ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FELIX KLEIN

Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 173-199
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__173_0>

CONSIDÉRATIONS COMPARATIVES

SUR LES

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES MODERNES

(SUITE),

PAR M. FÉLIX KLEIN,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GŒTTINGUE.

Programme publié à l'occasion de l'entrée à la Faculté de Philosophie
et au Sénat de l'Université d'Erlangen, en 1872.

TRADUCTION DE M. H. PADÉ.

§ VI. — Géométrie des rayons vecteurs réciproques. Interprétation de $x+iy$.

Revenons maintenant à la discussion des différentes espèces de recherches géométriques, commencée dans les §§ II, III. A plusieurs points de vue, on peut regarder comme analogue au genre de considérations de la Géométrie projective une catégorie de considérations géométriques où il est fait un constant usage de la transformation par rayons vecteurs réciproques : ainsi les recherches relatives à ce qu'on nomme les cyclides et les surfaces anallagmatiques, la théorie générale des systèmes orthogonaux, puis des recherches sur le potentiel, etc. Si l'on n'a pas encore rassemblé en une Géométrie particulière les considérations de ces théories, comme on l'a fait pour les projectives, *Géométrie dans laquelle il faudrait prendre pour groupe fondamental l'ensemble de transformations obtenu en réunissant le groupe principal à la transformation par rayons vecteurs réciproques,* il faut l'attribuer à cette circonstance fortuite que ces théories n'ont pas encore été jusqu'ici l'objet d'une exposition systématique; les différents auteurs qui ont travaillé dans ce sens n'ont pas été éloignés d'une telle considération méthodique.

L'analogie entre la Géométrie des rayons vecteurs réciproques et la Géométrie projective s'offre d'elle-même dès que l'on se propose de les comparer, et, par suite, sans entrer dans le détail, il nous suffira d'attirer l'attention sur les points suivants:

Les notions élémentaires de la Géométrie projective sont celles du point, de la droite, du plan. La circonférence et la sphère ne sont que des cas particuliers des sections coniques et des surfaces du second degré. L'infini s'y présente comme un plan; la figure fondamentale qui correspond à la Géométrie élémentaire est une section conique imaginaire à l'infini.

Les notions élémentaires de la Géométrie des rayons vecteurs réciproques sont celles du point, de la circonférence, de la sphère. La droite et le plan sont des cas particuliers de ces deux dernières caractérisés par le fait qu'elles contiennent un certain point, le point à l'infini, qui, du reste, au sens de la méthode, n'est pas un point plus remarquable que les autres. On obtient la Géométrie élémentaire dès que ce point est supposé fixe.

La Géométrie des rayons vecteurs réciproques peut être présentée de façon à prendre place à côté de la théorie des formes binaires et de la Géométrie de l'espace réglé, si toutefois on traite celles-ci comme il a été indiqué dans les paragraphes précédents. Nous pouvons tout d'abord, pour arriver à ce résultat, nous limiter à la Géométrie plane et, par suite, à la Géométrie des rayons vecteurs réciproques dans le plan (¹).

Nous nous sommes déjà appesantis sur la connexion qui existe entre la Géométrie plane élémentaire et la Géométrie projective d'une surface du second degré dont un point est particulièrement spécifié. Si l'on fait abstraction de ce point particulier et que l'on considère, par

---

(¹) La Géométrie des rayons vecteurs réciproques sur la droite équivaut à l'étude projective de la droite, puisque les transformations sont les mêmes de part et d'autre. Dans la Géométrie des rayons vecteurs réciproques, on peut donc aussi parler du *rapport anharmonique* de quatre points d'une droite, puis d'une circonférence.

conséquent, la Géométrie projective sur la surface elle-même, on a la représentation de la Géométrie plane des rayons vecteurs réciproques. Il est, en effet, facile de se convaincre (¹) qu'au groupe de transformations par rayons vecteurs réciproques dans le plan correspond, par la représentation de la surface du second degré, l'ensemble des transformations linéaires de celle-ci en elle-même. Par conséquent :

La Géométrie des rayons vecteurs réciproques dans le plan et la Géométrie projective sur une surface du second degré sont une seule et même chose ;

et semblablement :

La Géométrie des rayons vecteurs réciproques dans l'espace est identique avec l'étude projective d'une multiplicité représentée par une équation quadratique entre cinq variables homogènes.

La Géométrie dans l'espace est ainsi rattachée, par la Géométrie des rayons vecteurs réciproques, à une multiplicité à quatre dimensions, tout comme elle l'est à une multiplicité à cinq dimensions par la Géométrie projective de l'espace réglé.

En n'ayant égard qu'aux transformations réelles, la Géométrie des rayons vecteurs réciproques nous donne encore, d'un autre côté, une représentation et une application intéressantes. Si, en effet, on représente de la façon habituelle la variable complexe $x + iy$ sur le plan, à ses transformations linéaires correspond le groupe des rayons vecteurs réciproques limité, comme nous l'avons dit, aux transformations réelles (²). Mais l'étude des fonctions d'une variable complexe qui est

---

(¹) *Voir* le travail déjà cité : *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* (*Math. Ann.*, t. V).

(²) [La façon de dire du texte n'est pas exacte. Toutes les transformations linéaires $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (où $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$) correspondent aux seules transformations du groupe des rayons vecteurs réciproques qui ne renversent pas les angles (par lesquelles les points cycliques du plan ne sont pas permutés entre eux). Pour embrasser le groupe entier des rayons vecteurs réciproques, il faut, aux transformations précédentes, adjoindre encore celles-ci (qui ne sont pas moins importantes) : $z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$, où l'on a encore $z' = x' + iy'$, mais où $\bar{z} = x - iy$.]

supposée soumise à des transformations linéaires quelconques n'est rien autre que ce que, avec une méthode d'exposition un peu différente, on nomme la *théorie des formes binaires*. Ainsi :

La théorie des formes binaires trouve sa représentation dans la Géométrie des rayons vecteurs réciproques et de telle sorte que les valeurs complexes des variables sont aussi représentées.

Du plan nous pouvons, pour parvenir au domaine de représentation le plus habituel des transformations projectives, passer à la surface du second degré. Puisque nous ne considérons que des éléments réels du plan, le choix de la surface n'est plus indifférent ; il faut évidemment qu'elle ne soit pas réglée. En particulier, nous pouvons, comme d'ailleurs on le fait aussi pour l'interprétation d'une variable complexe, supposer que ce soit une sphère, et nous obtenons ainsi ce théorème :

La théorie des formes binaires de variables complexes trouve sa représentation dans la Géométrie projective d'une surface sphérique réelle.

J'ai cru devoir encore montrer dans une Note (*voir* Note VII) à quel point cette représentation éclaircit la théorie des formes binaires et biquadratiques.

§ VII. — Généralisation de ce qui précède. Géométrie de la sphère de Lie.

