L. Sauvage

Théorie des diviseurs élémentaires et applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 285-340
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__285_0>

THÉORIE

DES

DIVISEURS ÉLÉMENTAIRES

ET

APPLICATIONS,

PAR M. L. SAUVAGE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

INTRODUCTION.

1. La théorie des *diviseurs élémentaires* est due entièrement à M. Weierstrass : nous la reproduisons dans ce Travail; mais, de plus, nous éclaircissons, nous l'espérons du moins, la théorie des *formes bilinéaires*, qui est intimement liée à celle des diviseurs élémentaires, en faisant usage de la méthode employée par M. Darboux dans la théorie des *formes quadratiques*. Enfin nous appliquons les théories précédentes à l'étude des équations différentielles linéaires.

Les Mémoires essentiels à consulter et dont nous nous sommes servi sont :

1° *Zur theorie der bilineären und quadratischen Formen*, par M. Weierstrass (*Monatsberichte*, 1868);

2° *Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques*, par M. G. Darboux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1874).

M. Horn a fait usage de la théorie des diviseurs élémentaires dans ses beaux Travaux [*Mémoire sur les équations linéaires aux dérivées partielles* (*Acta mathematica*, 1888); et Thèse, Université de Fribourg, 1890].

I.

2. Représentons par [P], [Q] et [P, Q] les déterminants

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} pA_{11}+qB_{11} & \dots & pA_{1n}+qB_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ pA_{n1}+qB_{n1} & \dots & pA_{nn}+qB_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant [P, Q] est une fonction entière et homogène du degré n en p et q, et, sauf le cas où tous les coefficients des puissances de p et q seraient nuls, c'est un produit de n facteurs linéaires et homogènes en p et q, de la forme $ap + bq$, et distincts ou non.

M. Weierstrass a donné le nom de *diviseurs élémentaires* du déterminant [P, Q] (*Elementarteiler*) aux éléments qui résultent d'un certain groupement que nous allons exposer, lorsque l'on considère les diviseurs $ap + bq$ du déterminant [P, Q].

3. Soit $ap + bq$ un quelconque des *diviseurs linéaires* de [P, Q]. Nous opposerons cette expression à celle de *diviseur élémentaire* de [P, Q], chacune des deux sortes de diviseurs correspondant à une décomposition spéciale du déterminant [P, Q].

Les mineurs des différents ordres du déterminant [P, Q] sont, comme [P, Q] lui-même, des fonctions entières et homogènes en p et q. Soit l_ϖ l'exposant du diviseur linéaire $ap + bq$, qui entre dans le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'ordre ϖ. Ces mineurs sont du degré $n - \varpi$ en p et q. Soit l_0 l'exposant du même diviseur linéaire $ap + bq$ dans [P, Q].

D'abord les nombres $l_0, l_1, l_2, \dots$ ne peuvent aller qu'en décroissant; car tout déterminant de degré $n - \varpi + 1$ peut être considéré comme une somme de termes dont chacun, abstraction faite du signe, est le produit d'un déterminant de degré $n - \varpi$ par un élément de [P, Q]. Donc, tout diviseur commun des déterminants de degré $n - \varpi$ doit être aussi un diviseur des déterminants de degré $n - \varpi + 1$, et, par suite aussi, de tous les déterminants de degrés supérieurs à $n - \varpi + 1$. En conséquence, si l'un des nombres $l_0, l_1, l_2, \dots$ est nul, tous les suivants sont nuls.

Ensuite, si l'on considère un mineur de degré $n - \varpi + 1$, ses dérivées partielles du premier ordre par rapport à p et à q peuvent être considérées comme des sommes de termes dont chacun est le produit d'un déterminant de degré $n - \varpi$ par un terme de [P] ou de [Q]. Si donc les mineurs de degré $n - \varpi$ admettent le diviseur linéaire $ap + bq$ au degré l_ϖ, le mineur de degré $n - \varpi + 1$ et ses dérivées partielles admettent en commun ce diviseur linéaire au même degré l_ϖ. Il faut alors que le mineur de degré $n - \varpi + 1$ soit divisible par $(ap + bq)^{l_\varpi + 1}$.

Soit l_r le dernier exposant l qui ne soit pas nul, on aura les inégalités

$$l_0 > l_1 > l_2 > \ldots > l_r.$$

Posons alors

$$l_0 - l_1 = e_0, \quad l_1 - l_2 = e_1, \quad \ldots, \quad l_{r-1} - l_r = e_{r-1}, \quad l_r = e_r;$$

nous aurons

$$e_0 + e_1 + \ldots + e_{r-1} + e_r = l_0,$$

et, par suite,

$$(ap + bq)^{l_0} = (ap + bq)^{e_0}(ap + bq)^{e_1} \ldots (ap + bq)^{e_{r-1}}(ap + bq)^{e_r}.$$

Soient

$$a_1 p + b_1 q, \quad a_2 p + b_2 q, \quad \ldots, \quad a_m p + b_m q$$

les diviseurs linéaires distincts du déterminant [P, Q].

Soient $l_0^1, l_0^2, \ldots, l_0^m$ leurs exposants. Décomposons ces nombres en éléments e d'après les règles précédentes, de sorte que l'on ait, par exemple,

$$l_0^i = e_0^i + e_1^i + \ldots + e_{r_i}^i (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Le déterminant PQ pourra être représenté par le produit

$$\prod (a_i p + b_i q)^{e_j^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 0, 1, \ldots, r_i).$$

Chacun des facteurs de ce produit est un *diviseur élémentaire* du déterminant [P, Q]. On voit que chaque diviseur élémentaire est essentiellement caractérisé par le rapport de deux coefficients a et b et par un exposant e.

4. Dans les théories que nous étudierons, chaque diviseur élémentaire jouera un rôle indépendant. Nous pourrons représenter tous les diviseurs élémentaires dans un ordre quelconque par la notation

$$(a_1p+b_1q)^{e_1}, \quad (a_2p+b_2q)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p+b_\rho q)^{e_\rho}.$$

Mais les indices $1, 2, \ldots, \rho$ n'indiqueront plus que les diviseurs linéaires a_1p+b_1q, a_2p+b_2b, $\ldots$, $a_\rho p+b_\rho q$ soient nécessairement distincts. Plusieurs pourront être égaux entre eux. On aura de plus

$$e_1+e_2+\ldots+e_\rho=n,$$

et le nombre ρ sera égal ou supérieur au nombre des diviseurs linéaires distincts.

Soit $(ap+bq)^e$ un diviseur élémentaire de $[P, Q]$; ce diviseur sera dit *simple* ou *multiple*, suivant que son exposant e sera égal ou supérieur à l'unité.

Supposons qu'un diviseur linéaire $ap+bq$ fournisse les diviseurs élémentaires

$$(ap+bq)^{e_0}, \quad (ap+bq)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (ap+bq)^{e_r},$$

au nombre de $r+1$. Le déterminant $[P, Q]$ sera divisible par $(ap+bq)^{e_0+e_1+\ldots+e_r}$. Tous les mineurs du premier ordre seront divisibles par $(ap+bq)^{e_1+\ldots+e_r}$, ... Tous les mineurs de l'ordre r seront divisibles par $(ap+bq)^{e_r}$.

En particulier, si tous les diviseurs élémentaires sont simples, c'est-à-dire si l'on a $e_0=e_1=\ldots=e_r=1$, on voit que le déterminant $[P, Q]$ sera divisible par $(ap+bq)^{r+1}$; ses mineurs du premier ordre seront divisibles par $(ap+bq)^r$, ..., ses mineurs de l'ordre r seront divisibles par $ap+bq$.

On voit par là qu'il est bien indispensable de distinguer la multiplicité du diviseur $ab+bq$, considéré comme *diviseur linéaire*, de la multiplicité du même diviseur considéré comme *diviseur élémentaire*.

II.

5. Soient les deux formes bilinéaires

$$P = \sum A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

$$Q = \sum B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

aux mêmes $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Les déterminants de ces formes sont, par définition, les déterminants $[P]$ et $[Q]$.

Faisons les substitutions

$$x_i = \sum_j h_{ij} x'_j,$$

$$y_i = \sum_j k_{ij} y'_j$$

aux déterminants H et K supposés tous deux différents de zéro. Les formes

$$P(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n) \quad \text{et} \quad Q(x_1, \ldots, x_n | y_1, \ldots, y_n)$$

ou, avec une notation plus simple, les formes

$$P(x|y) \quad \text{et} \quad Q(x|y)$$

deviendront

$$P'(x'|y') \quad \text{et} \quad Q'(x'|y').$$

Nous allons montrer que *les déterminants des deux formes*

$$pP + qQ \quad \text{et} \quad pP' + qQ'$$

admettent les mêmes diviseurs élémentaires.

6. Supposons que l'on ne fasse d'abord que la première substitution. Les formes

$$P(x|y) \quad \text{et} \quad Q(x|y)$$

deviendront

$$P_1(x'|y) \quad \text{et} \quad Q_1(x'|y).$$

Si ensuite on fait la seconde substitution, on obtiendra les formes

$$P'(x' \mid y') \quad \text{et} \quad Q'(x' \mid y').$$

Il suffit donc de démontrer que le déterminant de la forme

$$pP_1 + qQ_1$$

a les mêmes diviseurs élémentaires que le déterminant de la forme

$$pP + qQ;$$

car on passera, par le même procédé de démonstration, des diviseurs élémentaires de la forme

$$pP_1 + qQ_1$$

à ceux de la forme

$$pP' + qQ'.$$

Nous avons la relation immédiate

$$[P_1, Q_1] = [P, Q] \times H.$$

Donc déjà les diviseurs linéaires distincts des deux déterminants

$$[P_1, Q_1] \quad \text{et} \quad [P, Q]$$

sont les mêmes. Il reste à faire voir qu'ils fournissent les mêmes diviseurs élémentaires. Nous montrerons pour cela que, si un diviseur linéaire est facteur à un certain degré de multiplicité dans tous les mineurs d'un ordre donné de $[P, Q]$, il est aussi facteur au même degré de multiplicité dans les mineurs de même ordre de $[P_1, Q_1]$ et réciproquement.

Représentons les mineurs de degré μ des trois déterminants

$$[P, Q], \quad H, \quad [P_1, Q_1]$$

par

$$m_{\gamma\delta}, \quad n_{\gamma\delta}, \quad m'_{\gamma\delta},$$

γ et δ désignant deux combinaisons quelconques des nombres 1, 2, ..., n, puis μ à μ. On a, d'après Cauchy, et en partant de la relation

$$[P_1, Q_1] = [P, Q] \times H,$$

la relation

$$m'_{\gamma\delta} = n_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \ldots + n_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Le nombre c est celui des combinaisons indiquées, et est égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}.$$

Si tous les mineurs $m_{\delta\gamma}$ admettent le même diviseur $(ap+bq)^l$, $m'_{\gamma\delta}$ admettra ce même diviseur pour toutes les valeurs qu'on peut donner à γ et à δ.

Réciproquement, si tous les mineurs $m'_{\gamma\delta}$ admettent le même diviseur $(ap+bq)^l$, il en sera de même des expressions

$$\eta_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \ldots + \eta_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Mais le déterminant $\Sigma \eta_{11} \eta_{22} \ldots \eta_{cc}$ est une puissance de H (1) et n'est pas nul. Donc $m_{\delta 1}, \ldots, m_{\delta c}$ admettent séparément le diviseur $(ab+bq)^l$, et pour toutes les valeurs qu'on peut donner à δ.

Enfin, si les mineurs d'un certain ordre de [P, Q] n'ont aucun diviseur commun, il en sera de même des mineurs du même ordre de $[P_1, Q_1]$, sans quoi l'on pourrait démontrer que les mineurs considérés dans [P, Q] ont, contrairement à l'hypothèse, un diviseur commun.

Il est donc prouvé que *les diviseurs élémentaires du déterminant* |P, Q| *ne sont pas altérés par la double substitution*

$$x_1, \ldots, x_n \,|\, x'_1, \ldots, x'_n ; y_1, \ldots, y_n \,|\, y'_1, \ldots, y'_n,$$

pourvu que les déterminants de cette double substitution ne soient pas nuls.

7. La réciproque de cette proposition, qui fera l'objet de plusieurs parties de ce Mémoire, est une question très considérable. La première solution est de M. Weierstrass. L'une des autres solutions données est de M. Darboux. Il est vrai que M. Darboux s'est contenté d'étudier les formes quadratiques, mais notre Maître n'a laissé au lecteur que la peine d'étendre lui-même le procédé aux formes bilinéaires. C'est ce que nous avons fait dans ce qui suit.

---

(1) FRANCKE, *Journal de Crelle*, Bd. 61.

La réciproque du théorème précédent s'énonce de la manière suivante :

Soient deux couples de formes bilinéaires

$$P(x\,|\,y) \quad \text{et} \quad Q(x\,|\,y)$$

et

$$P'(x'\,|\,y') \quad \text{et} \quad Q'(x'\,|\,y').$$

Si les deux déterminants $[P, Q]$ *et* $[P', Q']$ *ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer* $2n^2$ *constantes* h *et* k *telles que les substitutions*

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_j h_{ij} x'_j \\ y_i &= \sum_j k_{ij} y'_j \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

changent P *en* P' *et* Q *en* Q'.

