ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

Sur les dissolutions d'un sel magnétique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 289-322
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__289_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES

DISSOLUTIONS D'UN SEL MAGNÉTIQUE,

PAR P. DUHEM.

Il ne paraît pas que les propriétés d'une dissolution formée par un sel sensible à l'action de l'aimant aient été jusqu'ici l'objet d'aucune étude théorique. La Thermodynamique, cependant, fournit une démonstration très simple de quelques-unes de ces propriétés; certaines des conclusions auxquelles elle parvient paraissent susceptibles d'une vérification expérimentale. C'est à l'exposé de ces conséquences de la Thermodynamique que sera consacré ce Mémoire.

§ I. — Potentiel thermodynamique d'un système aimanté renfermant une dissolution.

Le potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathcal{J} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv.$$

Dans cette formule,

E est l'équivalent mécanique de la chaleur;
T est la température absolue;
Υ est l'énergie interne que posséderait le système si on le ramenait à l'état neutre magnétique;
Σ est l'entropie qu'il posséderait dans les mêmes conditions;
$\mathcal{J}$ est le potentiel magnétique;
$\mathfrak{M}$ est l'intensité d'aimantation en un point de l'élément dv;
$\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ est une fonction dont la forme dépend de la nature de la substance qui compose l'élément dv;

le signe $\int$ enfin indique une intégration qui s'étend à tous les éléments de volume du système.

Ce potentiel thermodynamique interne ne figure jamais, dans aucune question, que par sa variation; il en résulte que l'on peut, sans inconvénient, y supprimer tous les termes qui sont assujettis à demeurer constants.

Supposons le système formé d'aimants permanents 1 et d'un corps parfaitement doux 2; soit dv_1 un élément de volume des aimants permanents; soit dv_2 un élément de volume du corps parfaitement doux; l'aimantation a pour composantes $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ en un point du premier élément, et $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ en un point du second; soient $\mathcal{V}_1$ la fonction potentielle magnétique des aimants permanents et $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle de l'aimantation distribuée sur le corps parfaitement doux. Nous aurons

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_1}\right)dv_1 \\ + \int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)dv_2 \\ + \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2.\end{aligned}$$

Mais les aimants permanents ayant une forme et une aimantation invariables, la quantité

$$\frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_1}\right)dv_1$$

demeure absolument invariable, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)dv_2 \\ + \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2,\end{aligned}$$

en négligeant, comme nous l'avons dit, les termes constants.

Nous admettrons que les aimants permanents sont formés par une substance de constitution invariable, tandis que le corps parfaitement doux aura une constitution variable; ce dernier sera formé par une

dissolution dont la concentration pourra être différente d'un point à l'autre au même instant et d'un instant à l'autre au même point. Cette dissolution sera incompressible, de telle façon que la densité en chaque point dépende uniquement de la concentration au même point. En désignant par s cette concentration, on pourra écrire

$$E(\Upsilon - T\Sigma) = \int \Phi(s)\, dv_2,$$

$\Phi(s)$ étant une certaine fonction de s dont il n'est pas utile pour le moment de préciser davantage la nature.

L'aimantation des aimants permanents étant invariable, on peut réduire

$$\int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv$$

à la quantité

$$\int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)\, dv_2.$$

De ces diverses considérations il résulte que, le potentiel thermodynamique interne d'un système formé par des aimants permanents et une dissolution magnétique peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F} = & \int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right) dv_2 \\ & + \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right) dv_2 \\ & + \int [\Phi(s) + \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)]\, dv_2. \end{aligned}\right.$$

§ II. — Aimantation d'une dissolution magnétique.

Imaginons que les composantes $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ de l'aimantation aux divers points de la dissolution éprouvent des variations arbitraires $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$. Le potentiel thermodynamique interne, défini par l'égalité (1), subira une variation donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} = \int \Bigg\{ & \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} \frac{\mathcal{A}_2}{\mathfrak{M}}\right] \delta\mathcal{A}_2 \\ & + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} \frac{\mathcal{B}_2}{\mathfrak{M}}\right] \delta\mathcal{B}_2 \\ & + \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z_2} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} \frac{\mathcal{C}_2}{\mathfrak{M}}\right] \delta\mathcal{C}_2 \Bigg\} dv_2. \end{aligned}$$

Cette variation doit, pour l'équilibre, être égale à zéro, quelles que soient les quantités $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$. On doit donc avoir, en tout point de la dissolution,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= -\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2},\\ \mathcal{B}_2 &= -\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2},\\ \mathcal{C}_2 &= -\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}, \end{aligned}\right.$$

égalités dans lesquelles on a posé

$$(3)\qquad \mathrm{F}(\mathfrak{M}, s) = -\frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial\mathfrak{M}}}.$$

La fonction $\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)$ est la fonction magnétisante. Un cas approximatif intéressant est celui où elle se transforme en un coefficient d'aimantation indépendant de l'intensité d'aimantation.

Ce coefficient dépend de la concentration de la dissolution. Il peut arriver que le dissolvant, pris à l'état de pureté, soit tellement peu sensible à l'action de l'aimant qu'on puisse, sans erreur notable, le regarder comme non magnétique; c'est ce qui arrivera, par exemple, pour l'eau, si l'on compare son aimantation à celle d'un composé ferrugineux en dissolution. Dans ce cas, du moins pour les faibles concentrations, on peut regarder ce coefficient comme proportionnel à la concentration. Les équations (2) deviennent alors

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= -\mathrm{K}s\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2},\\ \mathcal{B}_2 &= -\mathrm{K}s\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2},\\ \mathcal{C}_2 &= -\mathrm{K}s\,\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}, \end{aligned}\right.$$

K étant un coefficient qui dépend de la nature du sel dissous et de la température.

Ce coefficient est, en général, assez petit; il en est alors de même de $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ et partant de $\mathcal{V}_2$; de sorte que, si l'on néglige les termes

de l'ordre de K^2 devant les termes de l'ordre de K, les équations précédentes prennent la forme approchée

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_2 = -Ks\dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}, \\ \mathcal{B}_2 = -Ks\dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y_2}, \\ \mathcal{C}_2 = -Ks\dfrac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z_2}. \end{cases}$$

D'une manière générale, on a

$$(6)\qquad \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\, d\mathfrak{M}.$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$

cette relation devient

$$(7)\qquad \mathcal{F}(\mathfrak{M}, s) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2Ks}.$$

§ III. — Conditions d'équilibre d'une dissolution magnétique; conditions hydrostatiques.

Une dissolution magnétique 2 est soumise à l'action d'aimants permanents 1. Aux divers éléments $d\omega$ de la surface déformable qui limite cette dissolution sont appliquées des pressions normales $P\,d\omega$. Aux divers éléments de volume dv de cette dissolution sont appliquées des forces extérieures. Les composantes de la force appliquée à l'élément dv_2 sont

$$X = -\rho(s)\frac{\partial V}{\partial x_2}\, dv_2,$$

$$Y = -\rho(s)\frac{\partial V}{\partial y_2}\, dv_2,$$

$$Z = -\rho(s)\frac{\partial V}{\partial z_2}\, dv_2,$$

$\rho(s)$ étant la densité en un point de l'élément dv_2, et V une fonction

uniforme finie et continue de x_2, y_2, z_2, fonction dont la forme ne dépend pas de la figure du fluide.

Ces dernières forces extérieures admettent un potentiel qui est donné par l'expression

$$W = \int \rho(s) V \, dv_2, \tag{8}$$

les sommations s'étendant au volume entier du fluide.

