GASTON DARBOUX

Sur une classe de courbes unicursales et sur une propriété du cercle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 327-334
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__327_0>

SUR UNE

CLASSE DE COURBES UNICURSALES

ET SUR UNE

PROPRIÉTÉ DU CERCLE,

PAR M. G. DARBOUX ([1]).

M. Laguerre a communiqué à l'Académie d'intéressantes propriétés de certaines courbes de quatrième classe, auxquelles il a donné le nom d'*hypercycles*. En 1879-80, M. Chasles avait bien voulu me confier son Cours de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences, et j'ai traité la théorie des imaginaires conformément aux vues introduites dans la Science par l'illustre géomètre. J'ai été ainsi amené à donner, au mois de janvier 1880, relativement à des courbes unicursales de toutes les classes, différentes propositions qui ont les rapports les plus étroits avec quelques-unes de celles qui ont été énoncées par M. Laguerre. Ce sont ces propositions que je demande à l'Académie la permission de lui communiquer.

Considérons d'abord n droites $d_1, \ldots, d_n$. Si l'on marque sur ces droites des points $O_1, \ldots, O_n$ destinés à servir d'origine aux segments comptés sur ces droites, une droite variable δ interceptera sur ces droites fixes des segments $O_1A_1, \ldots, O_nA_n$. Cela posé, *si l'on assujettit ces n segments à satisfaire à la relation linéaire*

$$\Sigma \lambda_i \overline{O_i A_i} = K, \tag{1}$$

([1]) Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIV, p. 930 et 1108.

la droite δ enveloppera une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe au plus, admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée (¹).

Réciproquement, *toute courbe de $n^{\text{ième}}$ classe admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée, c'est-à-dire ayant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-1$, jouit de la propriété que chacune de ses tangentes intercepte sur n tangentes fixes des segments entre lesquels il existe une relation linéaire.*

Dans le cas où $n=2$, la courbe devient une parabole et l'on retrouve ainsi une propriété bien connue de cette courbe. La proposition précédente peut donc être considérée comme la généralisation et l'extension à toute une classe de courbes unicursales d'une des propriétés les plus essentielles de la parabole.

Mais, relativement à ses tangentes, la parabole jouit encore d'une autre propriété fondamentale : les deux segments interceptés par trois tangentes fixes sur une tangente variable ont un rapport constant. Cette propriété s'étend, elle aussi, à toutes nos courbes unicursales, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Pour toute courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée, il y a une relation linéaire et homogène entre les n segments interceptés sur une tangente variable par $n+1$ tangentes fixes.

Réciproquement, *si $n+1$ droites fixes interceptent sur une droite variable n segments entre lesquels a lieu une relation linéaire et homogène, la droite mobile enveloppe une courbe au plus de la $n^{\text{ième}}$ classe, admettant une seule tangente parallèle à une droite donnée.*

Il est clair que ces propositions comportent beaucoup de cas particuliers, et sont susceptibles d'applications diverses. Je me contenterai de faire remarquer ici qu'elles donnent une construction géométrique

(¹) L'équation de la tangente à la courbe pourra se mettre sous la forme

$$(x-iy)u+(x+yi)=\frac{F(u)}{f(u)},$$

u désignant un paramètre variable, $F(u)$ et $f(u)$ des polynômes respectivement de degrés u et $n-1$.

très simple de la courbe de la classe n admettant la droite de l'infini comme tangente multiple d'ordre $n-1$ et déterminée par $2n$ tangentes.

En faisant la perspective, on obtiendra des propositions applicables à toute courbe de classe n, admettant une tangente multiple d'ordre $n-1$. Considérons une telle courbe et n tangentes fixes. Marquons sur chaque tangente un point O_i choisi arbitrairement; soient P_i le point où elle est coupée par la tangente multiple, et M_i le point où elle est coupée par une tangente variable. On aura la relation

$$\sum \alpha \frac{O_i M_i}{M_i P_i} = K \tag{2}$$

ou, plus simplement,

$$\sum_1^n \frac{\alpha'_i}{M_i P_i} = K'. \tag{3}$$

De même, si l'on considère $n+1$ tangentes fixes et une tangente variable, on aura

