ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FELIX KLEIN

Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 87-102
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__87_0>

CONSIDÉRATIONS COMPARATIVES

SUR LES

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES MODERNES,

PAR M. FÉLIX KLEIN (1),

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GŒTTINGUE.

Programme publié à l'occasion de l'entrée à la Faculté de Philosophie et au Sénat de l'Université d'Erlangen, en 1872.

TRADUCTION DE M. H. PADÉ.

Parmi les travaux effectués depuis cinquante ans dans le domaine de la Géométrie, le développement de la Géométrie projective occupe la première place (*voir* Note I). Si, au début, il a pu sembler que les relations dites *métriques* ne pussent lui être accessibles, parce qu'elles ne sont pas projectives, on a récemment appris à les concevoir également au point de vue projectif, en sorte que la méthode projective

---

(1) Après l'apparition, il y a à peu près un an, dans les *Annali di Matematica*, d'une traduction italienne de mon programme d'Erlangen, j'ai accepté d'autant plus volontiers la proposition de M. Padé d'en publier aussi une traduction française que, actuellement, la théorie des groupes semble, plus que jamais, occuper en France l'attention, et que, par suite, le contenu de mon programme y excitera peut-être quelque intérêt. Dans la traduction italienne, j'avais apporté au texte un petit nombre de modifications et ajouté quelques notes rectificatives; elles sont passées ici sans modification, et ont été également mises en évidence dans le texte au moyen de crochets [ ]. Des travaux postérieurs, je n'en ai cité aucun, quelque près qu'ils touchassent le sujet; c'est qu'un compte rendu systématique des travaux parus depuis 1872 est une tâche de longue haleine, qui ne me semble pas réalisable sans un remaniement complet et détaillé des idées émises dans mon programme; je puis espérer l'accomplir dans un avenir plus éloigné. F. KLEIN.

embrasse maintenant la Géométrie tout entière. Les propriétés métriques n'y apparaissent toutefois plus comme des propriétés intrinsèques des êtres de l'espace, mais bien comme des relations de ceux-ci avec un élément fondamental, le cercle imaginaire à l'infini.

Si l'on compare les notions de la Géométrie élémentaire à cette manière, peu à peu acquise, de considérer les êtres de l'espace, on est conduit à rechercher un principe général d'après lequel on puisse édifier les deux méthodes. Cette question paraît d'autant plus importante que, à côté de la Géométrie élémentaire et de la Géométrie projective, prennent place d'autres méthodes, assurément moins développées, auxquelles il faut accorder le même droit à une existence propre. Ainsi, la Géométrie des rayons vecteurs réciproques, la Géométrie des transformations rationnelles, etc., géométries qui, dans ce qui suit, seront encore mentionnées et exposées.

En entreprenant ici l'établissement d'un tel principe, nous ne développons assurément aucune pensée particulièrement neuve : nous ne faisons que donner une expression claire et nette à ce que beaucoup ont pensé d'une façon plus ou moins précise. Toutefois, la publication de considérations destinées à établir un tel lien a paru d'autant plus justifiée que la Géométrie, bien qu'elle soit une par essence, ne s'est que trop scindée, en raison du rapide développement qu'elle a pris dans ces derniers temps, en des disciplines presque séparées (*voir* Note II), dont chacune continue de se développer presque indépendamment des autres. Nous avons encore eu l'intention particulière d'exposer les méthodes et les points de vue que Lie et moi avons développés dans de récents travaux. Malgré la diversité de leurs objets, ces travaux se sont rencontrés dans la manière générale ici exposée de considérer les choses; par suite, il était en quelque sorte nécessaire de discuter également celle-ci, pour les caractériser quant à leurs objets et à leurs tendances.