A la théorie des formes binaires, à la Géométrie des rayons vecteurs réciproques et à celle de l'espace réglé, dont nous venons de montrer la coordination et qui semblent ne différer que par le nombre des variables, se rattachent certaines généralisations que nous allons maintenant exposer. Elles serviront d'abord à éclaircir, par de nouveaux exemples, cette pensée que le groupe qui fixe la façon de traiter un domaine donné peut être à volonté généralisé ; mais, en outre, notre but a été de présenter, dans leurs rapports avec les idées ici exposées, les considérations développées par Lie dans un Mémoire récent ([1]). La voie par laquelle nous parviendrons à sa Géométrie de la sphère diffère de celle qu'il a adoptée en tant qu'il se rattache à des notions

([1]) *Partielle Differentialgleichungen und Complexe* (*Math. Annalen*, t. V).

de la Géométrie de l'espace réglé; pour nous conformer davantage à l'intuition géométrique ordinaire et pour rester en connexion avec ce qui précède, notre exposition supposera, au contraire, un nombre moindre de variables. Comme déjà Lie l'a mis en évidence (*Göttinger Nachrichten*, 1871, n° 7, 22), les considérations sont indépendantes du nombre des variables. Elles appartiennent au cercle étendu de recherches relatives à l'étude projective des équations quadratiques à un nombre quelconque de variables, recherches que souvent déjà nous avons touchées et que nous rencontrerons encore à plusieurs reprises (*voir* entre autres le § X).

Je pars de la correspondance obtenue par projection stéréographique entre le plan réel et la sphère. Dans le § V, nous avons déjà, en faisant correspondre à la droite du plan le couple de points où elle coupe une conique, relié la Géométrie du plan à la Géométrie sur la conique. Nous pouvons, de la même façon, établir une correspondance entre la Géométrie de l'espace et la Géométrie sur la sphère, en faisant correspondre à chaque plan de l'espace la circonférence suivant laquelle il coupe la sphère. Si maintenant, par projection stéréographique, nous transportons la Géométrie établie sur la sphère de celle-ci au plan (et alors chaque circonférence est transformée en une circonférence), on voit qu'il y a correspondance entre :

La Géométrie de l'espace, qui a pour élément le plan et pour groupe les transformations linéaires qui transforment une sphère en elle-même; et

La Géométrie plane, qui a pour élément la circonférence et pour groupe le groupe des rayons vecteurs réciproques.

Nous voulons maintenant étendre de deux manières la première de ces Géométries, en prenant, au lieu de son groupe, un groupe plus général. La généralisation qui en résulte se transporte alors immédiatement, au moyen de la représentation, à la Géométrie plane.

Faisons cette facile modification de choisir, au lieu des transformations linéaires de l'espace, considéré comme formé de plans, qui transforment la sphère en elle-même, soit l'ensemble des transformations linéaires de l'espace, soit l'ensemble des transformations de plans de l'espace qui laissent [dans un sens qui va encore être précisé] la sphère inaltérée; dans le premier cas, on fait abstraction de la sphère; dans le second, du caractère des transformations à employer d'être linéaires. La première généralisation se conçoit immédiatement; nous pouvons donc l'examiner tout d'abord et en poursuivre les conséquences pour la Géométrie plane. Nous reviendrons ensuite sur la seconde, où il y a tout d'abord lieu de déterminer la transformation correspondante la plus générale.

Toutes les transformations linéaires de l'espace transforment des faisceaux et des gerbes de plans respectivement en faisceaux et en gerbes de plans. Sur la sphère, le faisceau de plans donne un faisceau de circonférences, c'est-à-dire une suite simplement infinie de circonférences se coupant aux mêmes points; la gerbe de plans, une gerbe de circonférences, c'est-à-dire une suite doublement infinie de circonférences orthogonales à une circonférence fixe (la circonférence dont le plan a pour pôle le point par lequel passent les plans). Aux transformations linéaires de l'espace correspondent donc sur la sphère et, par suite, dans le plan, les transformations circulaires caractérisées par cette propriété qu'elles transforment des faisceaux et des gerbes de circonférences en faisceaux et en gerbes de circonférences (1). *La Géométrie du plan obtenue en adoptant ce groupe de transformations est la représentation de la Géométrie projective ordinaire de l'espace.* Dans cette Géométrie, on ne pourra pas faire usage du point comme élément du plan, puisque les points, pour le groupe de transformations choisi, ne forment pas un corps (§ V), mais on choisira comme éléments les circonférences.

Pour la seconde extension dont nous avons parlé, il faut d'abord se demander la nature du groupe correspondant de transformations. Il s'agit de trouver des transformations telles que tout [faisceau de plans dont l'axe est tangent à la sphère] devienne un [faisceau] ayant aussi cette disposition. Nous pourrons, pour abréger le langage, transformer d'abord la question par dualité, et en outre descendre d'un degré dans le nombre des dimensions; nous aurons ainsi à trouver les transformations ponctuelles du plan qui, à chaque tangente d'une conique donnée, fassent correspondre une

(1) Grassmann dans son *Ausdehnungslehre* considère fortuitement ces transformations (p. 278 de l'édition de 1862).

tangente à la même conique. Pour y parvenir, considérons le plan, et la conique qui y est située, comme la projection d'une quadrique faite d'un point de vue qui n'est pas sur la surface et de telle sorte que la conique soit la courbe de contour apparent. Aux tangentes à la conique correspondent les génératrices de la surface et la question est ramenée à celle de trouver l'ensemble des transformations ponctuelles qui reproduisent la surface, les génératrices restant des génératrices.

Il y a autant qu'on veut de telles transformations, car il suffit de considérer le point de la surface comme intersection des génératrices de chaque système et de transformer en lui-même, d'une façon quelconque, chacun de ces systèmes. Parmi ces transformations se trouvent, en particulier, celles qui sont linéaires : ce sont les seules que nous ayons à considérer. Si nous avions, en effet, affaire, non pas à une surface, mais à une multiplicité à plusieurs dimensions, représentée par une équation quadratique, les transformations linéaires seules subsisteraient, les autres disparaîtraient ([1]).

Rapportées sur le plan par projection (non stéréographique), ces transformations linéaires qui reproduisent la surface deviennent des transformations ponctuelles à deux déterminations, telles qu'à chaque tangente à la conique de contour apparent correspond bien de nouveau une tangente, mais qu'à toute autre droite correspond, en général, une conique qui a un double contact avec la conique de contour apparent. On peut fort bien caractériser ce groupe de transformations en basant sur cette dernière une détermination métrique projective. Les transformations ont alors la propriété de changer des points qui, au sens de la détermination métrique, sont à une distance nulle l'un de l'autre, ou des points qui sont à une distance constante d'un même autre point, en d'autres pour lesquels les mêmes choses ont lieu.

Toutes ces considérations peuvent être étendues à un nombre quelconque de variables; en particulier, elles peuvent être employées

([1]) Si l'on projette stéréographiquement la multiplicité, on obtient ce théorème connu : *En dehors des transformations du groupe des rayons vecteurs réciproques, il n'existe, dans les champs à plusieurs dimensions* (et déjà dans l'espace), *aucune transformation ponctuelle conforme. Dans le plan, au contraire, il en existe une infinité. Voir* encore les travaux cités de Lie.

pour la question posée au début, et relative à la sphère et au plan, qui est alors pris pour élément. Dans ce cas, on peut donner au résultat une forme particulièrement intuitive, parce que l'angle que forment deux plans, au sens de la détermination métrique basée sur la sphère, est égal à l'angle que forment, au sens ordinaire, les circonférences d'intersection dans la sphère.