III.

8. Soit une forme bilinéaire aux $2n$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

$$P = \sum A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Nous allons montrer qu'on peut d'une infinité de manière substituer aux variables x et y d'autres variables telles que dans la nouvelle forme on ait $A_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$. Ce calcul correspond à la réduction des formes quadratiques à des sommes de carrés.

9. Appelons $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} X_i &= A_{i1} y_1 + \ldots + A_{in} y_n \\ Y_i &= A_{1i} x_1 + \ldots + A_{ni} x_n \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant formé par les n^2 coefficients A, et qui a l'une des deux formes

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

est appelé le *déterminant* ou l'*invariant* de la forme P.

On remarquera la relation

$$x_1 X_1 + \ldots + x_n X_n = y_1 Y_1 + \ldots + y_n Y_n = P.$$

10. Appelons B_0 le déterminant de la forme P et formons toutes les expressions que peut donner le déterminant B_0 *bordé* comme nous allons l'indiquer. Posons

$$B_\theta = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & u_1^1 & \dots & u_1^\theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & u_n^1 & \dots & u_n^\theta \\ v_1^1 & \dots & v_n^1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^\theta & \dots & v_n^\theta & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Chaque *bordure*, la $k^{\text{ième}}$ par exemple, distinguée par l'indice supérieur k, est obtenue au moyen de $2n$ arbitraires formant deux groupes distincts, soient $u_1^k, \ldots, u_n^k$ pour la bordure en colonne, et $v_1^k, \ldots, v_n^k$ pour la bordure en ligne.

Développons B_θ par la règle de Laplace en combinant les éléments des θ dernières colonnes de toutes les manières possibles, de manière à former des mineurs de degré θ, et en multipliant ces mineurs par le mineur de degré n qui reste quand on a supprimé les θ dernières colonnes et les θ lignes choisies. Les produits du degré $n + \theta$ que l'on obtient ainsi renferment des paramètres v provenant de toutes les bordures et sont du degré $n - \theta$ par rapport aux éléments du déterminant B_0.

Donc B_θ *est une fonction linéaire et homogène des mineurs d'ordre* θ *de* B_0, *quelles que soient les valeurs attribuées aux arbitraires* u *et* v.

11. B_θ est une forme bilinéaire, si l'on considère les $2n$ variables indépendantes $u_1^k, \ldots, u_n^k, v_1^k, \ldots, v_n^k$.

12. B_θ peut être considéré comme un contrevariant. En effet, formons

l'expression

$$F = P(x|y) + \sum_{k=1}^{k=\theta} u_k(u_1^k x_1 + \ldots + u_n^k x_n) + \sum_{k=1}^{k=\theta} v_k(v_1^k y_1 + \ldots + v_n^k y_n)$$

qui renferme les $2n + 2\theta$ variables indépendantes

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_n, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_\theta, \quad v_1, \quad \ldots, \quad v_\theta,$$

et faisons les substitutions

$$x_i = \sum_j h_{ij} x'_j,$$

$$y_i = \sum_j k_{ij} y'_j,$$

aux déterminants H et K différents de zéro, et

$$u_k = u'_k,$$
$$v_k = v'_k.$$

Convenons, en outre, de transformer les $u_1^k, \ldots, u_n^k$ par la substitution inverse de celle qu'on fait sur les x, et de transformer les $v_1^k, \ldots, v_n^k$ par la substitution inverse de celle qu'on fait sur les y, de sorte que les expressions

$$u_1^k x_1 + \ldots + u_n^k x_n$$

et

$$v_1^k y_1 + \ldots + v_n^k y_n$$

se reproduisent identiquement après une transformation quelconque. Soit B'_θ la nouvelle expression B_θ transformée, on aura

$$B'_\theta = B_\theta H K,$$

car le déterminant de la substitution complète se réduit à HK. On voit donc que la fonction B_θ joue le rôle de contrevariant.

13. Si l'on connaît le déterminant $[P, Q]$, qu'on peut représenter par $B_0(p, q)$, on voit que la fonction $B_\theta(p, q)$ sera entière et homogène en p et q, et, si les mineurs du degré $n - \theta$ de $B_0(p, q)$ sont divisibles par $(ap + bq)^{l_\theta}$, on voit que $B_\theta(p, q)$ sera divisible par $(ap + bq)^{l_\theta}$.

Donc, pour qu'un diviseur $(ap+bq)^{l_0}$ *soit commun à tous les mineurs d'ordre* θ *de* $[P, Q]$, *il faut et il suffit qu'il divise la fonction* $B_\theta(p, q)$ *correspondante.*

14. On pourrait définir les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ au moyen des déterminants $B_\theta(p, q)$. Ces déterminants ont pour principal avantage de posséder un grand nombre de paramètres arbitraires. La méthode employée par M. Weierstrass dans l'étude des couples de formes bilinéaires présente des difficultés qui semblent précisément tenir au petit nombre d'arbitraires introduites dans les calculs. Nous préférons, dans l'étude de la même question, la méthode de M. Darboux, et nous en donnons ainsi la raison.

15. La deuxième forme B_θ est

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & u_1^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & u_n^1 \\ v_1^1 & \dots & v_n^1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En la développant, on a

$$B_1 = -\sum u_i^1 v_j^1 \frac{\partial B_0}{\partial A_{ij}}.$$

Si l'on retranche de la dernière colonne les autres multipliées par $y_1, y_2, \dots, y_n$, puis ensuite que l'on retranche de la dernière ligne les autres multipliées par $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & u_1^1 - X_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & u_n^1 - X_n \\ v_1^1 - Y_1 & \dots & v_n^1 - Y_n & -(u_1^1 x_1 + \dots + u_n^1 x_n) - (v_1^1 y_1 + \dots + v_n^1 y_n) + (x_1 X_1 + \dots + x_n X_n) \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace alors les arbitraires u et v par les dérivées X et Y de la forme linéaire P, on aura

$$B_1 = -B_0 P.$$

Cette formule permet d'exprimer P en fonction de B_1 et de B_0.

16. La fonction $B_{\theta+1}$ est liée à la fonction B_θ par la relation simple

$$B_{\theta+1} = -\sum u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}.$$

17. La dernière fonction B_θ est

$$B_n = (-1)^n \begin{vmatrix} u_n^1 & \dots & u_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix},$$

car toutes les fonctions $B_{n+n'}$ seraient identiquement nulles.

18. Nous représenterons maintenant la fonction B_θ par la notation

$$B(u^1, \dots, u^\theta; v^1, \dots, v^\theta)$$

ou par la notation

$$B(u^\theta; v^\theta),$$

où n'entrent que les éléments les plus indispensables.

Avec cette notation, écrivons la formule

$$\begin{aligned} &B(u^{\theta-1}, u^\theta; v^{\theta-1}, v^\theta) \quad B(u^{\theta-1}, u^{\theta+1}; v^{\theta-1}, v^{\theta+1}) \\ &- B(u^{\theta-1}, u^{\theta+1}; v^{\theta-1}, v^\theta) B(u^{\theta-1}, u^\theta; v^{\theta-1}, v^{\theta+1}) \\ &= B(u^{\theta+1}; v^{\theta+1}) B(u^{\theta-1}; v^{\theta-1}); \end{aligned}$$

nous aurons un théorème connu de la théorie générale des déterminants. Ce théorème sert de point de départ à la fois à M. Weierstrass et à M. Darboux dans leurs analyses des formes bilinéaires ou quadratiques.

Introduisons encore dans nos raisonnements, avec M. Darboux, l'expression

$$R_\theta = B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y),$$

qui se tire de $B_{n-\theta+1}$ en remplaçant les éléments de la dernière bordure par les dérivées partielles de la forme P.

On a

$$R_0 = 0.$$

19. Cela posé, appliquons le théorème rappelé plus haut à l'expres-

sion R_θ. Nous aurons

$$\begin{aligned}&B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta})\,B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta-1}, Y) - B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta})\,B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y)\\ &\quad = B(u^{n-\theta-1}; v^{n-\theta-1})\,B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y),\end{aligned}$$

et, si nous posons

$$\begin{aligned}B(u_{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta}) &= U_{\theta+1},\\ B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y) &= V_{\theta+1},\end{aligned}$$

nous aurons la formule

$$R_{\theta+1}B_{n-\theta} - U_{\theta+1}V_{\theta+1} = B_{n-\theta-1}R_\theta,$$

ou, en changeant θ en $\theta - 1$,

$$R_\theta B_{n-\theta+1} - U_\theta V_\theta = B_{n-\theta}R_{\theta-1}.$$

Appliquons cette formule plusieurs fois de suite et ajoutons aux résultats obtenus une identité déjà démontrée, et nous aurons

$$\begin{aligned}R_1B_n - U_1V_1 &= 0,\\ R_2B_{n-1} - U_2V_2 &= R_1B_{n-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ R_nB_1 - U_nV_n &= R_{n-1}B_0,\\ PB_0 &= -R_n.\end{aligned}$$

Nous tirerons de ces équations

$$P = -\frac{U_1V_1}{B_nB_{n-1}} - \frac{U_2V_2}{B_{n-1}B_{n-2}} - \ldots - \frac{U_nV_n}{B_1B_0},$$

à condition que les dénominateurs ne soient pas nuls.

Or U_θ et V_θ sont respectivement des fonctions linéaires des X et des Y, *et ne renferment respectivement que les variables* $y_1, \ldots, y_n$ ou $x_1, \ldots, x_n$. Les expressions B_θ sont des constantes qui dépendent des valeurs données aux arbitraires u et v. Nous concluons de là qu'il y a une infinité de manières de ramener une forme bilinéaire P à la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} A'_{\alpha\alpha}x'_\alpha y'_\alpha.$$

20. Pour que la proposition soit complète, il faut encore considérer

les cas où les B_θ pourraient être nuls. Nous remarquerons d'abord que *l'expression* B_θ *ne peut être identiquement nulle que si tous les mineurs d'ordre* θ *de* B_0 *sont nuls, et alors toutes les expressions précédentes* B_0, B_1, ..., $B_{\theta-1}$ *sont aussi nulles identiquement.*

En effet, on peut toujours disposer des arbitraires de manière que B_θ se réduise à l'un quelconque des mineurs de B_0. Il suffit de donner à ces arbitraires les valeurs $-1, 0, +1$ convenablement distribuées. Si alors B_θ est nul identiquement, le mineur désigné sera nul avec lui. La réciproque est évidente.

21. *Si* B_θ *n'est pas nul, on peut prendre les nouvelles arbitraires qui entrent dans* $B_{\theta+1}$ *de manière que* $B_{\theta+1}$ *ne soit pas nul identiquement.* En effet, on a

$$B_{\theta+1} = -\sum u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}.$$

Si $B_{\theta+1}$ était nul identiquement, on pourrait donner aux nouvelles arbitraires les valeurs $-1, 0, +1$, de telle sorte que $B_{\theta+1}$ se réduise à $\frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}$, c'est-à-dire que tous ces mineurs de B_θ seraient nuls, ou encore B_θ, qui est une fonction homogène des A_{ij}, serait nul, ce qui est contraire à l'hypothèse.

22. Cela posé, considérons le cas où B_0, B_1, ..., $B_{\theta-1}$ étant nuls, B_θ, $B_{\theta+1}$, ..., B_n seraient, au contraire, différents de zéro. Tous les cas pourront se ramener à celui-là d'après les propositions que nous venons d'établir. Nous aurons alors

$$\frac{R_{n-\theta}}{B_\theta} = \frac{U_{n-\theta} V_{n-\theta}}{B_\theta B_{\theta-1}} + \ldots + \frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}};$$

mais on a

$$R_{n-\theta} = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^\theta & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^\theta & X_n \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . & . \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ Y_1 & \ldots & Y_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En retranchant de la dernière colonne les premières multipliées par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de la dernière ligne les premières multipliées par x_1, $x_2, \ldots, x_n$, nous aurons

$$R_{n-\theta} = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^\theta & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^\theta & 0 \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 & V^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 & V^\theta \\ 0 & \ldots & 0 & U^1 & \ldots & U^\theta & -P \end{vmatrix}.$$

Les U^k et les V^k disparaissent dans le développement, car leurs coefficients sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $\theta - 1$ de B_θ. On aura donc

$$R_{n-\theta} = -PB_\theta$$

et, par suite,

$$P = -\frac{U_{n-\theta}V_{n-\theta}}{B_\theta B_{\theta-1}} - \ldots - \frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}}.$$

Cette forme ne dépend plus que de $n - \theta$ variables arbitraires indépendantes.

23. Il y a au moins $n - \theta$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et au moins $n - \theta$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ indépendantes. Car, si l'on pouvait avoir $n - \theta - 1$ variables nouvelles x' et $n - \theta - 1$ variables y' seulement qui soient indépendantes, on pourrait exprimer les x au moyen des $n - \theta - 1$ variables x' et de $\theta + 1$ variables nouvelles x'' quelconques, et les y au moyen des $n - \theta - 1$ variables y' et de $\theta + 1$ variables nouvelles y'' quelconques. Par suite, les coefficients des termes où paraîtraient les variables x'' et y'' devraient disparaître dans la forme et dans son déterminant B'_0. Mais alors, dans B'_0, il y aurait $\theta + 1$ lignes et $\theta + 1$ colonnes dont les éléments seraient nuls. Tous les mineurs d'ordre θ seraient donc nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur B_θ.