Si jusqu'ici nous n'avons parlé que de recherches géométriques, il faut comprendre avec elles celles relatives aux multiplicités à un nombre quelconque de dimensions, issues de la Géométrie quand on fait abstraction des figures qui, au point de vue purement mathématique, ne sont nullement essentielles (*voir* Notes III et IV). L'étude des multiplicités comprend tout autant de genres différents que celle de la Géométrie, et il y a lieu, comme pour celle-ci, de mettre en évidence ce qu'ont de commun et de différent des recherches entreprises indépendamment l'une de l'autre. Au point de vue abstrait, il n'eût été besoin, dans ce qui suit, que de parler de multiplicités à plusieurs dimensions; mais, en rattachant l'exposition aux notions plus familières de l'espace, elle devient plus simple et plus intelligible. En partant de la considération des êtres géométriques et en développant sur eux, comme exemple, les idées générales, nous suivons la voie qu'a prise la Science dans son développement et qu'il est le plus profitable d'adopter pour base de notre exposition.

Une indication préliminaire du contenu de ce qui suit n'est pas possible ici, car il ne peut guère être ramené à une forme plus concise (1); les titres des paragraphes donneront la marche générale des idées. J'ai ajouté à la fin une série de Notes, dans lesquelles j'ai développé davantage des points particuliers quand cela m'a paru utile à l'exposition générale du texte, ou bien je me suis efforcé de séparer le point de vue mathématique abstrait, qui est celui adopté pour les considérations du texte, de points de vue qui lui sont associés.

§ I. — Groupes de transformations de l'espace. Groupe principal. Problème général.

Des notions nécessaires pour les considérations qui vont suivre, la plus essentielle est celle de *groupe* de transformations de l'espace.

La composition d'un nombre quelconque de transformations de l'espace (2) redonne toujours une telle transformation. Supposons maintenant qu'un ensemble donné de transformations ait la propriété que

(1) Cette concision de la forme est un défaut de notre exposition, et il y a lieu de craindre qu'il n'en rende l'intelligence sensiblement plus pénible. Je n'aurais pu toutefois y remédier que par une exposition beaucoup plus étendue où auraient été développées en détail les théories particulières qui ne sont ici que touchées.

(2) Nous entendons que les transformations sont toujours appliquées à la totalité des éléments de l'espace, et parlons par suite purement et simplement de transformations de l'espace. Les transformations, comme, par exemple, celles par dualité, peuvent introduire, au lieu de points, des éléments nouveaux. Dans le texte, ce cas ne se distingue pas des autres.

toute transformation résultant de la composition d'un nombre quelconque d'entre elles appartienne aussi à l'ensemble, il constitue ce que l'on nomme un *groupe de transformations* (1), (2).

L'ensemble des déplacements (chaque déplacement étant considéré comme une opération effectuée sur la totalité de l'espace) offre l'exemple d'un groupe de transformations. Un groupe qui y est contenu est formé, par exemple, par les rotations autour d'un point (3). Un groupe qui, au contraire, le contient est formé par l'ensemble des transformations homographiques. Par contre, l'ensemble des transformations dualistiques ne forme pas de groupe, car deux telles transformations redonnent, quand on les compose, une transformation homographique; mais on obtient de nouveau un groupe en associant les transformations dualistiques et homographiques (4).

Il y a des transformations de l'espace qui n'altèrent en rien les propriétés géométriques des figures. Par nature, ces propriétés sont, en effet, indépendantes de la situation occupée dans l'espace par la figure considérée, de sa grandeur absolue, et enfin aussi du sens (5) dans lequel ses parties sont disposées. Les déplacements de l'espace, ses transformations avec similitude et celles par symétrie n'altèrent donc pas les propriétés des figures, non plus que les transformations composées avec les précédentes. Nous appellerons *groupe principal* de trans-

---

(1) [Cette définition a encore besoin d'un complément que voici. Il est implicitement supposé, dans les groupes du texte, que toute opération qui y figure est accompagnée de l'opération inverse; mais, dans le cas où il y a une infinité d'opérations, ceci n'est nullement une conséquence de la notion même de groupe; c'est donc une hypothèse qui doit être expressément adjointe à la définition du groupe, telle qu'elle est donnée dans le texte.]

(2) La notion et la dénomination sont empruntées à la théorie des substitutions où l'on traite, non des transformations d'un champ continu, mais des permutations d'un nombre fini de grandeurs discrètes.

