ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Sur la représentation sphérique des surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 5 (1888), p. 79-96

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__79_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LA

REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE DES SURFACES,

PAR M. GASTON DARBOUX.

I.

Dans son beau Mémoire sur les surfaces à lignes de courbures planes et sphériques, M. O. Bonnet a mis en évidence pour la première fois toute l'importance de la *représentation sphérique* des surfaces, et il a montré que, si l'on établit une correspondance entre une surface quelconque et une sphère par la condition que les plans tangents aux deux surfaces aux points correspondants soient parallèles, aux lignes de courbure de la surface correspondront sur la sphère deux systèmes de lignes orthogonales. En ce qui concerne les surfaces à lignes de courbures planes, M. Bonnet a montré qu'à toute ligne plane doit correspondre, d'après le théorème de Joachimsthal, un cercle de la sphère. Par conséquent, la recherche des surfaces à lignes de courbures planes dans les deux systèmes équivaut à la détermination des surfaces dont les lignes de courbures ont pour image sphérique un double système de cercles orthogonaux.

En 1868 et 1869, dans deux Notes insérées aux tomes LXVII et LXVIII des *Comptes rendus*, je me suis proposé le problème général qui consiste à déterminer les surfaces ayant une représentation sphérique donnée. J'ai montré que ce problème conduit à une équation linéaire aux dérivées partielles, ce qui permet de déduire de plusieurs solutions particulières une solution contenant des constantes arbitraires. J'ai donné en outre la solution complète du problème suivant :

Trouver toutes les surfaces dont les lignes de courbures ont pour représentation sphérique un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales.

Je me propose aujourd'hui de compléter ce résultat, et de montrer que l'on peut obtenir toutes les surfaces ayant pour représentation sphérique, soit un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales, soit le système orthogonal que l'on déduit du précédent par l'inversion la plus générale. Voici la méthode que j'ai suivie pour effectuer cette intégration.

Considérons un plan représenté par l'équation

$$ux + vy + wz + p = 0,$$

où u, v, w, p sont des fonctions de deux variables ρ, ρ_1. Ce plan enveloppe une surface non développable. Les lignes $\rho = C$, $\rho_1 = C_1$, tracées sur cette surface, seront, comme on sait, conjuguées toutes les fois que l'on aura

$$\Sigma \pm u \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \rho_1} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho \, \partial \rho_1} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, toutes les fois qu'il existera une équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} + A \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + C\theta = 0, \tag{1}$$

dont u, v, w, p seront des solutions particulières.

Réciproquement, supposons que l'on connaisse cinq solutions de cette équation u, v, w, p, p', les surfaces (Σ), (Σ'), enveloppes des plans

$$ux + vy + wz + p = 0,$$
$$ux + vy + wz + p' = 0$$

jouiront de la propriété que, pour les points correspondants aux mêmes valeurs de ρ, ρ_1, les plans tangents aux deux surfaces seront parallèles, et en outre que les lignes $\rho = C$, $\rho_1 = C_1$ seront conjuguées sur les deux surfaces. Si l'une de ces surfaces est une sphère (S), les lignes conjuguées deviennent sur (S) des lignes orthogonales, et ce système de lignes orthogonales forme la représentation sphérique des lignes de courbure de l'autre surface. Nous sommes ainsi conduits, on le verra sans peine, au théorème suivant :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles de la forme (1), *si* *l'on peut trouver quatre solutions de cette équation liées par la relation*

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2, \tag{2}$$

les équations

$$x = \frac{u}{p}, \qquad y = \frac{v}{p}, \qquad z = \frac{w}{p}$$

définiront un système de lignes sphériques orthogonales, et la surface la plus générale dont les lignes de courbure ont ce système pour image sphérique sera l'enveloppe du plan

$$ux + vy + wz + P = 0,$$

où P *est l'intégrale générale de l'équation* (1).

On voit donc que, pour avoir des solutions complètes du problème de la représentation sphérique des surfaces, il suffit de connaître une équation de la forme (1) dont on ait l'intégrale générale et qui ait quatre solutions particulières liées par l'équation (2) ou, en général, par une équation du second degré à coefficients constants.

