

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BEAUPAIN

Sur l'intégrale eulérienne de première espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 9 (1892), p. 309-328

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__309_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
L'INTÉGRALE EULÉRIENNE DE PREMIÈRE ESPÈCE,

PAR M. J. BEAUPAIN,
INGÉNIEUR DES MINES, DOCTEUR ÈS SCIENCES.



CHAPITRE I.

DÉVELOPPEMENTS, EN SÉRIE CONVERGENTE, DES FONCTIONS $B(a, x)$ ET $\frac{1}{B(a, x)}$.



1. LEMME. — *Si q est une quantité réelle quelconque et p une quantité également réelle et supérieure à -1 , la série*

$$(1) \quad S = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{q - p + 2k}$$

est absolument convergente, $\binom{p}{k}$ désignant le coefficient binomial

$$\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k}.$$

Pour démontrer cette proposition, je considère la série des modules

$$(2) \quad \sum = \sum_{l=0}^{k=\infty} \text{mod} \left[\binom{p}{k} \frac{1}{q - p + 2k} \right] = \sum_{k=0}^{k=\infty} U_{k+1}.$$

Soient $k = l + n$ et $p = l - \varepsilon$, l et n étant des nombres entiers et ε une quantité positive, comprise entre 0 et 1.

On peut écrire ainsi le terme U_{k+2} de la série (2)

$$U_{k+2} = \frac{(l-\varepsilon)(l-\varepsilon-1)\dots(1-\varepsilon)\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots(l+n+1)} \frac{1}{q+\varepsilon+l+2n+2}.$$

A partir de ce terme, tous les termes de la série (2) contiendront le facteur constant $(l-\varepsilon)(l-\varepsilon-1)\dots(1-\varepsilon)$.

Si la série auxiliaire

$$(3) \quad T = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+m)}{1.2.3\dots(n+m+1)} \frac{1}{-q-l+2n+2m}$$

est convergente, il en sera de même de la série (2). Dans la série (3), q est supposé positif.

J'observe que les termes de cette série T peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots(n+1)} \frac{1}{-q-l+2n} \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n} - \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n} \frac{\varepsilon+n}{n+1} \right] \frac{1}{-q-l+2n}, \\ & \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2.3\dots(n+2)} \frac{1}{-q-l+2n+2} \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2.3\dots(n+1)} - \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2.3\dots(n+1)} \frac{\varepsilon+n+1}{n+2} \right] \frac{1}{-q-l+2n+2}, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum' &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n} \frac{1}{-q-l+2n} - \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n)}{1.2.3\dots n} \frac{\varepsilon+n}{n+1} \frac{1}{-q-l+2n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+1)}{1.2.3\dots(n+1)} \frac{1}{-q-l+2n+2} - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Le premier terme est inférieur au deuxième, et celui-ci est moindre que le troisième, si l'on a la condition

$$\frac{\varepsilon+n}{-q-l+2n} > \frac{\varepsilon+n+1}{-q-l+2n+2} \quad \text{ou} \quad 2\varepsilon+q+l > 0,$$

inégalité qui est toujours vérifiée.

J'ajoute ensuite que le terme général a pour limite zéro. Posons

$$\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)\dots(\varepsilon+n+m-1)}{1.2.3\dots(n+m)} \frac{\varepsilon+n+m}{-q-l+2n+2m} = P \frac{\varepsilon+n+m}{-q-l+\varepsilon+2n+2m}.$$

Le facteur $\frac{\varepsilon+n+m}{-q-l+2n+2m}$ a pour limite $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, en prenant le logarithme népérien de ce produit indéfini, on a

$$(5) \quad \text{Log } P = \text{Log } \frac{\varepsilon}{1} + \text{Log } \frac{\varepsilon+1}{2} + \dots + \text{Log } \frac{\varepsilon+n+m-1}{n+m} + \dots$$

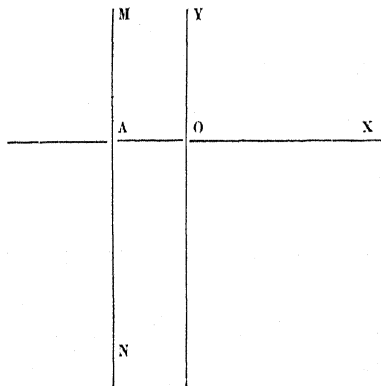
Or

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[(n+m) \text{Log } \frac{\varepsilon+n+m-1}{n+m} \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[(n+m) \text{Log } \left(1 + \frac{\varepsilon-1}{n+m} \right) \right] = \varepsilon - 1.$$

La série (5) est divergente et a pour somme $-\infty$. Les termes de la série (4), alternativement positifs et négatifs, décroissent indéfiniment; donc cette série est convergente.

Ainsi nous avons transformé la série T en une autre Σ' , telle que la somme des $2m$ premiers termes de cette série est égale à la somme de m premiers termes de T. Or Σ'_{2m} tend vers une valeur finie et déterminée; il en est de même de T_m . Par suite, les séries (3) et (2) sont convergentes et la série (1) est absolument convergente.