(3) Camille Jordan a déterminé tous les groupes contenus dans le groupe des déplacements : *Sur les groupes des mouvements* (*Annali di Matematica*, t. II).

(4) Il n'est d'ailleurs nullement nécessaire, bien qu'il en soit toujours ainsi pour tous les groupes que nous avons à mentionner, que les transformations d'un groupe s'y présentent en successions continues. Par exemple, les déplacements en nombre limité qui amènent un corps régulier à se recouvrir forment un groupe; de même ceux, en nombre illimité, qui amènent une sinusoïde à se superposer.

(5) Par sens, il faut entendre ici cette propriété de l'ordre par laquelle une figure se distingue de sa symétrique (image réfléchie). C'est ainsi que, par le sens, une hélice dextrogyre se distingue d'une hélice lévogyre.

formations de l'espace l'ensemble de toutes ces transformations [1]; *les propriétés géométriques ne sont pas altérées par les transformations du groupe principal.* La réciproque est également vraie : *les propriétés géométriques sont caractérisées par leur invariance relativement aux transformations du groupe principal.* Si l'on considère, en effet, un instant l'espace comme ne pouvant se déplacer, etc., comme une multiplicité fixe, chaque figure possède une individualité propre; des propriétés qu'elle possède comme individu, celles-là seules sont proprement géométriques que les transformations du groupe principal n'altèrent pas. Cette preuve, formulée ici un peu vaguement, se dégagera plus nettement par la suite de l'exposition.

Faisons maintenant abstraction de la figure matérielle qui, au point de vue mathématique, n'est pas essentielle, et ne voyons plus dans l'espace qu'une multiplicité à plusieurs dimensions, par exemple, en nous en tenant à la représentation habituelle du point comme élément de l'espace, une multiplicité à trois dimensions. Par analogie avec les transformations de l'espace, nous pouvons parler des transformations de la multiplicité; elles forment aussi *des groupes*. Mais il n'y a plus, comme dans l'espace, un groupe qui se distingue des autres par sa signification; un groupe quelconque n'est ni plus ni moins que tout autre. Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici :

Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.

Si l'on adopte la façon actuelle de parler dont, il est vrai, on ne se sert que pour un groupe déterminé, celui de transformations linéaires, on peut encore s'exprimer ainsi :

On donne une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe.

Tel est le problème général qui embrasse non seulement la Géomé-

---

[1] Par définition, ces transformations forment nécessairement un groupe.

trie ordinaire, mais aussi les méthodes géométriques modernes que nous avons à passer en revue et les différentes façons d'étudier les multiplicités à un nombre quelconque de dimensions. Ce qu'il faut surtout remarquer, c'est l'arbitraire qui subsiste dans le choix du groupe de transformations adjoint à la multiplicité et la faculté qui en découle d'accepter également toutes les méthodes de traitement dès qu'elles satisfont à la conception générale.

§ II. — Coordination des groupes de transformations dont l'un contient l'autre. Les différents types de recherches géométriques et leurs relations mutuelles.

Puisque les propriétés géométriques des êtres de l'espace restent inaltérées par *toutes* les transformations du groupe principal, il n'y a évidemment aucun sens à rechercher celles de ces propriétés qui ne sont invariantes que relativement à une partie de ces transformations. Cependant, cette question se légitime, au point de vue, tout au moins, des formules, si l'on étudie les figures de l'espace dans leurs rapports avec des éléments supposés fixes. Considérons, par exemple, comme en Trigonométrie sphérique, les êtres de l'espace avec distinction particulière d'un point. La question qui se pose tout d'abord est celle-ci : développer les propriétés invariantes, relativement au groupe principal, non plus des êtres mêmes de l'espace, mais du système qu'ils forment avec le point donné. Mais on peut la poser différemment : étudier les êtres mêmes de l'espace au point de vue des propriétés qui restent inaltérées par les transformations du groupe principal qui subsistent, quand on suppose fixe le point. En d'autres termes : il revient au même d'étudier, au sens du groupe principal, les figures de l'espace en leur adjoignant le point donné, ou de n'adjoindre aucun point, mais de remplacer le groupe principal par le groupe, en lui contenu, des transformations qui ne changent pas ce point.

