terme de cette suite partielle l'une des équations de $\mathfrak{S}'$ où il figure, nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En d'autres termes, *nous déduirons des équations données, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre harmonique renversé* (II), et, en poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus aucune dérivée, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, l'un différentiel, l'autre fini. Si le groupe fini n'est pas impossible, on en pourra tirer un certain nombre des fonctions inconnues exprimées à l'aide des variables indépendantes et des autres fonctions inconnues (et par suite aussi exprimer les dérivées des premières en fonctions composées différentielles des secondes). Le groupe différentiel pourra alors être transformé en un système d'ordre au plus égal à $\mathfrak{S}$, et qui sera de même nature que $\mathfrak{S}$, avec cette différence que le nombre des fonctions inconnues s'y trouvera diminué, ainsi que le nombre des équations. Sur ce système on opérera comme sur le proposé, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre d'un groupe fini impossible, le système proposé se trouvera remplacé par un groupe différentiel accompagné de quelques groupes finis. Si, dans chacun de ces derniers, on tient compte de ceux qui ont été obtenus après lui, on voit que l'ensemble des équations non différentielles exprime un certain nombre d'entre les fonctions inconnues à l'aide des variables indépendantes et des fonctions inconnues restantes. Celles-ci sont seules impliquées dans le groupe différentiel, dont les diverses équations, séparément harmoniques, ont leurs premiers membres tous distincts; on pourra dès lors (III), sans changer les cotes des variables indépendantes ni des fonctions inconnues, déduire de ce groupe différentiel un système $\mathfrak{H}$, harmonique dans son ensemble, et composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.

Si le système $\mathfrak{H}$ n'est point passif, on considérera, parmi les conditions de passivité, celles qui ne se réduisent pas à des identités, et l'on observera qu'elles constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire. En attribuant au besoin une nouvelle cote à chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues, on pourra toujours faire en sorte que le groupement, d'après l'ordre harmonique, des dérivées, nécessairement paramétriques, contenues dans les relations dont il s'agit, fournisse des groupes composés chacun d'une dérivée unique (II). De ces relations on déduira alors, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre harmonique renversé; si, une fois ces formules obtenues, les conditions de passivité ne fournissent en outre aucune relation finie, on adjoindra au système $\mathfrak{H}$ les formules, séparément harmoniques, dont il vient d'être question, et l'on substituera au système total ainsi formé un système $\mathfrak{H}'$, harmonique dans son ensemble, et composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres (III). Si le système $\mathfrak{H}'$ n'est pas passif, on le traitera comme le système $\mathfrak{H}$, et, sauf la rencontre d'un système passif, on continuera ainsi tant que les systèmes $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, ... successivement obtenus, ne fourniront, par la résolution de leurs conditions de passivité, aucune relation finie. Si, à un moment donné, on tombe sur un système non passif où cette circonstance cesse d'être réalisée, on considérera le groupe différentiel et le groupe fini déduits des conditions de passivité; du groupe fini, supposé possible, on tirera un certain nombre des fonctions inconnues exprimées à l'aide des variables indépendantes et des autres fonctions inconnues, et le système dont il s'agit, préalablement augmenté du groupe différentiel, pourra, grâce aux formules résultantes, être transformé en un système de même nature que $\mathfrak{S}$, mais impliquant moins de fonctions inconnues encore que n'en impliquait le système $\mathfrak{H}$.

Sur le système résultant, on recommencera à nouveau toutes les opérations successives précédemment exécutées sur $\mathfrak{S}$, et ainsi de suite. Or, il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément soit à une impossibilité, soit à un système passif, soit à l'élimination complète des dérivées. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, elle ne pourrait manquer de conduire à un système harmonique non passif qui, traité comme l'a été tout à l'heure le système $\mathfrak{H}$, engendrerait, sans réduction ultérieure du nombre des fonctions inconnues, une suite *illimitée* de systèmes également harmoniques et non passifs. En comparant entre eux deux systèmes consécutifs de cette dernière suite, on trouverait dans le second deux groupes : l'un composé d'équations en nombre égal à celles du premier système et ayant respectivement les mêmes premiers membres; l'autre ayant tous ses premiers membres étrangers aux précédents et à leur descendance. En vertu de l'alinéa IV, toutes les dérivées des fonctions inconnues finiraient donc par devenir principales, et les conditions de passivité ne fourniraient plus alors que des relations finies; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une impossibilité, soit à une réduction du nombre des fonctions inconnues.

19. Ainsi donc, *étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers olotropes dans un système de cercles :*

Ou bien ce système n'admet aucune solution;

Ou bien il équivaut à quelque système fini que l'on en peut déduire sans intégration;

Ou bien enfin son intégration se ramène à celle d'un système harmonique passif.

