ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

Démonstration analytique de l'existence et des propriétés des racines des équations binômes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 337-356

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__337_0>

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE

DE L'EXISTENCE ET DES PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES

DES

RACINES DES ÉQUATIONS BINOMES,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. L'Analyse, qui est la plus abstraite des Sciences, doit fournir des principes à toutes les autres, sans en emprunter à aucune, sinon les théories s'enchaînent mal et perdent tout à la fois de leur clarté et de leur certitude. On renverse donc absolument l'ordre naturel des choses quand on introduit des considérations géométriques autrement qu'à titre de simples images, dans la démonstration de faits purement analytiques, en particulier quand on fonde la théorie de l'équation binôme sur les propriétés des arcs de cercle et de leurs lignes trigonométriques.

Pour faire disparaître de l'Analyse cette tache regrettable, j'ai donné en 1872, dans mon *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, une démonstration de l'existence des racines de toutes les équations entières à une seule inconnue, dont les éléments sont tirés exclusivement des principes les plus simples de l'Algèbre. Toutefois cette démonstration devient plus courte et plus nette quand on en dégage tout ce qui concerne les racines des équations binômes, dont les propriétés offrent d'ailleurs une importance toute spéciale à cause du rôle considérable qu'elles jouent dans une foule de circonstances. C'est ce qui m'a conduit à traiter ces équations à part et à en proposer la théorie très simple que je développe ci-dessous.

Racine positive de l'équation $x^m = R$, où R est une quantité positive.

2. J'aurai à m'appuyer sur les théorèmes généraux suivants, dont je rappelle seulement les énoncés :

Si l'on n'a pas $f(a, b, \ldots) = 0$, *la fonction rationnelle* $\frac{F(x, y, \ldots)}{f(x, y, \ldots)}$ *tend vers* $\frac{F(a, b, \ldots)}{f(a, b, \ldots)}$ *quand* $x, y, \ldots$ *tendent simultanément vers* $a, b, \ldots$.

3. *Pour que la variante* v, *prenant successivement les valeurs en nombre illimité*

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots,$$

tende vers quelque limite, il est nécessaire et suffisant que la différence $v_{n+p} - v_n$ *tende vers zéro quand n augmente indéfiniment, et cela quelque relation que l'on établisse entre n et p.*

4. Passons à l'équation

$$x^m = R, \tag{1}$$

en supposant R nul ou positif.

Si $R = 0$, *cette équation binôme n'a d'autre racine que* 0. *Si* $R > 0$, *elle a une racine positive unique qui, en même temps que* R, *est supérieure, égale ou inférieure à* 1.

Le premier point est évident. Pour établir le second, supposons d'abord $R > 1$ et, appelant u une quantité positive supérieure à 1, formons la progression géométrique indéfinie

$$u^0 = 1, \quad u, \quad u^2, \quad \ldots,$$

dont les termes croissent sans limite. Deux termes consécutifs convenablement choisis u^{k_u}, u^{k_u+1} comprendront certainement R, c'est-à-dire donneront lieu aux inégalités

$$u^{k_u} \leq R < u^{k_u+1}.$$

Cela posé, soient γ_u le quotient et ρ_u le reste de la division de k_u par m; posons $u^{\gamma_u} = r_u$ et faisons tendre u vers 1.

Les inégalités précédentes donnant

$$R - u^{k_u} < u^{k_u+1} - u^{k_u} < u^{k_u}(u-1) < R(u-1),$$

la quantité u^{k_u} tend vers a. On en conclut que r_u^m tend aussi vers R; car on a

$$r_u^m = \frac{u^{k_u}}{u^{\rho_u}},$$

où les deux termes de la fraction tendent simultanément, le numérateur vers R, le dénominateur vers 1, parce que l'entier ρ_u reste inférieur au nombre fixe m (2).

Soient maintenant

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

les valeurs, évidemment toutes positives, que r_u acquiert successivement quand u tend vers 1. Les relations

$$R = r_n^m + \varepsilon_n = r_{n+p}^m + \varepsilon_{n+p},$$

où ε_n, ε_{n+p} tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, et cela indépendamment de toute relation entre p et n, donnent

$$r_{n+p} - r_n = -\frac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{r_{n+p}^{m-1} + r_{n+p}^{m-2} r_n + \ldots + r_{m-1}^n}.$$

Comme r_n, r_{n+p} finissent par surpasser toute quantité positive r_0 choisie de manière que r_0^m soit $< R$, sans quoi r_n^m, r_{n+p}^m ne pourraient tendre vers R, le dénominateur du second membre de cette égalité finit par surpasser mr_0^{m-1}, d'où, en valeur absolue,

$$r_{n+p} - r_n < \frac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{mr_0^{m-1}},$$

puis

$$\lim(r_{n+p} - r_n) = 0,$$

parce que ε_n, ε_{n+p} tendent simultanément vers zéro.

On en conclut (3) que r_n tend vers une certaine limite r, évidemment positive, qui est racine de l'équation (1) à cause de $r^m = \lim r_n^m = R$ (2); on a de plus $r > 1$, sans quoi r^m serait $< R$.

Si $R < 1$, $\frac{1}{R}$ est > 1, et l'équation $y^m = \frac{1}{R}$ admet par ce qui précède

une racine positive $s > 1$. L'équation (1) a donc pour racine la quantité $r = \frac{1}{s}$, qui est positive, et < 1.

Si $R = 1$, l'équation (1) admet évidemment la racine $r = 1$.

