Annales scientifiques de l'É.N.S.

S. Zaremba

Note concernant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 135-142
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__135_0>

NOTE

CONCERNANT

L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

Par M. S. ZAREMBA.

1. Je me propose de faire voir dans cette Note que la détermination de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \varphi_1(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \varphi_2(x+y)z = 0,$$

φ_1 et φ_2 étant deux fonctions quelconques de $x+y$, peut être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire, linéaire, du second ordre et à des quadratures; j'appliquerai ensuite les résultats obtenus à un problème élégant indiqué par M. Darboux dans le cours de l'une de ses Leçons professées à la Sorbonne.

2. Regardons x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans le plan et soit (C) une courbe en chaque point de laquelle la valeur de z et celle de l'une de ses dérivées premières est donnée; désignons, en outre, par $u\,(x, y, x_0, y_0)$ une fonction convenablement déterminée de x, y, x_0, y_0, mais indépendante, tant de la forme de la courbe (C) que des valeurs de z et de ses dérivées sur cette courbe. On aura alors, pour la valeur de z en un point quelconque, x_0, y_0, l'expression suivante en fonction des données, due à Riemann (*Werke*, p. 161), et que j'écris sous la forme qui lui a été donnée par

M. Darboux (*Cours de Géométrie*, t. II, p. 78)

$$(2)\quad \begin{cases} z(x_0, y_0) = \dfrac{(uz)_B + (uz)_C}{2} \\ \qquad - \displaystyle\int_C^B \left\{ \left[\varphi_1 uz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx - \left[\varphi_1 uz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dy \right\}, \end{cases}$$

où l'intégration doit être effectuée suivant la portion de la courbe (C), interceptée par les droites $x = x_0$ et $y = y_0$.

Voici comment on peut déduire de l'équation (2) la valeur de u, en tirant parti de ce que cette relation doit avoir lieu, quelle que soit la courbe (C), pour une intégrale quelconque de l'équation (1). Introduisons dans la formule considérée de nouvelles variables, définies par les équations

$$2x = \xi + \eta, \qquad 2y = \xi - \eta, \qquad 2x_0 = \xi_0 + \eta_0, \qquad 2y_0 = \xi_0 - \eta_0;$$

réduisons la courbe (C) à la droite $\xi =$ const., et prenons pour z une intégrale particulière de l'équation (1) de la forme

$$z = \Phi(\eta_0)\,\psi(\xi_0),$$

où l'on peut poser, comme on s'en assure sans aucune peine,

$$\Phi = \cos\mu(\eta_0 - \eta), \qquad \psi = C_1\psi_1(\xi_0) + C_2\psi_2(\xi_0),$$

les lettres μ, η, C_1 et C_2 désignant ici des constantes arbitraires; ψ_1 et ψ_2, un système de solutions fondamentales de l'équation différentielle

$$(2)\qquad \psi'' + 2\varphi_1(\xi_0)\,\psi' + [\varphi_2(\xi_0) + \mu^2]\psi = 0.$$

L'équation (2) devient, en faisant $C_1 = \psi_2(\xi)$ et $C_2 = -\psi_1(\xi)$, et en remarquant que z et $\dfrac{\partial z}{\partial \eta_0}$ seront nuls alors sur la droite $\xi =$ const.,

$$\begin{aligned} &[\psi_1(\xi_0)\,\psi_2(\xi) - \psi_2(\xi_0)\,\psi_1(\xi)]\cos\mu(\eta_0 - \eta) \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\int_{\eta_C}^{\eta_B} u[\psi_1'(\xi)\,\psi_2(\xi) - \psi_2'(\xi)\,\psi_1(\xi)]\cos\mu(\eta_0 - \eta)\,d\eta_0; \end{aligned}$$

d'où, en divisant par $[\psi_1'(\xi)\psi_2(\xi) - \psi_2'(\xi)\psi_1(\xi)]$, en ayant égard au théorème de Fourier et en supposant η compris entre η_B et η_C,

$$(4) \qquad u = \pm \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\psi_1(\xi_0)\,\psi_2(\xi) - \psi_2(\xi_0)\,\psi_1(\xi)}{\psi_1'(\xi)\,\psi_2(\xi) - \psi_2'(\xi)\,\psi_1(\xi)} \cos\mu(\eta_0 - \eta)\,d\mu.$$