Nous obtenons donc sur la sphère, et par suite sur le plan, un groupe de transformations circulaires qui ont la propriété de *transformer des cercles tangents (formant un angle nul) et des cercles qui en coupent un autre sous un même angle, respectivement en cercles qui satisfont aux mêmes conditions*. A ce groupe de transformations appartiennent les transformations linéaires sur la sphère et les transformations par rayons vecteurs réciproques dans le plan (1).

La Géométrie du cercle qui se peut fonder sur ce groupe est l'analogue de la *Géométrie de la sphère* proposée par Lie pour l'espace, et qui semble d'une importance exceptionnelle dans les recherches sur

---

(1) [Les formules suivantes rendront beaucoup plus claires les considérations du texte. Soit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

l'équation, en coordonnées tétraédriques ordinaires, de la sphère qui est rapportée stéréographiquement au plan. Les x qui satisfont à cette équation de condition acquièrent alors pour nous la signification de coordonnées tétracycliques dans le plan, et

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

devient l'équation générale du cercle dans le plan. Si l'on calcule le rayon de ce cercle, on rencontre le radical carré

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2},$$

que nous représenterons par iu_5. Nous pouvons maintenant considérer les cercles comme éléments du plan. Alors le groupe des rayons vecteurs réciproques s'offre comme l'ensemble des transformations linéaires homogènes de u_1, u_2, u_3, u_4, telles que

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

se reproduise à un certain facteur près. Le groupe plus étendu qui correspond à la Géométrie de la sphère de Lie, se compose, lui, des transformations linéaires des cinq variables u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 qui, à un facteur près, reproduisent

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2.]$$

la courbure des surfaces. Elle comprend la Géométrie des rayons vecteurs réciproques, au sens où celle-ci comprend à son tour la Géométrie élémentaire.

Les transformations circulaires (sphériques) que nous venons d'obtenir ont, en particulier, la propriété de transformer des circonférences (sphères) tangentes en d'autres pareillement tangentes. En considérant toutes les courbes (surfaces) comme des enveloppes de circonférences (sphères), on voit que deux courbes (surfaces) tangentes seront toujours transformées en courbes (surfaces) également tangentes. Les transformations en question appartiennent donc à la catégorie que nous étudierons plus tard en général, des *transformations de contact,* c'est-à-dire des transformations telles que le contact des figures soit une propriété invariante. Les transformations circulaires mentionnées en premier lieu dans ce paragraphe, à côté desquelles se peuvent placer des transformations sphériques analogues, ne sont pas des transformations de contact.

Les deux sortes d'extensions dont nous ne nous sommes occupés que pour la Géométrie des rayons vecteurs réciproques, se peuvent encore faire d'une façon analogue pour la Géométrie de l'espace réglé, et, en général, pour l'étude projective d'une multiplicité caractérisée par une équation quadratique; c'est ce que nous avons déjà indiqué, et sur quoi il n'y a plus à revenir davantage ici.

§ VIII. — Énumération d'autres méthodes qui ont pour base un groupe de transformations ponctuelles.

La Géométrie élémentaire, celle des rayons vecteurs réciproques, et même la Géométrie projective quand on fait abstraction des transformations par dualité qui apportent avec elles un changement de l'élément de l'espace, ne sont que des exemples particuliers parmi les nombreuses méthodes de traitement imaginables, où l'on prend pour base des groupes de transformations ponctuelles. Nous ne signalerons ici que les trois méthodes suivantes, qui, avec celles que nous venons de nommer, partagent ce caractère. Bien que ces méthodes soient encore loin d'être développées, au même degré que la Géométrie projective, en des disciplines qui leur soient propres, il est toutefois aisé de reconnaître qu'elles prennent place dans les recherches modernes ([1]).

1. *Le groupe des transformations rationnelles.* — Relativement aux transformations rationnelles, il faut distinguer soigneusement si elles sont rationnelles pour tous les points du champ dans lequel on opère, comme l'espace, ou le plan, etc., ou bien si elles le sont seulement pour les points d'un ensemble appartenant au champ, comme une surface, une courbe. Seules les premières sont applicables, s'il s'agit de construire, au sens entendu jusqu'ici, une Géométrie de l'espace, du plan; les dernières, au point de vue où nous sommes placés, n'acquièrent de l'importance que s'il s'agit d'étudier la Géométrie sur une surface, une courbe données. La même distinction s'applique pour l'*analysis situs* dont nous allons bientôt nous occuper.

Toutefois, les recherches faites çà et là jusqu'ici ont essentiellement trait aux transformations de la deuxième sorte. Comme on ne s'y propose pas l'étude de la Géométrie sur la surface, ni la courbe, qu'il s'agit bien plus de trouver des criteriums pour que deux surfaces, deux courbes, puissent être transformées l'une dans l'autre, ces recherches échappent au domaine de celles que nous avons à considérer ici ([2]). Le schéma général exposé dans ce travail n'embrasse certes pas la totalité des recherches mathématiques : certaines voies seulement s'y trouvent réunies sous un même point de vue.

D'une Géométrie des transformations rationnelles telle qu'elle doit s'offrir quand on prend pour base les transformations de la première

---

([1]) [Tandis que, dans les exemples précédents, il s'agissait de groupes à un nombre limité de paramètres, nous arrivons maintenant à la considération des goupes dits *infinis*.]

([2]) [Elles se rattachent, autrement et de la façon la plus heureuse, à nos considérations, ce que je ne savais pas encore en 1872. Étant donnée une forme algébrique quelconque (courbe, surface, etc.), rapportons-la, en introduisant comme coordonnées les rapports

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p = du_1 : du_2 : \ldots : du_p,$$

où $u_1 u_2 \ldots u_p$ sont les intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe, à un espace d'ordre supérieur. Il n'y a plus qu'à prendre pour base des considérations relatives à cet espace le groupe des transformations linéaires homogènes des φ. *Voir* divers travaux de MM. Brill, Nœther et Weber, ainsi que mon récent Mémoire : *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*, dans le tome XXXVI des *Math. Annalen*.]

sorte, il n'existe jusqu'ici que les principes. Dans le champ du premier degré, sur la droite, ces transformations rationnelles sont identiques aux transformations linéaires, et ne donnent par suite rien de nouveau. Dans le plan on connaît, il est vrai, toutes les transformations rationnelles (transformations de Cremona); on sait qu'elles résultent de la composition de transformations quadratiques. On connaît encore des caractères invariants des courbes planes, leur genre, l'existence des modules; mais ces considérations ne sont pas encore vraiment développées en une Géométrie du plan au sens que nous entendons ici. Pour l'espace, toute la théorie ne fait encore que naître. On ne connaît jusqu'ici qu'un petit nombre de transformations rationnelles, et on les utilise pour rattacher par représentation des surfaces inconnues à des surfaces connues.