Cherchons à quelles conditions la dissolution considérée pourra demeurer immobile.

Pour que l'équilibre soit assuré, il faut et il suffit que, dans toute déformation virtuelle imposée au fluide, la variation éprouvée par le potentiel thermodynamique interne du fluide soit égale ou supérieure au travail effectué par les forces extérieures.

Si l'on désigne par $\mathcal{F}$ le potentiel thermodynamique interne du fluide, par $d\mathfrak{T}_e$ le travail des forces extérieures, cette condition s'exprimera ainsi

$$\delta\mathcal{F} \geqq d\mathfrak{T}_e$$

ou

$$\delta\mathcal{F} - d\mathfrak{T}_e \geqq 0. \tag{9}$$

Dans le cas particulier où la déformation virtuelle imposée au fluide est *renversable,* c'est-à-dire où l'on obtient une nouvelle déformation virtuelle en changeant tous les signes des déplacements que les divers points éprouvent dans la première, le signe d'inégalité doit évidemment disparaître de la condition précédente, qui devient

$$\delta\mathcal{F} - d\mathfrak{T}_e = 0. \tag{10}$$

Le travail externe $d\mathfrak{T}_e$ est la somme du travail $d\mathfrak{T}'_e$ effectué par les pressions que supporte la surface du fluide et du travail $d\mathfrak{T}''_e$ des forces appliquées à ses divers éléments de volume

$$d\mathfrak{T}_e = d\mathfrak{T}'_e + d\mathfrak{T}''_e. \tag{11}$$

Nous avons d'ailleurs

$$d\mathfrak{T}'_e = \mathbf{S}\, P[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, d\omega, \tag{13}$$

u, v, w étant les composantes du déplacement d'un point de l'élément $d\omega$; N_i étant la normale à cet élément vers l'intérieur du fluide, et l'intégrale s'étendant à la surface déformable qui limite le fluide.

Le travail $d\mathfrak{T}''_e$ est égal à la variation changée de signe de la quantité W. Si δs est la variation que subit la concentration au point (x_2, y_2, z_2); si u, v, w sont les composantes du déplacement du point matériel qui avait pour coordonnées initiales x_2, y_2, z_2; si nous remarquons enfin que

$$\delta\, dv_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right) dv_2,$$

nous aurons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathfrak{T}''_e = & -\int V \frac{\partial \rho(s)}{\partial s}\, \delta s\, dv_2 \\ & -\int \rho(s)\left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w\right) dv_2 \\ & -\int V \rho(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right) dv_2 \\ & -\int V \frac{d\rho(s)}{ds}\left(\frac{\partial s}{\partial x} u + \frac{\partial s}{\partial y} v + \frac{\partial s}{\partial z} w\right) dv_2. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (11), (12), (13) nous fournissent l'expression complète de $d\mathfrak{T}_e$.

Calculons maintenant la variation $\delta\mathfrak{F}$ subie par le potentiel thermodynamique interne de la dissolution.

D'après l'égalité (1), on peut écrire

$$(14)\qquad \delta\mathfrak{F} = A + B + C,$$

les trois quantités A, B, C ayant les significations suivantes :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} A = & \ \delta \int \Phi(s)\, dv_2, \\ B = & \ \delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\, dv_2, \\ C = & \ \delta \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z_2}\right) dv_2 \\ & + \tfrac{1}{2}\, \delta \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z_2}\right) dv_2, \end{aligned}\right.$$

Calculons successivement les trois quantités A, B, C.

1° *Calcul de* A. — Le calcul de A est facile; le volume de l'élément dv_2 augmente de

$$\delta\, dv_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right) dv_2.$$

En même temps, la concentration en un point de cet élément augmente de δs. On a donc

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} A = & \int \left[\frac{d\Phi(s)}{ds}\,\delta s + \Phi(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)\right] dv_2 \\ & + \int \frac{d\Phi(s)}{ds}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\,u + \frac{\partial s}{\partial y}\,v + \frac{\partial s}{\partial z}\,w\right) dv_2. \end{aligned}\right.$$

2° *Calcul de* B. — Supposons que, dans la déformation du fluide, chaque élément entraîne avec lui son aimantation sans que celle-ci change de grandeur ni de direction; $\mathfrak{M}$ demeurera invariable, et l'on aura simplement

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} B = & \int \left[\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s}\,\delta s + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)\right] dv_2 \\ & + \int \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\,u + \frac{\partial s}{\partial y}\,v + \frac{\partial s}{\partial z}\,w\right) dv_2. \end{aligned}\right.$$

3° *Calcul de* C. — La quantité dont C est la variation dépend uniquement de la forme du fluide et de l'aimantation de chaque élément de volume. Donc, pour calculer C, on peut calculer la variation subie par la quantité en question dans une série quelconque de modifications amenant les éléments dont il s'agit du même état initial au même état final que la modification considérée.

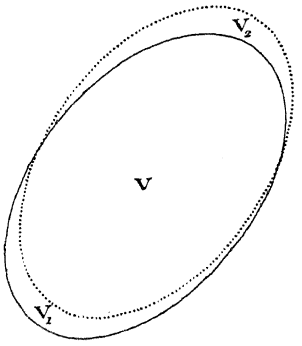
Soient

V (*fig.* 1) le volume occupé par le fluide avant et après la modification;
V_1 le volume qui était rempli par du fluide avant la modification et ne l'est pas après;
V_3 le volume qui n'était pas rempli par le fluide avant la modification et l'est après.

Il est aisé de voir que, en négligeant les infiniment petits d'ordre

supérieur, la modification considérée pourra être regardée comme résultant des modifications suivantes :

Fig. 1.



1° En tout point du volume $v_2 = V + V_1$, on donne à $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ des variations

$$\delta\mathcal{A}_2 = -\left(\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2}u + \frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial y_2}v + \frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial z_2}w\right),$$

$$\delta\mathcal{B}_2 = -\left(\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial x_2}u + \frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2}v + \frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial z_2}w\right),$$

$$\delta\mathcal{C}_2 = -\left(\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial x_2}u + \frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial y_2}v + \frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}w\right).$$

2° On supprime ce qui se trouve à l'intérieur du volume V_1.

3° On remplit le volume V_2 par une masse de fluide aimanté dont l'aimantation en chaque point ait sensiblement même grandeur et même direction qu'aux points du volume V infiniment voisins de celui-là.

On a alors

$$C = C' + C'' + C''', \tag{18}$$

C', C'', C''' étant les quantités analogues à C relatives à ces trois modifications partielles.