Cette expression de u a déjà été citée par Riemann (*Werke*, p. 162), à l'occasion d'une équation qui se déduit de l'équation (1), en y posant $\varphi_2 = 0$; mais l'illustre géomètre n'en communique point la déduction, en négligeant même de faire observer que la région de validité de la formule (4) est déterminée par l'inégalité

$$(5) \qquad (x - x_0)(y - y_0) > 0,$$

l'intégrale devant être prise avec le signe commun de $x - x_0$ et $y - y_0$. On peut pourtant, malgré cette restriction, substituer la valeur (4) de u dans la formule (2) et arriver de la sorte à une expression de l'intégrale générale de l'équation (1), pourvu que l'on ait eu soin de choisir la courbe (C) de manière qu'elle intercepte sur les axes des segments de mêmes signes. En effet, on sait d'ailleurs que la courbe (C) ne doit pas avoir plus d'un seul point d'intersection avec toute droite parallèle à l'un des axes; il est donc aisé de voir que, cette courbe étant choisie comme il vient d'être dit, les valeurs de u n'interviendront dans la formule (2) que pour des valeurs de ses arguments qui satisferont à l'inégalité (5).

On voit, par conséquent, que la réduction annoncée du problème de l'intégration d'une équation de la forme (1) est réellement effectuée.

3. Je passe maintenant au problème indiqué par M. Darboux. Ce problème consiste à mettre l'élément linéaire tracé sur une surface développable sous la forme

$$(6) \qquad ds^2 = \alpha\,du^2 + \frac{1}{\alpha}\,dv^2,$$

α étant une fonction de u et de v.

Considérons un élément linéaire tracé sur une surface appartenant à une famille de surfaces applicables quelconques

$$(7) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,dx^2 + 2\mathrm{F}\,dx\,dy + \mathrm{G}\,dy^2.$$

Il est aisé de conclure des propriétés d'invariance des symboles de M. Beltrami

$$\Delta(\Theta)=\frac{\mathrm{E}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2-2\mathrm{F}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mathrm{G}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2},$$

$$\Delta(\Theta,\Phi)=\frac{\mathrm{E}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\mathrm{F}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{d\Phi}{dy}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\mathrm{G}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{d\Phi}{dx}}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2},$$

$$\Delta_2\Theta=\frac{1}{\mathrm{H}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)\right],$$

où l'on a posé

$$\mathrm{H}^2=\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2,$$

que les fonctions u et v de x et y, par l'introduction desquelles l'expression (7) de ds^2 peut être ramenée à la forme (6), devront satisfaire chacune à une équation qui peut être écrite ainsi :

$$\Delta(\varphi,\Delta\varphi)=\Delta\varphi\,\Delta_2\varphi. \tag{8}$$

D'ailleurs, l'une de ces fonctions, u par exemple, étant déterminée par l'intégration de cette équation, la valeur correspondante de la seconde d'entre elles s'en déduira en intégrant une différentielle totale. On obtiendra enfin α au moyen de la relation

$$\frac{1}{\alpha}=\Delta u.$$

Appliquons ceci au cas des surfaces développables; on pourra poser

$$ds^2=dx^2+dy^2,$$

et l'équation (8) deviendra

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{dy}\right)^2\right]+4\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]=0. \tag{9}$$

C'est donc à l'intégration de cette équation que revient le problème qui nous occupe.