C'est là un principe fréquemment employé dans ce qui suit et que, à cause de cela, nous voulons énoncer dès maintenant dans toute sa généralité.

On donne une multiplicité et, pour en faire l'étude, un de ses groupes de transformations. Soit proposé d'étudier les êtres de la multiplicité eu égard à l'un d'eux. *On peut alors soit adjoindre celui-ci à l'ensemble des êtres et rechercher, au sens du groupe donné, les propriétés du système complet, soit ne rien adjoindre, mais borner les transformations prises pour base de l'étude à celles du groupe donné qui n'altèrent pas l'être considéré (et qui forment nécessairement un groupe).*

Abordons maintenant la question inverse de celle posée au début du paragraphe et qui s'aperçoit immédiatement. Il s'agit de trouver les propriétés des êtres de l'espace qui restent inaltérées par les transformations d'un groupe qui contient le groupe principal. Toute propriété obtenue dans cette recherche est une propriété géométrique intrinsèque de l'être, mais la réciproque n'est pas vraie. Pour cette réciproque, le principe que nous venons d'établir entre en vigueur, et le groupe principal y joue le rôle du groupe le plus restreint. On obtient ainsi ce théorème :

Si l'on remplace le groupe principal par un groupe plus étendu, une partie seulement des propriétés géométriques est conservée. Les autres propriétés n'apparaissent plus comme propriétés intrinsèques des êtres geométriques, mais comme propriétés du système obtenu en leur adjoignant un être spécial. Cet être spécial, en tant qu'il est, en général, déterminé [1], *est défini par cette condition que, en le supposant fixe, les seules transformations, parmi celles du groupe donné, qui soient encore à appliquer à l'espace, soient celles du groupe principal.*

Dans ce théorème se trouve ce qui caractérise les méthodes géométriques modernes que nous avons à étudier et ce qui les relie à la méthode élémentaire. Elles sont, en effet, caractérisées par ce fait que leurs considérations, au lieu de s'appuyer sur le groupe principal, reposent sur des groupes de transformations plus étendus. Dès que leurs groupes se contiennent l'un l'autre, une loi analogue établit leurs rapports réciproques. Ceci s'applique aussi aux différentes façons de traiter les multiplicités à plusieurs dimensions que nous avons à considérer. Nous allons l'établir maintenant pour chaque méthode particulière, et

---

[1] On engendre par exemple un tel être quand on applique les transformations du groupe principal à un élément initial quelconque que ne reproduit aucune des transformations du groupe donné.

les théorèmes, relatifs au cas général, de ce paragraphe et du précédent, vont ainsi trouver leur éclaircissement par l'application à des objets concrets.

§ III. — La Géométrie projective.

Chaque transformation de l'espace qui n'appartient pas au groupe principal peut être employée pour transporter à des figures nouvelles des propriétés de figures connues. Ainsi utilise-t-on la Géométrie plane pour la Géométrie des surfaces qui sont représentables sur le plan; ainsi, longtemps avant la naissance d'une véritable Géométrie projective, concluait-on des propriétés d'une figure donnée aux propriétés de celles qui s'en déduisent par projection. Mais la Géométrie projective n'a pris naissance que quand on s'est accoutumé à considérer comme entièrement identiques la figure primitive et toutes celles qui s'en peuvent déduire par projection, et à énoncer les propriétés projectives de façon à mettre en évidence leur indépendance vis-à-vis des modifications apportées par la projection. C'était prendre pour base des considérations, au sens du § I, *le groupe des transformations projectives*, et par là se trouvait ainsi créée la différence entre les Géométries projective et ordinaire.