Si le volume et la forme du fluide demeurent invariables et si, en même temps, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$ subissent des variations quelconques $\delta\mathcal{A}_2$, $\delta\mathcal{B}_2$, $\delta\mathcal{C}_2$, on sait que la quantité

$$\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_1}{\partial z_2}\right)dv_2 + \frac{1}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2$$

subit une variation

$$\int\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\,\delta\mathcal{A}_2+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\,\delta\mathcal{B}_2+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\,\delta\mathcal{C}_2\right]dv_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}C'=-\int\Bigg\{&\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial x_2}\right]u\\&+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial y_2}\right]v\\&+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}\right]w\Bigg\}dv_2\end{aligned}$$

ou bien

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}C'=-\int\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]u\\&+\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]v\\&+\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]w\Bigg\}dv_2\\+\int\Bigg\{&\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2^2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial z_2}\right]u\\&+\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial y_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2^2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2\,\partial z_2}\right]v\\&+\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2\,\partial z_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2\,\partial z_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial^2(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2^2}\right]w\Bigg\}dv_2.\end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par $d\omega_1$ l'un des éléments de la surface ω qui confinent au volume V_1, on verra facilement que

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}C''=-S\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]\\\times\left[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)\right]d\omega_1.\end{aligned}\right.$$

De même, si $d\omega_2$ désigne un élément de la surface ω contigu au volume v_2, on aura

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}C'''=-S\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2)}{\partial z_2}\right]\\\times\left[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)\right]d\omega_2.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (2) donnent

$$\mathfrak{A}_2 \frac{\partial(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial z_2} = -\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)},$$

$$\mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial x_2^2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial x_2\,\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial x_2\,\partial z_2} = -\frac{F(\mathfrak{M}, s)}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2,$$

$$\mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial x_2\,\partial y_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial y_2^2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial x_2\,\partial z_2} = -\frac{F(\mathfrak{M}, s)}{2}\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2,$$

$$\mathfrak{A}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial x_2\,\partial z_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial y_2\,\partial z_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{\partial z_2^2} = -\frac{F(\mathfrak{M}, s)}{2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2,$$

Moyennant ces relations, les égalités (18), (19), (20) et (21) donnent

$$\begin{aligned} C = {} & \mathbf{S}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\omega \\ & - \int\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]u + \frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]v + \frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]w\right\}dv_2 \\ & - \frac{1}{2}\int F(\mathfrak{M}, s)\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 u + \frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 v + \frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 w\right\}dv_2 \end{aligned}$$

ou bien, par des intégrations par parties,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} C = {} & \frac{1}{2}\mathbf{S}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\omega \\ & + \frac{1}{2}\int\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2 \\ & + \frac{1}{2}\int\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2\left[\frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x}u + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y}v + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z}w\right]dv_2. \end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant écrire que, dans toute modification du fluide compatible avec son incompressibilité et où chaque élément se déplace en gardant une aimantation invariable de grandeur et de direction, on a, conformément aux égalités ou inégalités (9) et (14),

$$(23)\qquad A + B + C \geqq d\mathfrak{T}'_e + d\mathfrak{T}''_e.$$

Nous appliquerons successivement cette condition (23) à diverses espèces de modifications.

Imaginons, en premier lieu, que l'on ait tracé à l'intérieur du liquide une surface canal infiniment déliée et fermée sur elle-même. Soit Ω la

section droite de cette surface canal. Par des sections droites équidistantes et infiniment rapprochées, divisons cette surface canal en tronçons de même volume. Soit dl la longueur d'un de ces tronçons et $dv_2 = \Omega\, dl$ leur volume commun. Chacun de ces tronçons gardant une concentration invariable et une aimantation invariable de grandeur et de direction, faisons-le progresser d'une même longueur δl parallèlement à une directrice de la surface canal : nous aurons, pour ce tronçon,

$$u = \frac{dx_2}{dl}\,\delta l, \qquad v = \frac{dy_2}{dl}\,\delta l, \qquad w = \frac{dz_2}{dl}\,\delta l.$$

Laissons immobile le reste du liquide.

Le travail des forces extérieures, donné par les égalités (12) et (13), se réduit à

$$d\mathfrak{T}_e = -\Omega\,\delta l \int_l \rho(s)\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right) dl,$$

l'intégration s'étendant à la directrice de la surface canal, c'est-à-dire à une ligne fermée quelconque tracée au sein du liquide.

La concentration de chaque élément de volume et, partant, son volume, demeurant invariables, les égalités (16) et (17) donnent

$$A = 0, \qquad B = 0.$$

Enfin, l'égalité (22) devient

$$C = \frac{1}{2}\Omega\, dl \int_l \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \left[\frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right] dl.$$

La modification est d'ailleurs renversable; la condition (23) devient donc

$$\begin{aligned}\int_l \Bigg(&\left\{\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} + 2\rho(s)\frac{\partial V}{\partial x_2}\right\}\frac{dx_2}{dl} \\ &+ \left\{\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} + 2\rho(s)\frac{\partial V}{\partial y_2}\right\}\frac{dy_2}{dl} \\ &+ \left\{\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} + 2\rho(s)\frac{\partial V}{\partial z_2}\right\}\frac{dz_2}{dl}\Bigg) dl = 0.\end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la forme de la courbe fermée l tracée à l'intérieur du liquide à laquelle s'étend l'intégration.

D'après la théorie des intégrales curvilignes, cette condition équivaut à la proposition suivante :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z)$ *finie, continue et uniforme à l'intérieur du fluide, telle que l'on ait, en tout point du fluide,*

$$(24)\quad \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}} d\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} ds + \rho(s)\, dV = d\Pi.$$

Ce premier résultat obtenu, considérons de nouveau une surface canal infiniment déliée, mais aboutissant par ses deux extrémités M et M′ à la surface déformable du fluide sur laquelle elle découpe deux éléments ω et ω'. Imposons au fluide que renferme ce canal un écoulement δl allant de M vers M′, écoulement soumis aux mêmes restrictions que le précédent.

Pour l'élément ω, la quantité

$$P[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, d\omega$$

a la valeur

$$P\omega\, \delta l \cos(\delta l, N_i) = P\Omega\, dl.$$

Pour l'élément ω', cette même quantité a pour valeur

$$P'\omega'\, \delta l \cos(\delta l, N'_i) = -P'\Omega\, \delta l.$$

Par conséquent, d'après les égalités (12) et (13), on a

$$d\mathfrak{T}'_e + d\mathfrak{T}''_e = \left[P - P' - \int_M^{M'} \rho(s)\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right) dl\right]\Omega\, \delta l.$$

Les égalités (16) et (17) donnent encore, comme dans le cas précédent,

$$A = 0, \qquad B = 0.$$

Enfin l'égalité (22) devient

$$C = \left\{\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}'^2}{2F(\mathfrak{M}', s')}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_M^{M'}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2\left[\frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right] dl\right\}\Omega\, \delta l.$$

La modification virtuelle imposée au fluide est encore une modifica-

tion renversable, en sorte que la condition (23) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - P - \frac{\mathfrak{M}'^2}{2F(\mathfrak{M}', s')} + P' \\
&+ \frac{1}{2}\int_M^{M'} \left(\left\{ \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\} \frac{dx_2}{dl} \right. \\
&\qquad + \left\{ \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial y_2} \right\} \frac{dy_2}{dl} \\
&\qquad \left. + \left\{ \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} + 2\rho(s) \frac{\partial V}{\partial z_2} \right\} \frac{dz_2}{dl} \right) dl = 0
\end{aligned}$$

ou bien, d'après l'égalité (24),

$$(25) \qquad P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} = P' + \Pi' - \frac{\mathfrak{M}'^2}{2F(\mathfrak{M}', s')}.$$

D'où cette nouvelle proposition :

La quantité

$$P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}$$

a la même valeur en tout point de la surface déformable du fluide, ce qu'exprime l'égalité

$$(26) \qquad P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} = K.$$

Les conditions d'équilibre (24) et (26), que nous venons d'obtenir, ont été déduites de l'étude de modifications renversables ; considérons maintenant une modification non renversable définie de la manière suivante :

Une surface canal, de section Ω, part d'un point M pris à l'intérieur du fluide pour aboutir à un point M_1 de sa surface déformable; cette surface limite un canal infiniment délié; à chaque élément $dv_2 = \Omega\, dl$ de ce canal, on impose un écoulement δl de M vers M_1, de manière qu'une cavité, de volume $\Omega\, \delta l$, vient se creuser autour du point M.