2. *L'analysis situs.* — Dans ce qu'on nomme l'*analysis situs*, on étudie l'invariance vis-à-vis de transformations qui résultent de la composition de transformations infiniment petites. Comme nous l'avons déjà dit, il faut encore ici distinguer si l'on doit considérer le champ total, par exemple l'espace, comme soumis à la transformation, ou seulement un ensemble qui en est détaché, c'est-à-dire une surface. Ce sont les transformations de la première sorte qui pourraient être prises pour fondement d'une Géométrie de l'espace. Leur groupe serait constitué tout à fait différemment de ceux considérés jusqu'ici. Comme il comprend toutes les transformations qui résultent de transformations ponctuelles, infiniment petites et supposées réelles, il se limite de lui-même, par origine, aux éléments réels de l'espace, et correspond au domaine de la fonction à définition arbitraire. On peut fort bien étendre ce groupe de transformations en l'adjoignant aux transformations homographiques réelles, qui modifient aussi les éléments à l'infini.

3. *Le groupe de toutes les transformations ponctuelles.* — Si, relativement à ce groupe, aucune surface ne possède de propriétés individuelles, puisque chacune d'elles peut être transformée en toute autre par les transformations du groupe, il existe cependant des éléments d'ordre plus élevé pour l'étude desquels le groupe peut être

avantageusement employé. Avec la manière d'entendre la Géométrie qui fait la base de ce travail, peu importe que ces éléments aient été considérés jusqu'ici moins comme éléments géométriques qu'uniquement comme éléments analytiques qui, fortuitement, trouvaient une application géométrique, et qu'en les étudiant on ait employé des méthodes (comme précisément des transformations ponctuelles arbitraires) à peine conçues seulement de nos jours comme transformations géométriques. A ces éléments analytiques appartiennent, en premier lieu, les expressions différentielles homogènes, puis les équations aux dérivées partielles. Il semble cependant, comme le montrera le paragraphe suivant, que, pour l'étude générale de ces dernières, le groupe de toutes les transformations de contact soit encore préférable.

La proposition fondamentale de la Géométrie qui a pour base le groupe de toutes les transformations ponctuelles est qu'*une telle transformation est toujours, pour une partie infiniment petite de l'espace, équivalente à une transformation linéaire.* Les développements de la Géométrie projective sont donc applicables à l'infiniment petit, quel que puisse d'ailleurs être le groupe pris pour base de traitement des multiplicités, et *c'est là un remarquable caractère de la méthode projective.*

Il a été question bien antérieurement du rapport qui existe entre les modes de traitement qui reposent sur des groupes se comprenant l'un l'autre; nous donnerons ici encore un exemple de la théorie générale du paragraphe II. Nous pouvons nous demander comment il faut concevoir, au point de vue de « l'ensemble des transformations ponctuelles », les propriétés projectives, et nous voulons faire ici abstraction des transformations par dualité, qui font proprement partie du groupe de la Géométrie projective. La question ne diffère pas de cette autre : par quelle condition le groupe des transformations linéaires est-il détaché de l'ensemble des transformations ponctuelles? Ce qui caractérise les premières, c'est qu'à tout plan correspond un plan. Elles sont celles des transformations ponctuelles qui ne changent pas l'ensemble des plans, ou, ce qui en est une conséquence, l'ensemble des droites. *De la Géométrie basée sur les transformations ponctuelles se déduit, par adjonction de l'ensemble des plans, la Géométrie projective, comme de* *la Géométrie projective, par adjonction du cercle imaginaire à l'infini, se déduit la Géométrie élémentaire.* En particulier, nous devons, au point de vue des transformations ponctuelles, concevoir la qualité d'une surface d'être algébrique et d'un certain ordre comme une relation invariante vis-à-vis de l'ensemble des plans. C'est ce qui devient entièrement manifeste, quand, avec *Grassmann*, on rattache la génération des éléments algébriques à leur construction au moyen de la règle.

§ IX. — Le groupe des transformations de contact.

Il y a déjà longtemps que l'on a considéré, dans des cas particuliers, des transformations de contact; Jacobi a même fait usage, dans des recherches analytiques, de la transformation de contact la plus générale. Cependant elles n'ont été mises au rang des conceptions géométriques les plus courantes que par de récents travaux de Lie (¹). Il n'est donc pas du tout inutile d'exposer ici clairement ce qu'est une transformation de contact, en nous limitant, comme toujours, à l'espace ponctuel à trois dimensions.

Par transformation de contact, il faut entendre, au point de vue analytique, toute transformation où les valeurs des variables x, y, z et les dérivées partielles $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, sont exprimées en fonction de quantités analogues x', y', z', p', q'. Il est évident qu'en général des surfaces qui se touchent sont par là transformées en surfaces qui se touchent, ce qui justifie le nom de *transformation de contact.* Si l'on part du point comme élément de l'espace, les transformations de contact se divisent en trois classes : celles qui, à la triple infinité de points, font correspondre de nouveau des points (ce sont les transformations ponctuelles que nous venons de considérer), celles qui les transforment en courbes, enfin celles qui les transforment en surfaces. Il ne faut pas considérer cette division comme essentielle, car, en fai-

(¹) *Voir* en particulier le travail déjà cité : *Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe* (*Math. Annalen*, t. V). Les développements donnés dans le texte relativement aux équations aux dérivées partielles sont essentiellement dus à des Communications orales de Lie. *Voir* sa Note : *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen* (*Göttinger Nachrichten*, octobre 1872).

sant usage d'autres éléments de l'espace en nombre triplement infini, comme les plans, on rencontre encore une division en trois groupes; mais elle ne coïncide pas avec la division qui s'obtient en partant des points.

Si l'on applique à un point toutes les transformations de contact, on obtient la totalité des points, des courbes et des surfaces. Il faut donc la totalité des points, des courbes et des surfaces, pour former un corps de notre groupe. On en peut conclure cette règle générale, qu'au sens des transformations de contact il est défectueux de traiter une question (comme, par exemple, la théorie des équations aux dérivées partielles que nous allons immédiatement étudier) en employant des coordonnées de point ou de plan, parce que justement alors les éléments de l'espace choisis pour base ne forment pas un corps.

Mais, si l'on veut s'en tenir aux méthodes habituelles, l'introduction, comme élément de l'espace, de tous les individus compris dans le corps en question, n'est pas praticable, car leur nombre est un nombre infini de fois infini. De là découle la nécessité d'introduire comme *élément de l'espace*, dans ces considérations, non le point, ni la courbe, ni la surface, mais bien l'*élément de surface*, c'est-à-dire le système de valeurs x, y, z, p, q. Par une transformation de contact quelconque, chaque élément de surface en devient un autre ; le quintuple infini d'éléments de surface forme donc un corps.

A ce point de vue, il faut concevoir le point, la courbe et la surface à la fois comme des agrégats d'éléments de surface, et comme des agrégats d'une double infinité de ces éléments. La surface est, en effet, enveloppée par ∞^2 éléments, un égal nombre sont tangents à une courbe, et c'est aussi le nombre de ceux qui passent par un point. Mais ces agrégats, doublement infinis, d'éléments ont encore une propriété caractéristique commune. Si, pour deux éléments de surface consécutifs x, y, z, p, q et $x+dx, y+dy, z+dz, p+dp, q+dq$, on a

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

nous les dirons *associés en position*. Alors le point, la courbe, la surface sont tous trois *des ensembles, doublement infinis, d'éléments dont chacun est associé en position avec ceux, en nombre simplement infini, qui* *lui sont voisins*. Le point, la courbe, la surface sont ainsi caractérisés d'une même façon, et c'est également ainsi qu'ils doivent être représentés analytiquement si l'on veut prendre pour base le groupe des transformations de contact.

