H. PADÉ

Sur les intégrales définies à limites indéfinies

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 349-354

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__349_0>

SUR

LES INTÉGRALES DÉFINIES

A LIMITES INDÉFINIES,

Par M. H. PADÉ.

1. Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle x, dont nous supposerons seulement qu'elle est intégrable dans tout intervalle (a, l) dont la limite inférieure a est un nombre fixe et la limite supérieure l un nombre quelconque plus grand que a.

Si, lorsque l grandit indéfiniment par des valeurs positives, l'intégrale

$$\int_a^l f(x)\,dx$$

a une limite, cette limite se représente par le symbole

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Quand la fonction primitive de la fonction $f(x)$ est connue, on peut décider immédiatement de l'existence ou de la non-existence de la limite; mais, ce cas spécial mis à part, il n'y a aucune règle générale qui permette de se prononcer.

Toutefois la question est encore presque toujours assez facilement résolue, lorsque, pour toutes les valeurs de x supérieures à un nombre déterminé, la fonction $f(x)$ est positive ou nulle. On rencontre de plus grandes difficultés lorsque, quelque grand que soit un nombre, la fonction $f(x)$ ne garde pas un signe constant pour les valeurs de x supérieures à ce nombre. Nous nous proposons de faire voir comment on peut bien souvent ramener ce cas au précédent.

Pour abréger, nous dirons, dans le premier cas, que la fonction est constamment positive, et, dans le second cas, qu'elle change constamment de signe quand x grandit indéfiniment.

2. Soit donc $f(x)$ une fonction qui change constamment de signe quand x grandit indéfiniment. Supposons que, pour toutes les valeurs de x supérieures à a, la valeur absolue de la fonction $f(x)$ ne dépasse pas une quantité positive connue A, intégrable, elle aussi, dans tous les intervalles (a, l) définis antérieurement. On a identiquement

$$\int_a^l f(x)\,dx = \int_a^l \mathrm{A}\,dx - \int_a^l [\mathrm{A} - f(x)]\,dx,$$

et les éléments différentiels sont constamment positifs dans l'une et l'autre des intégrales du second membre.

Si A est une constante, la première de ces intégrales s'obtient de suite, mais ne tend vers aucune limite quand l grandit indéfiniment, et la transformation ne peut servir à atteindre le but que nous nous proposons.

Mais supposons que A soit fonction de x, et que l'intégrale

$$\int_a^l \mathrm{A}\,dx$$

ait une limite pour l infinie; dès lors, on peut affirmer que l'intégrale qui figure dans le premier membre a aussi une limite. L'élément différentiel positif de la dernière intégrale est, en effet, au plus égal à $2\mathrm{A}$; cette intégrale est donc inférieure à

$$\int_a^l 2\mathrm{A}\,dx$$

et, *a fortiori*, à

$$2\int_a^\infty \mathrm{A}\,dx;$$

comme elle croît avec l, elle a une limite.

Ainsi l'on établit que les symboles

$$\int_0^\infty \frac{\cos a x \, dx}{1+x^2}, \quad \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \cos(b \log x) \, dx$$

ont un sens; leurs éléments différentiels sont respectivement au plus égaux, en valeur absolue, aux quantités

$$\frac{dx}{1+x^2}, \quad x^{a-1} e^{-x} \, dx,$$

qui sont positives entre les limites d'intégration, et les intégrales

$$\int_0^l \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_1^l x^{a-1} e^{-x} \, dx$$

ont une limite pour l infinie.

C'est, comme on voit, la règle connue, que l'on établit ordinairement par la transformation de l'intégrale en une série qui, dans ce cas, est absolument convergente.

3. Mais il peut arriver qu'il n'y ait pas de fonction A satisfaisant aux conditions précédentes. La plus petite valeur que puisse prendre A est, en effet, égale à la valeur absolue de $f(x)$; si donc l'intégrale $\int_a^l |f(x)| \, dx$ ne tend vers aucune limite quand l grandit indéfiniment, et, dans ce cas, elle grandit elle-même indéfiniment, de quelque façon que l'on choisisse A, l'intégrale $\int_a^l \mathrm{A} \, dx$ grandit indéfiniment avec l.