Pour chaque espèce de transformation de l'espace, on peut imaginer une marche de développement semblable à celle que nous venons de décrire; c'est un point sur lequel nous reviendrons encore fréquemment. Pour ce qui concerne la Géométrie projective, cette marche s'est encore poursuivie dans deux directions. Un premier pas dans l'élargissement des notions a été fait en admettant dans le groupe fondamental de transformations les transformations *par voie de dualité*. Au point de vue moderne, il faut regarder deux figures corrélatives non plus comme deux figures différentes, mais comme une seule et même figure. Un second pas consiste dans l'extension donnée au groupe fondamental de transformations homographiques et dualistiques, en y admettant les transformations imaginaires correspondantes. Il exige que l'on ait tout d'abord élargi le cercle des éléments propres à l'espace en y admettant les éléments imaginaires, tout comme l'admission des transformations par dualité dans le groupe fondamental a pour conséquence l'introduction simultanée du point et du plan comme élément de l'espace. Ce n'est pas ici le lieu de s'étendre sur l'utilité de l'introduction des éléments imaginaires, par laquelle seule on arrive à faire correspondre exactement la science de l'espace au domaine, qui a été adopté comme modèle, des opérations de l'Algèbre; mais il faut, au contraire, particulièrement insister sur ce fait que c'est justement dans la considération de ces opérations que résident les raisons de cette introduction et non dans le groupe des transformations projectives et dualistiques. De même que dans celles-ci nous pouvons nous borner aux transformations réelles, puisque les transformations homographiques et par dualité qui sont réelles forment un groupe, de même nous pouvons introduire des éléments imaginaires, même quand nous ne nous plaçons pas au point de vue projectif, et nous le devons faire dans le cas où nous avons surtout en vue l'étude d'êtres algébriques.

Le théorème général du paragraphe précédent montre comment, au point de vue projectif, doivent être conçues les propriétés métriques. Il faut les considérer comme des relations projectives relatives à un élément fondamental, le cercle imaginaire à l'infini ([1]), élément qui a la propriété de n'être transformé en lui-même que par celles des transformations du groupe projectif qui sont aussi des transformations du groupe principal. Ce théorème, que nous nous contentons d'énoncer, a encore besoin d'un complément indispensable qui provient de ce qu'on limite les considérations habituelles aux éléments réels de l'espace (et aux transformations réelles). Pour s'accorder tout à fait avec ce point de vue, on doit encore adjoindre expressément au cercle imaginaire à l'infini le système des éléments réels (points) de l'espace. Les propriétés au sens de la Géométrie élémentaire qui sont projectives sont soit des propriétés intrinsèques des figures, soit des relations relatives à ce système d'éléments réels, ou au cercle imaginaire à l'infini, ou enfin simultanément aux deux.

On peut encore rappeler ici comment von Staudt, dans sa Géométrie de situation, construit la Géométrie projective, c'est-à-dire cette Géo-

---

([1]) Cette conception doit être considérée comme une des plus belles œuvres [de l'école française]; elle seule donne un sens précis à la distinction, que l'on aime à placer au début de la Géométrie projective, entre les propriétés métriques et les propriétés descriptives.

métrie projective dont le groupe fondamental ne comprend que les transformations réelles projectives et par dualité [1].

On sait comment, dans cet Ouvrage, il n'emprunte au matériel des considérations habituelles que ce qui reste inaltéré par les transformations projectives. Si l'on voulait aller ainsi jusqu'à la considération des propriétés métriques, il faudrait justement les introduire comme relations relatives au cercle imaginaire à l'infini. La marche des idées, ainsi complétée, est, pour les considérations présentées ici, d'une grande importance, car il est possible de construire semblablement la Géométrie au sens de chacune des méthodes qui nous restent à étudier.

§ IV. — Corrélation établie au moyen d'une transformation de la multiplicité fondamentale.

Avant de passer à l'exposé des méthodes géométriques qui prennent place à côté des Géométries élémentaire et projective, nous pouvons développer en général quelques considérations qui se reproduiront constamment dans la suite, et pour lesquelles les théories abordées jusqu'ici fournissent un nombre déjà suffisant d'exemples. Ce paragraphe et le suivant leur sont consacrés.

