

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. BRIOSCHI

**Sur la réduction de l'intégrale hyperelliptique à l'elliptique  
par une transformation du troisième degré**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 8 (1891), p. 227-230

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1891\\_3\\_8\\_227\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8_227_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RÉDUCTION  
DE  
L'INTÉGRALE HYPERELLIPTIQUE A L'ELLIPTIQUE

PAR UNE

TRANSFORMATION DU TROISIÈME DEGRÉ <sup>(1)</sup>,

PAR M. F. BRIOSCHI.



1. Soient  $\varphi(x_1, x_2)$ ,  $\psi(x_1, x_2)$  deux formes binaires de l'ordre  $n$ ,  
et

$$F(y_1, y_2) = \varphi(x_1, x_2)\psi(y_1, y_2) - \psi(x_1, x_2)\varphi(y_1, y_2);$$

on démontre facilement que chaque invariant de la forme  $F$  s'exprime  
en fonction de covariants et d'invariants simultanés des formes  $\varphi(x)$ ,  
 $\psi(x)$ .

La valeur du discriminant  $\Delta$  de  $F$  s'exprime de la manière suivante

$$\Delta = f^2 P,$$

étant  $f = (\varphi\psi)$  covariant simultané de l'ordre  $2(n-1)$ , et  $P$  une fonc-  
tion de covariants et d'invariants simultanés de l'ordre  $2(n-1)(n-2)$ .

Pour  $n = 3$ , on trouve

$$P = -2(kf + 6h),$$

forme du quatrième ordre, étant  $k = (\varphi\psi)_3$  invariant,  $h = \frac{1}{2}(ff)_2$  co-  
variant, simultanés. En indiquant par  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les racines de

---

<sup>(1)</sup> GOURSAT, *Bulletin de la Société mathématique de France*, p. 155; 1885. — BURKHARDT, *Mathematische Annalen*, Band XXXVI, p. 411.

l'équation  $\Delta(F) = 0$ , on aura, en conséquence,

$$\prod_0^3 (\varphi - \lambda_r \psi) = m f^2 (kf + 6h),$$

$m$  constante.

Chacun des facteurs  $\varphi - \lambda \psi$  ayant une racine double, on peut poser

$$(1) \quad \varphi - \lambda \psi = \alpha^2 \beta,$$

$\alpha$ ,  $\beta$  étant des fonctions linéaires, et  $\alpha$  sera un facteur de  $f$ ,  $\beta$  un facteur de  $kf + 6h$ . Soit

$$(2) \quad \varphi - \mu \psi = u,$$

$\mu$  constante; de l'équation supérieure, on déduit

$$(\varphi - \mu \psi) \prod_1^3 (\varphi - \lambda_r \psi) = m \left(\frac{f}{\alpha}\right)^2 (kf + 6h) \frac{u}{\beta} = m \left(\frac{f}{\alpha}\right)^2 u v,$$

en supposant

$$v \beta = kf + 6h.$$

La transformation  $z = \frac{\varphi}{\psi}$  conduit à la réduction d'intégrales due à M. Goursat. L'intégrale hyperelliptique n'est pas générale, ce que je vais démontrer en déterminant d'une manière nouvelle la valeur de la forme  $v$  du troisième ordre.

2. En posant  $\mu - \lambda = \rho$  des équations (1), (2), on a

$$\rho \varphi = \mu \alpha^2 \beta - \lambda u, \quad \rho \psi = \alpha^2 \beta - u,$$

et c'est avec ces valeurs de  $\varphi$ ,  $\psi$  que je vais calculer celles de  $f$  et de  $kf + 6h$ .