Considérons, par exemple, l'équation

$$2(\rho - \rho_1)\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0. \tag{3}$$

On trouvera facilement des solutions particulières de la forme

$$u = \sum_1^4 A_i\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)},$$

$$v = \sum_1^4 B_i\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)},$$

$$w = \sum_1^4 C_i\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)},$$

$$p = \sum_1^4 D_i\sqrt{(\rho + a_i)(\rho_1 + a_i)},$$

entre lesquelles aura lieu la relation (2). Le système sphérique orthogonal correspondant sera celui qui a été indiqué au commencement de cette Note. Comme on sait déterminer une infinité de solutions particulières et l'intégrale générale de l'équation (3), le résultat annoncé se trouve établi.

Il me reste à indiquer comment on peut rattacher ce résultat au théorème suivant :

Si l'on peut déterminer les surfaces ayant une représentation sphérique donnée, on saura aussi déterminer sans intégration nouvelle les surfaces ayant pour représentation sphérique celle qu'on déduit de la précédente par une inversion quelconque.

II.

Considérons une surface (Σ) et supposons que ses lignes de courbure aient pour image sphérique deux systèmes de lignes orthogonales tracées sur une sphère (S). Soumettons ces lignes sphériques à une inversion dont le pôle sera un point quelconque O, et dont le module sera choisi de telle manière que la sphère (S) se corresponde à elle-même; soit (P) le plan polaire de O par rapport à (S). Considérons un plan tangent quelconque (π) de la surface (Σ), et abaissons du centre C de la sphère (S) la perpendiculaire sur ce plan, perpendiculaire qui rencontrera la sphère en un point M; soit M' l'inverse du point M. Le plan (π'), perpendiculaire à CM' et passant par l'intersection du plan (π) avec le plan fixe (P), enveloppera une surface (Σ'), dont la représentation sphérique sera fournie par les lignes orthogonales inverses de celles qui servent de représentation à (Σ).

Nous retrouvons ainsi, et nous donnons le moyen de réaliser géométriquement cette méthode de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure, dans laquelle à un plan correspond un plan, et qui a été étudiée plus particulièrement par M. Laguerre sous le nom de *transformation par directions réciproques;* et nous voyons de plus que cette méthode nous permettra, toutes les fois que le problème de la représentation sphérique aura été résolu pour un système de lignes, d'en donner la solution pour tous les systèmes orthogonaux que l'on peut en déduire par une inversion. Par exemple, si l'on cherche les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, surfaces qui ont pour représentation sphérique un double système de cercles orthogonaux, on pourra se borner au cas où ce double système de cercles serait formé des méridiens et des parallèles (je fais abstraction du cas relativement facile, et que je considérerai plus loin, où les cercles d'une même série sont tangents les uns aux autres en un point fixe). Alors les lignes de courbure de l'un des systèmes seront dans des plans parallèles, et l'on aura la surface connue, si complètement étudiée dans l'Ouvrage classique de Monge.

Aux surfaces du second degré, qui ont pour représentation sphérique un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales, correspondront les surfaces de quatrième classe corrélatives des cyclides qui auront pour représentation sphérique un système orthogonal formé de lignes du quatrième ordre, inverses des ellipses et des hyperboles homofocales.

Dans un grand nombre de recherches, il y a le plus grand avantage à généraliser la méthode ordinaire de représentation sphérique, en s'appuyant sur le théorème suivant :

Considérons une sphère variable (U), *assujettie à toucher à la fois une surface* (Σ) *et une sphère* (S). *Quand le point de contact de* (U) *et de* (Σ) *décrit une ligne de courbure, le point de contact de* (U) *et de* (S) *décrit une ligne sphérique qui correspond à la ligne de courbure. Cela posé, les lignes sphériques qui correspondent aux deux systèmes de lignes de courbure se coupent mutuellement à angle droit.*

Ce mode de représentation comprend celui que l'on emploie ordinairement comme cas particulier. Il suffira, pour revenir à la représentation usitée, de supposer que le rayon de la sphère (S) grandisse indéfiniment. Mais il a l'avantage de subsister quand on effectue toutes les transformations qui conservent les lignes de courbure, et l'on peut encore démontrer que toute transformation effectuée sur une surface (Σ), et conservant les lignes de courbure, entraîne un changement dans la représentation sphérique de cette surface, qui équivaut à une ou à plusieurs inversions.