Soit à étudier une multiplicité A en prenant pour base un groupe B. Si, par une transformation quelconque, on transforme A en une autre multiplicité A′, le groupe B de transformations qui reproduisent A devient un groupe B′ dont les transformations se rapportent à A′. C'est dès lors un principe évident que *la façon de traiter* A *en prenant* B *pour base conduit à celle de traiter* A′ *en prenant* B′ *pour base,* c'est-à-dire que chaque propriété que possède, relativement au groupe B, un être de A, donne une propriété, relativement au groupe B′, de l'être correspondant de A′.

Supposons, par exemple, que A soit une droite, et B la triple infinité de transformations linéaires qui la reproduisent. L'étude de A est alors justement ce que, dans l'Algèbre moderne, on appelle *la théorie*

---

(1) Ce n'est que dans les *Beiträge zur Geometrie der Lage* que von Staudt prend pour base le groupe plus étendu où figurent aussi des transformations imaginaires.

des formes binaires. Maintenant, on peut établir une correspondance entre les points de la droite et ceux d'une conique du plan, en projetant d'un des points de celle-ci. On montre aisément que les transformations linéaires B qui reproduisent la droite deviennent les transformations linéaires B′ qui reproduisent la conique, c'est-à-dire les transformations de la conique qui correspondent aux transformations linéaires du plan qui reproduisent la conique.

Mais, d'après le principe du second paragraphe (¹), il revient au même d'étudier la Géométrie sur une conique en la supposant fixe et ne considérant que les transformations linéaires du plan qui la reproduisent, ou d'étudier la Géométrie sur la conique en considérant toutes les transformations linéaires du plan, et laissant la conique se modifier avec elles. Les propriétés que nous découvrons aux systèmes de points de la conique sont donc projectives au sens habituel du mot. En rapprochant ceci du résultat précédent, on voit que :

La théorie des formes binaires et la Géométrie projective des systèmes de points d'une conique sont équivalentes, c'est-à-dire qu'à chaque théorème relatif aux formes binaires en correspond un relatif à ces systèmes de points, et réciproquement (²).

Voici un autre exemple bien propre à éclairer ces sortes de considérations. Si l'on projette stéréographiquement une quadrique sur un plan, un point fondamental se présente alors sur la surface : le point de vue; deux se présentent sur le plan : les traces des génératrices qui passent par le point de vue. Or on voit immédiatement que les transformations linéaires du plan, qui n'altèrent pas les deux points fondamentaux, deviennent, par représentation, celles des transformations linéaires de la quadrique qui la reproduisent, sans toutefois changer le centre de projection. (Par transformations linéaires qui reproduisent la surface, il faut entendre ici les transformations que subit la surface quand on effectue des transformations linéaires de l'espace qui l'amènent à se recouvrir elle-même.) Ainsi sont rendues identiques l'étude

(¹) Si l'on veut, ce principe est appliqué ici dans une forme un peu plus générale.

(²) Au lieu d'une conique du plan, on peut aussi bien prendre une cubique gauche et, en général, procéder semblablement pour le cas de n dimensions.

projective d'un plan avec deux points fondamentaux, et celle d'une quadrique avec un point fondamental. Mais, si l'on fait emploi d'éléments imaginaires, la première n'est rien autre que l'étude du plan au sens de la Géométrie élémentaire. Le groupe principal de transformation du plan se compose, en effet, précisément des transformations linéaires qui n'altèrent pas un couple de points (les points cycliques); en sorte que, finalement,

La Géométrie élémentaire du plan et l'étude projective d'une quadrique avec un point fondamental sont identiques.

On peut multiplier à volonté ces exemples (1). Nous avons adopté les deux qui viennent d'être développés, parce que, dans la suite, nous aurons encore l'occasion de les reprendre.

§ V. — De l'arbitraire dans le choix de l'élément de l'espace. Principe de corrélation de Hesse. Géométrie de l'espace réglé.