24. En résumé, si l'on choisit les arbitraires u et v de telle sorte que $B_0, B_1, \ldots, B_{\theta-1}$ étant identiquement nuls, aucun des autres B

ne soit nul, on pourra ramener P à la forme

$$P' = \sum_{\alpha = n - 0}^{\alpha = n} A'_{\alpha\alpha} x'_{\alpha} y'_{\alpha},$$

et il sera impossible de trouver une forme équivalente à P et renfermant moins de variables indépendantes que celle-là. Cette forme P′ renfermant des arbitraires peut être obtenue à la suite d'une infinité de calculs différents.

IV.

25. Soient maintenant deux formes bilinéaires aux mêmes variables indépendantes

$$f = \sum a_{\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta},$$

$$\varphi = \sum b_{\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta}.$$

Supposons que le déterminant de la forme f ne soit pas nul, et considérons la forme

$$F = fs + \varphi,$$

qui contient une indéterminée s.

Le déterminant de F étant

$$B_0(s) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & \ldots & a_{1n}s + b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}s + b_{n1} & \ldots & a_{nn}s + b_{nn} \end{vmatrix},$$

et les dérivées partielles de F étant représentées par $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, nous avons, d'après une formule établie plus haut,

$$F = fs + \varphi = \frac{-B_1(X, Y)}{B_0(s)} = F(X, Y, s).$$

26. Considérons, pour un moment, les X et les Y comme des arbitraires, nous voyons que F sera une fraction rationnelle en s, nulle pour s infini, et, par suite, développable en une somme de n fractions simples. Opérons la décomposition par la règle de Lagrange, qui con-

siste à chercher, pour une racine s_i de $B_0(s)$, le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ dans le développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s-s_i-\sigma}$.

Nous aurons, pour la valeur arbitraire $s_i+\sigma$ de s,

$$F = -\frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}} - \ldots - \frac{U_n V_n}{B_1 B_0}.$$

Considérons à part un terme quelconque du développement à faire, soit

$$-\frac{U_{n-\theta+1} V_{n-\theta+1}}{(s-s_i-\sigma) B_\theta B_{\theta-1}}.$$

On a d'abord

$$U_{n-\theta+1} = B(u^{\theta-1}, X; v^\theta) = \begin{vmatrix} a_{11}s+b_{11} & \ldots & a_{1n}s+b_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^{\theta-1} & X_1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}s+b_{n1} & \ldots & a_{nn}s+b_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^{\theta-1} & X_n \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Retranchons de la dernière colonne les n premières multipliées par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et remplaçons X par

$$s\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Cette dernière colonne, écrite horizontalement et en observant que s doit être remplacé par $s_i+\sigma$ dans $U_{n-\theta+1}$, deviendra

$$(s-s_i-\sigma)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad (s-s_i-\sigma)\frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad U^1, \quad U^2, \quad \ldots, \quad U^\theta.$$

En développant le déterminant par rapport aux éléments de cette colonne, on aura

$$U_{n-\theta+1} = (s-s_i-\sigma) M_1 + M_2.$$

Les coefficients $U^1, \ldots, U^\theta$ sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $\theta-1$ de B_0, et M_1 est égal à $U_{n-\theta+1}$, quand on a remplacé $X_1, \ldots, X_n$ par

$$(s-s_i-\sigma)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad (s-s_i-\sigma)\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Il résulte de là que M_1 est divisible par la même puissance de σ que B_0, et que M_2 est divisible par la même puissance de σ que B_{0-1}. Soient l_0 et l_{0-1} les exposants de σ dans B_0 et B_{0-1}. On sait que l'on a $l_{0-1} > l_0$. Posons $l_{0-1} - l_0 = e_{0-1}$, ou, pour simplifier un moment l'écriture, posons simplement

$$l_{0-1} - l_0 = e.$$

On voit que e est l'exposant d'un diviseur élémentaire correspondant au diviseur linéaire $s - s_i$ de $B_0(s)$.

On pourra donc écrire

$$U_{n-0+1} = (s - s_i - \sigma)\sigma^{l_0} M'_1 + \sigma^{l_{0-1}} M'_2,$$

et M'_1 et M'_2 ne seront plus divisibles par σ.

On aura, en outre,

$$\begin{aligned} B_0 &= \sigma^{l_0} \; B'_0, \\ B_{0-1} &= \sigma^{l_{0-1}} B'_{0-1}, \end{aligned}$$

et B'_0 et B'_{0-1} seront deux quantités ne renfermant plus σ en facteur.

Cela posé, l'expression

$$-\frac{U_{n-0+1} V_{n-0+1}}{(s - s_i - \sigma) B_0 B_{0-1}}$$

devient

$$-\frac{(s - s_i - \sigma)\sigma^{2l_0} M'_1 N'_1}{\sigma^{l_0 + l_{0-1}} B'_0 B'_{0-1}},$$

en appelant N'_1 la quantité analogue à M'_1 provenant du calcul de V_{n-0+1}, et en négligeant d'écrire les termes qui ne donnent pas de puissances négatives en σ.

On peut encore écrire

$$-\frac{s - s_i - \sigma}{\sigma^e} \frac{M'_1}{\sqrt{B'_0 B'_{0-1}}} \frac{N'_1}{\sqrt{B'_0 B'_{0-1}}}.$$

Or M'_1 renferme linéairement $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et N'_1 renferme linéairement $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il en sera de même des coefficients de leurs développements par rapport à σ. Soient

$$\frac{M'_1}{\sqrt{B'_0 B'_{0-1}}} = \xi_0 + \xi_1 \sigma + \xi_2 \sigma^2 + \ldots,$$
$$\frac{N'_1}{\sqrt{B'_0 B'_{0-1}}} = \eta_0 + \eta_1 \sigma + \eta_2 \sigma^2 + \ldots,$$

Le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ que nous cherchons sera

$$-(s - s_i)(\xi_0 \eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0) + (\xi_0 \eta_{e-2} + \ldots + \xi_{e-2}\eta_0).$$

Nous poserons, pour simplifier

$$\xi_0 \eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0 = (\xi\eta)_e.$$

Nous voyons ainsi que les termes successifs du développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s - s_i - \sigma}$ nous donneront

$$-(s - s_i)(\xi\eta)_{e_0} + (\xi\eta)_{e_0 - 1},$$
$$-(s - s_i)(\xi\eta)_{e_1} + (\xi\eta)_{e_1 - 1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour une autre racine s'_i de $B_0(s)$ nous aurions

$$-(s - s'_i)(\xi\eta)_{e'_0} + (\xi\eta)_{e'_0 - 1},$$
$$-(s - s'_i)(\xi\eta)_{e'_1} + (\xi\eta)_{e'_1 - 1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Au lieu de réunir tous ces résultats en considérant les diviseurs linéaires $s - s_i$, $s - s'_i$, ..., considérons les diviseurs élémentaires $(s - s_1)^{e_1}$, $(s - s_2)^{e_2}$, ..., $(s - s_\rho)^{e_\rho}$, et il importe peu que les diviseurs linéaires correspondants soient distincts ou non, nous aurons, en ajoutant tous les résultats obtenus,

$$F = fs + \varphi = -\sum_{i=1}^{i=\rho} (s - s_i)(\xi\eta)_{e_i} - (\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

On voit donc que *chaque diviseur élémentaire fournit son terme dans le développement de* F. C'est en cela que consiste l'indépendance des rôles de ces diviseurs élémentaires dans le calcul que nous venons de faire.

De la formule précédente, on tire

$$(1)\qquad \begin{cases} f = -\sum (\xi\eta)_{e_i}, \\ \varphi = \quad \sum s_i(\xi\eta)_{e_i} + \sum (\xi\eta)_{e_i-1}. \end{cases}$$

Il faut remarquer que l'on doit poser

$$(\xi\eta)_{e_i-1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad e_i = 1.$$

27. Les formules (1) ont été données par M. Weierstrass. Pour revenir aux diviseurs élémentaires tels que nous les avons définis dans les paragraphes précédents, nous allons transformer ces formules en d'autres non moins remarquables.

Soient g, h, g', h' quatre nombres, entiers si l'on veut, tels que le déterminant $gh' - hg'$ soit égal à l'unité, et posons

$$\begin{aligned} f &= -(gP + hQ), \\ \varphi &= \quad g'P + h'Q, \\ F &= -(fs + \varphi) = [(gP + hQ)s - (g'P + h'Q)]. \end{aligned}$$

Nous en tirerons

$$F = (gs - g')P + (hs - h')Q = pP + qQ,$$

en posant

$$\begin{aligned} gs - g' &= p, \\ hs - h' &= q. \end{aligned}$$

Nous aurons alors

$$ap + bq = (ag + bh)s - (ag' + bh').$$

Supposons que $ap + bq$ soit un diviseur du déterminant $[P, Q]$ et remplaçons a et b par des valeurs proportionnelles, de sorte que l'on ait

$$ag + bh = 1.$$

En outre, posons

$$ag' + bh' = s_i,$$

nous aurons

$$ap + bq = s - s_i.$$

Il résulte de là que les diviseurs élémentaires du déterminant de la forme $F = pP + qQ$ correspondront aux diviseurs élémentaires de la forme $F = -(fs + \varphi)$. Si l'on résout alors le système d'équations

$$\begin{aligned} ag + bh &= 1, \\ ag' + bh' &= s_i, \end{aligned}$$

on aura, en introduisant un indice pour a et b,

$$\begin{aligned} a_i &= \quad h' - hs_i, \\ b_i &= -g' + gs_i. \end{aligned}$$

Enfin les équations

$$\begin{aligned} gP + hQ &= -f, \\ g'P + h'Q &= \varphi \end{aligned}$$

donneront

$$P = -h'f - h\varphi = \sum (a_i + hs_i)(\xi\eta)_{e_i} - h\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} - h\sum (\xi\eta)_{e_i-1},$$

$$Q = \quad g'f + g\varphi = \sum (b_i - gs_i)(\xi\eta)_{e_i} + g\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} + g\sum (\xi\eta)_{e_i-1},$$

ou enfin

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}] \\ Q &= \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} - g(\xi\eta)_{e_i-1}] \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho).$$

28. On voit donc que, *si* P *et* Q *sont deux formes bilinéaires telles que le déterminant* $|P, Q|$ *ne soit pas identiquement nul, si* g *et* h *sont deux constantes quelconques, telles que le déterminant de la forme* $gP + hQ$ *ne soit pas nul, et enfin si* $(a_ip + b_iq)^{e_i}$ *est un diviseur élémentaire quelconque du déterminant* $|P, Q|$, *on pourra poser les formules* (2). Ce sont exactement, à la notation près, les formules que M. Weierstrass a données.

29. Le coefficient de s^n dans $[P, Q]$ est la valeur de $[P, Q]$ pour $p = g$, $q = h$; nous le représenterons par (g, h) et nous aurons

$$|P, Q| = (g, h) \prod_i (a_ip + b_iq)^{e_i} = (g, h) \prod_i (s - s_i)^{e_i}.$$

30. A un exposant e_i correspondent dans P un nombre e_i de termes multipliés par a_i et un nombre $e_i - 1$ de termes multipliés par h. Donc à un exposant e_i correspondent $2e_i - 1$ termes dans P, et de même $2e_i - 1$ termes dans Q, lorsqu'on donne à P et à Q les formes (2) qu'on pourrait appeler *canoniques*. Si l'on a $e_i = 1$, le nombre de termes de P se réduira à l'unité, et il en sera de même dans Q.

Si tous les nombres e_i se réduisent à l'unité, on aura le cas le plus simple des formules (2) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} P &= \sum a_i \xi_i \eta_i \\ Q &= \sum b_i \xi_i \eta_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

31. Dans tous les cas, on pourra un peu simplifier les formules (2) en posant

$$g = 1, \qquad h = 0, \qquad g' = 0, \qquad h' = 1, \qquad \text{si } |P| \text{ n'est pas nul,}$$

et

$$g = 0, \qquad h = -1, \qquad g' = 1, \qquad h' = 0, \qquad \text{si } |Q| \text{ n'est pas nul.}$$

32. Les expressions ξ sont des fonctions linéaires et homogènes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et les expressions η sont des fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous allons montrer qu'on peut réciproquement exprimer $x_1, \ldots, x_n$ en fonctions linéaires et homogènes des η, et $y_1, \ldots, y_n$ en semblables fonctions des ξ. En effet, considérons la première des équations (1)

$$f = -\sum (\xi\eta)_{e_i},$$

ou encore

$$gP + hQ = \sum (\xi\eta)_{e_i}.$$

Nous en tirons

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(gP + hQ)}{\partial\xi_\mu} &= \eta_\nu \\ \frac{\partial(gP + hQ)}{\partial\eta_\nu} &= \xi_\mu \end{aligned}\right\} \quad (\mu + \nu = e - 1),$$

et, par conséquent, le déterminant de la forme $\sum (\xi\eta)_{e_i}$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ . & \dots & . & . & \dots & . & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ . & \dots & . & . & \dots & . & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ . & \dots & . & . & \dots & . & \dots \end{vmatrix}$$

et n'est pas nul. Appelons ce déterminant δ. Si l'on fait le changement de variables qui change les ξ en y, et les η en x, le déterminant δ sera multiplié par les deux déterminants de substitutions, que nous appellerons δ_x et δ_y. Mais, quand les variables sont x, y, le déterminant de $\sum (\xi\eta)_{e_i}$ ou de $g\mathrm{P} + h\mathrm{Q}$ est (g, h) et est supposé différent de zéro. On conclut alors de la relation

$$(g, h) = \delta\,\delta_x\,\delta_y,$$

que δ_x et δ_y ne peuvent être nuls, et, par suite, qu'on peut exprimer les x en η et les y en ξ.