4. Appliquons à l'équation considérée la transformation de Legendre. Nous devrons poser, en employant la notation de Monge pour

les dérivées de φ par rapport à x et à y,

$$U = \varphi(x, y) - xp - yq,$$

ce qui donne

$$x = -\frac{\partial U}{\partial p}, \qquad y = -\frac{\partial U}{\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial p\, \partial q} = \frac{-s}{rt - s^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Par conséquent, l'intégration de l'équation (9) se réduit à celle de la suivante :

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}(p^2 - q^2) - 4pq \frac{\partial^2 U}{\partial p\, \partial q} + (q^2 - p^2)\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} = 0.$$

Inutile, d'ailleurs, de se préoccuper du cas où cette transformation deviendrait illusoire, parce que les valeurs correspondantes de u et de φ en fonction de x et de y sont simplement des fonctions linéaires de ces variables.

Introduisons dans l'équation (10) de nouvelles variables indépendantes s_1 et s_2, telles que le seul terme du second ordre de la transformée soit $\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\, \partial s_2}$. On obtiendra s_1 et s_2 en fonction de p et de q en ramenant l'expression

$$d\sigma^2 = (p^2 - q^2)\, dp^2 + 4pq\, dp\, dq + (q^2 - p^2)\, dq^2$$

à la forme

$$d\sigma^2 = \lambda\, ds_1\, ds_2.$$

On reconnait aisément que l'on peut poser

$$(11) \qquad \begin{cases} s_1 = \frac{1}{2}\log(p^2 + q^2) + \operatorname{arctang}\dfrac{p}{q}, \\[2mm] s_2 = \frac{1}{2}\log(p^2 + q^2) - \operatorname{arctang}\dfrac{p}{q}. \end{cases}$$

Observons, afin d'opérer rapidement le changement de variables en question, que l'équation (10) est la condition pour que la variation de l'intégrale

$$(12) \qquad I = \iint \left(\frac{\partial U}{\partial q}\frac{p - q}{p^2 + q^2} - \frac{\partial U}{\partial p}\frac{p + q}{p^2 + q^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial q}\frac{p + q}{p^2 + q^2} + \frac{p - q}{p^2 + q^2}\frac{\partial U}{\partial p}\right) dp\, dq,$$

étendue à une aire quelconque, ne dépende que des valeurs de la variation de U à la limite de cette aire.

Il vient, en transformant l'intégrale (12),

$$\mathrm{I} = 2\int\!\!\int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s_1}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s_2} e^{-(s_1+s_2)}\, ds_1\, ds_2.$$

La transformée de (10) sera, par conséquent, l'équation suivante, qui rentre dans le type (1),

$$(13)\qquad 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial s_1\, \partial s_2} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s_2} = 0.$$

5. L'intégrale générale de cette équation peut être aisément exprimée au moyen de la formule (2). En effet, on peut déterminer la fonction u, qui figurera ici dans cette formule, soit en calculant directement l'intégrale appropriée de l'équation adjointe à l'équation (13), chose facile dans l'exemple considéré, soit en regardant, ainsi que le fait Riemann dans un cas analogue (*Werke*, p. 163), l'équation (13) comme un cas-limite de l'équation que M. Darboux désigne par E(β, β) [*Cours de Géométrie*, t. II, p. 54], soit enfin en appliquant la formule (4). C'est cette dernière méthode que je vais suivre.

On trouve sans la moindre peine, en posant

$$2s_1 = \xi + \eta, \qquad 2s_2 = \xi - \eta, \qquad 2s_1^{(0)} = \xi_0 + \eta_0, \qquad 2s_2^{(0)} = \xi_0 - \eta_0,$$

$$u = \pm \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}(\xi_0+\xi)+(\xi_0-\xi)\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}} - e^{\frac{1}{2}(\xi+\xi_0)-(\xi_0-\xi)\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}}}{2\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}\, e^{\xi}} \cos\mu(\eta_0-\eta)\, d\mu$$

ou bien

$$(14)\qquad u = \pm \frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}(\xi_0-\xi)}\, \mathrm{I},$$

où l'on a posé

$$(15)\qquad \mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{(\xi_0-\xi)\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}} - e^{-(\xi_0-\xi)\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}}\right)\frac{\cos\mu(\eta_0-\eta)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}}\, d\mu.$$

Je ferai voir que I est une fonction transcendante entière dont je donnerai le développement, et j'arriverai ainsi à une expression de u valable pour des valeurs absolument quelconques de ses arguments.