Dans ces conditions, les égalités (12) et (13) donneront

$$d\mathfrak{T}'_c + d\mathfrak{T}''_c = -\left[P_1 + \int_M^{M_1} \rho(s) \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dl} \right) dl \right] \Omega\, dl,$$

P_1 étant la pression au point M_1 de la surface déformable.

Les égalités (16) et (17) donnent encore, comme dans le cas précédent,

$$A = 0, \qquad B = 0.$$

Pour déduire C de l'égalité (22), on doit remarquer que la surface de la cavité qui s'est creusée dans l'intérieur du fluide doit être regardée comme faisant partie de sa surface déformable; soit ϖ un élément de cette surface, et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\mathrm{S}\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\varpi,$$

étendue aux éléments de cette surface; N_i représente la normale vers l'intérieur du liquide et par conséquent vers l'extérieur de la cavité.

La cavité étant infiniment petite, $\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}$ a sensiblement la même valeur en tous les points de sa surface. La quantité précédente peut donc s'écrire

$$\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}\mathrm{S}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\varpi.$$

D'ailleurs,

$$\mathrm{S}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\varpi$$

représente l'accroissement du volume enfermé dans la cavité; cette cavité ayant pour volume initial o et pour volume final $\Omega\,\delta l$, on voit que l'on a

$$\frac{1}{2}\mathrm{S}\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\varpi = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}\Omega\,\delta l.$$

L'égalité (22) donne donc, dans le cas actuel,

$$\begin{aligned}\mathrm{C} = \Bigg\{&\frac{\mathfrak{M}^2}{2\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2\mathrm{F}(\mathfrak{M}_1, s_1)}\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}_1}\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}\right]^2\left[\frac{\partial\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dl} + \frac{\partial\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dl}\right]dl\Bigg\}\Omega\,\delta l.\end{aligned}$$

La condition (23) devient donc

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} + P_1$$
$$+ \int_M^{M_1} \Bigg(\left\{ \rho(s) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial x_2} \right\} \frac{dx_2}{dl}$$
$$+ \left\{ \rho(s) \frac{\partial V}{\partial y_2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial y_2} \right\} \frac{dy_2}{dl}$$
$$+ \left\{ \rho(s) \frac{\partial V}{\partial z_2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} \right]^2 \frac{\partial F(\mathfrak{M}, s)}{\partial z_2} \right\} \frac{dz_2}{dl} \Bigg) dl \geqq 0,$$

ou bien, d'après l'égalité (24),

$$P_1 + \Pi_1 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} \geqq \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}. \tag{27}$$

L'égalité (26) permet de transformer cette inégalité en

$$K \geqq \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}. \tag{28}$$

La constante K *ne peut être inférieure à la plus grande des valeurs prises, à l'intérieur de la masse fluide, par la quantité* $\Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}$.

Si nous supposons le point M infiniment voisin du point M_1, l'inégalité (27) devient

$$P_1 \geqq 0 \tag{29}$$

et nous fournit le théorème suivant :

Si la pression n'est pas nulle en un point de la surface déformable du fluide, elle est positive, c'est-à-dire dirigée vers l'intérieur du fluide.

L'inégalité (28) peut s'énoncer autrement. A chaque point M intérieur au fluide correspond une quantité p déterminée par l'égalité

$$p = K - \Pi + \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}. \tag{30}$$

Sans attacher à cette quantité aucun sens mécanique particulier, nous l'appellerons *pression au point* M *intérieur au fluide aimanté.*

L'inégalité (28) fournit alors l'énoncé suivant :

La pression à l'intérieur d'un fluide aimanté n'est jamais une quantité négative.

§ IV. — Conditions d'équilibre d'une dissolution magnétique (suite). Variations de la concentration.

Les conditions d'équilibre obtenues jusqu'ici résultent de l'examen de modifications virtuelles dans lesquelles la concentration de chaque élément de volume de la dissolution a été maintenue invariable; ces conditions s'imposent donc même à un liquide dont chaque élément aurait une constitution invariable : ce sont à proprement parler les conditions *hydrostatiques* de l'équilibre de la dissolution.

Nous allons maintenant examiner une modification dans laquelle la concentration des diverses parties du liquide ne soit pas maintenue invariable; l'étude de cette modification nous fournira de nouvelles conditions d'équilibre.

Considérons une déformation renversable quelconque de la dissolution, déformation accompagnée de variations quelconques dans la concentration des différentes parties. On doit avoir, d'après les égalités (10) et (14),

$$A + B + C - d\mathfrak{T}'_e - d\mathfrak{T}''_e = 0.$$

Si l'on tient compte des égalités (12), (13), (16), (17) et (22) d'une part, et de la condition (24) d'autre part, cette égalité devient

$$\begin{aligned}
&\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\delta s\, dv_2 \\
&+\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\left(\frac{\partial s}{\partial x}u + \frac{\partial s}{\partial y}v + \frac{\partial s}{\partial z}w\right) dv_2 \\
&+\int\left[\Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right) dv_2 \\
&- S\, P[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, d\omega \\
&+ \frac{1}{2} S\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, d\omega \\
&\qquad\qquad + \int\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}u + \frac{\partial \Pi}{\partial y}v + \frac{\partial \Pi}{\partial z}w\right) dv_2 = 0.
\end{aligned}$$

Une intégration par parties, jointe à cette remarque que

$$P + \Pi - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)}$$

a la même valeur K en tout point de la surface déformable du fluide, permet d'écrire cette égalité sous la forme suivante :

$$\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\left(\delta s + \frac{\partial s}{\partial x}u + \frac{\partial s}{\partial y}v + \frac{\partial s}{\partial z}w\right)dv_2$$
$$+\int\left[\Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \Pi\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2$$
$$- K\,\mathbf{S}\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\omega = 0.$$

Mais, d'autre part,

$$\mathbf{S}\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\omega$$
$$= -\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\left\{\begin{aligned}&\int\left[\frac{d\Phi(s)}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial s} + V\frac{d\rho(s)}{ds}\right]\left(\delta s + \frac{\partial s}{\partial x_2}u + \frac{\partial s}{\partial y_2}v + \frac{\partial s}{\partial z_2}w\right)dv_2\\ &+\int\left[\Phi(s) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) + V\rho(s) - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M}, s)} - \Pi + K\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2 = 0.\end{aligned}\right.$$

L'élément dv_2, dont un point a pour coordonnées x_2, y_2, z_2, au début de la modification, renferme, au début de cette modification, une masse de dissolvant

$$d\mu = \frac{1}{1+s}\rho(s)\,dv_2.$$

L'élément qui renferme la même masse $d\mu$ de dissolvant a, à la fin de la modification, un volume $(dv_2 + \delta\, dv_2)$; le point de cet élément, qui avait pour coordonnées x_2, y_2, z_2, a maintenant pour coordonnées $x_2 + u$, $y_2 + v$, $z_2 + w$. La concentration de la dissolution que renferme cet élément a augmenté de

$$\delta s + \frac{\partial s}{\partial x_2}u + \frac{\partial s}{\partial y_2}v + \frac{\partial s}{\partial z_2}w.$$

La masse de dissolvant que renferme cet élément étant demeurée invariable, on doit avoir

$$(32)\quad \frac{d}{ds}\left[\frac{\rho(s)}{1+s}\right]\left(\delta s+\frac{\partial s}{\partial x_2}u+\frac{\partial s}{\partial y_2}v+\frac{\partial s}{\partial z_2}w\right)dv_2+\frac{\rho(s)}{1+s}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial y_2}+\frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2=0,$$

ce qui donne à la relation (33) la forme

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\left\{\frac{d\Phi(s)}{ds}+\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M},s)}{\partial s}+V\frac{d\rho(s)}{ds}\right.\\&\qquad\left.-\frac{d}{ds}\log\frac{\rho(s)}{1+s}\left[\Phi(s)+\mathcal{F}(\mathfrak{M},s)+V\rho(s)-\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M},s)}-H+K\right]\right\}\Delta s\,dv_2=0,\end{aligned}\right.$$

en désignant, pour abréger, par Δs la quantité

$$\delta s+\frac{\partial s}{\partial x_2}u+\frac{\partial s}{\partial y_2}v+\frac{\partial s}{\partial z_2}w.$$

L'égalité (32) entraîne cette conséquence, à laquelle la modification considérée doit nécessairement satisfaire, que la masse du dissolvant doit demeurer invariable. Il doit en être de même de la masse du sel dissous, ou, en d'autres termes, de la masse totale de la dissolution.