33. *En résumé, étant données deux formes bilinéaires* P *et* Q, *si le déterminant de la forme* $p\mathrm{P} + q\mathrm{Q}$ *a* ρ *diviseurs élémentaires*

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \dots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho},$$

et il importe peu que les binômes $a_1 p + b_1 q, \dots, a_\rho p + b_\rho q$ *soient distincts ou non, on peut déterminer* n *fonctions linéaires et homogènes des* y, *soit*

$$\xi_0^i, \quad \xi_1^i, \quad \dots, \quad \xi_{e_i-1}^i \quad (i = 1, 2, \dots, \rho)$$

et n *fonctions linéaires et homogènes des* x, *soit*

$$\eta_0^i, \quad \eta_1^i, \quad \dots, \quad \eta_{e_i-1}^i \quad (i = 1, 2, \dots, \rho),$$

telles que, pour des valeurs données des constantes g *et* h, *et pour des va-*

leurs convenables des rapports $\frac{a_i}{b_i}$, *on puisse construire les nouvelles formes*

$$P=\sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q=\sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

et, réciproquement, on pourra exprimer les x *et les* y *au moyen des* ξ *et des* η *de manière à reproduire les formes primitives.*

31. Soient maintenant deux couples de formes bilinéaires

$$P(x\,|\,y), \quad Q(x\,|\,y)$$

et

$$P'(x'\,|\,y'), \quad Q'(x'\,|\,y'),$$

et supposons que les deux déterminants $|P, Q|$ et $|P', Q'|$ aient les mêmes diviseurs élémentaires.

Nous déterminerons, d'une part, n fonctions linéaires et homogènes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\xi_0^i, \quad \ldots, \quad \xi_{e_i-1}^i \quad (i=1, 2, \ldots, \rho)$$

et n fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\eta_0^i, \quad \ldots, \quad \eta_{e_i-1}^i \quad (i=1, 2, \ldots, \rho),$$

et, d'autre part, n fonctions linéaires et homogènes de $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$

$$\xi_0'^i, \quad \ldots, \quad \xi_{e_i-1}'^i$$

et n fonctions linéaires et homogènes de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$

$$\eta_0'^i, \quad \ldots, \quad \eta_{e_i-1}'^i,$$

telles que l'on puisse mettre P, Q, P′, Q′, en employant les mêmes valeurs de g, h, a, b sous les formes

$$P=\sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q=\sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}]$$

et

$$P' = \sum_i [a_i(\xi'\eta')_{e_i} - h(\xi'\eta')_{e_i-1}],$$

$$Q' = \sum_i [b_i(\xi'\eta')_{e_i} + g(\xi'\eta')_{e_i-1}].$$

Il est évident que P et P', Q et Q' ne différeront que par la notation et se transformeront les unes dans les autres en posant

$$\xi = \xi', \qquad \eta = \eta'.$$

Mais ces équations sont des relations entre $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ d'une part, et $y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n$ d'autre part. On a vu qu'on peut les résoudre soit par rapport aux x et aux y, soit par rapport aux x' et aux y'. En outre, les formes P, Q, P', Q', une fois qu'on a choisi g et h, ne dépendent que des diviseurs élémentaires de [P, Q] et [P, Q]. On a donc ce théorème définitif :

Pour que deux formes bilinéaires P *et* Q *se changent simultanément en deux autres formes* P' *et* Q' *au moyen de substitutions convenables des x' aux x et des y' aux y, il faut et il suffit que les déterminants des deux formes*

$$pP + pQ, \quad pP' + qQ'$$

aient les mêmes diviseurs élémentaires.

35. Dans le cas particulier où l'on a

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}, \qquad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \qquad A'_{\alpha\beta} = A'_{\beta\alpha}, \qquad B'_{\alpha\beta} = B'_{\beta\alpha},$$

on pourra prendre pour ξ la même fonction des y que η fonction des x, et pour ξ' la même fonction des y' que η' fonction des x'. Dans ce cas, les substitutions qui changent P en P' et Q en Q' auront les formes

$$x_i = \sum_j h_{ij} x'_j,$$

$$y_i = \sum_j h_{ij} y'_j.$$

36. Pour appliquer le théorème général précédent, il n'est pas né-

cessaire de décomposer effectivement les deux déterminants $|P, Q|$ et $|P', Q'|$ en diviseurs élémentaires. Si l'on considère les formes $fs + \varphi$, $f's + \varphi'$, on déterminera, pour chaque ordre de mineurs, les plus grands communs diviseurs de ces mineurs. En leur supposant un coefficient égal à l'unité, et en les appelant

$$\begin{array}{llll} R_0(s), & R_1(s), & R_2(s), & \ldots, \\ R'_0(s), & R'_1(s), & R'_2(s), & \ldots, \end{array}$$

l'indice o correspondant au déterminant principal, et l'indice k aux mineurs d'ordre k, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait identiquement

$$R_k(s) = R'_k(s) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

37. Dans notre analyse, nous avons laissé de côté le cas où l'on ne pourrait pas trouver deux nombres g et h tels que la forme $gP + hQ$ ait un déterminant différent de zéro. Il en résulterait que le déterminant de cette forme serait identiquement nul, quels que soient les nombres g ou h, ou encore que les coefficients du développement en p et q du déterminant $|P, Q|$ seraient tous identiquement nuls. Ce cas ne se présentera jamais si l'un au moins des deux déterminants $|P|$ ou $|Q|$ n'est pas nul. Nous ne traiterons pas ce cas exceptionnel, pour lequel on pourra consulter les Mémoires de MM. Darboux et Jordan (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1874).

V.

38. Études maintenant les remarquables formes

$$P = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$Q = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

obtenues précédemment, et supposons que l'on ait

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$
$$ga_i + hb_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Nous allons montrer que les diviseurs élémentaires du déterminant $|P, Q|$ sont, comme cela doit être, les expressions

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho}.$$

39. Posons

$$P_i = a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i - 1}, \qquad Q_i = b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i - 1},$$

nous aurons

$$pP_i + qQ_i = (a_i p + b_i q)(\xi\eta)_{e_i} + (gq - hp)(\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

Soient alors

$$a_i p + b_i q = u_i, \qquad gq - hp = v,$$

u_i et v seront deux variables indépendantes avec p et q, puisque le déterminant $ga_i + hb_i$ n'est pas nul.

Par suite, le déterminant de la forme $pP_i + qQ_i$ pourra s'écrire

$$|P_i, Q_i| = \begin{vmatrix} 0\,0 & \ldots & 0\,v\,u_i \\ 0\,0 & \ldots & v\,u_i\,0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ v\,u_i & \ldots & 0\,0\,0 \\ u_i\,0 & \ldots & 0\,0\,0 \end{vmatrix}.$$

Si nous cherchons de même le déterminant de la forme $pP + qQ$ en posant

$$P = \sum_i P_i, \qquad Q = \sum_i Q_i, \qquad a_i p + b_i q = u_i,$$

nous trouverons

$$|P, Q| = \left|\begin{array}{ccc|ccc|c} 0\,0 & \ldots & v\,u_1 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & u_1\,0 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v\,u_1 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ u_1\,0 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ \hline 0\,0 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & v\,u_2 & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & u_2\,0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & 0\,0 & v\,u_2 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & 0\,0 & u_2\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|,$$

et nous en conclurons que l'on doit avoir

$$[P, Q] = \prod_i [P_i, Q_i].$$

Or on a évidemment $[P_i, Q_i] = \pm u^{e_i}$, et u^{e_i} sera le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$; car, si l'on retranche la dernière ligne et la dernière colonne de ce déterminant, on a un mineur du premier ordre égal à $\pm v^{e_i-1}$. Mais v est indépendant de u_i, et v^{e_i-1} ne peut être divisé par u_i.

Si l'on a $e_i = 1$, u_i est évidemment le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$, qui se réduit dans ce cas particulier à $|u_i|$.

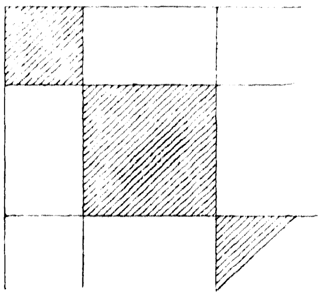
On aura ensuite

$$[P, Q] = \pm u_1^{e_1} u_2^{e_2} \dots u_\rho^{e_\rho} = \prod_i (a_i p + b_i q)^{e_i};$$

on en conclut que les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ ne peuvent être que les puissances des diviseurs linéaires $a_i p + b_i q$. Il reste à déterminer leurs exposants.

10. Cherchons les déterminants d'ordre ϖ de $[P, Q]$. Chacun d'eux correspond à une suppression de ϖ lignes et de ϖ colonnes dans le déterminant principal. Celui-ci peut être représenté schématiquement par la *fig.* 1 composée : 1° de carrés noirs ayant une diagonale commune avec le carré principal; 2° de carrés et de rectangles blancs (*fig.* 1).

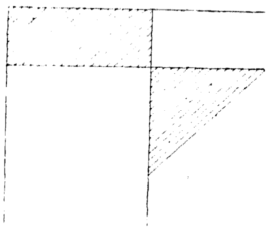
Fig. 1.



Les parties blanches correspondent à des éléments tous nuls du déterminant $[P, Q]$ et les carrés noirs correspondent aux déterminants

$[P_i, Q_i]$. Cela posé, si l'on supprime ϖ lignes et ϖ colonnes de $[P, Q]$, on aura un mineur que l'on pourra représenter schématiquement par la *fig.* 2, analogue à la précédente.

Fig. 2.



Mais, dans cette nouvelle figure, il pourra se présenter des *rectangles noirs*. Supposons que cette circonstance se produise, et, pour fixer les idées, imaginons que la première partie noire soit un rectangle renfermant k lignes et k' colonnes, et allongé dans le sens horizontal, c'est-à-dire que l'on a $k' > k$.

Dans un élément quelconque du déterminant représenté par la *fig.* 2 entreront forcément un élément non nul de la première ligne, un élément non nul de la seconde ligne, ..., un élément non nul de la $k^{\text{ième}}$ ligne, et, à cause de la forme de la *fig.* 2, ces éléments devront appartenir à k des k' premières colonnes. Mais il restera encore $k' - k$ des premières colonnes dans chacune desquelles il faudra prendre un élément, et cet élément, devant être pris en dehors des k premières lignes, appartiendra à une partie blanche de la *fig.* 2 et ne pourra être qu'un zéro. Nous en concluons que, dans le développement du mineur considéré, tous les éléments sont nuls et, par suite, que ce mineur lui-même est identiquement nul.

41. Nous sommes donc autorisés à ne considérer que les mineurs de $[P, Q]$ tels que, dans la *fig.* 2 correspondante, il n'y ait que des *carrés noirs*. Si nous représentons par $[P_i, Q_i]^{(m_i)}$ un mineur quelconque d'ordre m de $[P_i, Q_i]$, ou ce déterminant lui-même si $m = 0$, tous les mineurs non nuls de $[P, Q]$ et d'ordre ϖ pourront être mis sous la forme

$$\prod_i [P_i, Q_i]^{(m_i)},$$

où l'on a

$$\sum_i m_i = \varpi,$$

et il suffira, dans la suite, de considérer les mineurs de $|P, Q|$ qu'on peut mettre sous cette forme.

Cela posé, soit $ap + bq$ un quelconque des diviseurs linéaires de $|P, Q|$, et soient tirés des déterminants $[P_i, Q_i]$

$$(ap + bq)^{e_0}, \quad (ap + bq)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (ap + bq)^{e_r}$$

tous les diviseurs élémentaires correspondants. Nous supposerons que les nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$ n'aillent pas en croissant.

Si nous prenons $m_i = 1$, pour les valeurs $0, 1, \ldots, r$ de l'indice i, et que nous prenions précisément le mineur de $|P_i, Q_i|$ obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, le mineur de $|P, Q|$ qu'on formera ainsi en supprimant dans $|P, Q|$ au moins $r + 1$ lignes et $r + 1$ colonnes ne pourra pas être divisé par $ap + bq$. Donc les mineurs de $|P, Q|$ d'ordre égal ou supérieur à $r + 1$ n'admettent pas en commun le diviseur linéaire $ap + bq$ et, par suite, il n'y a pas plus de $r + 1$ diviseurs élémentaires fournis par le diviseur linéaire $ap + bq$.