Comme élément de la droite, du plan, de l'espace, etc., et en général d'une multiplicité à étudier, on peut employer, au lieu du point, tout élément faisant partie de la multiplicité : un groupe de points, en particulier une courbe, une surface, etc. (*voir* Note IV). Comme, *a priori*, il n'y a rien de déterminé dans le nombre des paramètres arbitraires dont on fera dépendre cet élément, la ligne, le plan, l'espace, etc. apparaissent, suivant l'élément choisi, comme pourvus d'un nombre quelconque de dimensions. Mais, *tant que l'on prend pour base de l'étude géométrique le même groupe de transformations, rien n'est modifié dans cette Géométrie,* c'est-à-dire que toute proposition obtenue avec un certain élément de l'espace reste encore une proposition pour tout autre choix de cet élément, l'ordre des théorèmes et leurs liaisons sont seuls changés.

Ce qui est essentiel, c'est donc le groupe de transformations; le

(1) Pour d'autres exemples et aussi, en particulier, pour l'extension à un plus grand nombre de dimensions, *voir* l'exposition faite dans un de mes Mémoires : *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* (*Math. Annalen,* t. V, 2); *voir* aussi les travaux de Lie que nous allons immédiatement citer.

nombre de dimensions attribuées à la multiplicité apparaît comme quelque chose de secondaire.

Le rapprochement de cette remarque et du principe du paragraphe précédent conduit à une suite de belles applications dont quelques-unes peuvent être développées ici. Plus que toute longue analyse, ces exemples semblent, en effet, propres à expliquer le sens des considérations générales.

D'après le paragraphe précédent, la Géométrie projective sur la droite (la théorie des formes binaires) équivaut à la Géométrie projective sur une conique. Nous pouvons maintenant sur cette dernière considérer comme élément, au lieu du point, le couple de points. Mais une correspondance peut être établie entre l'ensemble des couples de points de la conique et l'ensemble des droites du plan, en faisant correspondre chaque droite au couple de points où elle rencontre la conique. Par cette représentation, les transformations linéaires qui reproduisent la conique deviennent les transformations linéaires du plan (considéré comme composé de droites) qui laissent la conique inaltérée. Or, d'après le § II, considérer le groupe formé par ces dernières transformations, ou partir de la totalité des transformations linéaires du plan en adjoignant toujours la conique à la figure plane à étudier, sont choses équivalentes. Il résulte de tout ceci que :

La théorie des formes binaires et la Géométrie projective du plan avec une conique fondamentale sont équivalentes.

Enfin, puisque, à cause de l'identité des groupes, la Géométrie projective du plan avec une conique fondamentale coïncide avec la Géométrie métrique projective que l'on peut établir dans le plan sur une conique (*voir* Note V), nous pouvons encore dire que :

La théorie des formes binaires et la Géométrie métrique projective générale du plan sont une seule et même Géométrie.

On pourrait, dans l'analyse précédente, remplacer la conique du plan par une cubique gauche, etc. ; mais nous pouvons nous dispenser de ces développements. La connexion que nous venons d'exposer entre la Géométrie du plan, puis de l'espace, ou d'une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions, s'accorde essentiellement avec le principe de corrélation proposé par Hesse (*Journal de Borchardt*, t. LXVI).

La Géométrie projective de l'espace, ou, autrement dit, la théorie des formes quaternaires, offre un exemple tout à fait de même nature. Prenons la droite comme élément de l'espace et, comme dans la géométrie de l'espace réglé, déterminons-la par six coordonnées homogènes liées par une équation du second degré; les transformations linéaires et par dualité de l'espace s'offrent alors comme celles des transformations linéaires des six variables supposées indépendantes, qui transforment en elle-même l'équation de liaison. Par une suite de déductions comme celles que nous venons de développer, on obtient alors ce théorème :

La théorie des formes quaternaires s'accorde avec la détermination métrique projective dans la multiplicité engendrée par six variables homogènes.

Pour plus de détails sur ces notions, je renverrai à un Mémoire paru récemment dans les *Math. Annalen* (t. VI) : *Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie* (*zweite Abhandlung*), ainsi qu'à une Note placée à la fin de ce travail (*voir* Note VI).

Nous adjoindrons encore deux remarques aux considérations précédentes; la première, il est vrai, se trouve déjà implicitement contenue dans ce qui a été dit, mais il est nécessaire de la développer, parce que l'objet auquel elle s'applique est trop sujet à malentendu.