Revenons, en effet, aux variables s_1 et s_2; posons, pour abréger l'écriture,

$$t_1 = \sqrt{\tfrac{1}{4} - \mu^2} + i\mu, \qquad t_2 = \sqrt{\tfrac{1}{4} - \mu^2} - i\mu,$$

et remplaçons le cosinus par des exponentielles imaginaires. Il viendra

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[& e^{(s_1^{(0)}-s_1)t_1+(s_2^{(0)}-s_2)t_2} - e^{-(s_1^{(0)}-s_1)t_1-(s_2^{(0)}-s_2)t_2} \\ & + e^{(s_1^{(0)}-s_1)t_2+(s_2^{(0)}-s_2)t_1} - e^{-(s_1^{(0)}-s_1)t_2-(s_2^{(0)}-s_2)t_1} \Big] \frac{d\mu}{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}}. \end{aligned}$$

Introduisons dans cette intégrale, au lieu de μ, la nouvelle variable

$$\tau = it_2 = \mu + i\sqrt{\tfrac{1}{4} - \mu^2},$$

et observons à cet effet que l'on n'est pas forcé de faire parcourir à μ, dans l'intégrale (15), exclusivement des valeurs réelles. On peut, au contraire, malgré la racine $\sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}$ qui y figure, suivre un chemin d'intégration quelconque, à cette restriction près que, à l'infini, la partie imaginaire de μ tende vers zéro.

Choisissons un chemin d'intégration tel que la détermination de τ, qui pour $\mu = -\infty$ est égale à $(-\infty)$, devienne, sans s'annuler pour $\mu = +\infty$, égale à $(+\infty)$. Il viendra

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \frac{i}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ & e^{i\left[\frac{s_1-s_1^0}{4\tau}-(s_2-s_2^0)\tau\right]} - e^{-i\left[\frac{s_1-s_1^0}{4\tau}-(s-s_2^0)\tau\right]} \\ & + e^{\left[\frac{s_2-s_2^0}{4\tau}-(s_1-s_1^0)\tau\right]} - e^{-i\left[\frac{s-s_2^0}{4\tau}-(s_2-s_1^0)\tau\right]} \Big\} \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned}$$

On peut développer I en une série de la forme

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{I}_n, \tag{16}$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n = {} & \frac{i^{n+1}(s_1 - s_1^0)^n}{4^{n+1}\,n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-i(s_2-s_1^0)\tau} - (-1)^n e^{i(s_2-s_2^0)\tau}\right]\frac{d\tau}{\tau^{n+1}} \\ & + \frac{i^{n+1}(s_2 - s_2^0)^n}{4^{n+1}\,n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-i(s_1-s_1^0)\tau} - (-1)^n e^{i(s_1-s_1^0)\tau}\right]\frac{d\tau}{\tau^{n+1}}. \end{aligned}$$

On trouve, en intégrant par parties,

$$\mathrm{I}_n = \frac{(s_1 - s_1^{(0)})(s_2 - s_2^{(0)})}{4 \cdot n^2}\, \mathrm{I}_{n-1}. \tag{17}$$

Tout est donc réduit au calcul de I_0. Il vient

$$\mathrm{I}_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [\sin\tau(s_2 - s_2^{(0)}) + \sin\tau(s_1 - s_1^{0})]\,\frac{d\tau}{\tau} = \pm\pi, \tag{18}$$

suivant le signe commun de $s_1 - s_1^{(0)}$ et de $s_2 - s_2^{(0)}$.

Les équations (14), (16), (17) et (18) donnent, par conséquent,

$$u = e^{\frac{1}{2}(s_1^{(0)} + s_2^{(0)} - s_1 - s_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_1 - s_1^{(0)})^n (s_2 - s_2^{(0)})^n}{(n!)^2 . 4^n},$$

expression jouissant évidemment des propriétés annoncées.

La formule (2) permettant, d'après cela, d'exprimer l'intégrale générale de l'équation (13), l'équation (9) doit être considérée comme intégrée. Le problème indiqué par M. Darboux est donc résolu.