2. THÉORÈME. — Si la distance OA est égale à -1 et que z soit l'affixe



d'un point de la région du plan, située à droite de la ligne MN, parallèle

à l'axe des y , la série

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{z}{k} \frac{1}{q - z + 2k}$$

est absolument convergente dans cet espace, q étant une quantité réelle ou imaginaire quelconque.

Soient

$$z = a + ib, \quad q = \alpha + i\beta, \quad k = l + n \quad \text{et} \quad a = l - \varepsilon,$$

l et n étant des nombres entiers et ε une quantité positive inférieure à 1.

Le terme général de cette série (6) est

$$U_{k+2} = \pm \frac{(l - \varepsilon + ib)(l - \varepsilon - 1 + ib) \dots (1 - \varepsilon + ib)(\varepsilon - ib) \dots (\varepsilon + n - ib)}{1.2.3 \dots (l + n + 1)} \frac{1}{2n + l + \alpha + \varepsilon + 2 + i(\beta - b)}.$$

Si la série

$$V = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\text{mod}[(\varepsilon - ib)(\varepsilon + 1 - ib) \dots (\varepsilon + n + m - ib)]}{1.2.3 \dots (n + m + 1)} \frac{1}{2n + 2m - \alpha - l},$$

ou plutôt, si la série

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{(\varepsilon^2 + b^2)[(\varepsilon + 1)^2 + b^2] \dots [(\varepsilon + n - 1)^2 + b^2]}}{1.2.3 \dots n} \\ &\times \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\sqrt{[(\varepsilon + n)^2 + b^2] \dots [(\varepsilon + n + m)^2 + b^2]}}{(n + 1) \dots (n + m + 1)} \frac{1}{2n + 2m - \alpha - l} \end{aligned} \right.$$

est convergente, la série (6) sera absolument convergente. Nous supposons que, dans la série (7), α est pris en valeur absolue.

Je compare cette série V à la suite indéfinie

$$(8) \quad U = \frac{\eta(\eta + 1) \dots (\eta + n - 1)}{1.2.3 \dots n} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\eta + n) \dots (\eta + n + m)}{(n + 1) \dots (n + m + 1)} \frac{1}{2n + 2m - \alpha - l},$$

laquelle est convergente, si η est un nombre positif inférieur à 1.

Si η est supérieur à ε , on peut trouver un nombre entier fixe n tel, qu'on ait constamment, à partir de cette valeur, l'inégalité

$$\sqrt{(\varepsilon + n)^2 + b^2} < \eta + n$$

ou

$$\eta^2 - \varepsilon^2 + 2(\eta - \varepsilon)n - b^2 > 0,$$

condition à laquelle il est toujours possible de satisfaire, quelque petite que soit la différence $\eta - \varepsilon$, pourvu qu'elle soit finie et positive. Les termes de la série V seront ainsi inférieurs, en valeur absolue, à ceux d'une série convergente, dont tous les termes ont même signe; en conséquence, la série (7) est convergente et la série (6) est absolument convergente.

3. COROLLAIRE. — θ étant un angle réel arbitraire, les séries

$$(9) \quad \begin{cases} S_1 = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{z}{k} \frac{\cos(q + z + 2k)\theta}{q - z + 2k}, \\ S_2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{z}{k} \frac{\sin(q + z + 2k)\theta}{q - z + 2k} \end{cases}$$

sont absolument convergentes dans tout l'espace à droite de la ligne MN.

4. Dans un travail publié dans les *Mémoires de l'Académie de Belgique*, in-4°, t.LI, nous avons trouvé les deux formules suivantes

$$(10) \quad \int_0^\theta \frac{\sin q\varphi}{\cos^p \varphi} d\varphi = -2^p \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\cos(p + q + 2k)\theta}{p + q + 2k} + 2^{p-1} \int_0^1 \frac{x^{\frac{p+q}{2}-1}}{(1+x)^p} dx,$$

$$(11) \quad \int_0^\theta \frac{\cos q\varphi}{\cos^p \varphi} d\varphi = +2^p \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\sin(p + q + 2k)\theta}{p + q + 2k},$$

θ étant un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, p et q satisfaisant aux conditions

$$1 > p \geq 0, \quad p + q > 0.$$

Par le changement de q en $-q$, ces formules deviennent

$$(12) \quad - \int_0^\theta \frac{\sin q \varphi}{\cos^p \varphi} d\varphi = -2^p \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\cos(p-q+2k)\theta}{p-q+2k} + 2^{p-1} \int_0^1 \frac{x^{\frac{p-q}{2}-1}}{(1+x)^p} dx,$$

$$(13) \quad \int_0^\theta \frac{\cos q \varphi}{\cos^p \varphi} d\varphi = 2^p \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\sin(p+q+2k)\theta}{p+q+2k},$$

d'où, par addition et par soustraction,

$$(14) \quad \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\Gamma(p)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \left[\frac{\cos(p+q+2k)\theta}{p+q+2k} + \frac{\cos(p-q+2k)\theta}{p-q+2k} \right],$$

$$(15) \quad \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\sin(p+q+2k)\theta}{p+q+2k} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\sin(p-q+2k)\theta}{p-q+2k}.$$

En vertu de la relation

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

on a

$$(16) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right) \Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)} = 4q \frac{\sin(p-q)\frac{\pi}{2}}{\sin p \pi \sin q \theta} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\sin(p+2k)\theta}{(p+2k)^2 - q^2},$$

$$(17) \quad \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1-\frac{q+p}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{q-p}{2}\right)} = 4q \frac{\sin(p-q)\frac{\pi}{2} \sin(p+q)\frac{\pi}{2}}{\pi \sin p \pi \sin q \theta} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{-p}{k} \frac{\sin(p+2k)\theta}{(p+2k)^2 - q^2},$$

si l'on observe que les séries (9) sont absolument convergentes et que l'on peut en grouper arbitrairement les termes.