Celle-ci a pour valeur

$$\int\rho(s)\,dv_2.$$

On doit donc avoir

$$\int\frac{d\rho(s)}{ds}\left[\delta s+\frac{\partial s}{\partial x_2}u+\frac{\partial s}{\partial y_2}v+\frac{\partial s}{\partial z_2}w\right]dv_2+\int\rho(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial y_2}+\frac{\partial w}{\partial z_2}\right)dv_2=0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (32),

$$(34)\qquad \int\left[\frac{d\rho(s)}{ds}-(1+s)\frac{d}{ds}\frac{\rho(s)}{1+s}\right]\Delta s\,dv_2=0.$$

L'égalité (33) doit avoir lieu, non pas quelles que soient les quantités Δs, mais pour tous les systèmes de valeurs de Δs qui vérifient l'égalité (34). Dès lors, d'après un principe connu du calcul des va-

riations, il doit exister une constante λ, telle que l'on ait

$$\int\left\{\frac{d\Phi(s)}{ds}+\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M},s)}{\partial s}+V\frac{d\rho(s)}{ds}\right.$$
$$\left.-\frac{d}{ds}\log\frac{\rho(s)}{1+s}\left[\Phi(s)+\mathcal{F}(\mathfrak{M},s)+V\rho(s)-\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M},s)}-\Pi+K\right]\right\}\Delta s\,dv_2$$
$$-\lambda\int\left[\frac{d\rho(s)}{ds}-(1+s)\frac{d}{ds}\frac{\rho(s)}{1+s}\right]\Delta s\,dv_2=0.$$

quelles que soient les quantités Δs.

En d'autres termes, il existe une constante λ, telle que l'on ait, en tout point de la dissolution,

$$\frac{d\Phi(s)}{ds}+\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M},s)}{\partial s}+(V-\lambda)\frac{d\rho(s)}{ds}$$
$$-\frac{d}{ds}\log\frac{\rho(s)}{1+s}\left[\Phi(s)+\mathcal{F}(\mathfrak{M},s)+(V-\lambda)\rho(s)-\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M},s)}-\Pi+K\right]=0.$$

Désignons par $v(s)$ le volume spécifique de la dissolution de concentration s. Nous aurons

$$\rho(s)=\frac{1}{v(s)},$$
$$\frac{d\rho(s)}{ds}=-\frac{1}{[v(s)]^2}\frac{dv(s)}{ds},$$
$$-\frac{d}{ds}\log\frac{\rho(s)}{1+s}=\frac{d}{ds}\log[(1+s)v(s)],$$

et l'égalité précédente s'écrira

$$(35)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}\left\{(1+s)[\Phi(s)+\mathcal{F}(\mathfrak{M},s)]v(s)\right\}\\&\quad+\frac{d}{ds}[(1+s)v(s)]\left[K-\Pi-\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M},s)}\right]+V-\lambda=0.\end{aligned}\right.$$

Cette égalité peut encore se transformer.

Désignons par p, comme dans l'égalité (30), la quantité

$$K-\Pi+\frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mathfrak{M},s)};$$

posons, en outre,

$$\varphi(s,p)=[\Phi(s)+p]v(s).$$

La quantité $\varphi(s, p)$ ainsi déterminée sera *le potentiel thermodynamique de l'unité de masse d'une dissolution homogène, de concentration s, soumise à la pression uniforme et constante p.*

L'égalité (35) pourra alors s'écrire

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}[(1+s)\varphi(s,p)] + \frac{\partial}{\partial s}[(1+s)\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)\,\nu(s)] \\ &\qquad - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\frac{d}{ds}[(1+s)\nu(s)] + V - \lambda = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour faire disparaître la constante λ, prenons la différentielle totale des deux membres de cette équation. Nous aurons

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,p)]\,ds + \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial p}[(1+s)\varphi(s,p)]\,dp \\ &\quad + d\frac{\partial}{\partial s}[(1+s)\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)\,\nu(s)] - d\left\{\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\frac{d}{ds}[(1+s)\nu(s)]\right\} + dV = 0 \end{aligned}\right.$$

Une propriété connue du potentiel thermodynamique donne

$$\frac{\partial}{\partial p}\varphi(s,p) = \nu(s).$$

D'ailleurs, on déduit de l'égalité (30)

$$dp = -d\Pi + \frac{1}{2}d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}$$

ou bien, en tenant compte de l'égalité (24),

$$\begin{aligned} dp &= -\frac{1}{\nu(s)}dV + \frac{1}{2}d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 dF(\mathfrak{M}, s), \\ &= -\frac{1}{\nu(s)}dV + d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}d\mathfrak{M}. \end{aligned}$$

De là, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial p}[(1+s)\varphi(s,p)]\,dp = &-\frac{1}{\nu(s)}\frac{d}{ds}[(1+s)\nu(s)]\,dV \\ &+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{(1+s)\nu(s)\left[d\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}d\mathfrak{M}\right]\right\}, \end{aligned}$$

si l'on observe que, d'après l'égalité (2),

$$\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)} = \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)}{\partial \mathfrak{M}},$$

et que, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(1+s)\,\varphi(s)\,\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right] d\mathfrak{M} = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial \mathfrak{M}}\left[(1+s)\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\,\varphi(s)\right] d\mathfrak{M},$$

on voit que l'égalité (37) se réduira à la forme suivante :

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[(1+s)\,\varphi(s, p)\right] ds - (1+s)\,\frac{d}{ds}\log\varphi(s)\,dV \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[(1+s)\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s)\,\varphi(s)\right] ds - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\,\frac{d^2}{ds^2}(1+s)\,\varphi(s)\,ds \\ &\qquad + (1+s)\,\varphi(s)\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\,ds + \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial \mathfrak{M}}\,\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\,d\mathfrak{M}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'égalité fondamentale qui lie les trois variations ds, $d\mathfrak{M}$, dV correspondant à un même déplacement infiniment petit (dx, dy, dz) à l'intérieur du liquide.

§ V. — Dissolution soustraite à l'action du magnétisme.