Dans ce cas, on a ordinairement recours à l'étude souvent difficile d'une série à termes alternativement positifs et négatifs, qui ne peut être absolument convergente. La méthode suivante, quand elle sera applicable, sera souvent beaucoup plus simple.

Supposons que, par un changement de variable, on puisse mettre la différentielle $f(x)\,dx$ sous la forme $\varphi(t)\,\psi(t)\,dt$, les conditions suivantes étant remplies : la nouvelle variable t grandit indéfiniment avec x, b et m sont ses valeurs pour $x = a$ et $x = l$; la fonction $\varphi(t)$ est constamment positive, ainsi que sa dérivée; quant à la fonction $\psi(t)$, elle change constamment de signe quand t grandit indéfiniment : on en connaît la fonction primitive $\Psi(t) + \text{const.}$, et enfin, cette fonction primitive est supposée rester finie quand t grandit indéfiniment. On peut alors attribuer à la constante une valeur A, telle que la fonction $\mathrm{A} + \Psi(t)$ soit constamment positive.

Dans ces conditions, on a

$$\int_a f(x)\,dx = \int_b^m \varphi(t)\,\psi(t)\,dt = \int_b^m \varphi(t)\,d\{\mathrm{A} + \Psi(t)\},$$

et, en intégrant par parties,

$$\int_a^l f(x)\,dx = \{\varphi(t)\,[\mathrm{A} + \Psi(t)]\}_b^m - \int_b^m [\mathrm{A} + \Psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Nous sommes ainsi amenés, comme nous le voulions, à une intégrale dont l'élément différentiel est constamment positif.

Les hypothèses faites se trouveront le plus souvent réalisées dans la pratique. Nous ne ferons qu'une seule application de la méthode en établissant que le symbole $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ a un sens ou que l'intégrale de Fresnel $\int_0^l \sin x^2\,dx$ a une limite quand l grandit indéfiniment.

On pose $x^2 = t$, en sorte que

$$\psi(t) = \sin t,$$
$$\Psi(t) = -\cos t + \text{const.}$$

Prenons la constante égale à l'unité; on a

$$\int_0 \sin x^2\,dx = \int_0^{l^2} \frac{\sin t\,dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{l^2} \frac{d(1 - \cos t)}{2\sqrt{t}} = \int_0^{l^2} \frac{d\sin^2\frac{t}{2}}{\sqrt{t}},$$

puis,

$$\int_0^l \sin x^2\,dx = \left(\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sqrt{t}}\right)_0^{l^2} + \int_0^{l^2} \frac{\sin^2\frac{t}{2}\,dt}{2\,t^{\frac{3}{2}}}.$$

L'application des critériums connus, relatifs au cas où l'élément différentiel de l'intégrale est constamment positif, montre de suite que l'intégrale du second membre a une limite pour l infinie. Le premier terme de ce second membre a pour limite zéro. Le symbole $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ a donc un sens, et l'on a

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\,dx}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Observons, en terminant, que, pour être ramené à des intégrales dont les éléments sont positifs, il n'est pas indispensable que A soit une constante; on peut supposer que c'est une fonction de t, et l'on a

$$d\,\Psi(t) = d[\mathrm{A} + \Psi(t)] - d\mathrm{A};$$

alors

$$\int_a^l f(x)\,dx = \int_b^m \varphi(t)\,d[\mathrm{A} + \Psi(t)] - \int_b^m \varphi(t)\,d\mathrm{A}.$$

Il suffit d'appliquer l'intégration par parties à chacune de ces deux intégrales pour être ramené aux deux intégrales

$$\int_b^m [\mathrm{A} + \Psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \quad \int_b^m \mathrm{A}\,\varphi'(t)\,dt,$$

dont les éléments différentiels sont constamment positifs. Pour que ces intégrales aient une limite quand m grandit indéfiniment, il suffit que la seconde en ait une.

On serait ainsi obligé de prendre pour A une fonction de t, si la fonction $f(x)$, non seulement changeait constamment de signe, mais encore n'était pas finie pour toutes les valeurs de x supérieures à un nombre, quelque grand qu'il soit. Mais il ne semble pas que jusqu'alors on ait eu à considérer des intégrales de cette nature.