Cherchons maintenant l'exposant du diviseur $ap + bq$ dans les mineurs d'ordre ϖ, inférieur à $r + 1$. Soit ρ le nombre total des déterminants $|P_i, Q_i|$, on a

$$\rho - \varpi = (\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1).$$

Puisqu'il n'y a pas plus de ϖ nombres $m_0, m_1, \ldots, m_\rho$ qui ne soient pas nuls, il y en a au moins $\rho - \varpi$ ou encore

$$(\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1)$$

qui le sont. On pourra bien prendre nuls les $\rho - r - 1$ nombres m qui ne correspondent pas aux indices $0, 1, \ldots, r$; mais, parmi ces derniers, il faudra encore en prendre au moins $r - \varpi + 1$ qui soient nuls. Donc, dans le produit

$$\prod [P_i, Q_i]^{m_i},$$

apparaîtront au moins $r - \varpi + 1$ des déterminants $|P_i, Q_i|$ où i est égal à 0, 1, ..., r. Par suite, chaque mineur de l'ordre ϖ de $[P, Q]$ sera divisible par une puissance de $ap + bq$ dont l'exposant sera la somme de $r - \varpi + 1$ des nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$. Cet exposant ne sera pas plus petit que la somme $e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r$.

D'ailleurs, si on égale à l'unité les nombres m_i auxquels correspondent les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_{\varpi-1}$ et à zéro les autres nombres m_i, on peut former un mineur de $[P, Q]$ qui admette $ap + bq$ comme diviseur exactement au degré $e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r$, et qui soit d'ordre ϖ. On en conclut que $(ap + bq)^{e_\varpi + \ldots + e_r}$ est la plus haute puissance de $ap + bq$ qui divise à la fois tous les mineurs d'ordre ϖ de $[P, Q]$.

Posons alors

$$\begin{aligned}
l_0 &= e_0 + e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r,\\
l_0 - e_0 = l_1 &= \phantom{e_0 + {}} e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
l_{\varpi-1} - e_{\varpi-1} = l_\varpi &= \phantom{e_0 + e_1 + \ldots + {}} e_\varpi + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
l_{r-1} - e_{r-1} = l_r &= \phantom{e_0 + e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + {}} e_r,
\end{aligned}$$

ou encore

$$l_0 - l_1 = e_0, \qquad l_1 - l_2 = e_1, \qquad \ldots, \qquad l_{r-1} - l_r = e_r, \qquad l_r = e_r.$$

$l_0, l_1, \ldots, l_r$ seront les plus hauts exposants des puissances de $ap + bq$ respectivement dans le déterminant principal, dans ses mineurs du premier ordre, ..., dans ses mineurs de l'ordre r. Si l'on se reporte aux définitions posées au premier paragraphe, on voit que

$$(ap + bq)^{e_0}, \quad \ldots, \quad (ap + bq)^{e_r}$$

sont les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ qui correspondent au diviseur linéaire $ap + bq$.

12. Puisque les formes réduites de deux formes bilinéaires P et Q ne dépendent que des diviseurs élémentaires du déterminant $[P, Q]$ et de deux constantes arbitraires g et h, on en conclut que, *si l'on fait une double substitution générale dans des formes réduites construites a priori, on obtiendra les formes bilinéaires les plus générales correspondant aux diviseurs élémentaires que l'on a choisis.*

43. Dans le cas où le déterminant $|P, Q|$ a n diviseurs élémentaires, plusieurs pouvant provenir de diviseurs linéaires égaux entre eux, les exposants $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont tous égaux à l'unité. Les formes réduites deviennent simplement

$$P = a_1\xi_1\eta_1 + \ldots + a_n\xi_n\eta_n,$$
$$Q = b_1\xi_1\eta_1 + \ldots + b_n\xi_n\eta_n.$$

Réciproquement, le déterminant de la forme

$$pP + qQ = \sum_i (a_i p + b_i q)\xi_i\eta_i$$

admet les diviseurs élémentaires $a_1 p + b_1 q, \ldots, a_n + b_n q$. Il faut donc, pour que P et Q puissent prendre les formes précédentes, que le déterminant $|P, Q|$ possède n diviseurs élémentaires. Mais $|P, Q|$ renferme chacun de ces diviseurs à la première puissance; tous les exposants e sont égaux à l'unité, et, pour un même diviseur linéaire de $|P, Q|$, on a

$$l_0 - l_1 = 1,$$
$$l_1 - l_2 = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$l_r = 1.$$

En conséquence, un même diviseur linéaire du degré l_0 de multiplicité fournit l_0 diviseurs élémentaires dont les exposants e sont égaux à l'unité, et ce diviseur linéaire est commun à tous les mineurs d'ordre $l_0 - 1$.

On a donc ce théorème :

Pour que les formes P *et* Q *puissent s'écrire*

$$P = \sum_i a_i\xi_i\eta_i, \qquad Q = \sum_i b_i\xi_i\eta_i,$$

ξ_i *et* η_i *étant respectivement des fonctions linéaires et homogènes des* y *et des* x, *il faut et il suffit que tout diviseur de* $|P, Q|$ *qui entre comme diviseur linéaire au degré* $l_0 > 1$ *soit en même temps un diviseur commun de tous les mineurs de l'ordre* $l_0 - 1$ *de* $|P, Q|$.

VI.

44. Il ne s'agit pas maintenant de refaire la théorie des formes quadratiques, sur laquelle on peut consulter, en particulier, le Mémoire publié par M. Darboux en 1874. Nous voulons seulement, en déduisant les principaux théorèmes sur les formes quadratiques des raisonnements précédents, mettre en évidence le rôle des diviseurs élémentaires.

45. Soit la forme quadratique

$$\sum A_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\sum A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

dont le *déterminant*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

est symétrique. A cette forme quadratique correspond une forme bilinéaire

$$\sum A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

admettant le même *déterminant*. Appelons P la forme bilinéaire, et $\mathfrak{P}$ la forme quadratique, nous aurons

$$P = \sum_\beta \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_\beta} y_\beta.$$

L'introduction de la forme P dans l'étude de $\mathfrak{P}$ permet de démontrer facilement les théorèmes qui vont suivre.

46. Théorème I. — *Si la substitution*

$$x_\alpha = \sum_\gamma h_{\alpha\gamma} x'_\gamma$$

transforme les deux formes quadratiques $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ en deux autres $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}'$, et si le déterminant de cette substitution n'est pas nul, les déterminants *des deux formes $p\mathfrak{P}+q\mathfrak{Q}$ et $p\mathfrak{P}'+q\mathfrak{Q}'$ ont les mêmes diviseurs élémentaires.*

Si nous considérons les formes bilinéaires P, Q, P′, Q′ qui ont mêmes déterminants que les formes quadratiques proposées, comme ces déterminants sont symétriques, on passera de P à P′ et de Q à Q′ en remplaçant les x par les fonctions données des x', et les y par les mêmes fonctions des y'. Mais alors les déterminants $|P, Q|$ et $|P', Q'|$ ont les mêmes diviseurs élémentaires, et, comme ces déterminants sont aussi ceux des formes $p\mathfrak{P}+q\mathfrak{Q}$ et $p\mathfrak{P}'+q\mathfrak{Q}'$, le théorème est démontré.

17. Théorème II. — *En supposant que le déterminant $|\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}|$ de la forme quadratique $p\mathfrak{P}+q\mathfrak{Q}$ ne s'annule pas pour toutes les valeurs de p et de q, et que*

$$(a_1p+b_1q)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (a_\rho a+b_\rho q)^{e_\rho}$$

soient ses diviseurs élémentaires, en appelant de plus g et h deux nombres qui n'annulent pas $g\mathfrak{P}+h\mathfrak{Q}$, et en admettant que les constantes a et b satisfassent aux conditions

$$ga_i+hb_i=1 \qquad (i=1, 2, \ldots, \rho),$$

on peut déterminer n fonctions

$$\xi_0^i, \quad \ldots, \quad \xi_{e_i-1}^i \qquad (i=1, 2, \ldots, \rho),$$

linéaires et homogènes en $x_1, \ldots, x_n$ telles que l'on ait

$$\mathfrak{P}=\sum_i [a_i(\xi\xi)_{e_i}-h(\xi\xi)_{e_i-1}],$$

$$\mathfrak{Q}=\sum_i [b_i(\xi\xi)_{e_i}+g(\xi\xi)_{e_i-1}],$$

avec la condition

$$(\xi\xi)_{e_i-1}=0 \quad \text{pour} \quad e_i=1.$$

En effet, à cause de la symétrie des déterminants des formes bilinéaires P et Q, les ξ sont en $y_1, \ldots, y_n$ les mêmes fonctions que les η en $x_1, \ldots, x_n$. On a alors $\xi=\eta$ pour $y_\alpha=x_\alpha$; mais alors P et Q deviennent $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$.

48. Théorème III. — Ce théorème est réciproque du théorème I.

Si les formes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ sont telles que les déterminants de $p\mathfrak{P} + q\mathfrak{Q}$ et de $p\mathfrak{P}' + q\mathfrak{Q}'$ aient les mêmes diviseurs élémentaires $(a_i p + b_i q)^{e_i}$, on peut déterminer des constantes $h_{\alpha\gamma}$ telles que la substitution

$$x_\alpha = \sum_\gamma h_{\alpha\gamma} x'_\gamma,$$

ramène $\mathfrak{P}$ à $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}$ à $\mathfrak{Q}'$.

En effet, déterminons les n fonctions

$$\xi'^i_0, \quad \ldots, \quad \xi'^i_{e_i-1}$$

des quantités $x'_1, \ldots, x'_n$, telles que l'on ait

$$\mathfrak{P}' = \sum_i [a_i(\xi'\xi')_{e_i} - h(\xi'\xi')_{e_i-1}],$$

$$\mathfrak{Q}' = \sum_i [b_i(\xi'\xi')_{e_i} + g(\xi'\xi')_{e_i-1}],$$

et les n fonctions

$$\xi^i_0, \quad \ldots, \quad \xi^i_{e_i-1}$$

des quantités $x_1, \ldots, x_n$, telles que $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ prennent des formes semblables, et posons

$$\xi = \xi'.$$

Nous savons qu'on peut résoudre les n équations tirées de là par rapport aux $x_1, \ldots, x_n$. Nous formerons alors la substitution indiquée dans l'énoncé et qui change $\mathfrak{P}$ en $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}$ en $\mathfrak{Q}'$.

49. Théorème IV. — Ce théorème est réciproque du théorème II.

Prenons les nombres $e_1, \ldots, e_\rho$ et les constantes g, h, a_i, b_i sous les conditions

$$\sum e_i = n,$$

$$g a_i + h b_i = 1,$$

et posons

$$\mathfrak{P}_i = a_i(\xi\xi)_{e_i} - h(\xi\xi)_{e_i-1}, \qquad \mathfrak{Q}_i = b_i(\xi\xi)_{e_i} + g(\xi\xi)_{e_i-1},$$

$$\mathfrak{P} = \sum \mathfrak{P}_i, \qquad \mathfrak{Q} = \sum \mathfrak{Q}_i.$$

Les variables étant les ξ, le déterminant $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i]$ aura pour unique diviseur élémentaire $(a_i p + b_i q)^{e_i}$, et ce diviseur sera aussi diviseur élémentaire de $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$.

Si l'on prend alors pour les ξ des fonctions arbitraires, indépendantes, linéaires des variables $x_1, \ldots, x_n$, on aura les formes quadratiques $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ les plus générales, telles que le déterminant $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ ait pour diviseurs élémentaires

$$(a_i p + b_i q)^{e_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho).$$

50. Théorème V. — *Si le nombre des diviseurs élémentaires de $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ est n, et, par suite, si chaque nombre e est égal à 1, on aura, d'après le théorème II,*

$$\mathfrak{P} = a_1 \xi_1^2 + \ldots + a_n \xi_n^2,$$
$$\mathfrak{Q} = b_1 \xi_1^2 + \ldots + b_n \xi_n^2.$$

51. Théorème VI. — Ce théorème est réciproque du précédent.

Si $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ se tirent des carrés de fonctions linéaires en $x_1, \ldots, x_n$, les nombres e doivent être égaux à 1, et, par suite, *pour que $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ se ramènent par une même substitution linéaire à des sommes de carrés positifs ou négatifs, il faut et il suffit que tout diviseur linéaire de $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$, d'un ordre l de multiplicité, soit aussi un diviseur commun des mineurs d'ordre $l - 1$ de $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$.*

52. Théorème VII. — M. Weierstrass a montré directement dans les *Monatsberichte* de 1858 que *la condition nécessaire pour l'application du théorème VI est toujours remplie quand les deux formes quadratiques $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont à coefficients réels, et que l'on peut trouver une forme $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ qui ne puisse s'annuler pour des valeurs réelles de $x_1, \ldots, x_n$ qu'en égalant toutes ces variables à zéro.*

Voici la nouvelle démonstration de ce théorème, que M. Weierstrass a tirée des théorèmes précédents.