On peut ainsi représenter une surface, non plus sur une sphère, mais sur un plan. Par exemple, les surfaces à lignes de courbure planes, qui ont pour représentation sphérique ordinaire deux systèmes formés de cercles qui se touchent mutuellement, peuvent être déduites de celles qui ont *pour représentation plane* deux systèmes de droites orthogonales. On obtient sans difficulté ces nouvelles surfaces. Elles peuvent être considérées comme l'enveloppe d'une sphère variable assujettie à toucher un plan fixe, que l'on prendra pour plan des xy, et alors la surface décrite par le centre de la sphère variable aura pour équation

$$z = \varphi(x) + \psi(y),$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires.

III.

Dans l'article I, j'ai établi le théorème suivant :

Considérons une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = A\frac{\partial z}{\partial\rho} + B\frac{\partial z}{\partial\rho_1} + Cz, \tag{1}$$

où A, B, C *sont des fonctions quelconques de* ρ, ρ_1, *et supposons que l'on connaisse quatre solutions particulières de cette équation, liées par une relation homogène du second degré. On pourra toujours, en combinant linéairement ces solutions, ramener cette relation à la forme*

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2. \tag{2}$$

Cela posé, les équations

$$x = \frac{u}{p}, \qquad y = \frac{v}{p}, \qquad z = \frac{w}{p}$$

définissent toujours un système sphérique orthogonal (A), *formé des lignes*

$$\rho = C, \qquad \rho_1 = C_1.$$

De plus, si θ *désigne une solution nouvelle quelconque de l'équation* (1), *le plan*

$$uX + vY + wZ + \theta = 0$$

enveloppera, quand ρ et ρ_1 prendront toutes les valeurs possibles, une surface dont les lignes de courbure auront pour image sphérique les courbes du système orthogonal (A).

Ce théorème est très fécond, et je vais montrer qu'il permet de déterminer, dans un nombre illimité de cas nouveaux, toutes les surfaces ayant une représentation sphérique donnée.

Supposons, en effet, que l'équation aux dérivées partielles (1) appartienne à la classe, si nombreuse, de celles qui admettent quatre solutions particulières de la forme

$$z_1 = A_1 B_1, \qquad z_2 = A_1 B_2, \qquad z_3 = A_2 B_1, \qquad z_4 = A_2 B_2,$$

où A_1, A_2 sont des fonctions d'*une seule variable*, solutions particulières d'une même équation linéaire du second ordre, et B_1, B_2 des fonctions d'une autre variable, définies également par une équation linéaire du second ordre. Il est clair que les quatre solutions particulières précédentes sont liées par la relation du second degré

$$z_1 z_4 = z_2 z_3,$$

et l'on pourra, par conséquent, appliquer le théorème fondamental.

Je considère, en particulier, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i[f(\alpha + i\beta) - \varphi(\alpha - i\beta)]z, \tag{3}$$

où i désigne $\sqrt{-1}$. Elle admet évidemment comme solution particulière le produit d'une fonction P de $\alpha + i\beta$ par une fonction Q de $\alpha - i\beta$, et, si l'on prend pour P_1, P_2 les intégrales de l'équation

$$P'' = P[f(\alpha + i\beta) + m], \tag{4}$$

où m désigne une constante, et pour Q_1, Q_2 celles de l'équation

$$Q'' = Q[\varphi(\alpha - i\beta) + m],$$

on verra facilement que les quatre solutions suivantes de l'équation (3),

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \ \ P_1Q_2 + P_2Q_1, & w = P_1Q_1 - P_2Q_2, \\ v = i(P_2Q_1 - P_1Q_2), & p = P_1Q_1 + P_2Q_2, \end{cases}$$

satisfont à la relation (2) et, par conséquent, définissent un système sphérique orthogonal. Si les fonctions f et φ sont imaginaires conjuguées, et si Q_1, Q_2 sont les solutions respectivement conjuguées à P_1, P_2, ce système sera réel, et il est aisé de voir qu'il sera isotherme. Un tel système est défini dès que l'on connaît la fonction $f + m$ et les solutions particulières P_1, P_2. Si l'on remplace P_1, P_2 par d'autres solutions de l'équation (4), on obtient les systèmes qui se déduisent du premier par des inversions. Nous dirons dans la suite que tous ces systèmes, qui jouent un rôle équivalent dans la question qui nous occupe, *correspondent* à l'équation linéaire

$$y'' = y[f(x) + m],$$

que l'on déduit de l'équation (4) en remplaçant $\alpha + i\beta$ par x.