Voyons, en particulier, ce que devient cette relation dans le cas où la dissolution est soustraite à l'action de tout aimant permanent; dans ce cas, la dissolution se désaimante; on a

$$\mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, s) = 0,$$

et l'égalité précédente devient

$$(39)\qquad \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[(1+s)\,\varphi(s, p)\right] ds = (1+s)\,\frac{d}{ds}\log\varphi(s)\,dV.$$

Dans un travail précédent [1], nous avons appliqué la théorie du

---

[1] P. Duhem, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions* (*Journal de Physique pure et appliquée*, 2e série, t. VII; 1888).

potentiel thermodynamique à l'étude de l'influence que la pesanteur exerce sur la concentration des dissolutions salines; cette question avait, auparavant, fait l'objet des travaux de MM. Gouy et Chaperon [1]. Les lois de la concentration des dissolutions par la pesanteur sont comprises dans une égalité fondamentale [2] qui n'est qu'une forme particulière de l'égalité (39).

La méthode suivie dans notre Mémoire, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions*, permet de discuter l'égalité (39). Cette méthode montre, en effet, que l'on a, en toutes circonstances,

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,p)] > 0.$$

Si la densité de la dissolution croît avec la concentration, on a

$$\frac{d}{ds}\log\rho(s) < 0;$$

si, au contraire, la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît, on a

$$\frac{d}{ds}\log\rho(s) > 0,$$

On arrive donc aux conclusions suivantes :

Si la densité de la dissolution croît avec la concentration, on a

$$\frac{ds}{dV} < 0;$$

si, au contraire, la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît, on a

$$\frac{ds}{dV} > 0.$$

---

(1) Gouy et G. Chaperon, *L'équilibre osmotique et la concentration des dissolutions par la pesanteur* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CV, p. 117; 1887). — *Sur la concentration des dissolutions par la pesanteur* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XII, p. 384; 1887). — *Sur l'équilibre osmotique* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XIII, p. 120; 1888).

(2) *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions*, équation (32).

Ces inégalités peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Dans le cas où la densité d'une dissolution croît avec la concentration de cette dissolution, la concentration décroît d'un point à l'autre de la dissolution si la fonction potentielle des forces extérieures qui agissent sur la dissolution croît lorsqu'on passe du premier point au suivant. L'inverse a lieu dans le cas où la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît.

On retrouve ainsi, sous une forme générale, les résultats dont MM. Gouy et Chaperon ont donné les premiers une démonstration théorique.

§ VI. — Dissolution soumise à l'action d'aimants permanents.

Pour discuter les propriétés d'une dissolution soumise à l'action d'aimants permanents, il faut nécessairement particulariser la forme des fonctions $\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)$, $F(\mathfrak{M}, s)$. Nous admettrons qu'il s'agit de la dissolution d'un sel magnétique dans un liquide non magnétique, et que l'on a, comme aux égalités (4) et (7),

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2Ks}.$$

Dans ces conditions, nous aurons les égalités suivantes

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\mathcal{F}(\mathfrak{M}, s)\varphi(s)]$$
$$= \frac{\mathfrak{M}^2}{2K}\left\{\frac{1}{s}\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\varphi(s)] - \frac{2}{s^2}\frac{d}{ds}[(1+s)\varphi(s)] + \frac{2}{s^3}(1+s)\varphi(s)\right\},$$

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)}\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\varphi(s)] = \frac{\mathfrak{M}^2}{Ks}\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\varphi(s)],$$

$$(1+s)\varphi(s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} = \frac{2\mathfrak{M}^2}{Ks^3}(1+s)\varphi(s),$$

$$(1+s)\varphi(s)\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} = -\frac{2\mathfrak{M}}{Ks^2}(1+s)\varphi(s),$$

et l'égalité (38) deviendra, toute réduction faite,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\varphi(s,p)] + \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{K}s^3}\right\}3(1+s)v(s) + s\frac{d}{ds}[(1+s)v(s)] - 2s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)v(s)]\Big\}\Big)ds \\ &\qquad -(1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)\,d\mathrm{V} - 2(1+s)v(s)\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{K}s^2}d\mathfrak{M} = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans cette égalité, nous connaissons le signe de la quantité

$$-(1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)$$

qui sert de coefficient à $d\mathrm{V}$. Cette quantité est positive si la densité de la dissolution croît avec la concentration, et négative dans le cas contraire.

La quantité

$$-2(1+s)v(s)\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{K}s},$$

qui sert de coefficient à $d\mathfrak{M}$, est essentiellement négative.

Le coefficient de ds renferme un terme, le terme en $\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{K}s^3}$, dont le signe est plus difficile à préciser d'une manière entièrement générale; toutefois, pour les concentrations très faibles, ce terme peut être réduit à

$$3(1+s)v(s)\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathrm{K}s^3}$$

et est alors essentiellement positif. Il en est évidemment de même tant que la concentration ne surpasse pas une certaine limite au-dessous de laquelle nous la supposerons toujours comprise. Dans ces conditions, le coefficient de ds est assurément positif.

Si donc nous écrivons ds sous la forme suivante

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \mathfrak{M}}d\mathfrak{M} + \frac{\partial s}{\partial \mathrm{V}}d\mathrm{V},$$

nous voyons que $\frac{\partial s}{\partial \mathfrak{M}}$ est essentiellement positif, tandis que $\frac{\partial s}{\partial \mathrm{V}}$ est négatif si la densité de la dissolution croît avec la concentration, et po-

sitif si la densité de la dissolution décroît lorsque la concentration croît.

Supposons la dissolution soustraite à l'action des forces extérieures; dans ce cas, nous pourrions énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'on soumet à l'action d'aimants permanents une dissolution d'un sel magnétique dans un dissolvant non magnétique, la concentration varie d'un point à l'autre de la dissolution; elle est d'autant plus forte en un point que l'aimantation est plus forte en ce point; les surfaces d'égale aimantation sont identiques aux surfaces d'égale concentration.

Nous pouvons encore transformer l'égalité (40) d'une autre manière.

A la température absolue T, où nous supposons porté le système que nous étudions, une dissolution de concentration s, soustraite à l'action d'aimants permanents, émet de la vapeur d'eau et cette vapeur est saturée quand sa tension atteint une certaine valeur ϖ. Nous pouvons écrire

$$(1+s)\,\varphi(s,p) = (1+s)\,\varphi(s,\varpi) + (1+s)\int_{\varpi}^{p} \frac{\partial\,\varphi(s,p)}{\partial p}\,dp.$$

Si l'on observe que, conformément à une propriété déjà invoquée du potentiel thermodynamique, on a

$$\frac{\partial\,\varphi(s,p)}{\partial p} = v(s),$$

on voit que l'on peut écrire

$$(41)\quad \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[(1+s)\,\varphi(s,p)\right] = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[(1+s)\,\varphi(s,\varpi)\right] + \frac{d^2}{ds^2}\left[(1+s)\,v(s)\right](p-\varpi).$$

L'égalité (30) donne

$$p = \mathrm{K} - \Pi + \frac{\mathfrak{M}^2}{2\,\mathrm{F}(\mathfrak{M},s)}.$$

Considérons dans le fluide un certain point o où Π a la valeur Π_0, s la valeur s_0 et $\mathfrak{M}$ la valeur $\mathfrak{M}_0$. Pour un point quelconque M du fluide, on aura

$$\Pi = \Pi_0 + \int_0^{\mathrm{M}} d\Pi.$$

Si le point o est à la surface libre du fluide, on a, d'après l'égalité (26),

$$\Pi_0 = K - P_0 + \frac{\mathfrak{M}_0^2}{2\,F(\mathfrak{M}_0, s_0)},$$

P_0 étant la pression extérieure au point o. L'égalité (24) donne d'ailleurs

$$d\Pi = \rho(s)\,dV + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 d\,F(\mathfrak{M}, s).$$