Changeons dans ces formules p en $-p$:

$$(18) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right) \Gamma(1+p)}{\Gamma\left(1+\frac{q+p}{2}\right)} = 4q \frac{\sin(p+q)\frac{\pi}{2}}{\sin p \pi \sin q \theta} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{\sin(2k-p)\theta}{(2k-p)^2 - q^2},$$

$$(19) \quad \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(1+\frac{q+p}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)} = 4q \frac{\sin(p+q)\frac{\pi}{2} \sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{\pi \sin p \pi \sin q \theta} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{\sin(2k-p)\theta}{(2k-p)^2 - q^2}.$$

q étant quelconque, dans tout l'espace à droite de la ligne MN, les quantités

$$4q \frac{\sin(p+q) \frac{\pi}{2}}{\sin p \pi \sin q \theta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \frac{\sin(2k-p)\theta}{(2k-p)^2 - q^2},$$

$$4q \frac{\sin(p+q) \frac{\pi}{2} \sin(q-p) \frac{\pi}{2}}{\pi \sin p \pi \sin q \theta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \frac{\sin(2k-p)\theta}{(2k-p)^2 - q^2}$$

sont des fonctions uniformes de p , n'ayant des discontinuités qu'en des points isolés. D'après le théorème de Riemann, toute fonction, donnée le long d'une ligne de grandeur finie, ne peut être étendue au delà que d'une seule manière, si on lui impose la condition d'être uniforme et de n'avoir des discontinuités qu'en des points isolés. Donc, quel que soit q , les égalités (18) et (19) doivent exister, pourvu que la partie réelle de p soit supérieure à -1 .

Dans l'équation (18), posons

$$\frac{q+p}{2} = a+x, \quad \frac{q-p}{2} = x;$$

et faisons dans la relation (19)

$$\frac{q+p}{2} = x, \quad \frac{p-q}{2} = a,$$

il viendra

$$(20) \quad \frac{\Gamma(a) \Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \frac{(a+x)(a+2x) \sin(a+x) \pi}{a \sin(a+2x) \theta \sin a \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \frac{\sin(2k-a)\theta}{(k+x)(k-a-x)},$$

$$(21) \quad \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a) \Gamma(x)} = - \frac{ax(x-a) \sin \pi x \sin a \pi}{\pi(x+a) \sin(a+x) \pi \sin(x-a) \theta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+x}{k} \frac{\sin(2k-a-x)\theta}{(k-x)(k-a)}.$$

Ces deux développements subsistent pour les valeurs de θ comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Dans le second, $a+x$ doit représenter l'affixe d'un point situé dans la partie du plan à droite de MN; dans la formule (20), a est une constante dont la partie réelle est supérieure à -1 . Quand ces conditions ne seront pas remplies, on posera, avec

l'illustre géomètre, M. Hermite,

$$a' = a + m,$$

m étant un nombre entier tel, qu'elles soient vérifiées à l'égard de a' et de $a' + x$. Alors,

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a) \Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} &= \frac{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)}{a(a+1)\dots(a+m)} \frac{(a+2x+m) \sin(a+x)\pi}{\sin(a+2x+m)\theta \sin a\pi} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+m}{k} \frac{\sin(2k-a-m)\theta}{(k+x)(k-a-x-m)}, \end{aligned} \right.$$

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a) \Gamma(x)} &= - \frac{a(a+1)\dots(a+m)}{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)} \frac{x(x-a-m) \sin \pi x \sin a\pi}{\pi \sin(a+x) \pi \sin(x-a-m)\theta} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+x+m}{k} \frac{\sin(2k-a-x-m)\theta}{(k-x)(k-a-m)}. \end{aligned} \right.$$

Les relations (12) et (13) conduisent encore aux formules

$$(24) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a) \Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} &= \frac{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)}{a(a+1)\dots(a+m)} \frac{\sin(a+x)\pi}{\cos(a+2x+m)\theta \sin a\pi} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+m}{k} \frac{\cos(2k-a-m)\theta}{(k+x)(k-a-x-m)} 2k-a-m, \end{aligned} \right.$$

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a) \Gamma(x)} &= - \frac{a(a+1)\dots(a+m)}{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)} \frac{x \sin \pi x \sin a\pi}{\pi \sin(a+x) \pi \cos(x-a-m)\theta} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+x+m}{k} \frac{\cos(2k-a-x-m)\theta}{(k-x)(k-a-m)} (2k-a-x-m). \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Si les quantités $\sin(a+2x+m)\theta$, $\sin(x-a-m)\theta$, $\cos(a+2x+m)\theta$, $\cos(x-a-m)\theta$ sont différentes de zéro, les développements (22) et (24), (23) et (25) représentent, les premiers, l'intégrale eulérienne de première espèce; les seconds, l'inverse de cette fonction.