On peut ramener à la forme (3) une équation bien connue, et qui se présente soit en Géométrie, soit en Physique mathématique; c'est la suivante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = -\frac{m(m+1)}{(\rho-\rho_1)^2}z.$$

Elle offre un réel intérêt au point de vue de l'histoire de la Science. Son intégration, donnée par Euler pour m entier, a mis pour la première fois en évidence ce fait que l'intégrale générale d'une équation du second ordre peut contenir des fonctions arbitraires entrant avec leurs dérivées jusqu'à un ordre quelconque. Poisson en a donné, pour toutes les valeurs de m, une intégrale où les fonctions arbitraires entrent sous le signe de l'intégration définie. Si l'on y remplace ρ par une fonction A d'une nouvelle variable α, et ρ_1 par une fonction B d'une nouvelle variable β, elle prend la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{m(m+1)A'B'}{(A-B)^2}z.$$

En cherchant si l'on peut ramener cette dernière équation à la forme (3), nous sommes conduit à un problème qui se présente sous une autre forme dans la Géométrie de la sphère et dont on obtient les trois solutions suivantes :

1° $A = \alpha^2$, $B = -\beta^2$, $f(x) = \dfrac{m(m+1)}{x^2}$,

2° $A = \sin^2\alpha$, $B = \sin^2 i\beta$, $f(x) = \dfrac{m(m+1)}{\sin^2 x}$,

3° $A = \operatorname{sn}^2(\alpha + iK')$, $B = \operatorname{sn}^2 i\beta$, $f(x) = m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x$,

la dernière comprenant les précédentes comme cas limites. La conclusion de cette recherche est donc la suivante :

On saura trouver toutes les surfaces ayant pour représentation sphérique les systèmes isothermes correspondant aux trois équations

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{x^2} - h^2\right],$$

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{\sin^2 x} - h^2\right],$$

$$y'' = y[m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h],$$

dont la dernière est l'équation de Lamé. Les formules d'intégration définissant la surface ne contiendront les fonctions arbitraires sous aucun signe d'intégration définie, tant que m sera entier.

Cette proposition comprend tout ce que l'on sait relativement aux surfaces à lignes de courbure planes, à celles dont la représentation est formée d'ellipses sphériques orthogonales, etc. On trouve une infinité de surfaces algébriques dont les lignes de courbure sont algébriques.

Il me reste à montrer comment on peut étendre les résultats précédents à des systèmes isothermes, contenant des constantes dont le nombre croîtra indéfiniment.

IV.

Dans l'article précédent, j'ai montré que, si l'on sait intégrer l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i[f(\alpha+i\beta) - \varphi(\alpha-i\beta)]z,$$

on pourra obtenir toutes les surfaces dont les lignes de courbure ont pour image sphérique l'un quelconque des systèmes orthogonaux *correspondants* à l'équation

$$(2) \qquad y'' = y[f(x)+m].$$

Je vais compléter ce résultat en établissant que l'on peut déduire de l'équation (1) une suite illimitée d'équations de même forme, et qui seront toutes intégrables dès que l'équation (1) le sera elle-même. Je m'appuierai pour cela sur la belle proposition suivante, que l'on doit à M. Moutard : « Toutes les fois que l'on sait intégrer l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \lambda z,$$

on sait aussi trouver l'intégrale de l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \omega\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}z,$$

où ω désigne une solution particulière quelconque de l'équation (3). »

Appliquons ce résultat aux équations de la forme (1), mais choisissons la solution ω parmi celles qui sont de la forme

$$\omega = \theta(\alpha+i\beta)\,\sigma(\alpha-i\beta);$$

nous serons ainsi conduits à l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' - \sigma\left(\frac{1}{\sigma}\right)''\right]z,$$

qui est de la même forme que l'équation (1). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Toutes les fois que l'on saura résoudre le problème de la représentation sphérique pour les systèmes orthogonaux correspondants à l'équation

$$y'' = y f(x), \tag{6}$$

on saura aussi le résoudre pour les systèmes correspondants à l'équation

$$y'' = y\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' + m\right], \tag{7}$$

où θ *désigne une solution de l'équation* (6). *Plus généralement, chaque solution particulière du premier problème donnera, par une quadrature, une solution du second.*