On a donc

$$(42)\quad p = P_0 + \frac{\mathfrak{M}^2}{2\,F(\mathfrak{M}, s)} + \frac{\mathfrak{M}_0^2}{2\,F(\mathfrak{M}_0, s_0)} - \int_0^M \frac{1}{\varphi(s)}\,dV - \frac{1}{2}\int_0^M \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 d\,F(\mathfrak{M}, s).$$

Les égalités (41) et (42) donnent

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, p)]\\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, \varpi)] + \frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,\varphi(s)]\left[P_0 - \varpi + \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, s)} - \frac{\mathfrak{M}_0^2}{F(\mathfrak{M}_0, s_0)}\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \int_0^M \frac{1}{\varphi(s)}\,d\varphi - \int_0^M \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\,d\mathfrak{M}\right].
\end{aligned}$$

Reportons cette valeur dans l'égalité (40), après avoir remplacé $F(\mathfrak{M}, s)$ par Ks, et nous arriverons à l'égalité suivante :

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s, \varpi)]\right.\\
&\quad + \frac{\mathfrak{M}^2}{Ks^3}\left\{3(1+s)\,\varphi(s) - s\frac{d}{ds}[(1+s)\,\varphi(s)] - s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,\varphi(s)]\right\}\\
&\quad + \frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,\varphi(s)]\left[P_0 - \varpi - \frac{\mathfrak{M}_0^2}{Ks_0} - \int_0^M \frac{1}{\varphi(s)}\,dV - \int_0^M \frac{\mathfrak{M}}{Ks}\,d\mathfrak{M}\right]\Bigg\}ds\\
&\qquad\qquad - (1+s)\frac{d}{ds}\log\varphi(s)\,dV - 2(1+s)\,\varphi(s)\frac{\mathfrak{M}}{Ks^2}\,d\mathfrak{M} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Soit J l'intensité du champ créé par les aimants permanents. Au degré d'approximation adopté en écrivant les équations (5), on a

$$\mathfrak{M}^2 = K^2 s^2 J^2,$$
$$\mathfrak{M}\,d\mathfrak{M} = K^2(s^2 J\,dJ + J^2 s\,ds).$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (43) devient

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &\Bigg\{\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s,\varpi)\\ &\quad+\frac{kJ^2}{s}\left\{(1+s)\,v(s)-s\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)]-s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\right\}\\ &\quad+\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\left[P_0-\varpi-Ks_0J_0-\int_0^M\frac{1}{v(s)}\,dV-K\int_0^M(sJ\,dJ+J^2\,ds)\right]\Bigg\}ds\\ &\qquad\qquad-(1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)\,dV-2(1+s)\,v(s)KJ\,dJ=0. \end{aligned}\right.$$

Faisons enfin subir à cette égalité une dernière transformation.

A la température T, que nous considérons, sous la pression ϖ, l'unité de masse de vapeur d'eau a un volume $U(\varpi)$.

D'après des relations que nous avons démontrées autre part [1], on a

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[(1+s)\,\varphi(s,\varpi)]=-\frac{1}{s}\left[U(\varpi)-v(s)+s(1+s)\frac{d\,v(s)}{ds}\right]\frac{d\varpi}{ds}.$$

Cette relation transforme l'égalité (44) en la suivante :

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\Bigg\{U(\varpi)\frac{d\varpi}{ds}-\left[v(s)-s(1+s)\frac{d\,v(s)}{ds}\right]\frac{d\varpi}{ds}\\ &\quad-KJ^2\left\{(1+s)\,v(s)-s\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)]-s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\right\}\\ &\quad-s\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)]\left[P_0-\varpi-KJs_0^2-\int_0^M\frac{dV}{v(s)}-K\int_0^M(sJ\,dJ+J^2\,ds)\right]\Bigg\}ds\\ &\qquad\qquad+s(1+s)\frac{d}{ds}\log v(s)\,dV+2s(1+s)\,v(s)\,KJ\,dJ=0. \end{aligned}\right.$$

Aux températures ordinaires, le volume spécifique $v(s)$ de la dissolution est très petit en comparaison du volume spécifique $U(\varpi)$ de la vapeur saturée. On peut négliger le premier en présence du second. On peut de même négliger, en présence de $U(\varpi)$, les quantités

$$s\frac{d}{ds}[(1+s)\,v(s)],\quad s\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)],$$

$$s^2\frac{d^2}{ds^2}[(1+s)\,v(s)],\quad v(s)-s(1+s)\frac{d\,v(s)}{ds}.$$

---

[1] P. Duhem, *De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions* [égalités (38) et (47)]. (*Journal de Physique*, 2e série, t. VII; 1888.)

On peut donc réduire approximativement l'égalité (45) à la forme suivante :

$$(46)\qquad U(\varpi)\frac{d\varpi}{ds}+s(1+s)\frac{d\log\varphi(s)}{ds}dV+2s(1+s)\varphi(s)\,KJ\,dJ=0.$$

Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac peuvent être appliquées à la vapeur d'eau au degré d'approximation dont nous nous contentons ici; si donc nous désignons par ψ le poids moléculaire de l'eau, par R une constante qui est la même pour tous les gaz, nous aurons

$$U(\varpi)=\frac{RT}{\psi\varpi},$$

et l'égalité (46) deviendra

$$(47)\qquad \frac{RT}{\psi}\frac{d}{ds}\log\varpi\,ds+s(1+s)\frac{d\log\varphi(s)}{ds}dV+2s(1+s)\varphi(s)\,KJ\,dJ=0.$$

Toutes les quantités qui figurent dans cette égalité (47) sont des quantités mesurables.

Supposons que les seules forces extérieures auxquelles la dissolution est soumise soient les actions de la pesanteur; nous aurons alors

$$V=gz,$$

en désignant par g l'intensité de la pesanteur, et par z la cote du point considéré au-dessus d'un plan horizontal arbitraire.

Étudions les variations de la concentration aux divers points d'un plan horizontal tracé à l'intérieur de la dissolution. Ces variations seront données par l'égalité

$$\frac{RT}{\psi}\frac{d}{ds}\log\varpi\,ds+s(1+s)\varphi(s)\,K\,d(J^2)=0.$$

Les points où la concentration a une même valeur formeront, sur le plan horizontal en question, une ligne le long de laquelle l'intensité du champ aura aussi une valeur constante. Ainsi, *sur un plan horizontal, les lignes d'égale concentration marquent l'intersection de ce plan par les surfaces isodynamiques du champ. La concentration croît avec l'intensité du champ.*

Si l'on place sur les pôles d'un aimant une cuve plate remplie d'une dissolution d'un sel magnétique coloré, on pourra, par les variations

de la teinte, se rendre compte des variations de la concentration. Les lignes d'égale teinte dessineront l'intersection du fond de la cuve avec les surfaces isodynamiques.

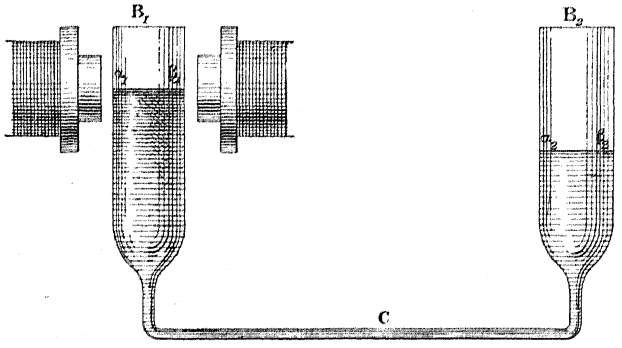
C'est à cet ordre de phénomènes que l'on doit rattacher quelques observations de M. Colardeau [1]. Ces phénomènes jouent certainement un rôle dans l'explication des faits curieux observés par M. Ira Remsen, faits qui ne paraissent pas devoir s'expliquer uniquement par les raisons que nous avons données dans notre *Théorie de l'aimantation par influence*.