L'association en position de deux éléments consécutifs est une relation invariante relativement à toute transformation de contact. Mais, réciproquement, on peut aussi définir les transformations de contact *comme les substitutions de cinq variables* x, y, z, p, q, *telles que la relation* $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ *soit transformée en elle-même*. Dans ces recherches, l'espace doit être ainsi regardé comme une multiplicité à cinq dimensions, et l'on a à étudier cette multiplicité, en prenant pour groupe fondamental l'ensemble des transformations des variables, qui laissent inaltérée une relation différentielle déterminée.

Les ensembles représentés par une ou plusieurs équations entre les variables, c'est-à-dire *les équations aux dérivées partielles du premier ordre et leurs systèmes*, s'offrent tout d'abord comme sujets d'étude. C'est une question capitale de savoir comment, des ensembles d'éléments qui satisfont aux équations données, on peut déduire des suites simplement, doublement infinies d'éléments, telles que chacun de leurs éléments soit associé en position avec le voisin. A une semblable question se ramène, par exemple, le problème de la résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On peut la formuler ainsi : déduire de la quadruple infinité d'éléments, qui satisfont à l'équation, tous les ensembles doublement infinis de la nature indiquée. En particulier, le problème de la solution complète prend, dès lors, cette forme précise : partager la quadruple infinité d'éléments qui satisfont à l'équation en une double infinité de tels ensembles.

Nous ne pouvons avoir ici l'intention de pousser plus loin ces considérations sur les équations aux dérivées partielles; je renvoie là-dessus aux travaux de Lie, que nous avons cités. Remarquons seulement encore qu'au point de vue des transformations de contact, une équation aux dérivées partielles du premier ordre n'a aucun invariant, que chacune d'elles peut être transformée en toute autre, que par conséquent, en particulier, les équations linéaires ne se distinguent plus autrement des autres. Ce n'est que quand on revient au point de vue des transformations ponctuelles que se présentent des distinctions.

Les groupes des transformations de contact, des transformations ponctuelles, enfin des transformations projectives, peuvent être caractérisés d'une façon commune que je ne peux passer ici sous silence (¹). Nous avons déjà défini les transformations de contact comme celles qui conservent l'association en position de deux éléments consécutifs. Les transformations ponctuelles ont, au contraire, la propriété caractéristique de transformer des éléments de droite consécutifs associés en position en d'autres de même nature. Enfin les transformations homographiques et par dualité conservent l'association en position de deux éléments connexes. Par élément connexe j'entends l'ensemble d'un élément de surface et d'un élément de droite en lui contenu; des éléments connexes consécutifs sont dits associés en position quand non seulement le point, mais encore l'élément de droite de l'un est contenu dans l'élément de surface de l'autre. La dénomination (d'ailleurs provisoire) d'*élément connexe* se rattache aux êtres nouvellement introduits en Géométrie par *Clebsch* (²), qui sont définis par une équation contenant à la fois des coordonnées de point, de plan et de droite, et dont l'analogue dans le plan a reçu de *Clebsch* le nom de connexe.

§ X. — Sur les multiplicités à un nombre quelconque de dimensions.

Nous avons déjà plusieurs fois fait remarquer qu'en nous rattachant, dans ce que nous avons dit jusqu'ici, aux notions de l'espace, nous ne faisons qu'acquiescer au désir de faciliter les développements des notions abstraites en les appuyant sur des exemples clairs. Au fond, ces considérations sont indépendantes de la représentation sensible, et appartiennent au domaine général d'études mathématiques que l'on appelle la *théorie des multiplicités* à plusieurs dimensions ou brièvement (d'après Grassmann) la *théorie de l'étendue* (*Ausdehnungslehre*). La manière dont il faut procéder pour rapporter ce que nous avons dit de l'espace à la pure notion de multiplicité se conçoit d'elle-même.

(¹) Je dois ces définitions à une remarque de Lie.

(²) *Gött. Abhandlungen*, t. XVII; 1872 : *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, et aussi *Gött. Nachrichten*, n° 22; 1872 : *Ueber ein Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene*.

Remarquons seulement, encore une fois, que, dans l'étude abstraite, nous avons, vis-à-vis de la Géométrie, l'avantage de pouvoir choisir entièrement le groupe de transformations à prendre pour base, tandis qu'en Géométrie un groupe complètement déterminé, le groupe principal, était donné *a priori*.

Nous n'aborderons plus ici, et encore très légèrement, que les trois méthodes de traitement suivantes :

I. *Méthode de traitement projective ou Algèbre moderne* (*Théorie des invariants*). — Son groupe se compose de l'ensemble des transformations linéaires et par dualité des variables employées pour représenter l'élément de la multiplicité : c'est la généralisation de la Géométrie projective. Nous avons déjà fait remarquer comment cette méthode trouve emploi dans la discussion de l'infiniment petit d'une multiplicité ayant une dimension de plus. Elle comprend les deux méthodes de traitement que nous avons encore à indiquer, en ce sens que son groupe comprend les groupes qui sont à prendre pour bases dans celles-ci.

II. *La multiplicité à courbure constante.* — Dans *Riemann* la notion d'une telle multiplicité résulte de la notion plus générale d'une multiplicité dans laquelle est donnée une expression différentielle des variables. Le groupe s'y compose de l'ensemble des transformations des variables qui laissent inaltérée l'expression donnée. On parvient d'une autre façon à la notion d'une multiplicité à courbure constante quand on établit, au sens projectif, une détermination métrique basée sur une équation quadratique donnée entre les variables. Cette méthode, à l'encontre de celle de Riemann, permet cette généralisation que les variables peuvent être supposés complexes ; on peut ensuite limiter la variabilité du champ réel. C'est à cette branche qu'appartient la suite étendue de recherches que nous avons abordées dans les paragraphes V, VI, VII.

III. *La multiplicité plane.* — Riemann désigne par multiplicité plane la multiplicité à courbure constante nulle. Sa théorie est la généralisation immédiate de la Géométrie élémentaire. Son groupe peut, comme le groupe principal en Géométrie, être détaché du groupe projectif, en maintenant fixe une figure représentée par deux équations, l'une linéaire et l'autre quadratique. Si l'on veut s'adapter à la forme dans laquelle la théorie est habituellement présentée, on doit distinguer entre le réel et l'imaginaire. La Géométrie élémentaire même figure au premier rang dans cette théorie, puis viennent les généralisations récemment développées de la théorie ordinaire de la courbure, etc.

Remarques finales.

Pour finir nous placerons deux remarques qui sont en relation intime avec ce que nous avons dit jusqu'ici : la première concerne l'algorithme à employer pour la représentation des notions développées jusqu'ici; dans la seconde nous indiquerons quelques problèmes qu'il semblerait important et fécond de traiter d'après les vues que nous avons données.

