A. HURWITZ

Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 6 (1889), p. 327-332
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__327_0>

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

SATISFAISANT

A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ALGÉBRIQUE,

PAR M. A. HURWITZ,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE KOENIGSBERG.

Dans le Tome IV (année 1887) de ces *Annales*, M. Gomes Teixeira a énoncé le théorème suivant :

La série

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2, ... représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à x, y, y', ..., $y^{(i)}$ à coefficients entiers

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)}) = 0, \tag{2}$$

si les dénominateurs de a_{n+1}, a_{n+2}, ... contiennent indéfiniment des facteurs premiers supérieurs respectivement à $n+1$, $n+2$, ...

Mais ce théorème n'est pas juste. En effet, considérons la série

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots,$$

qui satisfait à l'équation

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

Le dénominateur $(2n)!$ du coefficient de x^n contient, dès $n = 1$, un facteur premier supérieur à n, attendu qu'il y a toujours au moins un nombre premier entre les limites n et $2n$.

Comment faut-il modifier le théorème de M. Teixeira? Pour répondre à cette question, supposons que la série (1) satisfasse à l'équation (2), sans vérifier une équation de degré moindre en $y^{(i)}$. Désignons, en outre, pour plus de simplicité, par les lettres

$$f_r, \quad g_r, \quad \ldots$$

des fonctions entières à coefficients entiers des quantités

$$x, \quad y, \quad y', \quad \ldots, \quad y^{(r)}.$$

En différentiant l'équation (2), on trouve un résultat de la forme

$$y^{(i+1)} f_i + g_i = 0. \tag{3}$$

La substitution de la série (1) pour y donnera

$$f_i = Cx^k + \ldots, \qquad k \geqq 0, \tag{4}$$

et nous pouvons admettre $C \gtrless 0$, la série (1) ne satisfaisant pas à l'équation $f_i \equiv \dfrac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = 0$.

Cela posé, différentions l'équation (2) 2ρ fois par rapport à x; nous obtenons

$$y^{(i+2\rho)} f_i + y^{(i+2\rho-1)} f_{i+1} + \ldots + y^{(i+\rho+1)} f_{i+\rho-1} + f_{i+\rho} = 0, \tag{5}$$

comme on le démontre aisément par voie d'induction.

Donnons maintenant à l'entier ρ une valeur déterminée, assujettie seulement à la condition $i+\rho+1 \leqq i+2\rho-k$, c'est-à-dire $\rho>k$, et faisons, pour abréger, $i+2\rho=p$. L'équation (5) peut alors s'écrire comme suit :

$$(6) \qquad y^{(p)}f_i+y^{(p-1)}f_{i+1}+\ldots+y^{(p-k)}f_{i+k}+f_{p-k-1}=0.$$

C'est de cette équation, vérifiée par la série (1) et linéaire par rapport à $y^{(p)}$, $y^{(p-1)}$, …, $y^{(p-k)}$, que je pars. En la différentiant q fois de suite, je trouve

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & y^{(p+q)}f_i+y^{(p+q-1)}[f_{i+1}+qf'_i]+\ldots \\ & \qquad +y^{(p+q-k)}\left[f_{i+k}+qf'_{i+k-1}+\ldots+\binom{q}{k}f_i^{(k)}\right]+f_{p+q-k-1}=0. \end{aligned} \right.$$

Ici les coefficients de $y^{(p+q)}$, $y^{(p+q-1)}$, …, $y^{(p+q-k)}$ se réduisent pour $x=0$ à des fonctions entières de q à coefficients rationnels. Ces fonctions ne peuvent pas s'évanouir tous, le coefficient de q^k dans la dernière fonction étant C. Ainsi, en posant $x=0$, l'équation (7) se réduit à

$$y_0^{(p+q-\alpha)}(b_0+b_1q+\ldots+b_\alpha q^\alpha)=\mathrm{G}(y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(p+q-\alpha-1)}),$$

où l'entier α est compris entre 0 et k. Faisons $p+q-\alpha=m$, nous pouvons écrire finalement

$$(8) \qquad y_0^{(m)}(c_0+c_1m+\ldots+c_\alpha m^\alpha)=c\,\mathrm{G}(y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)})$$

pour toute valeur de m dépassant une certaine limite, les coefficients c_0, c_1, …, c_α, c étant des nombres entiers indépendants de m.