§ VII. — Quelques conséquences expérimentales.

La théorie précédente conduit à quelques conséquences qui ont une certaine importance au point de vue de la Physique expérimentale et que nous nous proposons de mettre en évidence dans ce dernier paragraphe.

Imaginons un vase formé de deux branches verticales B_1, B_2 (*fig.* 2), reliées l'une à l'autre par un tube de communication horizontal C.

Fig. 2.



La branche B_1 est placée entre les deux pôles d'un électro-aimant puissant, tandis que la branche B_2, fort éloignée de ces deux pôles, se trouve dans une région où le champ magnétique a une intensité négligeable.

---

(1) E. Colardeau, *Journal de Physique*, 2e série, t. VI; 1887.

Le tube est rempli d'une dissolution formée par un sel magnétique; cette dissolution est soumise à la pression atmosphérique. D'après ce qui précède, elle sera plus concentrée dans la branche B_1 que dans la branche B_2. Le niveau ne sera pas forcément le même dans la branche B_1 que dans la branche B_2.

Soient

$\alpha_1\beta_1$ le niveau du liquide dans la branche B_1;
$\alpha_2\beta_2$ le niveau du liquide dans la branche B_2;
Z_1 la distance du premier niveau à un plan horizontal arbitraire;
Z_2 la distance du second niveau à ce même plan horizontal;
s_1 la concentration au premier niveau;
s_2 la concentration au second niveau;
$\mathfrak{M}_1$ l'intensité de l'aimantation en un point du premier niveau;
P la pression extérieure.

Supposons que la force extérieure appliquée aux éléments du liquide soit la pesanteur, dont l'intensité est g.

Soient m_1 un point du premier niveau, et m_2 un point du second; relions ces deux points par un chemin m_2m_1 situé en entier au sein de la dissolution.

L'égalité (26), appliquée au point m_1, donne

$$P + \Pi_1 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = K.$$

La même égalité, appliquée au point m_2, donne

$$P + \Pi_2 = K.$$

On a donc

$$\Pi_1 - \Pi_2 - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0$$

ou

$$\int_{m_2}^{m_1} d\Pi - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0.$$

D'autre part, l'égalité (24) donne

$$d\Pi = \frac{1}{\varphi(s)} dV + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 dF(\mathfrak{M}, s).$$

On a donc

$$\int_{m_2}^{m_1} \frac{1}{\varphi(s)} dV + \frac{1}{2}\int_{m_2}^{m_1} \left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2 d\,F(\mathfrak{M}, s) - \frac{\mathfrak{M}_1^2}{2\,F(\mathfrak{M}_1, s_1)} = 0.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en

$$(48) \qquad \int_{m_2}^{m_1} \frac{1}{\varphi(s)} dV = \frac{1}{2}\int_{m_2}^{m_1} F(\mathfrak{M}, s)\, d\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2.$$

Dans le cas où, comme nous l'avons supposé, les seules forces agissantes sont la pesanteur, cette égalité devient

$$(49) \qquad g\int_{m_2}^{m_1} \frac{dz}{\varphi(s)} = \frac{1}{2}\int_{m_2}^{m_1} F(\mathfrak{M}, s)\, d\left[\frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, s)}\right]^2.$$

Au degré d'approximation employé dans les formules précédentes, on a

$$F(\mathfrak{M}, s) = Ks,$$
$$\frac{\mathfrak{M}^2}{[F(\mathfrak{M}, s)]^2} = J^2.$$

L'égalité (49) devient alors

$$(50) \qquad g\int_{m_2}^{m_1} \frac{dz}{\varphi(s)} = \frac{K}{2}\int_{m_2}^{m_1} s\, dJ^2.$$

Cette égalité peut encore se transformer par une nouvelle approximation. Soit

$$\Sigma = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

la concentration moyenne dans l'appareil. Si les différences de concentration sont faibles entre les deux branches, on pourra remplacer l'égalité précédente par

$$(51) \qquad \frac{g}{\varphi(\Sigma)}(Z_1 - Z_2) = \frac{K\Sigma}{2} J_1^2,$$

Cette égalité nous montre que *le liquide sera plus élevé dans la branche* B_1 *que dans la branche* B_2; *la mesure de la dénivellation, jointe à la mesure du champ magnétique, conduit à une détermination approchée de la constante* K, *semblable à celle que Quincke a employée pour déterminer le coefficient d'aimantation des liquides homogènes.*

L'égalité (47) peut s'écrire

$$(52)\qquad \frac{RT}{2\psi}\frac{1}{(1+s)\varphi(s)}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds - \frac{s}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varphi(s)}dV + \frac{K}{2}s\,dJ^2 = 0.$$

Elle peut aussi s'écrire

$$(53)\qquad \frac{RT}{\psi}\frac{1}{s(1+s)\dfrac{d\varphi(s)}{ds}}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds + \frac{dV}{\varphi(s)} + \frac{K}{\dfrac{d}{ds}\log\varphi(s)}dJ^2 = 0.$$

Remplaçons dV par $g\,dz$.

Comparons les égalités (50) et (52); nous trouverons

$$(54)\qquad \frac{RT}{2\psi}\int_{s_2}^{s_1}\frac{1}{(1+s)\varphi(s)}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds = -g\int_{m_2}^{m_1}\left[\frac{1}{\varphi(s)} - \frac{s}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varphi(s)}\right]dz.$$

Si la concentration diffère peu dans les deux branches, cette égalité pourra s'écrire approximativement

$$(55)\qquad \frac{RT}{2\psi}\frac{1}{(1+\Sigma)\varphi(\Sigma)}\log\left(\frac{\varpi_2}{\varpi_1}\right) = g\left[\frac{1}{\varphi(\Sigma)} - \frac{\Sigma}{2}\frac{d}{d\Sigma}\frac{1}{\varphi(\Sigma)}\right](Z_1 - Z_2),$$

relation simple et facile à vérifier par l'expérience entre la différence de niveau qui existe entre les deux branches de l'appareil et les tensions des vapeurs émises par les dissolutions que renferment ces deux branches.

En comparant de même les égalités (50) et (53), on trouve

$$(56)\qquad \frac{RT}{\psi}\int_{m_2}^{m_1}\frac{1}{s(1+s)\dfrac{d\varphi(s)}{ds}}\frac{d}{ds}\log\varpi\, ds + \frac{K}{2}\int_{m_2}^{m_1}\left[\frac{2\varphi(s)}{\dfrac{d\varphi(s)}{ds}} + s\right]dJ^2 = 0.$$

Si la concentration diffère peu dans les deux branches, cette éga-

lité (56) peut s'écrire approximativement

$$(57)\qquad \frac{RT}{\psi}\,\frac{1}{\Sigma(1+\Sigma)}\log\left(\frac{\varpi_2}{\varpi_1}\right)=\frac{K}{2}\left[\Sigma\frac{d\,v(\Sigma)}{d\Sigma}+2\,v(\Sigma)\right]J_1^2,$$

égalité à laquelle on parviendrait d'ailleurs en comparant les égalités (51) et (55). *Cette égalité* (57) *fournit une relation, susceptible d'être vérifiée par l'expérience, entre l'intensité du champ et les tensions des vapeurs émises par les dissolutions que renferment les deux branches.*