On a fréquemment fait à la Géométrie analytique le reproche de mettre en avant, par l'introduction du système de coordonnées, des éléments arbitraires, et ce reproche atteint également toute manière de traiter des multiplicités dans lesquelles l'élément est caractérisé par les valeurs de variables. Si ce reproche n'était que trop justifié par la manière défectueuse avec laquelle on maniait, surtout autrefois, la méthode des coordonnées, il s'évanouit toutefois dès que l'on emploie rationnellement la méthode. Les expressions analytiques qui peuvent se présenter dans l'étude d'une multiplicité au sens d'un groupe doivent être, en raison de leur signification, indépendantes du système de coordonnées, en tant que celui-ci reste arbitraire; et il s'agit simplement de mettre aussi cette indépendance en évidence *dans les formules*. L'Algèbre moderne montre que cela est possible et comment la chose se fait; la notion d'invariant dont il s'agit ici y est en effet mise en relief de la façon la plus évidente. Elle a une loi de formation générale et parfaite des expressions invariantes et s'astreint à n'opérer qu'avec celles-ci. C'est ce qu'il faut que fournisse encore le traitement analytique quand des groupes autres que le groupe projectif sont pris pour base (1). Il faut bien, en effet, que l'algorithme s'adapte à ce que l'on désire, que l'on en fasse emploi comme d'une expression

(1) Par exemple, pour le groupe des rotations de l'espace à trois dimensions autour d'un point fixe, un tel algorithme est donné par les quaternions.

claire et précise de la conception, ou que l'on veuille l'utiliser pour pénétrer aisément des champs non encore explorés.

On est conduit à poser les problèmes dont nous voulions encore parler par une comparaison entre les idées que nous avons exposées et ce que l'on nomme la *théorie des équations de Galois*.

Dans la théorie de Galois comme ici, tout l'intérêt réside dans les groupes de transformations. Mais les objets auxquels se rapportent les transformations sont bien différents : là on a affaire à un nombre limité d'éléments distincts, ici à un nombre indéfini d'éléments d'un ensemble continu; mais on peut, par l'identité de la notion de groupe, pousser plus loin la comparaison ([1]), et nous l'indiquerons ici d'autant plus volontiers qu'ainsi se trouve caractérisée la position qu'il faut attribuer à certaines recherches commencées, par Lie et moi ([2]), dans le sens des vues ici développées.

Dans la théorie de Galois telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de *Serret* ou dans le *Traité des substitutions* de *C. Jordan*, ce qui fait proprement l'objet des recherches, c'est la théorie même des groupes ou des substitutions; la théorie des équations en découle comme application. Par analogie, nous voudrions une *théorie des transformations*, une théorie des groupes qui peuvent être engendrés par des transformations d'une nature donnée. Les notions de commutativité, de similitude, etc., trouveraient emploi comme dans la théorie des substitutions. Le traitement d'une multiplicité tiré de la considération d'un groupe fondamental de transformations apparaîtrait comme une application de la théorie des transformations.

Dans la théorie des équations ce sont tout d'abord les fonctions symétriques des coefficients qui offrent de l'intérêt, mais ensuite ce sont les expressions qui demeurent inaltérées, sinon par toutes les permutations des racines, au moins par un grand nombre d'entre elles. Dans le traitement d'une multiplicité avec un groupe pris comme fon-

([1]) Je rappellerai ici que Grassmann, déjà dans l'introduction de la première édition de son *Ausdehnungslehre* (1844), a établi un parallèle entre l'Analyse combinatoire et la *Théorie de l'étendue* (*Ausdehnungslehre*).

([2]) *Voir* notre Mémoire : *Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen* (*Math. Annalen*, t. IV).

damental, nous voudrions d'abord, par analogie, déterminer les corps (§ VI), les figures qui demeurent inaltérées par toutes les transformations du groupe; mais il est des figures qui n'admettent pas toutes les transformations du groupe, mais seulement quelques-unes d'entre elles, et ces figures, au sens du traitement basé sur le groupe, sont particulièrement intéressantes, elles jouissent de propriétés remarquables. C'est ainsi, par exemple, qu'au sens de la Géométrie ordinaire, on distingue des corps symétriques et réguliers, des surfaces de révolution et hélicoïdales. Si l'on se place au point de vue de la Géométrie projective et que l'on demande en particulier que les transformations qui ramènent les figures à elles-mêmes soient permutables, on arrive aux figures considérées par Lie et par moi dans le Mémoire cité, et au problème général qui y est posé au § 6. Dans les § 1, 3 se trouve la détermination de tous les groupes renfermant une infinité de transformations linéaires, permutables dans le plan; c'est une partie de la théorie générale des transformations dont nous venons de parler [1].

---

(1) Je dois me refuser ici de montrer combien fructueuse est, pour la Théorie des équations différentielles, la considération des transformations infiniment petites. Au § 7 du travail cité, Lie et moi avons montré que : des équations différentielles ordinaires qui admettent les mêmes transformations infiniment petites présentent les mêmes difficultés d'intégration. Lie, en différents endroits et, en particulier, dans le Mémoire cité plus haut (*Math. Annalen,* t. V), a fait voir, par plusieurs exemples, comment ces considérations doivent être appliquées pour les équations aux dérivées partielles (*voir* aussi en particulier des Communications à l'Académie de Christiania, mai 1872).

[Je puis, aujourd'hui, indiquer ce fait que les deux problèmes mentionnés dans le texte ont précisément continué de diriger une grande partie des travaux ultérieurs de Lie et de moi-même. En ce qui concerne Lie, nous avons à citer surtout sa *Théorie des groupes continus de transformations,* dont l'exposition systématique fait jusqu'ici l'objet de deux Volumes (Leipzig, t. I, 1888; t. II, 1890). Parmi mes recherches postérieures au présent écrit, je puis indiquer celles sur les corps réguliers, sur les fonctions modulaires elliptiques, et, en général, sur les fonctions uniformes qui admettent des transformations linéaires. Déjà, en 1884, j'ai exposé les premières dans un Ouvrage spécial : *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (Leipzig); depuis peu a paru le premier Volume d'une exposition (pour laquelle M. Fricke m'a prêté une aide essentielle) de la *Théorie des fonctions modulaires elliptiques* (Leipzig, 1890).]

NOTES.

I. — Sur l'opposition, dans la Géométrie moderne, des méthodes synthétique et analytique.

Actuellement, il n'y a plus à regarder comme essentielle la différence entre les Géométries synthétique et analytique modernes, car les matières étudiées et le mode de discussion y sont peu à peu devenus entièrement semblables. Aussi avons-nous choisi le mot *Géométrie projective*, pour les désigner l'une et l'autre dans le texte. Si la méthode synthétique procède davantage par l'intuition de l'espace, donnant ainsi à ses premières théories élémentaires un attrait particulier, le champ d'une telle intuition n'est pas pour cela fermé à la méthode analytique, et l'on peut concevoir les formules de la Géométrie analytique comme une expression claire et précise des relations géométriques. D'un autre côté, il ne faut pas mépriser, pour les recherches ultérieures, le profit que procure, en devançant en quelque sorte la pensée, un algorithme bien approprié. Il ne faut toutefois pas se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuitivement évidente ; découvrir au moyen de l'Analyse, c'est bien faire un pas très important, mais ce n'est faire que le premier pas.