$$\sum_1^{n+1} \lambda_i \frac{OM_i}{M_i P} = 0, \tag{4}$$

les λ étant des constantes liées par la relation

$$\Sigma \lambda_i = 0, \tag{5}$$

O étant un point quelconque de la tangente variable et P le point où elle rencontre la tangente multiple. En vertu de l'équation (5), la relation (4) subsiste quand on déplace le point O, et peut d'ailleurs prendre la forme plus élégante

$$\sum_1^{n+1} \frac{\lambda_i}{M_i P} = 0. \tag{6}$$

Dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire où l'on a une conique quelconque, la relation (4) devient

$$\lambda_1 \frac{OM_1}{M_1 P} + \lambda_2 \frac{OM_2}{M_2 P} + \lambda_3 \frac{OM_3}{M_3 P} = 0,$$

ou, en faisant coïncider le point O avec le point M_1,

$$\lambda_2 \frac{M_1 M_2}{M_2 P} + \lambda_2 \frac{M_1 M_3}{M_3 P} = 0.$$

Cette égalité est la traduction de la proposition bien connue relative au rapport anharmonique des quatre points où une tangente variable est coupée par quatre tangentes fixes. Notre proposition générale, exprimée par l'équation (4), peut donc être considérée comme étendant à toutes les courbes de classe n, admettant une tangente multiple d'ordre $n-1$, la propriété anharmonique des tangentes d'une conique.

Enfin, si l'on transforme par polaires réciproques, on obtient des théorèmes relatifs aux courbes d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$. Prenons sur une telle courbe n points A_i; menons par chacun de ces points une droite quelconque $A_i X_i$ et deux droites allant l'une au point multiple P de la courbe, l'autre à un point variable M. On aura la relation

$$\sum_1^n \alpha_i \frac{\sin \widehat{X_i A_i M}}{\sin \widehat{P A_i M}} = K$$

ou, plus simplement,

$$\sum_1^n \alpha'_i \cot \widehat{P A_i M} = K'.$$

Si l'on prend maintenant $n+1$ points fixes A_i et un point variable M, par lequel on mènera une droite quelconque MX, on aura

$$\sum_1^{n+1} \mu_i \frac{\sin \widehat{X M A_i}}{\sin \widehat{P M A_i}} = 0,$$

avec la condition

$$\Sigma \mu_i = 0,$$

qui permet de ramener l'équation précédente à la forme

$$\sum^{n+1} \mu_i \cot \widehat{P M A_i} = 0,$$

Toutes ces relations sont également la généralisation des propriétés anharmoniques du point dans les coniques.

Il me reste à faire connaître d'autres propriétés relatives à d'autres courbes unicursales qui admettent, en général, deux tangentes parallèles à une direction donnée. On sait que, si l'on considère deux tangentes fixes d'un cercle et une tangente variable, et si l'on attribue des sens convenables à ces trois droites, le périmètre du triangle qu'elles forment est constant. On peut énoncer cette proposition sous la forme suivante :

Si une courbe est telle que sa tangente forme avec deux droites fixes un triangle de périmètre constant, elle jouit de la même propriété quand on substitue aux deux droites une infinité d'autres systèmes de deux droites fixes.

Cette proposition admet la généralisation suivante :

Si l'on considère n couples de droites et une droite variable qui forme, avec les n couples, des triangles dont les périmètres ont une somme constante, cette droite variable enveloppera une courbe unicursale, qui conservera la même définition quand on substituera aux couples primitifs n autres couples dépendant de deux paramètres arbitraires.

Les courbes auxquelles on est ainsi conduit peuvent être caractérisées de la manière suivante : Elles sont d'une classe quelconque, que je désignerai par m; elles admettent la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $m-2$, et de plus elles coupent cette droite aux points à l'infini sur le cercle. Exceptionnellement elles peuvent admettre la droite de l'infini comme tangente multiple d'ordre $m-1$, et se réduire aux courbes considérées plus haut [1].

---

[1] L'équation de la tangente à la courbe peut se mettre sous la forme

$$(x+iy)u^2+(x-iy)=\frac{F(u)}{f(u)},$$

$F(u)$ et $f(u)$ désignant des polynômes d'ordre m et $m-2$ respectivement.