L'application de cette proposition paraît extrêmement limitée, car il semble que l'on sera immédiatement arrêté par la nécessité d'intégrer l'équation (7), qui fait connaître les nouveaux systèmes orthogonaux. Il me paraît donc très curieux que cette intégration n'offre aucune difficulté, et puisse toujours être obtenue, comme cela résulte du théorème suivant :

Toutes les fois que l'on saura intégrer pour toutes les valeurs de la constante m, *l'équation linéaire*

$$y'' = y[f(x) + m], \tag{8}$$

on saura aussi intégrer l'équation

$$y'' = y\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' + m\right], \tag{9}$$

θ *désignant une intégrale particulière de l'équation* (8), *où l'on a fait* $m = 0$. *L'intégrale de l'équation précédente sera*

$$y = u' - u\frac{\theta'}{\theta},$$

u *désignant l'intégrale générale de l'équation* (8).

Il est aisé de vérifier par un calcul direct cette proposition, sur laquelle je me propose d'ailleurs de revenir pour la rattacher à une autre plus générale. Je me contenterai de remarquer maintenant que les équations de la forme (8), où le paramètre m prend différentes valeurs, se rencontrent fréquemment et jouent un rôle important en Physique mathématique. Il y a donc quelque intérêt à montrer que l'on sait augmenter indéfiniment le nombre de celles dont l'intégration peut être obtenue. En tous cas, appliquée au problème que je m'étais proposé, la proposition précédente montre que, lorsqu'on saura résoudre, totalement ou en partie, le problème de la représentation sphérique pour les systèmes orthogonaux correspondants à l'équation (7), on saura résoudre le même problème pour une suite illimitée de systèmes orthogonaux correspondants à des équations que l'on saura toutes intégrer, et qui contiendront un nombre de constantes de plus en plus grand.

Le théorème précédent aurait pu se déduire de la proposition de M. Moutard, que j'ai rappelée au début de cet article. Cette proposition se rapporte à des fonctions de deux variables; mais M. Moutard a remarqué, il y a déjà longtemps, que l'on pouvait en déduire des résultats relativement aux équations linéaires du second ordre à une seule variable indépendante. Je citerai à ce sujet une Note *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre*, présentée par ce savant géomètre à l'Académie le 22 mars 1875 (*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 729). Toutefois les résultats obtenus dans cette Note s'appliquent à une question tout à fait différente de celle que j'ai traitée et ne me paraissent pas contenir la proposition relative aux équations linéaires à une variable indépendante dont j'ai donné plus haut l'énoncé.

V.

Dans les articles précédents, je me suis occupé du problème de Géométrie infinitésimale qui a pour objet la détermination de toutes les surfaces ayant une représentation sphérique donnée. Je me suis contenté d'abord de traiter le cas où les images sphériques des lignes de courbure forment un système orthogonal et isotherme, parce que l'étude de cette hypothèse particulière conduit à des problèmes d'Analyse du plus grand intérêt. Mais la méthode que j'ai suivie est applicable aux systèmes orthogonaux les plus généraux, et je vais montrer comment elle conduit à la solution complète du problème de la représentation sphérique, toutes les fois que cette solution peut être obtenue en termes finis.

Considérons une surface quelconque (Σ) comme l'enveloppe d'un plan défini par l'équation

$$(x+y)X+(1-xy)Y+i(1+xy)Z-P=0, \tag{1}$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées courantes, x, y deux variables indépendantes pouvant prendre toutes les valeurs possibles, et P une fonction quelconque de ces variables. L'équation de la surface s'obtiendrait en éliminant x, y entre l'équation (1), et celles qu'on lui adjoint en prenant les dérivées successivement par rapport à x et à y. Il est aisé, du reste, de donner la signification géométrique des variables x et y. Ce sont les coordonnées imaginaires symétriques du point où une sphère de rayon 1 est rencontrée par la parallèle, menée par son centre, à la normale de la surface (Σ).