Si, pour certaines valeurs de a , m , x et θ , $\sin(a+2x+m)\theta$ est nul, il faut, pour la représentation de $B(a, x)$, avoir recours à la formule (24). Dans ce cas, le second membre de la relation (22) doit

prendre la forme $\frac{0}{0}$, et la valeur de $B(a, x)$ est donnée par la formule (24).

5. Si $\theta = 0$, ces développements deviennent successivement

$$(26) \quad \frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \frac{(a+x)\sin(a+x)\pi}{a\sin a\pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a}{k} \frac{2k-a}{(k+x)(k-a-x)},$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} &= \frac{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)}{a(a+1)\dots(a+m)} \frac{\sin(a+x)\pi}{\sin a\pi} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+m}{k} \frac{2k-a-m}{(k+x)(k-a-x-m)}, \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(x)} = -\frac{ax\sin\pi x\sin a\pi}{\pi(a+x)\sin(a+x)\pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+x}{k} \frac{2k-a-x}{(k-a)(k-x)},$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(x)} &= -\frac{a(a+1)\dots(a+m)}{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)} \frac{x\sin\pi x\sin a\pi}{\pi\sin(a+x)\pi} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+x+m}{k} \frac{2k-a-x-m}{(k-x)(k-a-m)}. \end{aligned} \right.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} &= -\frac{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)}{a(a+1)\dots(a+m)} \frac{(a+2x+m)\sin(a+x)\pi\sin(a+m)\frac{\pi}{2}}{\sin(a+2x+m)\frac{\pi}{2}\sin a\pi} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+m}{k} \frac{(-1)^k}{(k+x)(k-a-x-m)}, \end{aligned} \right.$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} &= \frac{a(a+x)\dots(a+x+m)}{a(a+1)\dots(a+m)} \frac{\sin(a+x)\pi\cos(a+m)\frac{\pi}{2}}{\cos(a+2x+m)\frac{\pi}{2}\sin a\pi} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a+m}{k} \frac{2k-a-m}{(k+x)(k-a-x-m)}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(x)} &= - \frac{a(a+1)\dots(a+m)}{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)} \frac{x \sin \pi x \sin a \pi \cos(a+x+m) \frac{\pi}{2}}{\pi \sin(a+x) \pi \cos(x-a-m) \frac{\pi}{2}} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a+x+m}{k} \frac{2k-a-x-m}{(k-x)(k-a-m)}, \end{aligned} \right. \\
 (33) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(x)} &= \frac{a(a+1)\dots(a+m)}{(a+x)(a+x+1)\dots(a+x+m)} \frac{x(x-a-m) \sin \pi x \sin a \pi \sin(a+x+m) \frac{\pi}{2}}{\pi \sin(a+x) \pi \sin(x-a-m) \frac{\pi}{2}} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+x+m}{k} \frac{(-1)^k}{(k-x)(k-a-m)}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

6. Si la valeur de θ surpasse $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, le développement (20) définit encore une fonction analytique dans tout le plan. La partie méromorphe de cette fonction est identique à celle de $B(a, x)$, car elle a les mêmes pôles et les mêmes résidus. Si l'on désigne cette fonction par $B(a, x, \theta)$, on pourra poser

$$(34) \quad B(a, x, \theta) = G(a, x, \theta) + B(a, x),$$

$G(a, x, \theta)$ étant une fonction holomorphe. Cette fonction s'annule, quand θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et reste égale à zéro, quel que soit θ , si les quantités a et x satisfont à la condition

$$a+x=k \quad (k = \text{nombre entier}).$$

En effet, dans cette hypothèse, la formule (20) se réduit à

$$\frac{(1-a)(2-a)\dots(k-a-1)}{1.2.3\dots(k-1)} \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(k-a)}{\Gamma(k)} = B(a, k-a).$$

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENTS, EN SÉRIE CONVERGENTE, DES FONCTIONS

$$\pi \frac{\cos(2x - m)\theta}{\sin \pi x}, \quad \pi \frac{\sin(2x - m)\theta}{\sin \pi x} \quad (m = \text{nombre entier}).$$

7. Les formules (23) et (25) donnent lieu à plusieurs applications intéressantes et nous permettent, en particulier, de développer, en série convergente, et cela d'une infinité de manières, les fonctions

$$\pi \cot \pi x, \quad \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2} x}.$$

Ces relations (23) et (25) sont pour ainsi dire conjuguées. Pour obtenir les développements qu'on tire de l'équation (25), il suffit de différentier, par rapport à θ , les formules déduites de la relation (23).