On peut écrire

$$g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q} = \sum_i (\xi\xi)_{e_i}.$$

Supposons que g, h, g', h' soient des valeurs réelles arbitraires satisfaisant à la condition $gh' - hg' = 1$. Supposons encore que la forme $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ ne puisse s'annuler sans que toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$ aient été égalées à zéro.

Pour une valeur déterminée de l'indice i, le quotient $\frac{b_i}{a_i}$ pourra être réel ou imaginaire. Supposons-le d'abord réel. Alors a_i et b_i seront deux quantités réelles, puisque l'on a

$$ga_i + hb_i = 1.$$

Remarquons maintenant que, dans la formule

$$\frac{M'_1}{\sqrt{B_0 B'_{0-1}}} = \xi_0 + \xi_1\sigma + \xi_2\sigma^2 + \ldots,$$

qui sert dans le § IV au calcul des ξ, il ne s'introduit qu'une irrationnelle. Nous la représenterons par $\sqrt{c}$, c étant le même pour tous les ξ, quels que soient leurs indices inférieurs. Nous pouvons donc poser

$$\xi_\lambda^i = \sqrt{c^i}\,\xi_\lambda'^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et $\xi_\lambda'^i$ sera une fonction linéaire à coefficients réels de $x_1, \ldots, x_n$. Mais, dans les produits qui forment $(\xi\xi)_{e_i}$, le radical disparaît et l'on a

$$(\xi\xi)_{e_i} = \varepsilon_i(\xi'\xi')_{e_i},$$

en posant $\varepsilon_1 = \pm 1$.

Supposons maintenant que le quotient $\frac{b_i}{a_i}$ ait une valeur imaginaire. Alors au diviseur élémentaire $(a_i p + b_i q)^{e_i}$ de $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ en correspondra un autre $(\overline{a}_i p + \overline{b}_i q)^{e_i}$ conjugué du premier. Donnons alors à $\sqrt{c^i}$ et à $\sqrt{\overline{c}^i}$ des valeurs conjuguées, et posons

$$\xi_\lambda^i = \xi_\lambda'^i + \sqrt{-1}\,\xi_\lambda''^i,$$
$$\overline{\xi}_\lambda^i = \xi_\lambda'^i - \sqrt{-1}\,\xi_\lambda''^i,$$

les ξ' et les ξ'' seront des fonctions linéaires à coefficients réels de $x_1, \ldots, x_n$, et nous aurons

$$(\xi\xi)_{e_i} + (\overline{\xi}\overline{\xi})_{e_i} = 2(\xi'\xi')_{e_i} - 2(\xi''\xi'')_{e_i}.$$

En conséquence, si, parmi les quotients $\frac{b_i}{a_i}$, il y en a σ réels, et par suite $\rho - \sigma$ imaginaires conjugués deux à deux, $\frac{\rho - \sigma}{2}$ sera un nombre entier, et $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ prendra la forme

$$g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q} = \sum \varepsilon_i (\xi\xi)_{e_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$
$$+ 2\sum [(\xi'\xi')_{e_i} - (\xi''\xi'')_{e_i}] \qquad \left(i = \sigma + 1, \sigma + 2, \ldots, \sigma + \frac{\rho - \sigma}{2}\right)$$

et, aux valeurs réelles des variables initiales $x_1, \ldots, x_n$ correspondront toujours des valeurs réelles des variables ξ et inversement, et les unes s'annuleront avec les autres.

Maintenant, si l'on a $e_i > 1$ pour une des valeurs $1, 2, \ldots, \sigma$ de i, on pourra annuler $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ en égalant à zéro tous les ξ et les ξ', sauf ξ_0. Si i est l'un des nombres $\sigma + 1$, $\sigma + 2$, $\ldots$, $\sigma + \frac{\rho - \sigma}{2}$, et si l'on a $e_i > 1$, et même si l'on a $e_i = 1$, $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ s'annulera encore en égalant à zéro les ξ, les ξ' et les ξ'', sauf ξ'_0 et ξ''_0 qu'on prendra égaux entre eux.

Il résulte de là que, si parmi les formes $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$, il y en a une qui ne devienne nulle pour aucun système de valeurs réelles de $x_1, \ldots, x_n$, ou, ce qui revient au même, pour aucun système de valeurs réelles des ξ, le déterminant $[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}]$ aura nécessairement n diviseurs élémentaires à coefficients réels.

L'équation écrite plus haut doit donc se réduire à

$$g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q} = \sum \varepsilon_i \xi_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où ξ_i est écrit pour ξ_0^i.

En outre, tous les nombres ε_i devront avoir la même valeur ε, car, sans cela, $g\mathfrak{P} + h\mathfrak{Q}$ pourrait s'annuler pour certaines valeurs réelles non nulles des ξ, ou encore des x.

Enfin, à cause de l'équation

$$g'\mathfrak{P} + h'\mathfrak{Q} = \sum \varepsilon_i s_i \xi_i^2,$$

on aura

$$\mathfrak{P} = \varepsilon \sum a_i \xi_i^2,$$
$$\mathfrak{Q} = \varepsilon \sum b_i \xi_i^2$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, les variables ξ étant des fonctions linéaires et à coefficients réels des variables $x_1, \ldots, x_n$ et les constantes a_i et b_i des nombres réels.

VII.

53. Considérons maintenant un *système fondamental d'intégrales* $y_1, \ldots, y_n$ d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n. Le système d'intégrales $y'_1, \ldots, y'_n$ déterminé par les équations

$$y'_i = C_{i1} y_1 + \ldots + C_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

sera aussi fondamental si le déterminant des constantes C est différent de zéro.

Quand la variable fait le tour d'un point singulier, les nouvelles valeurs Y des intégrales y sont déterminées par les équations

$$Y_i = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

où le déterminant des constantes a est différent de zéro. De même, les nouvelles valeurs Y′ des intégrales y' sont déterminées par les équations

$$Y'_i = a'_{i1} y'_1 + \ldots + a'_{in} y'_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

où le déterminant des constantes a' est différent de zéro.

54. Cela posé, considérons les deux formes linéaires

$$\left\{ \begin{aligned} P &= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \\ P' &= x'_1 y'_1 + \ldots + x'_n y'_n. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

On peut ramener P′ à P par la substitution (1) et par la substitution inverse qui ramène les x' aux x.

Considérons de même les deux formes bilinéaires

$$\left\{ \begin{aligned} Q &= x_1 Y_1 + \ldots + x_n Y_n, \\ Q' &= x'_1 Y'_1 + \ldots + x'_n Y'_n, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

et remarquons que l'on a

$$Y'_i = C_{i1} Y_1 + \ldots + C_{in} Y_n, \tag{6}$$

équations où les coefficients C sont les mêmes que dans les équations (1). Donc le même calcul qui ramène P′ à P ramène aussi Q′ à Q.

Or, puisque les intégrales de l'équation (1) ont la propriété de satisfaire aux équations (2) et (3), si l'on exprime Q et Q′ respectivement au moyen des y et des y', on aura

$$Q = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j,$$

$$Q' = \sum_{ij} a'_{ij} x'_i y'_j,$$

et les variables x et x', y et y' étant les mêmes que celles qui entrent dans P et P′, les y et les y' étant liées dans les deux cas par les équations (1), on voit que les mêmes substitutions ramènent à la fois les deux formes P′ et Q′ aux deux formes P et Q, et, par suite, que les deux déterminants [P, Q] et [P′, Q′] ont les mêmes diviseurs élémentaires.

On peut encore dire que les déterminants des deux formes

$$Q - \omega P, \qquad Q' - \omega P'$$

ont les mêmes diviseurs élémentaires. Ces déterminants sont

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & \ldots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix}, \qquad R'(\omega) = \begin{vmatrix} a'_{11} - \omega & \ldots & a'_{1n} \\ \cdots\cdots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & \ldots & a'_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

De là ce théorème :

Les diviseurs élémentaires de R(ω) *ne dépendent pas du choix du système fondamental d'intégrales d'où l'on est parti, et qui fournit les coefficients* a *quand la variable tourne autour d'un point singulier.*

55. En égalant à zéro le déterminant R(ω), on a l'*équation fondamentale* relative au point singulier considéré. Cette équation sert de base à la théorie de M. Fuchs pour l'étude des intégrales dans le *domaine du point singulier*.

56. Considérons maintenant les relations

$$Y'_i = a'_{i1} y'_1 + \ldots + a'_{in} y'_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui fournissent le déterminant R′(ω). Composons un déterminant R(ω) ayant mêmes diviseurs élémentaires que lui et de la forme

$$
R(\omega) = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
\omega_1-\omega & 0 & & & & & & \\
1 & \omega_1-\omega & & & & & & \\
 & & \cdots & & & & & \\
 & & 1 & \omega_1-\omega & & & & \\
\hline
 & & & & \omega_2-\omega & & & \\
 & & & & 1 & \omega_2-\omega & & \\
 & & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & 1 & \omega_2-\omega \\
\hline
\end{array}\right|
$$

Ce déterminant se ramène immédiatement à la forme du déterminant $[P, Q]$ du § V, au moyen d'échanges faciles entre les lignes. A ce déterminant $R(\omega)$ correspond un choix d'intégrales pour lequel on aura

$$
(8)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
Y_1 & = \omega_1 y_1, & \\
Y_2 & = \omega_1 y_2 & + y_1, \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
Y_{k_1} & = \omega_1 y_{k_1} & + y_{k_1-1}, \\
Y_{k_1+1} & = \omega_2 y_{k_1+1}, & \\
Y_{k_1+2} & = \omega_2 y_{k_1+2} & + y_{k_1+1}, \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
Y_{k_1+k_2} & = \omega_2 y_{k_1+k_2} & + y_{k_1+k_2-1}, \\
\multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}\right.
$$

Les diviseurs linéaires $\omega_1 - \omega$, $\omega_2 - \omega$, ... ne sont pas nécessairement distincts.

57. Puisque $R(\omega)$ et $R'(\omega)$ ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut passer par des substitutions des équations (3) aux équations (8), c'est-à-dire que *l'on peut, étant donné le système fondamental d'intégrales $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, en tirer le système $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui, satisfaisant aux équations* (8), *se comporte plus simplement que le précédent dans le mouvement de la variable autour du point singulier considéré.*

La loi définie par les équations (8) a été découverte par M. Fuchs. On en a donné plusieurs démonstrations. Celle que nous présentons ici nous paraît être la plus naturelle.

58. Il est intéressant de considérer tous les groupements d'intégrales qui correspondent à un même diviseur linéaire $\omega_1 - \omega$ de $R(\omega)$. Soit l le degré de multiplicité de ce diviseur considéré comme linéaire. Supposons qu'il y ait $r+1$ diviseurs élémentaires

$$(\omega_1 - \omega)^{e_0}, \quad (\omega_1 - \omega)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (\omega_1 - \omega)^{e_r},$$

on aura

$$e_0 + e_1 + \ldots + e_r = l.$$

Posons

$$\begin{aligned} l_r &= e_r, \\ l_{r-1} &= e_r + e_{r-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l &= e_r + e_{r-1} + \ldots + e_0, \end{aligned}$$

les nombres l satisferont aux conditions

$$l > l_1 > \ldots > l_r,$$

et nous voyons qu'*aucune condition n'est imposée aux nombres e.*

Appelons groupe de m intégrales l'ensemble des intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_m$ qui satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} Y_1 &= \omega y_1, \\ Y_2 &= \omega y_2 + y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m &= \omega y_m + y_{m-1}. \end{aligned}$$

Nous voyons qu'au diviseur linéaire $\omega_1 - \omega$ d'un ordre de multiplicité l, se décomposant en diviseurs élémentaires $(\omega_1 - \omega)^{e_0}$, $(\omega_1 - \omega)^{e_1}, \ldots$, $(\omega_1 - \omega)^{e_r}$, il correspondra

un groupe de e_0 intégrales,
un groupe de e_1 intégrales,
. . . .,
un groupe de e_r intégrales,

et les nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$ n'auront entre eux aucune relation nécessaire, ce qui assure l'indépendance des diviseurs élémentaires

$$(\omega_1 - \omega)^{e_0}, \quad \ldots, \quad (\omega_1 - \omega)^{e_r}.$$

59. Pour qu'il y ait un seul groupe d'intégrales, il faut que les nombres e se réduisent à un seul, c'est-à-dire que le diviseur $\omega_1 - \omega$ ait le même degré de multiplicité comme diviseur linéaire et comme diviseur élémentaire.

60. Au contraire, pour qu'il n'y ait que des intégrales satisfaisant à la seule condition

$$Y = \omega_1 y,$$

il faut que chaque nombre e soit égal à 1, ou encore que $\omega_1 - \omega$ soit un diviseur de tous les mineurs de l'ordre $l-1$ dans $R(\omega)$. Dans ce cas, tous les diviseurs élémentaires $\omega_1 - \omega$ sont *simples*.

Les deux cas particuliers précédents sont les deux cas extrêmes qui puissent se présenter.