Ces variables ont déjà été employées par M. O. Bonnet dans son beau Mémoire *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, et nous devons à M. Bonnet ce résultat élégant, que l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface (Σ) prend la forme

$$dp\,dx - dq\,dy = 0, \tag{2}$$

où p et q désignent, suivant l'usage, les dérivées partielles de P par rapport à x et à y.

Si nous désignons de même par r, s, t les dérivées secondes de P, l'équation (2) peut aussi s'écrire

$$r\,dx^2 - t\,dy^2 = 0.$$

Par suite, si α, β désignent les paramètres des lignes de courbure, on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\lambda \frac{\partial y}{\partial \beta}, \tag{3}$$

λ étant égal à la racine carrée de $\frac{t}{r}$.

Comparant les équations (3) à l'équation (2), on voit que l'on aura aussi

$$(4) \qquad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial p}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial q}{\partial \beta} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial \beta}.$$

Il est d'ailleurs aisé de reconnaître que, toutes les fois que les équations (3) et (4) seront satisfaites, il en sera de même de l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial q}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0,$$

qui exprime que p et q sont les dérivées partielles d'une même fonction.

Cela posé, supposons qu'il s'agisse de trouver les surfaces ayant une représentation sphérique donnée. Alors x et y devront être considérées comme des fonctions données de α et de β. Les équations (3) seront compatibles et nous feront connaître la valeur de λ. Pour trouver la surface, c'est-à-dire pour déterminer P, il suffira de résoudre les équations (4) et, les valeurs de p, q une fois obtenues, on en déduira P par une quadrature.

Or l'intégration du système (4) se ramène aisément à celle de l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{Z}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial^2(\sqrt{\lambda})}{\partial \alpha \partial \beta},$$

et, si Z est une solution de cette équation, on aura

$$p = \frac{Z}{\sqrt{\lambda}},$$

et q s'obtiendra par une quadrature.

On sait que M. Moutard a étudié les équations aux dérivées partielles de la forme que nous venons de rencontrer. Les importantes propositions qu'il a fait connaître nous conduisent à la conclusion suivante :

On peut obtenir tous les cas dans lesquels le problème de la représentation sphérique est susceptible d'une solution en termes finis.

Toutes les fois que le problème de la représentation sphérique aura été *résolu d'une manière quelconque pour un système de courbes orthogonales, on pourra déduire de la solution obtenue celle qui se rapporte à toute une suite illimitée de systèmes sphériques orthogonaux.*

Les premiers cas d'intégrabilité se rapportent, comme je l'ai indiqué il y a déjà longtemps, aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système.

VI.

Considérons une équation quelconque aux dérivées partielles définissant une fonction z de plusieurs variables indépendantes. Si l'on y remplace z par $z + \varepsilon z'$, que l'on développe suivant les puissances de ε et que l'on égale à zéro le coefficient de ε, on aura une équation linéaire par rapport à z', que j'appellerai l'*équation auxiliaire* et dont la considération joue un grand rôle dans la théorie de l'équation proposée. L'équation auxiliaire définit les solutions infiniment peu différentes d'une solution donnée; elle a, par conséquent, une signification qui ne dépend en aucune manière du choix des variables et qui subsiste après un changement quelconque de ces variables. Comme elle est linéaire, son étude est relativement facile, et cette étude peut, d'ailleurs, conduire à des résultats très importants se rapportant à l'équation proposée elle-même. Supposons, par exemple, que cette dernière équation admette une intégrale dans laquelle figurent des fonctions arbitraires avec leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé. Il devra en être de même pour l'équation auxiliaire en z', quand on y remplacera z par une solution quelconque de l'équation donnée. Si donc il existe des solutions z de la proposée pour lesquelles l'équation auxiliaire n'admet pas d'intégrale de cette nature, il en sera de même pour l'équation proposée.

Sans entrer dans de plus grands détails sur l'emploi de l'équation auxiliaire, j'indiquerai deux problèmes de Géométrie auxquels j'ai appliqué la méthode que je viens d'exposer.

Considérons une surface (Σ) et cherchons toutes les surfaces infiniment voisines qui formeraient avec (Σ) une famille d'un système triple orthogonal. On peut démontrer très facilement que ce problème, déjà étudié par M. Cayley, équivaut à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver les surfaces admettant la même représentation sphérique que la surface (Σ).

Ou bien :

Trouver tous les systèmes de cercles normaux à une famille de surfaces dont fait partie la surface (Σ).