On sait que les pôles de $\Gamma(a + x)$ sont donnés par l'équation

$$a + x + n = 0 \quad (n = \text{nombre entier}),$$

d'où

$$m + a + x = m - n.$$

La fonction $\Gamma(a + x)$ paraît n'avoir pas de pôles simples; mais il n'en est rien. Si $a + x + n = 0$, on a identiquement

$$(36) \quad \left[\sum_{k=0}^{k=m-n} \binom{m+a+x}{k} \frac{\sin(2k - a - x - m)\theta}{(k-x)(k-a-m)} \right]_{a+x+n=0} = 0.$$

En outre, à partir du $(m - n + 1)^{\text{ième}}$ terme de la série (23), tous les termes contiendront le facteur $n + a + x$. Ainsi, par suite de la présence du facteur $\sin(a + x)\pi$ au dénominateur, le coefficient de $\frac{1}{a + x + n}$ prendra la forme $\frac{0}{0}$, et, dans chaque cas particulier, on trouvera aisément la vraie valeur de cette quantité.

8. APPLICATION I. — Déterminons la valeur du résidu de $\Gamma(a+x)$ pour le pôle $a+x=0$ et soit, dans la formule (23), $m=0$.

En faisant usage de la notation de Cauchy, on trouve

$$\frac{\zeta_0 \Gamma(a+x)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{2x^2 \sin^2 \pi x}{\pi^2 \sin 2\theta x} \left[\frac{\theta}{x^2} + \frac{\sin 2\theta}{1-x^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 4\theta}{2^2-x^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin 6\theta}{3^2-x^2} - \dots \right],$$

ou

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \frac{\sin \theta x}{\sin \pi x} - \theta = 2x^2 \left[\frac{\sin \theta}{1-x^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{2^2-x^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin 3\theta}{3^2-x^2} - \dots \right], \\ \pi \stackrel{<}{\approx} \theta \stackrel{<}{\approx} -\pi; \end{array} \right.$$

car on sait que le résidu de $\Gamma(a+x)$, pour le pôle $a+x=0$, est égal à 1.

Maintenant, si l'on observe que la série, formée par la dérivée des termes du développement (37), est uniformément et même absolument convergente, on aura par différentiation

$$(38)^{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \frac{\cos \theta x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} = 2x \left[\frac{\cos \theta}{1-x^2} - \frac{\cos 2\theta}{2^2-x^2} + \frac{\cos 3\theta}{3^2-x^2} - \dots \right], \\ \pi \stackrel{<}{\approx} \theta \stackrel{<}{\approx} -\pi. \end{array} \right.$$

De (38) on déduit les deux formules classiques

$$(39) \quad \frac{\pi}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} = 2x \left[\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2^2-x^2} + \frac{1}{3^2-x^2} - \dots \right],$$

$$(40) \quad \pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2-x^2}.$$

De (37), en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$, on tire

$$(41) \quad \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \pi + 4x^2 \left[\frac{1}{1^2-x^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{3^2-x^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{5^2-x^2} - \dots \right],$$

(1) *Exercices de Calcul intégral*, par Legendre, t. II, p. 169.

formule, qui ne diffère pas au fond de celle d'Euler

$$(42) \quad \frac{\frac{1}{2}\pi}{\cos \frac{\pi}{2}x} = 4 \left[\frac{1}{1-x^2} - \frac{3}{3^2-x^2} + \frac{5}{5^2-x^2} - \frac{7}{7^2-x^2} + \dots \right].$$

La formule (25) nous conduirait aux mêmes résultats. Effectivement, faisons $a+x=0$ et $m=0$, on a

$$\frac{\zeta_0 \Gamma(a+x)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{x \sin^2 \pi x}{\pi \cos 2\theta x \sin(a+x)\pi} \left[-\frac{\cos(a+x)\theta}{ax} (a+x) + \frac{a+x}{1} \frac{\cos 2\theta}{(1-x)(1-a)^2} \right. \\ \left. + \frac{(a+x)(a+x-1)}{1.2} \frac{\cos 4\theta}{(2-x)(2-a)^4} + \dots \right]$$

ou

$$(38 \text{ bis}) \quad \pi \frac{\cos \theta x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} = 2x \left[\frac{\cos \theta}{1^2-x^2} - \frac{\cos 2\theta}{2^2-x^2} + \frac{\cos 3\theta}{3^2-x^2} - \dots \right].$$

9. APPLICATION II. — Posons dans la formule (23), $a+x=0$ et $m=1$,

$$A = \left[\frac{-\frac{\sin(a+x+1)\theta}{x(1+a)} + \frac{a+x+1}{1} \frac{\sin(1-a-x)\theta}{(1-x)(-a)}}{\sin(a+x)\pi} \right]_{a+x=0} = \frac{0}{0}.$$

La vraie valeur sera

$$A = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \theta - 2\theta \cos \theta}{x(1-x)} + \frac{\sin \theta}{x^2(1-x)^2} \right].$$

Alors

$$\left\{ \begin{aligned} \pi \frac{\sin(2x-1)\theta}{\sin \pi x} &= \frac{(2x-1)\sin \theta}{x(1-x)} + x(1-x)(2x-1) \\ &\times \left[\frac{\sin \theta - 2\theta \cos \theta}{x(1-x)} + \frac{1}{1.2} \frac{\sin 3\theta}{(2-x)(1+x)} - \frac{1}{2.3} \frac{\sin 5\theta}{(3-x)(2+x)} + \dots \right], \\ \frac{\pi}{2} = \theta &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

d'où, par différentiation,

$$(44) \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos(2x-1)\theta}{\sin \pi x} &= 2\theta \sin \theta - \cos \theta + x(1-x) \\ &\times \left[\frac{\cos \theta}{x^2(1-x)^2} + \frac{1}{1.2} \frac{\cos 3\theta}{(2-x)(1+x)} - \frac{1}{2.3} \frac{\cos 5\theta}{(3-x)(2+x)} + \dots \right]. \\ \frac{\pi}{2} &\geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