61. Il est facile d'étendre les théorèmes précédents aux systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes. Supposons, par exemple, qu'il y ait une seule variable indépendante, et considérons le système d'équations

$$(9) \qquad \frac{dy_i}{dx} = A_{i1}y_1 + \ldots + A_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient n solutions

$$y_{1i}, \quad y_{2i}, \quad \ldots, \quad y_{ni} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

formant un *système fondamental*. Le système de n nouvelles solutions déterminées par les équations

$$(1') \qquad y'_{hi} = c_{i1}y_{h1} + \ldots + c_{in}y_{hn} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n)$$

sera aussi fondamental, si le déterminant des constantes c est différent de zéro.

Quand la variable fait le tour d'un point singulier, les nouvelles valeurs Y des intégrales y sont déterminées par les équations

$$(2') \qquad Y_{hi} = a_{i1}y_{h1} + \ldots + a_{in}y_{hn},$$

où le déterminant des constantes a est différent de zéro. De même les nouvelles valeurs Y′ des intégrales y' sont déterminées par les équations

$$(3') \qquad Y'_{hi} = a'_{i1} + \ldots + a'_{in} y'_{hn},$$

où le déterminant des constantes a' est différent de zéro.

Cela posé, considérons les deux formes bilinéaires

$$(4') \qquad \begin{cases} P = x_1 y_{h1} + \ldots + x_n y_{hn}, \\ P' = x'_1 y'_{h1} + \ldots + x'_n y'_{hn}. \end{cases}$$

On peut ramener P′ à P par la substitution (1′) et par la substitution inverse qui ramène les x' aux x. De plus, les coefficients de ces substitutions *ne dépendront pas de l'indice h.*

Considérons de même les deux formes bilinéaires

$$(5') \qquad \begin{cases} Q = x_1 Y_{h1} + \ldots + x_n Y_{hn}, \\ Q' = x'_1 Y'_{h1} + \ldots + x'_n Y'_{hn}, \end{cases}$$

et remarquons que l'on a

$$(6') \qquad Y'_{hi} = c_{i1} Y_{h2} + \ldots + c_{in} Y_{hn},$$

équations où les coefficients c sont les mêmes que dans les équations (1′) et sont indépendantes de l'indice h. Donc le même calcul qui ramènera P′ à P ramènera Q′ à Q.

Or, puisque les solutions du système (9) ont la propriété de satisfaire aux équations (2′) et (3′), on peut exprimer Q et Q′ respectivement au moyen des y et des y', et l'on aura

$$Q = \sum_{i} a_{ij} x_i y_{hj},$$

$$Q' = \sum_{ij} a'_{ij} x'_i y'_{hj},$$

et ces variables x, y, x', y' sont les mêmes que celles qui entrent dans P et P′. Par conséquent, les y et les y' sont liées par les relations (1′) et les x et les x' sont liées par les relations inverses.

On voit donc que les mêmes substitutions ramènent à la fois les deux formes P′ et Q′ aux deux formes P et Q, et, par suite, que les deux déterminants des formes

$$Q - \omega P \qquad \text{et} \qquad Q' - \omega P'$$

ont les mêmes diviseurs élémentaires, quel que soit l'indice h.

Donc les diviseurs élémentaires du déterminant

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions d'où l'on est parti, et qui fournit les coefficients a quand la variable fait le tour d'un point singulier.

62. En poursuivant le raisonnement comme précédemment, on montrera qu'on peut ramener un système fondamental quelconque de solutions à un système fondamental particulier pour lequel on aura les relations simples

$$(8') \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y_{h1} \quad = \omega_1 y_{h1}, \\ Y_{h2} \quad = \omega_1 y_{h2} + y_{h1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Y_{hk_1} \quad = \omega_1 y_{hk_1} + y_{hk_1-1}, \\ Y_{hk_1+1} = \omega_2 y_{hk_1+1}, \\ Y_{hk_1+2} = \omega_2 y_{hk_1+2} + y_{hk_1+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Les diviseurs linéaires $\omega_1 - \omega$, $\omega_2 - \omega_1$, ... ne sont pas nécessairement distinctes.

63. Pour qu'il y ait un seul *groupe de solutions*, il faut que le diviseur $\omega_1 - \omega$ ait le même degré de multiplicité comme diviseur linéaire et comme diviseur élémentaire.

64. Pour qu'il n'y ait que des solutions satisfaisant aux conditions

$$Y_{hk} = \omega_1 y_{hk} \qquad (h = 1, 2, \dots, n, \ k = 1, 2_1 \dots, k_1),$$

il faut que $\omega_1 - \omega$ soit diviseur de tous les mineurs d'ordre $l - 1$ dans $R(\omega)$, l étant le degré de multiplicité du diviseur linéaire $\omega_1 - \omega$

dans R (ω). Le diviseur linéaire $\omega_1 - \omega$ d'un ordre de multiplicité l se décompose, dans ce cas, en l diviseurs élémentaires *simples*.

65. Considérons maintenant les systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes, à solutions régulières de la forme

$$(10) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients a sont uniformes, continus dans le domaine de l'origine, ou encore développables en séries entières à coefficients constants de la forme

$$a_{ik} = a_{ik}^0 + xa_{ik}^1 + x^2 a_{ik}^2 + \ldots.$$

Cherchons à former un système fondamental de n solutions qui conviennent dans le domaine de l'origine.

66. Nous distinguerons deux cas, suivant que les racines distinctes de l'équation

$$F(r) = \begin{vmatrix} a_{11}^0 - r & \ldots & a_{1n}^0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r \end{vmatrix} = 0$$

auront ou non des différences non entières. Nous commencerons par étudier le cas où deux racines distinctes quelconques de $F(r) = 0$ ne diffèrent jamais d'un nombre entier.

Ce premier cas se subdivise en deux autres. Considérons le déterminant $F(r)$. Nous allons montrer que :

1° A un diviseur élémentaire simple de $F(r)$ correspond une solution dont les éléments ont les formes

$$x^r\varphi_1, \quad x^r\varphi_2, \quad \ldots, \quad x^r\varphi_n,$$

les séries

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2\varphi_i^2 + \ldots$$

étant convergentes dans le domaine de l'origine;

2° A un diviseur élémentaire multiple de $F(r)$ correspondent plusieurs solutions dont les éléments sont des polynômes en $\log x$, à coefficients holomorphes dans le domaine de l'origine.

67. Soit d'abord $r - r_0$ un diviseur élémentaire simple de $F(r)$. Supposons que $F(r)$ possède encore $\mu - 1$ diviseurs élémentaires simples ou non, égaux à $r - r_0$, il en résultera que les mineurs de $F(r)$, jusqu'à ceux de l'ordre μ, seront tous divisibles par $r - r_0$.

Posons

$$y_1 = x^{r_0}\varphi_1, \; \ldots, \; y_n = x^{r_0}\varphi_n,$$

et portons ces valeurs dans le système (10), nous aurons, en identifiant dans les deux membres de chaque équation les coefficients des mêmes puissances de x,

$$\begin{aligned} k\varphi_i^k = {} & a_{i1}^0\varphi_1^k + \ldots + (a_{ii}^0 - r_0)\varphi_i^k + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^k \\ & + a_{i1}^1\varphi_1^{k-1} + \ldots + a_{ii}^1\varphi_i^{k-1} + \ldots + a_{in}^1\varphi_n^{k-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{i1}^k\varphi_1^0 + \ldots + a_{ii}^k\varphi_i^0 + \ldots + a_{in}^k\varphi_n^0 \\ & (i = 1, 2, \ldots, n;\; k = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Ce système d'équations est du premier degré par rapport aux coefficients $\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots, \varphi_n^k$ et permet de les déterminer en fonctions des coefficients φ dont l'indice supérieur est moindre. En effet, le déterminant des coefficients de ces inconnues est

$$F(r_0 + k)$$

et ne peut s'annuler pour aucune valeur de k, puisque aucune racine de $F(r) = 0$ ne diffère de r_0 d'un nombre entier.

Quant aux coefficients $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$, ils satisfont aux équations

$$a_{i1}^0\varphi_1^0 + \ldots + (a_{ii}^0 - r_0)\varphi_i^0 + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^0 = 0.$$

Puisque le déterminant $F(r)$ et ses mineurs, jusqu'à ceux de l'ordre μ, admettent tous le diviseur $r - r_0$, ce déterminant et les mineurs considérés s'annuleront tous pour $r = r_0$, et, par suite, on pourra exprimer $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$, au moyen de μ quantités arbitraires $k_1, \ldots, k_\mu$, en vertu des équations précédentes. En remontant de proche en proche, on voit que, quelle que soit la valeur de l'indice k, les coefficients φ_i^k seront des fonctions linéaires et homogènes des μ arbitraires $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$, et, par suite, que la solution

$$y_1 = x^{r_0}\varphi_1, \; \ldots, \; y_n = x^{r_0}\varphi_n$$

pourra être construite de telle sorte que les séries φ dépendent de μ arbitraires. En donnant à ces arbitraires μ groupes de valeurs indépendantes, on formera μ solutions linéairement indépendantes et de la forme précédente.

On peut dire que chacun des μ diviseurs élémentaires égaux à $r - r_0$ fournit une solution de la forme que nous venons de construire, et, en particulier, qu'un diviseur élémentaire simple $r - r_0$ quelconque de $F(r)$ fournit une solution indépendante et de cette forme.

68. Examinons maintenant le cas où $r - r_0$ est un diviseur élémentaire de $F(r)$ d'un degré e de multiplicité.

Nous allons voir qu'il existe, dans ce cas, des solutions de la forme

$$y_i = x^{r_0} \sum_{\nu=0}^{e-1} \varphi_{i\nu} (\log x)^{e-\nu-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les coefficients $\varphi_{i\nu}$ étant développables en séries convergentes dans le domaine de l'origine, à coefficients constants, et de la forme

$$\varphi_{i\nu} = \varphi_{i\nu}^0 + x\varphi_{i\nu}^1 + x^2\varphi_{i\nu}^2 + \ldots.$$

En effet, portons les valeurs précédentes dans les équations (10), et identifions dans les deux membres de ces équations les coefficients des mêmes puissances de $\log x$. Nous aurons d'abord, *en supposant* $r_0 = 0$,

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum \frac{d\varphi_{i\nu}}{dx} (\log x)^{e-\nu-1} + \frac{1}{x} \sum (e - \nu - 1)\varphi_{i\nu}(\log x)^{e-\nu-2},$$

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = \sum (a_{i1}\varphi_{1\nu} + \ldots + a_{in}\varphi_{n\nu})(\log x)^{e-\nu-1}$$

et, par suite,

$$x\frac{d\varphi_{i\nu}}{dx} + (e - \nu)\varphi_{i\nu-1} = a_{i1}\varphi_{1\nu} + \ldots + a_{in}\varphi_{n\nu}.$$

En faisant successivement $\nu = 0, 1, \ldots, e - 1$, et en remarquant que, pour $\nu = 0$, $\varphi_{i\nu-1}$ doit être remplacé par zéro, nous aurons un système de *en* équations

$$x\frac{d\varphi_{i0}}{dx}=\sum_k a_{ik}\varphi_{k0},$$

$$x\frac{d\varphi_{i1}}{dx}=\sum_k a_{ik}\varphi_{k1}-(e-1)\varphi_{i0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x\frac{d\varphi_{i\nu}}{dx}=\sum_k a_{ik}\varphi_{k\nu}-(e-\nu)\varphi_{i,\nu-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x\frac{d\varphi_{i,e-1}}{dx}=\sum_k a_{ik}\varphi_{k,e-1}-\varphi_{i,e-2}.$$

Ces équations sont analogues aux équations (10), et on peut leur appliquer les raisonnements ordinaires donnés plus haut pour la détermination des coefficients $\varphi_{k\nu}^h$ dont l'indice supérieur est plus grand que zéro.

Quant aux coefficients $\varphi_{k\nu}^0$, voici la méthode ingénieuse que M. Horn a employée pour les déterminer.