Si l'on introduit des êtres quelconques comme éléments de l'espace, il acquiert un nombre quelconque de dimensions. Mais si alors nous nous plaçons au point de vue habituel (élémentaire ou projectif), le groupe que, pour la multiplicité à plusieurs dimensions, nous devons prendre pour base est donné *a priori :* il n'est autre que le groupe principal ou le groupe des transformations projectives. Si nous voulions prendre pour groupe fondamental un autre groupe, nous devrions quitter le point de vue élémentaire ou projectif. Ainsi, autant il est vrai que par un choix convenable de l'élément de l'espace celui-ci représente des multiplicités à un nombre quelconque de dimensions, autant il est important d'ajouter qu'*avec cette representation, il faut, en* *vue de l'étude de la multiplicité, prendre pour base un groupe déterminé* a priori, *ou sinon qu'il faut, pour disposer à volonté du groupe, y adapter convenablement nos conceptions géométriques*. Si l'on ne faisait pas cette remarque, on pourrait, par exemple, chercher une représentation de la géométrie de l'espace réglé de la façon suivante. Dans cette géométrie, une droite a six coordonnées; c'est aussi le nombre des coefficients d'une conique du plan. La reproduction de la géométrie de l'espace réglé serait ainsi la géométrie d'un système de coniques détaché de l'ensemble des coniques par une relation quadratique entre les coefficients. C'est juste, si le groupe pris pour base de la Géométrie plane est le groupe formé par l'ensemble des transformations représentées par les transformations linéaires des coefficients d'une conique qui reproduisent l'équation quadratique de condition. Mais si nous gardons la façon de voir élémentaire ou projective de la Géométrie plane, nous n'obtenons *absolument aucune* représentation.

La dernière remarque se rapporte à la notion suivante. Soit donné, pour l'espace, un groupe quelconque, par exemple le groupe principal. Faisons choix d'une figure particulière, comme d'un point, ou d'une droite, ou encore d'un ellipsoïde, etc., et effectuons sur elle toutes les transformations du groupe fondamental. On obtient ainsi un ensemble plusieurs fois infini à un nombre de dimensions en général égal au nombre des paramètres arbitraires contenus dans le groupe; dans certains cas particuliers, ce nombre est plus petit, à savoir, lorsque la figure choisie tout d'abord a la propriété d'être reproduite par un nombre infini de transformations du groupe. Chaque ensemble ainsi engendré se nomme, relativement au groupe générateur, *un corps* (¹). Si maintenant, d'une part, nous voulons étudier l'espace au sens du groupe, et, dans ce but, spécifier comme élément de l'espace des figures déterminées; si, d'autre part, nous ne voulons pas que des choses équivalentes soient représentées d'inégale façon, *nous devrons évidemment choisir les éléments de l'espace de telle sorte que*

(¹) Ce nom est choisi d'après Dedekind qui, dans la Théorie des nombres, donne à un ensemble de nombres le nom de *corps*, quand il résulte, au moyen d'opérations données, d'éléments donnés (dernière édition des *Leçons* de Dedekind).

leur ensemble forme un seul corps ou puisse être décomposé en corps [1]. Nous ferons plus tard (§ IX) une application de cette remarque évidente. La notion même du corps se représentera encore une fois, dans le dernier paragraphe, associée à des notions de même nature.

---

[1] [Dans le texte, il n'est pas suffisamment remarqué que le groupe proposé peut contenir ce qu'on appelle des sous-groupes *exceptionnels*. Si une figure géométrique reste inaltérée par les opérations d'un sous-groupe exceptionnel, il en est de même de toutes celles qui s'en déduisent par les opérations du groupe total, par conséquent, de tous les éléments du corps qui en résulte. Maintenant un corps ainsi formé est totalement impropre à la représentation des opérations du groupe. On ne doit donc tenir compte dans le texte que des corps résultant d'éléments de l'espace qui ne se conservent inaltérés par aucun sous-groupe exceptionnel du groupe proposé.]

(*A suivre.*)