Réciproquement, chacune de ces courbes admettra la génération précédente; il faudra prendre n triangles si la courbe est de la classe $2n$ ou $2n-1$. Pour démontrer cette proposition, on est conduit à étudier la question suivante :

Étant donnee une forme binaire homogène de degré pair $2n$, déterminer deux formes de degré $n+1$ dont elle soit la jacobienne.

Ce problème, que j'avais proposé à mes auditeurs, a été l'objet des recherches profondes de l'un d'eux, M. Stéphanos, recherches qui ont été communiquées à l'Académie. Il offre un grand intérêt et se présente dans l'étude de questions très variées. Par exemple, c'est de sa solution que dépend la détermination des courbes unicursales d'un degré donné, dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

Si nous revenons à nos courbes unicursales, nous reconnaîtrons qu'elles possèdent de nombreuses propriétés. D'abord, on peut généraliser beaucoup leur définition primitive. La courbe dont la tangente forme avec n couples de droites des triangles dont la somme des périmètres est constante peut encore être définie, et d'une infinité de manières, comme il suit :

Il existe n couples de droites tels, que les n triangles formés par ces couples et la tangente variable aient leurs périmètres liés par une équation linéaire, dont les coefficients seront quelconques et ne seront plus égaux à l'unité comme dans la génération primitive.

Si l'on veut avoir des sommes de périmètres, on peut encore augmenter le nombre des triangles, et l'on rencontre alors différents problèmes d'Algèbre, parmi lesquels je citerai le suivant, qui comprend celui qui a été énoncé plus haut :

Étant donnée une forme binaire, trouver deux autres formes, de degrés égaux ou inégaux, dont elle soit la jacobienne.

D'une manière générale, si l'on considère p droites fixes et une droite variable, et si l'on établit une relation linéaire quelconque entre les segments interceptés par la droite variable sur les droites fixes, et par les droites fixes sur la droite variable, cette relation peut toujours se ramener à une autre ne contenant que des périmètres de triangles formés par la droite variable et les droites fixes; et par conséquent la courbe enveloppe de la droite appartient à la classe que nous étudions ici.

En me plaçant à ce point de vue, je signalerai spécialement les courbes qui sont définies par une relation existant uniquement entre les segments déterminés sur la tangente variable par des droites fixes. Si cette relation est homogène, ces courbes sont celles qui ont été considérées dans ma dernière Communication; si la relation n'est pas homogène, elle n'a lieu qu'avec un seul système de droites. La proposition suivante définit les cas dans lesquels elle se présente.

Considérons une courbe unicursale de classe n, admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $n-2$. En général, cette courbe, qui touche en $n-2$ points la droite de l'infini, la coupera en outre en deux autres points, distincts des points de contact. *Si ces deux points viennent se confondre à la fois avec les points à l'infini sur le cercle et avec deux des $n-2$ points de contact, les $n-3$ segments interceptés sur la tangente variable à la courbe par les $n-2$ tangentes doubles de cette courbe seront liés par une relation linéaire.*

Je n'insiste pas sur les divers cas particuliers, me contentant de faire remarquer que l'hypocycloïde à trois rebroussements, la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites et, plus généralement, l'hypercycle de M. Laguerre sont, avec la parabole, les plus simples des courbes dont j'ai fait connaître divers modes de génération [1]. Toutes ces courbes sont les

---

[1] Les propositions analogues relatives aux courbes sphériques ont déjà été données dans mon Ouvrage, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 106. On les obtient en appliquant la méthode des figures supplémentaires à d'autres propositions, sur lesquelles je ne reviendrai pas en ce moment; de même les propriétés de l'hypercycle peuvent se déduire de celles que nous devons à M. Laguerre, relativement aux courbes qu'il a nommées *cassiniennes*.

polaires réciproques par rapport à un cercle de celles qui sont représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = f(\cos\omega, \sin\omega),$$

où f désigne une fraction rationnelle, ce qui explique comment leur étude conduit à différents problèmes relatifs à deux formes binaires ou à une fraction rationnelle.