II. — Scission de la Géométrie moderne en disciplines.

Si, par exemple, on observe comme le physicien mathématicien repousse généralement l'avantage qu'il retirerait, dans bien des cas, d'une intuition projective même peu développée ; comme, d'un autre côté, celui qui cultive la Géométrie projective aborde peu la riche mine de vérités mathématiques d'où est née la théorie de la courbure des surfaces, on est forcé de regarder l'état actuel de l'étude de la Géométrie comme bien imparfait, et, suivant toute apparence, comme transitoire.

III. — Sur l'importance de l'intuition de l'espace.

Quand, dans le texte, nous parlons de l'intuition de l'espace comme de quelque chose d'accessoire, nous le faisons en raison de la nature purement mathématique des considérations à formuler : pour celles-ci elle n'a que la valeur d'une méthode qui rend les choses sensibles, valeur qui, d'ailleurs, au point de vue pédagogique, doit être estimée d'un grand prix. C'est ainsi qu'un modèle géométrique est, à ce point de vue, des plus intéressants et des plus instructifs.

Mais c'est tout autre chose s'il s'agit de l'importance de l'intuition de l'espace en général. Je la considère comme subsistant par elle-même. Il existe une Géométrie proprement dite qui ne peut pas, comme les recherches qui nous ont occupé, n'être qu'une forme sensible de considérations abstraites. Il y faut concevoir les figures de l'espace dans la pleine vérité de leur forme et (ce qui constitue le côté mathématique) apercevoir leurs relations comme des conséquences évidentes des postulats de l'intuition de l'espace. Pour cette Géométrie, un modèle, qu'il soit exécuté et examiné ou seulement figuré avec force, n'est pas un moyen pour atteindre au but, mais la chose elle-même.

Quand nous plaçons ainsi, avec une existence propre, la Géométrie à côté des Mathématiques pures et sans qu'elle en dépende, nous ne faisons rien moins que quelque chose de neuf. Il est toutefois désirable de remettre encore une fois expressément ce point en évidence, puisque les recherches récentes le perdent à peu près complètement de vue. C'est également ainsi que, réciproquement, les méthodes d'investigation nouvelles ont été rarement appliquées, quand elles auraient pu l'être, à l'étude des rapports de forme des êtres de l'espace, et cependant, dans cette voie, il semble qu'elles soient particulièrement fécondes.

IV. — Sur les multiplicités à un nombre quelconque de dimensions.

Que l'espace considéré comme lieu de points n'ait que trois dimensions, c'est ce qui, au point de vue mathématique, n'a pas besoin d'être discuté; mais on ne saurait davantage, du même point de vue, empêcher qui que ce soit d'affirmer qu'il en a quatre ou un nombre quelconque, mais que nous n'en pouvons percevoir que trois. La théorie des multiplicités à plusieurs dimensions, telle qu'elle se dégage de plus en plus des recherches mathématiques modernes est, par nature, tout à fait indépendante d'une telle affirmation. Il s'y est cependant établi une façon de parler qui, sûrement, découle de cette idée. Au lieu d'éléments d'un ensemble continu, on parle des points d'un espace supérieur, etc. En elle-même, cette manière de s'exprimer a beaucoup de bon parce que, en rappelant les conceptions géométriques, elle facilite l'intelligence. Mais elle a eu cette fâcheuse conséquence que, pour beaucoup, les recherches sur les multiplicités à plusieurs dimensions sont regardées comme ne faisant qu'un avec les idées que nous venons de rappeler sur la nature de l'espace. Rien n'est moins fondé que cette croyance. Si ces idées étaient justes, ces recherches mathématiques trouveraient immédiatement une application géométrique; mais leur valeur comme leur but, pleinement indépendants d'elles, se trouvent dans leur nature purement mathématique.

Tout autre est la façon indiquée par *Plücker* de considérer le véritable espace comme une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions en introduisant comme élément (*voir* § V du texte) une figure (courbe, surface, etc.) qui dépend d'un nombre quelconque de paramètres.

C'est dans l'*Ausdehnungslehre* de *Grassmann* (1844) que se trouve développée pour la première fois cette manière de voir, où l'on considère l'élément d'une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions comme l'analogue du point de l'espace. *Grassmann* ne se préoccupe nullement des idées que nous avons rappelées sur la nature de l'espace; ces idées remontent à des remarques faites en passant par Gauss et se sont répandues à la suite des recherches de *Riemann* sur les multiplicités à plusieurs dimensions, recherches auxquelles elles se trouvent mêlées.

Les deux manières de voir, celle de *Grassmann* comme celle de *Plücker*, ont leurs avantages particuliers; on les emploie toutes deux, tantôt l'une, tantôt l'autre, avec profit.

V. — Sur ce que l'on nomme la Géométrie non euclidienne.

Comme l'ont montré de récentes recherches, la Géométrie métrique projective dont il est question dans le texte coïncide essentiellement avec la Géométrie métrique que l'on obtient quand on rejette le postulatum des parallèles et qui, sous le nom de *Géométrie non euclidienne,* est actuellement l'objet de fréquents débats et discussions. Si, dans ce qui précède, nous n'avons pas, en général, employé cette locution, c'est pour une raison qui se rattache aux considérations de la Note précédente. On associe au nom de Géométrie non euclidienne une foule d'idées qui n'ont rien de mathématique, acceptées d'un côté avec autant d'enthousiasme qu'elles provoquent de répulsion de l'autre, avec lesquelles, dans tous les cas, nos considérations exclusivement mathématiques n'ont absolument rien affaire. Par les considérations qui suivent nous avons voulu apporter quelque éclaircissement à cette distinction.

Les recherches en question sur la théorie des parallèles et leurs développements successifs ont par deux côtés une importance mathématique précise.

Elles montrent d'abord, et l'on peut considérer la chose comme définitivement tranchée, que l'axiome des parallèles n'est pas une conséquence mathématique des axiomes généralement placés avant lui, mais qu'il est l'expression d'un fait intuitif essentiellement nouveau laissé intact par les recherches qui le précèdent. Une semblable discussion pourrait et devrait être faite, même ailleurs qu'en Géométrie, relativement à chaque axiome; on y gagnerait en vues sur les situations respectives de ceux-ci.

En second lieu, ces recherches nous ont donné une notion mathématique précieuse, celle d'une multiplicité à courbure constante. Elle est reliée, comme nous l'avons déjà remarqué et plus amplement développé dans le § X, de la façon la plus étroite, avec la détermination métrique projective développée indépendamment de toute théorie des parallèles. Si, en elle-même, l'étude de cette détermination métrique offre un grand intérêt mathématique et permet de nombreuses applications, elle comprend encore, comme cas particulier (cas limite), la détermination métrique donnée dans la Géométrie et apprend à la considérer d'un point de vue plus élevé.

Absolument indépendante de ces considérations est la question de savoir sur quoi repose l'axiome des parallèles, s'il doit être considéré comme donné d'une façon absolue, ce que veulent les uns, ou comme établi seulement approximativement par l'expérience, ce que prétendent les autres. S'il y avait des raisons d'accepter cette dernière façon de voir, les recherches mathématiques en question nous montreraient comment doit alors être construite une Géométrie plus exacte. Mais c'est là évidemment une question philosophique qui atteint aux principes les plus généraux de notre entendement. Elle n'intéresse pas le mathématicien *comme tel*, et il peut souhaiter que ses recherches ne soient pas considérées comme dépendant de la réponse qui, d'un côté ou de l'autre, peut lui être donnée.