On déduirait cette formule (44) de la formule (25) en faisant dans cette dernière

$$a+x=0 \quad \text{et} \quad m=1.$$

Des développements (43) et (44) on tire les suivants, en supposant successivement $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = 0$,

$$(45) \left\{ \begin{aligned} \pi \cot \pi x &= \frac{1-2x}{x(1-x)} - x(1-x)(2x-1) \\ &\times \left[\frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{1.2} \frac{1}{(2-x)(1+x)} - \frac{1}{2.3} \frac{1}{(3-x)(2+x)} - \frac{1}{3.4} \frac{1}{(4-x)(3+x)} - \dots \right], \end{aligned} \right.$$

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi x} + 1 &= x(1-x) \left[\frac{1}{x^2(1-x)^2} + \frac{1}{1.2} \frac{3}{(2-x)(1+x)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2.3} \frac{5}{(3-x)(2+x)} + \frac{1}{3.4} \frac{7}{(4-x)(3+x)} - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

10. APPLICATION III. — Prenons un dernier exemple, celui de

$$a+x=0 \quad \text{et} \quad m=2.$$

La formule (25) donne

$$\begin{aligned} \frac{C_0 \Gamma(a+x)}{\Gamma(x) \Gamma(1-x)} &= \frac{x(1-x)(2-x)}{1.2} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi \cos(2x-2)\theta} \\ &\times \left[\frac{1}{\sin(a+x)\pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{a+x+2}{k} \frac{\cos(2k-a-x-2)\theta}{(k-x)(k-a-2)} (2k-a-x-2) \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\left[\frac{\sum_{k=0}^{k=2} \binom{a+x+2}{k} \frac{\cos(2k-a-x-2)\theta}{(k-x)(k-a-2)} (2k-a-x-2)}{\sin(a+x)\pi} \right]_{a+x=0}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{4\theta \sin 2\theta + \cos 2\theta}{x(2-x)} + \frac{4 \cos 2\theta}{x^2(2-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^2} \right];$$

donc

$$\frac{\pi \cos(x-1)2\theta}{\sin \pi x} = x(1-x)(2-x) \left[\frac{2\theta \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta}{x(2-x)} + \frac{2 \cos 2\theta}{x^2(2-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1.2.3} \frac{\cos 4\theta}{(3-x)(1+x)} 4 - \frac{1}{2.3.4} \frac{\cos 6\theta}{(4-x)(2+x)} 6 + \dots \right];$$

puis, par le changement de θ en $\frac{\theta}{2}$,

$$(47) \left\{ \begin{aligned} \pi \frac{\cos(1-x)\theta}{\sin \pi x} &= (1-x) \left(\frac{2\theta \sin \theta + \cos \theta}{2} \right) + x(1-x)(2-x) \\ &\times \left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2 \cos \theta}{x^2(2-x)^2} + \frac{1}{1.2.3} \frac{\cos 2\theta}{(3-x)(1+x)} 4 - \frac{1}{2.3.4} \frac{\cos 3\theta}{(4-x)(2+x)} 6 + \dots \right], \\ \pi \frac{\theta}{2} &\rightarrow \pi. \end{aligned} \right.$$

Par intégration entre 0 et θ , cette formule devient

$$(48) \left\{ \begin{aligned} \pi \frac{\sin(1-x)\theta}{\sin \pi x} &= (1-x)^2 \frac{3 \sin \theta - 2\theta \cos \theta}{2} + x(2-x)\theta \\ &+ 2x(1-x)^2(2-x) \left[\frac{\sin \theta}{x^2(2-x)^2} + \frac{1}{1.2.3} \frac{\sin 2\theta}{(3-x)(1+x)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2.3.4} \frac{\sin 3\theta}{(4-x)(2+x)} + \frac{1}{3.4.5} \frac{\sin 4\theta}{(5-x)(3+x)} - \dots \right], \\ \pi \frac{\theta}{2} &\rightarrow \pi. \end{aligned} \right.$$

De ces développements, on conclut

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi x} &= \frac{1-x}{2} + x(1-x)(2-x) \\ &\times \left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{x^2(2-x)^2} + \frac{1}{1.2.3} \frac{4}{(3-x)(1+x)} - \frac{1}{2.3.4} \frac{6}{(4-x)(2+x)} + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (50) \quad & \left\{ \begin{aligned} \pi \cot \pi x &= \frac{1-x}{2} - x(1-x)(2-x) \\ & \times \left[\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{x^2(2+x)^2} + \frac{1}{1.2.3} \frac{4}{(3-x)(1+x)} + \frac{1}{2.3.4} \frac{6}{(4-x)(2+x)} + \dots \right], \end{aligned} \right. \\
 (51) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi x}{2}} &= \pi \left(\frac{1-x}{2} \right) + x(1-x)(2-x) \\ & \times \left[\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1.2.3} \frac{4}{(3-x)(1+x)} + \frac{1}{3.4.5} \frac{8}{(5-x)(3+x)} - \frac{1}{5.6.7} \frac{12}{(7-x)(5+x)} + \dots \right], \end{aligned} \right. \\
 (52) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi x} &= 4x(1-x)\pi + \frac{(3+\pi)(1-2x)^2}{2} + 4x(1-x)(1-2x)^2 \\ & \times \left[\frac{1}{4x^2(1-x)^2} + \frac{1}{2.3.4} \frac{1}{(2-x)(1+x)} - \frac{1}{4.5.6} \frac{1}{(3-x)(2+x)} + \frac{1}{6.7.8} \frac{1}{(4-x)(3+x)} - \dots \right]. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