A partir d'une certaine valeur n de m, le coefficient de $y_0^{(m)}$ ne peut jamais s'annuler. Par conséquent, si $m \geqq n$, les facteurs premiers contenus dans le dénominateur de $y_0^{(m)}$ divisent

$$g(m)=c_0+c_1m+\ldots+c_\alpha m^\alpha,$$

autant qu'ils ne sont pas contenus dans les dénominateurs de y_0,

$y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$ [1]. Désignons par P le produit des nombres premiers qui divisent les dénominateurs de $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Alors les facteurs premiers des dénominateurs de

$$a_n = \frac{y_0^{(n)}}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}, \qquad \dots$$

divisent respectivement

$$n!\, \mathrm{P}\, g(n), \quad (n+1)!\, \mathrm{P}\, g(n)\, g(n+1), \quad \dots$$

ou, ce qui revient au même, respectivement

$$\gamma(n), \quad \gamma(n)\,\gamma(n+1), \quad \dots;$$

si l'on pose

$$\gamma(m) = (n-1)!\, \mathrm{P} m\, g(m) = \gamma_0 + \gamma_1 m + \dots + \gamma_\nu m^\nu \qquad (\gamma_0 = 0, \ \nu = \alpha + 1).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si la série à coefficients rationnels

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

satisfait à une équation différentielle algébrique, il existe une fonction entière à coefficients entiers

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_\nu z^\nu,$$

et un nombre entier n tel que les facteurs premiers contenus dans les dé-

---

(1) En désignant par $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ les dénominateurs de $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, on trouve évidemment, à l'aide de l'équation (8),

$$y_0^{(m)} = \frac{\mathrm{A}_m}{d_0^{\chi_0} d_1^{\chi_1} \dots d_{n-1}^{\chi_{n-1}} [g(n)]^{\beta_0} [g(n+1)]^{\beta_1} \dots g(m)},$$

A_m représentant un nombre entier.

nominateurs des fractions réduites

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad a_{n+2}, \quad \ldots$$

divisent respectivement

$$\gamma(n), \quad \gamma(n)\gamma(n+1), \quad \gamma(n)\gamma(n+1)\gamma(n+2), \quad \ldots.$$

Les nombres $\gamma(n), \gamma(n+1), \gamma(n+2), \ldots$ *sont tous différents de zéro.*

Nous avons omis l'hypothèse que l'équation différentielle en question soit à coefficients entiers, parce que la série y satisfait nécessairement à une telle équation, si elle vérifie une équation algébrique quelconque.

C'est là le théorème (généralisation d'une proposition connue d'Eisenstein) qu'il faut substituer au théorème de M. Teixeira.

En se fondant sur notre théorème, il est aisé de former des séries ne vérifiant aucune équation différentielle algébrique.

Considérons, par exemple, la série

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{27!} + \ldots + \frac{x^n}{(n^n)!} + \ldots,$$

qui représente une fonction holomorphe pour toutes les valeurs finies de x. Si cette série satisfaisait à une équation différentielle algébrique, il existerait une fonction $\gamma(z)$ jouissant des propriétés énoncées plus haut. Supposons, comme il est permis, que γ_ν soit positif et déterminons m tellement grand que

$$\gamma(m) > \gamma(m-1), \quad \gamma(m) > \gamma(m-2), \quad \ldots, \quad \gamma(m) > \gamma(n), \quad m^m > 2\gamma(m).$$

Comme il y a toujours un nombre premier entre les limites $\gamma(m)$ et $2\gamma(m)$, il est clair que $(m^m)!$ contient au moins un facteur premier qui ne divise pas le produit

$$\gamma(n)\gamma(n+1)\ldots\gamma(m).$$

Mais cela ne s'accorde pas avec notre théorème. Ainsi nous avons la proposition :

La fonction

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{27!} + \ldots + \frac{x^n}{(n^n)!} + \ldots$$

ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique.

Je remarque, en terminant, qu'il y a des fonctions de la même propriété déjà parmi les fonctions élémentaires. En effet, M. Hölder, dans un autre ordre d'idées, a démontré (*Math. Annalen*, t. XXVIII) que la fonction $\Gamma(x)$ d'Euler ne vérifie aucune équation différentielle algébrique.