VI. — La Géométrie de l'espace réglé comme étude d'une multiplicité à courbure constante.

En rattachant l'une à l'autre la Géométrie de l'espace réglé et la détermination métrique projective dans une multiplicité à cinq dimensions, nous devons faire attention à ce fait que les droites ne nous offrent (au sens de la détermination métrique) que les éléments à l'infini de la multiplicité. Il devient ainsi nécessaire d'examiner quelle est la valeur d'une détermination métrique projective pour ses éléments à l'infini; nous allons développer ici cette question pour écarter les difficultés qui s'opposent à la conception de la Géométrie de l'espace réglé comme Géométrie métrique. Nous rattachons ces développements à l'exemple intuitif qu'offre la détermination métrique projective basée sur une surface du second degré.

Deux points pris arbitrairement dans l'espace ont, relativement à la surface, un invariant absolu : le rapport anharmonique qu'ils forment avec les deux points d'intersection de la droite qui les joint et de la surface; mais, si les deux points viennent à se placer sur la surface, le rapport anharmonique tend vers zéro indépendamment de la position des points, excepté dans le cas où les deux points viennent se placer sur une génératrice, auquel cas il devient indéterminé; c'est l'unique cas particulier auquel donne lieu leur position relative s'ils ne coïncident pas; nous avons ainsi ce théorème :

La détermination métrique projective que l'on peut baser dans l'espace sur une surface du second degré ne fournit aucune détermination métrique pour la Géométrie sur cette surface.

A ceci se rattache ce fait que l'on peut, par des transformations linéaires de la surface en elle-même, amener trois quelconques de ses points à coïncider avec trois autres ([1]).

Pour avoir sur la surface elle-même une détermination métrique, il faut restreindre le groupe des transformations, et l'on y parvient en tenant fixe un point quelconque de l'espace (ou son plan polaire). Supposons d'abord que le point ne soit pas sur la surface. De ce point on la projette alors sur un plan, ce qui donne une conique comme courbe de contour apparent. Sur cette conique on base, dans le plan, une détermination métrique projective que l'on reporte ensuite sur la surface. C'est une détermination métrique proprement dite, à courbure constante, et l'on a ainsi ce théorème :

Une détermination métrique à courbure constante s'obtient sur la surface dès que l'on tient fixe un point qui n'est pas sur la surface.

On trouve de même que :

En prenant pour point fixe un point de la surface elle-même, on obtient sur celle-ci une détermination métrique à courbure nulle.

Pour toutes ces déterminations métriques sur la surface, les génératrices sont des lignes de longueur nulle. Les expressions de l'élément d'arc de la surface ne diffèrent donc, dans les différentes déterminations, que par un facteur constant. Il n'y a pas sur la surface un élément d'arc absolu, mais on peut très bien parler de l'angle que forment sur la surface deux directions.

Maintenant tous ces théorèmes et toutes ces considérations peuvent être de suite appliqués pour la Géométrie de l'espace réglé. Pour l'espace réglé même il n'existe *a priori* aucune détermination métrique proprement dite. On n'en obtient une que quand on tient fixe un complexe linéaire, et alors elle a une courbure constante ou nulle suivant que le complexe est général ou particu-

---

([1]) Ces relations sont altérées dans la Géométrie métrique ordinaire; pour deux points à l'infini, il y a assurément un invariant absolu. La contradiction que l'on pourrait ainsi rencontrer en comptant les transformations linéaires qu'admet la surface à l'infini se lève en considérant que les translations et les transformations avec similitude, qui sont au nombre de ces transformations, n'altèrent aucunement l'infini.

lier (une droite). Au choix de ce complexe est aussi liée l'existence d'un élément d'arc absolu. Quel que soit ce choix, la distance de deux droites infiniment voisines qui se coupent est nulle, et l'on peut aussi parler de l'angle que forment entre elles deux droites infiniment voisines d'une droite donnée (1).

VII. — Sur l'interprétation des formes binaires.

Nous montrerons ici quelle représentation simple on peut, au moyen de l'interprétation de $x+iy$ sur la sphère, obtenir pour les systèmes de formes qui se rattachent à la forme binaire cubique et à la forme binaire biquadratique.

Une forme binaire cubique f a un covariant cubique Q, un quadratique Δ et un invariant R (2). Avec f et Q se forme toute une suite de covariants du sixième degré

$$Q^2+\lambda R f^2,$$

parmi lesquels figure également Δ^3. On peut démontrer (3) que chaque covariant de la forme cubique se décompose en de tels systèmes de six points. λ pouvant prendre des valeurs complexes, il y en a une double infinité.

L'ensemble de formes ainsi défini peut être représenté sur la sphère de la façon suivante (4) : par une transformation linéaire convenable, amenons les trois points représentés par f en trois points équidistants sur un grand cercle. Ce grand cercle peut être pris pour équateur; les longitudes des trois points f situés sur lui sont 0°, 120°, 240°. Q est alors représenté par les points de l'équateur dont les longitudes sont 60°, 180°, 300°, Δ l'est par les deux pôles. Chaque forme $Q^2+\lambda R f^2$ est représentée par six points dont la latitude et la longitude sont contenues dans le tableau suivant, où α et β désignent des nombres quelconques

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|}
\alpha & \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\
\beta & 120^\circ+\beta & 240^\circ+\beta & -\beta & 120^\circ-\beta & 240^\circ-\beta
\end{array}.$$

Il est intéressant de voir, en examinant la succession de ces systèmes de

(1) *Voir* le Mémoire : *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* (*Math. Annalen*, t. V, p. 271).

(2) *Voir* les Chapitres de Clebsch concernant la question : *Theorie der binären Formen*.

(3) Par la considération des transformations linéaires de f en elle-même. Voir *Math. Ann.*, IV, p. 352.

[(4) *Voir* aussi Beltrami : *Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche* (*Memorie Acc. Bologna*; 1870).]

points sur la sphère, comment s'en déduisent f et Q comptés doubles, et Δ compté triple.

Une forme biquadrique a un covariant H aussi biquadratique, un covariant du sixième degré T, et deux invariants i et j. L'ensemble de formes biquadratiques $i\mathrm{H} + \lambda jf$, qui correspondent toutes au même T, est particulièrement remarquable; à cet ensemble appartiennent les trois facteurs quadratiques en lesquels se peut décomposer T, chacun d'eux étant compté double.

Traçons maintenant, par le centre de la sphère, trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Les six points d'intersection avec la sphère figurent la forme T. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la sphère, les quatre points qui correspondent à une biquadratique $i\mathrm{H} + \lambda jf$ sont donnés par le tableau

$$\begin{array}{rrr} x, & y, & z, \\ x, & -\ y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -\ y, & z. \end{array}$$

Ces quatre points sont toujours les sommets d'un tétraèdre symétrique dont les côtés opposés sont partagés en deux parties égales par les axes du système des coordonnées; le rôle que joue T, comme résolvante de $i\mathrm{H} + \lambda jf$, dans la théorie des équations biquadratiques est ainsi mis en évidence.