20. On traitera, à l'aide des deux remarques suivantes, le cas d'un système différentiel qui, avec des seconds membres tous nuls, aurait ses premiers membres olotropes, non plus dans un système de cercles,

mais dans un espace *normal* E de *forme* quelconque ([1]). Comme d'habitude, les notations $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ désigneront les variables indépendantes et les fonctions inconnues du système; nous nommerons en outre $\hat{\delta}, \ldots$ les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ figurant dans les équations proposées.

1° Supposons que le système dont il s'agit admette quelque groupe d'intégrales, olotropes dans un espace normal E' où leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, n'excèdent pas les limites du précédent E; et désignons par $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales de $x, y, \ldots$ prises à volonté dans l'espace E', par $u_0, v_0, \ldots, \hat{\delta}_0, \ldots$ les valeurs correspondantes des intégrales elles-mêmes et des dérivées figurant dans les premiers membres. En substituant respectivement à ceux-ci leurs développements construits à partir de $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots, \hat{\delta}_0, \ldots$ (valeurs nécessairement situées dans E), on voit sans peine que les développements, à partir de $x_0, y_0, \ldots$, des intégrales qu'admet par hypothèse le système donné, constituent un groupe d'intégrales ordinaires (2) du système auxiliaire ainsi construit.

2° Inversement, nommons $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots, \hat{\delta}_0, \ldots$ des valeurs initiales arbitrairement choisies dans l'espace E, remplaçons tous les premiers membres des équations proposées par leurs développements construits à partir de ces dernières, désignons enfin par U, V, ... un groupe d'intégrales ordinaires du système résultant, et par $\Delta, \ldots$ celles d'entre les dérivées de U, V, ... qui correspondent respectivement aux diverses dérivées de $u, v, \ldots$, désignées par $\hat{\delta}, \ldots$. Les fonctions U, V, ... fourniront certainement un groupe d'intégrales du système donné, si l'on peut trouver, pour le groupe des variables $x, y, \ldots$, un espace normal tel, que leurs valeurs, associées aux valeurs correspondantes de U, V, ..., Δ, ..., n'excèdent pas l'étendue commune à l'espace E et au système des cercles décrits de $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots, \hat{\delta}_0, \ldots$ comme centres avec des rayons respectivement égaux aux olomètres correspondants des premiers membres des équations proposées.

C'est ce qui arrivera, par exemple, si les premiers membres dont il

---

([1]) *Voir* mon Mémoire *Sur les Principes de la Théorie générale des fonctions* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1891, p. 66 et 72).

s'agit sont olotropes et réels pour les valeurs réelles de $x, y, \ldots, u, v, \ldots, \delta, \ldots$ respectivement comprises dans des intervalles donnés, et si, de leur côté, les intégrales U, V, ... du système auxiliaire, préalablement ramené à un système harmonique passif (18, V), correspondent à un choix de valeurs initiales toutes réelles pour les variables indépendantes, les fonctions inconnues de ce dernier système, et leurs dérivées paramétriques.

Caen, le 1er avril 1892.

APPENDICE (¹).

Réduction d'un système différentiel quelconque à une suite de systèmes harmoniques passifs n'impliquant chacun qu'une seule fonction inconnue.

21. *Étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers olotropes dans quelque système de cercles, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, le remplacer par un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de deux groupes d'équations* G_1, G_2 *qui jouissent de la double propriété ci-après énoncée :* 1° *l'une des fonctions inconnues, u, du système proposé ne se trouve plus impliquée dans le groupe* G_2; 2° *en substituant aux fonctions restantes $v, \ldots$ des intégrales quelconques du groupe* G_2, *on transforme le groupe* G_1, *soit en une formule unique exprimant directement la fonction u à l'aide des variables $x, y, \ldots$, soit en un système harmonique passif à la seule fonction inconnue u.*

Désignant par $\mathfrak{S}$ le système différentiel proposé, NOUS N'Y TRAITERONS PROVISOIREMENT COMME INCONNUE QU'UNE SEULE DES FONCTIONS $u, v, \ldots$, LA FONCTION u, PAR EXEMPLE, et nous attribuerons à $u, x, y, \ldots$ des cotes choisies de telle façon, que le groupement, d'après l'ordre harmonique, des dérivées de u effectivement contenues dans $\mathfrak{S}$ conduise à une suite de groupes composés chacun d'une dérivée unique (18, I, II);

(¹) Les résultats qui font l'objet de cet Appendice ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 27 février 1893.