11. *Remarque I.* — Ces quelques exemples suffisent pour montrer comment on peut développer, en série convergente, les fonctions $\frac{\pi \cos(2x-m)\theta}{\sin \pi x}$, $\frac{\pi \sin(2x-m)\theta}{\sin \pi x}$, m étant un nombre entier. Par suite, on pourra développer en série convergente, et cela d'une infinité de manières, les fonctions $\pi \cot \pi x$, $\frac{\pi}{\sin \pi x}$, $\frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2} x}$.

Remarque II. — Au moyen des formules (22) et (24), on arriverait aux mêmes résultats. Dans ces relations, il suffit de donner au paramètre a successivement les valeurs entières : 0, 1, 2, 3, 4,

CHAPITRE III.

SOMMATION DE SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

12. Avant de terminer cette étude, nous ferons voir comment la formule (23) peut servir à déterminer la somme d'une infinité de séries trigonométriques.

Si nous posons $a = \alpha + i\beta$, $x = \alpha - i\beta$, $m = 0$, la relation (23) prend la forme

$$(53) \quad \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha+i\beta)\Gamma(\alpha-i\beta)} = -\frac{(\alpha^2+\beta^2)2i\beta\sin\pi(\alpha+i\beta)\sin\pi(\alpha-i\beta)}{2\alpha\pi\sin 2\alpha\pi\sin 2i\beta\theta} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{2\alpha}{k} \frac{\sin 2(k-\alpha)\theta}{(k-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Si nous désignons par R le module de $\Gamma(i\beta)$, on sait que

$$R = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta(e^{\beta\pi} - e^{-\beta\pi})}}.$$

Ce résultat est dû à M. Stieltjes (1).

D'autre part, les propriétés de la fonction gamma subsistent dans le cas de la variable imaginaire. Au moyen de la formule (53), il sera donc possible de trouver la somme d'une infinité de séries trigonométriques, si α satisfait à l'une des conditions

$$\alpha = n, \quad \alpha = n + \frac{1}{2},$$

n étant un nombre entier, nul ou positif.

13. APPLICATION I : $\alpha = 0$. La formule (53) devient

$$(54) \quad \frac{1}{\Gamma(i\beta)\Gamma(-i\beta)} = \frac{\beta^3}{\pi^2} \left[\frac{(e^{-\beta\pi} - e^{\beta\pi})^2}{e^{-2\beta\theta} - e^{2\beta\theta}} \right] \left(-\frac{\theta}{\beta^2} + \frac{\sin 2\theta}{1+\beta^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 4\theta}{2^2+\beta^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin 6\theta}{3^2+\beta^2} - \dots \right).$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2},$$

$$R = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta(e^{\beta\pi} - e^{-\beta\pi})}}.$$

R représentant le module de $\Gamma(i\beta)$. C'est le résultat de M. Stieltjes. Donc, par substitution de cette valeur de R dans la relation (54),

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\beta^2} \left[\theta - \pi \frac{e^{\beta\theta} - e^{-\beta\theta}}{e^{\beta\pi} - e^{-\beta\pi}} \right] &= \frac{\sin \theta}{1+\beta^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{2^2+\beta^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin 3\theta}{3^2+\beta^2} - \dots, \\ \pi > \theta > -\pi. \end{aligned} \right.$$

(1) *Cours de M. Hermite, professé à la Faculté des Sciences de Paris*. 3^e édition, p. 113.

(2) *Traité élémentaire des séries*, par M. Catalan, p. 114.

14. APPLICATION II : $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\left[\frac{-\frac{\sin 2\alpha\theta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\alpha \sin 2(1-\alpha)\theta}{(1-\alpha)^2 + \beta^2}}{\sin 2\alpha\pi} \right]_{\alpha=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2\sin\theta - 4\theta\cos\theta}{(\frac{1}{2})^2 + \beta^2} + \frac{2\sin\theta}{[(\frac{1}{2})^2 + \beta^2]^2} \right\}.$$

Alors

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta) \Gamma(\frac{1}{2} - i\beta)} = \beta \frac{1 + 4\beta^2}{\pi^2} \frac{(e^{\beta\pi} + e^{-\beta\pi})^2}{e^{2\beta 0} - e^{-2\beta 0}} \left[\frac{\sin\theta - 2\theta\cos\theta}{1 + 4\beta^2} + \frac{4\sin\theta}{1 + 4\beta^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{1.2} \frac{\sin 3\theta}{3^2 + 4\beta^2} - \frac{1}{2.3} \frac{\sin 5\theta}{5^2 + 4\beta^2} + \dots \right].$$