69. Les coefficients $\varphi_{k\nu}^0$ satisfont aux équations linéaires

$$\sum_k a_{ik}^0\varphi_{k0}^0=0,$$

$$\sum_k a_{ik}^0\varphi_{k1}^0=(e-1)\varphi_{i0}^0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_k a_{ik}^0\varphi_{k\nu}^0=(e-\nu)\varphi_{i,\nu-1}^0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_k a_{ik}^0\varphi_{k,e-1}^0=\varphi_{i,e-2}^0$$

$$(i,k=1,2,3,\ldots,n).$$

Multiplions les n équations définies par chaque ligne précédente par des indéterminées, et ajoutons; nous aurons, pour une valeur quelconque de l'indice ν,

$$\sum_{ik} a_{ik}^0 u_i \varphi_{k\nu}^0 = (e-\nu) \sum_i u_i \varphi_{i,\nu-1}^0.$$

Considérons alors les deux formes bilinéaires

$$f = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha,$$

$$\varphi = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

dont la première f a un déterminant différent de zéro. On a vu, au § IV, qu'en appelant s une nouvelle variable, et $(s-s_i)^{e_i}$ les diviseurs élémentaires du déterminant de la forme $fs+\varphi$, on a

$$f = -\sum (\xi\eta)_{e_i},$$

$$\varphi = \sum s_i(\xi\eta)_{e_i} + \sum (\xi\eta)_{e_i-1}.$$

Si l'on a $s_i = 0$ pour une valeur particulière de i, on aura

$$f = -(\xi\eta)_e - \sum (\xi\eta)_{e_i},$$

$$\varphi = (\xi\eta)_{e-1} + \sum s_i(\xi\eta)_{e_i} + \sum (\xi\eta)_{e_i-1}.$$

Mais rien n'empêche de transformer de la même manière que φ la forme bilinéaire

$$\sum_{ik} a_{ik}^0 u_i \varphi_{k\nu}^0,$$

qui ne diffère de φ que par la notation. De même, on peut mettre la forme bilinéaire

$$\sum_i u_i \varphi_{i,\nu-1}^0$$

sous la forme de f. Pour cela, on formera des fonctions linéaires et homogènes de $u_1, \ldots, u_n$, qu'on appellera $U_1, \ldots, U_n$. Puis on formera des expressions $V_{1\nu}, \ldots, V_{n\nu}$ linéaires et homogènes en $\varphi^0_{1\nu}, \ldots, \varphi^0_{n\nu}$. Enfin on formera des expressions $V_{1,\nu-1}, \ldots, V_{n,\nu-1}$ linéaires et homogènes en $\varphi^0_{1,\nu-1}, \ldots, \varphi^0_{n,\nu-1}$. Les U et les V remplaceront, aux signes près, les ξ et les η dans les formes f et φ. On remarquera que, $r - r_0$ étant supposé diviseur élémentaire au degré e de multiplicité dans $F(r)$, et r_0 étant pris égal à zéro, r sera un diviseur élémentaire du degré e dans $F(r)$, ou encore dans le déterminant de la forme $fs + \varphi$.

On pourra donc poser

$$\sum a^0_{ik} u_i \varphi^0_{k\nu} = (U_1 V_{e-1,\nu} + \ldots + U_{e-1} V_{1\nu}) + \ldots,$$

$$\sum u_i \varphi^0_{k,\nu-1} = (U_1 V_{e,\nu-1} + \ldots + U_e V_{1,\nu-1}) + \ldots,$$

et, par suite, on aura

$$(U_1 V_{e-1,\nu} + \ldots + U_{e-1} V_{1\nu}) + \ldots = (e-\nu)[(U_1 V_{e,\nu-1} + \ldots + U_e V_{1,\nu-1}) + \ldots].$$

Nous satisferons identiquement à cette condition en posant

$$\begin{aligned} 0 &= V_{1,\nu-1}, \\ V_{1\nu} &= (e-\nu) V_{2,\nu-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_{h-1,\nu} &= (e-\nu) V_{h,\nu-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_{e-1,\nu} &= (e-\nu) V_{e,\nu-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ces équations s'obtiennent en identifiant dans les deux membres de la condition les coefficients des mêmes indéterminées U. Le nombre des équations précédentes est n, et l'on sait, d'après la théorie de la réduction des formes bilinéaires, que l'on peut résoudre ces équations soit par rapport aux inconnues $\varphi^0_{k,\nu-1}$, soit par rapport aux inconnues $\varphi^0_{k\nu}$.

Dans les équations précédentes $V_{e,\nu-1}$ peut être pris arbitrairement.

Donnons à ν successivement les valeurs $0, 1, \ldots, e-1$, nous aurons, en ne tenant compte que des e premières équations,

$$\begin{array}{llll}
V_{10}=0, & \ldots, & V_{e-1,0}=0, & V_{e0} \text{ arbitraire}, \\
V_{11}=(e-1)V_{20}=0, & \ldots, & V_{e-1,1}=(e-1)V_{e0}, & V_{e1} \text{ arbitraire}, \\
V_{12}=(e-2)V_{21}=0, & \ldots, & V_{e-1,2}=(e-2)V_{e1}, & V_{e2} \text{ arbitraire}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
V_{1,e-1}=V_{2,e-2}, & \ldots, & V_{e-1,e-1}=V_{e,e-2}, & V_{e,e-1} \text{ arbitraire},
\end{array}$$

ou encore, en résolvant ces équations,

$$\begin{array}{rrr}
 & & V_{e-1,1}=(e-1)V_{e0}, \\
 & V_{e-1,2}=(e-2)V_{e1}, & V_{e-2,2}=(e-2)(e-1)V_{e0}, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
V_{e-1,e-1}=V_{e,e-2}, \quad \ldots, & V_{2,e-1}=(1,e-2)V_{e1}, & V_{1,e-1}=(1,e-1)V_{e0},
\end{array}$$

l'expression $(1, e-1)$ remplaçant le produit $(e-1)(e-2)\ldots 1$, et tous les V qui ne sont pas dans ce Tableau étant pris égaux à zéro.

Il résulte de là que, les expressions $V_{e0}, \ldots, V_{e,e-1}$ étant arbitraires, on aura pour $\varphi_{k\nu}^0$ des expressions linéaires et homogènes de e constantes arbitraires.

En remontant dans les calculs précédents, on voit que les expressions

$$y_i = \sum_{\nu=0}^{e-1} \varphi_{i\nu} (\log x)^{e-\nu-1}$$

dépendront de e constantes arbitraires. On pourra donc trouver e solutions de la forme précédente correspondant au diviseur linéaire $(r-r_0)^e$ de $F(r)$, et où r_0 est nul.

70. En combinant linéairement ces e solutions, et en choisissant convenablement les constantes introduites, on obtiendra e solutions linéairement indépendantes et de la forme

$$y_i = \varphi_{i0},$$
$$y_i = \varphi_{i0} \log x + \varphi_{i1},$$

71. Supposons que le diviseur linéaire $r - r_0$ de $F(r)$ fournisse les diviseurs élémentaires

$$(r - r_0)^{e_0}, \quad (r - r_0)^{e_1}, \quad \dots, \quad (r - r_0)^{e_r}.$$

On répétera le raisonnement précédent avec le diviseur linéaire $(r - r_0)^{e_0 + \dots + e_r}$. Mais, comme dans les formes f et φ les ξ et les η sont indépendants, chaque diviseur élémentaire $(r - r_0)^{e_0}$ fournira e_0 solutions non seulement indépendantes entre elles, mais encore indépendantes des solutions fournies par un autre diviseur élémentaire tel que $(r - r_0)^{e_1}$, par exemple.

72. Nous avons supposé $r_0 = 0$. Rien n'est plus facile que de ramener tous les cas à celui-là. En effet, dans les équations (10), posons $y = x^{r_0} y'$, et remplaçons les équations (10) par des équations (10′) analogues, où les inconnues soient les y'. Dans le nouveau système, il y aura le diviseur r au lieu du diviseur $r - r_0$, c'est-à-dire que r_0 sera nul.

73. Il nous reste à étudier le cas où le déterminant $F(r)$ aurait des diviseurs qui différeraient entre eux de *nombres entiers non nuls.*

Soient $r^0, r', \dots, r^{(k)}$ des racines de $F(r) = 0$ différant entre elles de nombres entiers et rangées dans un ordre tel, qu'aucune des différences

$$r_0 - r', \quad r_0 - r'', \quad \dots, \quad r_0 - r^{(k)}$$

ne soit un nombre entier négatif. Supposons, en outre, que r_0 ne diffère pas d'un nombre entier de toute autre racine de $F(r) = 0$. On pourra appliquer les raisonnements précédents et construire e solutions indépendantes de (10), si e est le degré de multiplicité de $r - r_0$ dans $F(r)$.

74. Après des calculs que j'ai indiqués ailleurs [1], un peu modifiés en vue de la théorie des diviseurs élémentaires, on pourra obtenir un système d'équations (10″) renfermant e équations et e inconnues

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1886 et 1889.

de moins que le système (10). L'équation $F''(r) = 0$ correspondante aura des racines correspondant à r', r'', ..., $r^{(k)}$ et à toute autre racine r qui ne soit pas r^0. On raisonnera alors sur le nouveau système (10″) comme sur le système (10), et on continuera ainsi jusqu'à épuisement des racines r^0, r', ..., $r^{(k)}$, ou des racines nouvelles qui s'en déduisent.

En résumé, on verra que, *dans tous les cas, à chaque diviseur élémentaire d'un degré e de multiplicité de* $F(r) = 0$ *correspond un groupe de e solutions indépendantes.*

75. En quoi différeront les formes des solutions correspondant aux diverses racines r_0, r', ..., $r^{(k)}$ de $F(r) = 0$, qui ne diffèrent entre elles que de nombres entiers? La réponse à cette question a été donnée par M. Grünfeld [1] dans le cas le plus ordinaire. La méthode de M. Grünfeld a été perfectionnée sur un point, et dans le cas particulier de $n = 3$, par M. Horn (*Thèse de l'Université de Fribourg*).

76. Pour donner un exemple des modifications introduites dans les formes des solutions par l'hypothèse que des racines r ont des différences entières, nous énoncerons le résultat démontré par M. Horn, dans le cas de trois équations différentielles. Soient r^0, r', r'' les racines de l'équation $F(r) = 0$.

I. Les trois diviseurs $r - r^0$, $r - r'$, $r - r''$ sont simples et distincts ou non :

α. S'ils ne diffèrent pas entre eux de nombres entiers non nuls, on posera

$$\begin{aligned} y_i^0 &= x^{r^0}(\varphi_i)^0, \\ y_i' &= x^{r'}(\varphi_i)', \\ y_i'' &= x^{r''}(\varphi_i)''. \end{aligned}$$

β. La différence $r' - r''$ est un nombre entier positif, et les deux autres différences $r^0 - r'$, $r^0 - r''$ ne sont pas entières. On posera

$$\begin{aligned} y_i^0 &= x^{r^0}(\varphi_i)^0, \\ y_i' &= x^{r'}(\varphi_i)', \\ y_i'' &= x^{r''}(\varphi_i)'' + kx^{r'}(\varphi_i)' \log x. \end{aligned}$$

---

[1] *Denkschriften der Wiener Akademie, math.-nat. Kl.*, 1888.

γ. Les différences $r^0 - r'$ et $r' - r''$ sont des nombres entiers positifs. On posera

$$\begin{aligned} y_i^0 &= x^{r^0}(\varphi_i)^0, \\ y_i' &= x^{r'}(\varphi_i)' + k\, x^{r^0}(\varphi_i)^0 \log x, \\ y_i'' &= x^{r''}(\varphi_i)'' + k' x^{r'}(\varphi_i)' \log x + k'' x^{r^0}(\varphi_i)^0 \log^2 x. \end{aligned}$$

II. Le diviseur élémentaire $r - r^0$ étant simple, le diviseur élémentaire $r - r'$ est double et diffère ou non de $r - r^0$:

α. La différence $r^0 - r'$ n'est pas entière. On posera

$$\begin{aligned} y_i^0 &= x^{r^0}(\varphi_i)^0, \\ y_i' &= x^{r'}(\varphi_i)', \\ y_i'' &= x^{r'}(\varphi_{i1})' + x^{r''}(\varphi_{i2})'' \log x. \end{aligned}$$

β. La différence $r^0 - r'$ est un nombre entier positif. On posera

$$\begin{aligned} y_i^0 &= x^{r^0}(\varphi_i)^0, \\ y_i' &= x^{r'}(\varphi_i)' + k\, x^{r^0}(\varphi_i)^0 \log x, \\ y_i'' &= x^{r'}(\varphi_i)' + k' x^{r'}(\varphi_i)' \log x + k'' x^{r^0}(\varphi_i)^0 \log^2 x. \end{aligned}$$

γ. La différence $r^0 - r'$ est un nombre entier négatif. On posera

$$\begin{aligned} y_i^0 &= x^{r^0}(\varphi_i)^0 + k x^{r'}(\varphi_i)' \log x, \\ y_i' &= x^{r'}(\varphi_i)', \\ y_i'' &= x^{r'}(\varphi_{i1})' + x^{r'}(\varphi_{i2})' \log x. \end{aligned}$$

III. Le diviseur élémentaire $r - r^0$ est triple. On posera

$$\begin{aligned} y_i^0 &= x^{r^0}(\varphi_{i1})^0, \\ y_i' &= x^{r^0}(\varphi_{i2})^0 + x^{r^0}(\varphi_{i2}')^0 \log x, \\ y_i'' &= x^{r^0}(\varphi_{i3})^0 + x^{r^0}(\varphi_{i3}')^0 \log x + x^{r^0}(\varphi_{i3}'')^0 \log^2 x. \end{aligned}$$

Dans ces formules, les constantes k peuvent s'annuler. Alors les logarithmes disparaissent. Si les différences entières des racines r^0, r', r'' deviennent nulles, certains de ces nombres k se réduisent à l'unité. Enfin la notation $(\varphi_i)^0$ ou $(\varphi_{ik})^0$ indique, dans les formules précédentes, que le calcul de la série φ_i ou φ_{ik} se rattache à la racine r^0. De même les accents $'$ et $''$ rappellent les racines r' et r''.

On voit que les différences entières entre les racines de $F(r) = 0$ font apparaître les logarithmes, *en général*, plus tôt que si ces différences étaient quelconques. Mais, dans tous les cas, *chaque diviseur élémentaire de* $F(r)$ *fournit son groupe de solutions.*