puis, nous placerons en tête la fonction u elle-même, ce qui nous donnera la suite

$$(32) \qquad u, \quad D_1.u, \quad D_2.u, \quad \ldots, \quad D_g.u.$$

Cela posé, nous résoudrons par rapport au dernier terme de (32) l'une des équations où il figure, et nous porterons la valeur ainsi obtenue dans les équations restantes : nous aurons de cette manière, outre la formule de résolution, un nouveau système $\mathfrak{S}'$ contenant une équation de moins que le proposé. Des divers termes de (32), l'un au moins, le dernier, a disparu de $\mathfrak{S}'$; parmi les termes restants, nous considérerons celui qui occupe dans (32) le rang le plus éloigné, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations de $\mathfrak{S}'$ où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus la fonction u ni aucune de ses dérivées, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, savoir : 1° les formules de résolution $\mathfrak{A}$ successivement obtenues; 2° les équations non encore résolues $\mathfrak{B}$. Si parmi ces dernières figure quelque relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, le système proposé est impossible. Si parmi les premières figure une relation $\mathfrak{a}$ résolue par rapport à u, elle ne contient dans son second membre ni u ni aucune de ses dérivées, et la fonction u se trouve ainsi exprimée à l'aide des variables indépendantes $x, y, \ldots$ des fonctions restantes $v, \ldots$ et de leurs dérivées; les diverses dérivées de u peuvent donc, elles aussi, s'exprimer de la même manière, et en portant leurs valeurs, avec celle de u, dans les formules de résolution précédentes, nous obtiendrons certaines relations $\mathfrak{C}$ ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées : le groupe G_1 se composera alors de la relation unique $\mathfrak{a}$, et le groupe G_2 des relations $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Si aucun de ces cas ne se présente, on pourra, en vertu d'une proposition démontrée plus haut (18, III), remplacer le système $\mathfrak{A}$ par un système harmonique $\mathfrak{H}$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. On observera alors que les conditions de passivité du système $\mathfrak{H}$ constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire, et, en attribuant au besoin une nouvelle cote à chacune des quantités u, x, y, ..., on pourra toujours faire en sorte que le groupement, d'après l'ordre harmonique, des dérivées de u, nécessairement paramétriques, contenues dans les relations dont il s'agit, fournisse des groupes composés chacun d'une dérivée unique. On traitera ces relations comme on a traité le système proposé $\mathfrak{S}$, et l'on en déduira de même : 1° un premier groupe $\mathfrak{A}'$ d'équations, obtenues par résolutions successives, ayant pour premiers membres certaines dérivées de u et éventuellement cette fonction même; 2° un deuxième groupe $\mathfrak{B}'$ de relations ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées. Si parmi les dernières $\mathfrak{B}'$ figure quelque relation non identique entre les seules variables x, y, ..., le système proposé est impossible. Si dans le groupe $\mathfrak{A}'$ figure une relation $\mathfrak{a}'$ résolue par rapport à u, la fonction u et ses dérivées peuvent s'exprimer à l'aide des variables indépendantes x, y, ... des fonctions restantes v, ... et de leurs dérivées, et en portant les valeurs ainsi obtenues dans les relations précédentes du groupe $\mathfrak{A}'$ et dans celles du groupe $\mathfrak{H}$, on obtiendra certaines relations $\mathfrak{C}'$ ne contenant plus la fonction inconnue u ni aucune de ses dérivées : le groupe G_1 se composera alors de la relation unique $\mathfrak{a}'$, et le groupe G_2 des relations $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$. Si le groupe $\mathfrak{A}'$ n'existe pas, le groupe G_1 se compose des relations $\mathfrak{H}$, et le groupe G_2 des relations $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$.

Si aucun de ces cas ne se présente, on poura déduire du système $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}')$ un système harmonique $\mathfrak{H}'$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. Sur le système $\mathfrak{H}'$ on opérera comme sur $\mathfrak{H}$, et ainsi de suite.

Or, un pareil mécanisme ne peut manquer de conduire finalement soit à une impossibilité, soit à une équation résolue par rapport à u, soit à des conditions de passivité indépendantes de u et de ses dérivées. Car, dans le cas contraire, il conduirait à une suite illimitée de systèmes harmoniques possédant la propriété suivante : chacun des systèmes dont il s'agit comprendrait un premier groupe d'équations en nombre égal à celles du système précédent et ayant respectivement les mêmes premiers membres, puis un deuxième groupe d'équations ayant leurs premiers membres étrangers à ceux du système précédent et à leur descendance. Il résulte de cette circonstance que toutes les dérivées de u finiraient par devenir principales (18, IV), et à partir de ce moment les conditions de passivité demeureraient finies par rapport à u, ce qui est évidemment incompatible avec notre hypothèse.

22. En appliquant au système G_2 la proposition du numéro précédent, et continuant ainsi jusqu'à épuisement des fonctions inconnues, *on pourra* donc, *sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables* $x, y, \ldots$, *ramener l'intégration du système proposé* $\mathfrak{S}$ *à celle de systèmes harmoniques passifs n'impliquant chacun qu'une seule fonction inconnue.*

Si le système proposé, avec des seconds membres tous nuls, a ses premiers membres olotropes dans un espace normal de forme quelconque, on lui appliquera les remarques du n° 20.