Il résulte immédiatement de ce rapprochement que, si l'on sait résoudre le problème de la représentation sphérique pour une surface (Σ), on saura le résoudre aussi pour les surfaces inverses ou transformées par rayons vecteurs réciproques de (Σ).

Cette proposition nous permet, toutes les fois que le problème de la représentation sphérique sera résolu par une surface particulière, d'obtenir par de simples quadratures la solution de ce même problème pour une suite illimitée de surfaces nouvelles se déduisant les unes des autres et contenant dans leur équation un nombre de plus en plus grand de fonctions arbitraires. Ces résultats sont d'accord avec ceux que j'ai fait connaître dans l'article précédent.

Considérons maintenant un autre problème : *la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée*. On sait toute la difficulté de cette question, qui n'a encore été complètement résolue que pour les surfaces développables et deux surfaces de révolution. Conformément aux idées précédentes, nous commencerons par rechercher les surfaces applicables sur une surface (Σ) et infiniment voisines de (Σ).

Si l'on désigne par δx, δy, δz les accroissements que prennent x, y, z quand on passe d'un point de la surface (Σ) au point correspondant de la surface infiniment voisine, on trouvera, en exprimant que l'arc d'une courbe ne change pas de longueur, l'équation

$$dx\, d\,\delta x + dy\, d\,\delta y + dz\, d\,\delta z = 0.$$

Si donc x_1, y_1, z_1 désignent des quantités finies proportionnelles à δx, δy, δz, on aura

$$dx\, dx_1 + dy\, dy_1 + dz\, dz_1 = 0.$$

Cette équation exprime que la surface (Σ) et la surface (Σ_1) lieu du point (x_1, y_1, z_1) se correspondent point par point, de manière que les éléments correspondants soient perpendiculaires. Nous retombons ainsi sur le problème de la transformation par orthogonalité des éléments, posé par M. Moutard, problème qui acquiert par là un nouveau degré d'intérêt [1].

Le problème de Géométrie posé par M. Moutard se ramène presque immédiatement, comme l'a indiqué ce savant géomètre, à la question d'Analyse dont il a donné la solution complète dans un Mémoire présenté à l'Académie et publié par extrait dans le XLV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Les surfaces pour lesquelles on sait le résoudre se partagent en différentes *classes*. Pour chacune d'elles on connaît les expressions de x, y, z en fonction des paramètres α, β des lignes asymptotiques. Ces expressions contiennent au moins quatre fonctions arbitraires. Cela posé, si l'on veut trouver toutes les surfaces applicables sur une surface donnée et ne contenant dans leur équation que des fonctions arbitraires avec leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé, ces surfaces devront toutes faire partie de l'une des classes que nous venons de définir.

Les surfaces de la première classe sont définies par les équations suivantes :

$$x = A_1 B_2 - A_2 B_1 + \int (A_2\, dA_1 - A_1\, dA_2) - \int (B_2\, dB_1 - B_1\, dB_2),$$

$$y = A_2 B - A B_2 + \int (A\, dA_2 - A_2\, dA) - \int (B\, dB_2 - B_2\, dB),$$

$$z = A B_1 - B A_1 + \int (A_1\, dA - A\, dA_1) - \int (B_1\, dB - B\, dB_2),$$

où A, A_1, A_2 sont des fonctions d'un même paramètre α, B, B_1, B_2 des fonctions d'un autre paramètre β.

---

[1] Ce rapprochement entre deux questions si différentes est extrêmement utile, comme je le montrerai, dans la recherche de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée ; je l'ai indiqué dans une Communication faite le 17 décembre 1873 à la Société mathématique. Depuis MM. Lecornu et Beltrami ont publié de belles recherches sur la déformation infiniment petite des surfaces, mais en se plaçant souvent au point de vue mécanique.

Si l'on suppose que ces fonctions soient liées par les relations

$$A^2 + A_1^2 + A_2^2 = \varepsilon,$$
$$B^2 + B_1^2 + B_2^2 = \varepsilon,$$

on aura toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution si $\varepsilon = 1$, et sur les développées des surfaces minima si $\varepsilon = 0$.

Ces surfaces jouissent de nombreuses propriétés géométriques, sur lesquelles je n'insiste pas en ce moment.