Dans ce but, j'introduis les huit invariants simultanés des formes  $u$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  qui suivent :

$$\begin{aligned} P_0 &= (u \alpha^3)_3, & P_1 &= (u \alpha^2 \beta)_3, & P_2 &= (u \alpha \beta^2)_3, & P_3 &= (u \beta^3)_3, \\ L_0 &= (J \alpha^2)_2, & L_1 &= (J \alpha \beta)^2, & L_2 &= (J \beta^2)_2; \end{aligned}$$

$M = (\alpha\beta)$ , étant  $J = \frac{1}{2}(uu)_2$ . Entre ces invariants, on a les relations suivantes :

$$(3) \quad \begin{aligned} P_0P_2 - P_1^2 &= M^2L_0, & P_0P_3 - P_1P_2 &= 2M^2L_1, & P_1P_3 - P_2^2 &= M^2L_2, \\ L_0L_2 - L_1^2 &= \frac{1}{2}M^2A, \end{aligned}$$

étant  $A = (JJ)_2$ , le discriminant de la forme  $u$ . En considérant encore les deux covariants simultanés  $l = (u\alpha)$ ,  $m = (u\beta)$ , on a les trois relations

$$\begin{aligned} L_2\alpha^2 - 2L_1\alpha\beta + L_0\beta^2 &= M^2J, \\ P_2\alpha^2 - 2P_1\alpha\beta + P_0\beta^2 &= M^2l, \\ P_3\alpha^2 - 2P_2\alpha\beta + P_1\beta^2 &= M^2m. \end{aligned}$$

Cela posé, on trouve

$$\begin{aligned} 3\rho f &= \alpha(\alpha m + 2\beta l), & \rho k &= P_1, \\ 36\rho^2 h &= 2P_1\alpha(\alpha m + 2\beta l) - 4M^2\alpha^2J - [\beta(l\alpha) + 2\alpha(m\alpha)]^2. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} (l\alpha)^2 &= P_0l - L_0\alpha^2, & (m\alpha)^2 &= P_1m - L_2\alpha^2, \\ 2(l\alpha)(m\alpha) &= P_0m + P_1l - 2L_1\alpha^2, \end{aligned}$$

et, après quelques réductions, on arrive à la seconde équation

$$6\rho^2(kf + 6h) = \beta[12L_1\alpha^3 - 3L_0\alpha^2\beta + 6P_1\alpha l - P_0(2\alpha m + \beta l)].$$

*La forme du troisième ordre  $\nu$  est en conséquence la suivante :*

$$M^2\nu = 4P_0P_3\alpha^3 - 9P_1^2\alpha^2\beta + 6P_0P_1\alpha\beta^2 - P_0^2\beta^3.$$

Les invariants simultanés des formes  $u$ ,  $\nu$  seront donc des fonctions de  $P_0$ ,  $P_1$ , ...,  $M$ . En posant  $\sigma = \frac{1}{2}(\nu\nu)_2$ , on a, comme il est connu, les trois invariants

$$A = (JJ)_2, \quad B = (J\sigma)_2, \quad C = (\sigma\sigma)_2;$$

l'invariant  $J = (u\nu)_3$  et le résultant  $R$  des formes  $u$ ,  $\nu$ .

La valeur (3) de  $A$  conduit tout de suite à la suivante

$$R = -54P_0^4P_3A,$$

et l'on trouve pour  $J$ ,  $C$ ,  $B$  les valeurs

$$M^2 J = 3(P_0^2 P_3 - 3P_1^2 + 2P_0 P_1 P_2),$$

$$M^2 C = 8P_0^4 P_3 (P_1^3 - P_0^2 P_3)$$

et, en conséquence,

$$M^2(9C + 8P_0^4 P_3 J) = -48P_0^3 P_3 (P_0 P_3 - P_1 P_2).$$

Enfin le calcul de l'invariant  $B$  donne

$$M^4(9B - J^2) = -27P_0^2 (P_0 P_3 - P_1 P_2)^2.$$

Ces deux dernières équations conduisent à la suivante

$$3(9C + 8P_0^4 P_3 J)^2 + 4^4 P_0^8 P_3^2 (9B - J^2) = 0,$$

de laquelle, en multipliant par  $3^6 A^2$ , on arrive à l'équation de condition entre les invariants  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $J$ ,  $R$ ,

$$3(3^3 AC - 4RJ)^2 + 4^3 R^2(9B - J^2) = 0,$$

déjà calculée par M. Burkhardt.