Mais

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta) \Gamma(\frac{1}{2} - i\beta)} = \frac{e^{\beta\pi} + e^{-\beta\pi}}{2\pi};$$

par suite

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\pi}{\beta(1 + \beta^2)} \frac{e^{\beta 0} - e^{-\beta 0}}{e^{\beta \frac{\pi}{2}} + e^{-\beta \frac{\pi}{2}}} + \frac{2\theta\cos\theta}{1 + \beta^2} - \frac{4\sin\theta}{(1 + \beta^2)^2} \\ & = \frac{\sin\theta}{1 + \beta^2} + \frac{1}{1.2} \frac{\sin 3\theta}{3^2 + \beta^2} - \frac{1}{2.3} \frac{\sin 5\theta}{5^2 + \beta^2} + \frac{1}{3.4} \frac{\sin 7\theta}{7^2 + \beta^2} - \dots, \\ & \frac{\pi}{2} > \theta > -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

En particulier, $\beta = 0$,

$$(57) \quad \pi\theta + 2\theta\cos\theta = 5\sin\theta + \frac{1}{1.2} \frac{\sin 3\theta}{3^2} - \frac{1}{2.3} \frac{\sin 5\theta}{5^2} + \frac{1}{3.4} \frac{\sin 7\theta}{7^2} - \dots$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi^2}{2} = 5 - \frac{1}{1.2} \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2.3} \frac{1}{5^2} - \frac{1}{3.4} \frac{1}{7^2} - \dots$$

Prenons la dérivée de la formule (57) et faisons ensuite $\theta = 0$

$$(58) \quad \pi = 3 + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.4.7} - \frac{1}{4.5.9} + \dots$$

Cette série est assez remarquable.

CHAPITRE IV.

15. Pour terminer ce travail, je crois devoir signaler une nouvelle forme de développement de $B(a, x)$, laquelle me paraît digne d'attention.

Dans les formules (22) et (24), faisons $m = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, il viendra

$$(59) \quad B(a, x) = - \frac{(a+x)(a+2x) \sin(a+x) \pi \sin a \frac{\pi}{2}}{a \sin(a+2x) \frac{\pi}{2} \sin a \pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{(k+x)(k-a-x)},$$

$$(60) \quad B(a, x) = \frac{(a+x) \sin(a+x) \pi \cos a \frac{\pi}{2}}{a \cos(a+2x) \frac{\pi}{2} \sin a \pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{2k-a}{(k+x)(k-a-x)}.$$

On peut écrire ainsi ces formules :

$$B(a, x) = \frac{(a+x) \sin(a+x) \pi \sin a \frac{\pi}{2}}{a \sin(a+2x) \frac{\pi}{2} \sin a \pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k-a-x} \right),$$

$$B(a, x) = \frac{(a+x) \sin(a+x) \pi \cos a \frac{\pi}{2}}{a \cos(a+2x) \frac{\pi}{2} \sin a \pi} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \left(\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k-a-x} \right);$$

d'où l'on tire

$$(61) \quad B(a, x) = \frac{a+x}{a} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{k+x},$$

$$(62) \quad B(a, x) = - \frac{(a+x) \sin(a+x) \pi}{a \sin \pi x} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{k-a-x} = - \frac{(a+x) G(x)}{\sin \pi x},$$

en posant

$$G(x) = \frac{\sin(a+x) \pi}{a} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{k-a-x}.$$

Le développement (61) ne diffère pas de celui que donne l'illustre professeur M. Hermite, dans son *Cours de la Sorbonne*, 3^e édition, p. 135. $G(x)$ est une fonction holomorphe. Ainsi, la fonction méromorphe $B(a, x)$ est mise sous la forme d'un quotient de deux fonctions holomorphes. En outre, d'après la nature de la fonction $B(a, x)$, les zéros de

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{k-a-x}$$

doivent être nécessairement 1, 2, 3, 4, ..., puisque, pour ces valeurs de x , le dénominateur de la formule (62) s'annule. En conséquence, sous la condition que a soit une constante, dont la partie réelle est supérieure à -1, on a l'identité

$$(63) \quad \begin{cases} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{k-a-x} = 0, \\ x = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

16. VÉRIFICATION : $a = 3$, $x = 4$. — On a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{k-a-4} \\ &= -\frac{1}{a+4} - \frac{a}{1} \frac{1}{1-a-4} + \frac{a(a-1)}{1.2} \frac{1}{2-a-4} - \frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3} \frac{1}{3-a-4} \\ &\quad + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)(a-5)(a-6)}{1.2.3.4.5.6.7} \frac{1}{3-a}, \end{aligned}$$

ou

$$A = -\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5.7} = 0.$$

17. Des relations (23) et (25), par une analyse semblable, on déduira les formules

$$(64) \quad \frac{1}{B(a, x)} = -\frac{ax \sin a\pi}{\pi(a+x)} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a+x}{k} \frac{1}{k-a},$$

$$(65) \quad \frac{1}{B(a, x)} = -\frac{ax \sin \pi x}{\pi(a+x)} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{a+x}{k} \frac{1}{k-x}.$$