Cette racine positive r, dont nous venons de constater l'existence dans tous les cas, est la seule que l'équation (1) puisse posséder; car, pour toute quantité positive r' non $= r$, on a r'^m non $= r^m$ et partant non $= R$.

5. Des transformations ultérieures, ayant ce théorème pour base, conduisent aux formules qui servent à combiner, par voie de multiplication, de division et d'élévation aux puissances, les racines des équations binômes, telles que (1). Ce sont les *règles du calcul des valeurs arithmétiques des radicaux* sur lesquelles nous n'avons pas à revenir.

Racine spéciale de l'équation $x^m = a$, où a est une quantité imaginaire de module 1 n'ayant aucun élément négatif.

6. L'existence du module υ d'une quantité imaginaire $u = (u', u'')$, ayant u', u'' pour *premier* et *second élément*, résulte de celle de la racine positive de l'équation binôme du second degré $\upsilon^2 = u'^2 + u''^2$ (4), après quoi les propositions énoncées aux n^{os} (2), (3) s'étendent facilement aux quantités imaginaires. Nous aurons, en outre, à utiliser les observations particulières qui suivent.

I. *Quand le module de u se réduit à* 1, *chacun de ses éléments* u', u'' *est, en valeur absolue, inférieur à* 1, *égal au plus, ce qui résulte immédiatement de la condition*

$$u'^2 + u''^2 = 1.$$

II. *A une quantité réelle de valeur numérique égale ou inférieure à* 1 *donnée, répondent dans le premier cas* 1, *dans le second* 2 *quantités imaginaires de module* 1, *ayant cette quantité réelle pour élément de nom donné.*

Quand on se donne, par exemple, pour premier élément d'une quantité imaginaire u de module 1 la quantité u' satisfaisant aux conditions $-1 \leqq u' \leqq 1$, le second élément u'' de u dépend de l'équation

binôme

$$u''^2 = 1 - u'^2, \tag{1}$$

dont le second membre ne peut être négatif.

Si $u' = \pm 1$, cette équation se réduit à $u''^2 = 0$ et n'admet d'autre racine que 0; $(\pm 1, 0)$ est donc la seule quantité de module 1 qui ait u' pour premier élément.

Si u' n'est pas $= \pm 1$, soit U'' la racine carrée positive de la quantité alors positive $1 - u'^2$ (4). L'équation (1) qui s'écrit aussi

$$(u'' - U'')(u'' + U'') = 0$$

donne soit $u'' = U''$, soit $u'' = -U''$, et les seules quantités répondant à la question sont

$$(u', U''), \quad (u', -U''). \tag{2}$$

III. *Les deux quantités du module* 1 *qui ont un même premier élément donné non* $= \pm 1$, *sont conjuguées, et chacune d'elles est l'inverse arithmétique de l'autre.*

Le premier point est évident, puisque les seconds éléments des quantités (2) sont égaux et de signes contraires. Le second résulte de ce que le produit de deux quantités imaginaires conjuguées est égal au carré de leur module commun, qui est ici 1.

IV. *Si le module de u restant égal à* 1, *l'un de ses éléments décroît de* 1 *à* 0, *puis de* 0 *à* -1, *la valeur correspondante nulle ou positive de l'autre élément* (II) *croît de* 0 *à* 1, *puis décroît de* 1 *à* 0. *La valeur nulle ou négative de ce même autre élément décroît de* 0 *à* -1, *puis croît de* -1 *à* 0.

Si, par exemple, c'est u' qui décroît de $+1$ à 0, puis de 0 à -1, u''^2, lié à u' par la relation (1), croît de 0 à 1 et décroît ensuite de 1 à 0. Si donc u'' ne devient jamais négatif, il augmente aussi de 0 à 1 pour diminuer ensuite de 1 à 0. Et de même, s'il s'agit de la valeur nulle ou négative de u''.

V. *Si les quantités* $U = (U', U'')$, $u = (u', u'')$ *ont* 1 *pour module commun, la seconde tend nécessairement vers la première quand l'un de*

ses éléments tend vers l'élément de même nom de la première, pourvu que leurs deux autres éléments finissent par n'être pas de signes contraires.

Soit, par exemple, $\lim(U' - u') = 0$; de $u'^2 + u''^2 = U'^2 + U''^2 = 1$, on tire

$$(U'' - u'')(U'' + u'') = -(U' - u')(U' + u').$$

Si $U'' = 0$, cette relation donne $\lim u'' = 0 = U''$.

Si U'' non $= 0$, on finit par avoir numériquement $U'' + u'' > U''$, d'où numériquement encore

$$U'' - u'' < \frac{U' + u'}{U''}(U' - u') < \frac{2}{U''}(U' - u'),$$

parce que le signe final de u'' est alors identique à celui de U''. On en conclut toujours $\lim u'' = U''$.

On a donc, dans les deux cas, $\lim u = U$, puisque l'on a simultanément $\lim u' = U'$, $\lim u'' = U''$.

VI. *Si les quantités* $u = (u', u'')$, $v = (v', v'')$ *ne sont pas nulles et n'ont aucun élément négatif, le second élément de leur produit ne l'est pas non plus et son premier élément croît algébriquement quand, dans l'un des facteurs, le premier élément vient à croître et le second à décroître, pourvu que le second facteur soit invariable ou bien subisse seulement une variation semblable à celle du premier.*

Les éléments du produit uv sont effectivement $u'v' - u''v''$, $u'v'' + u''v'$, expressions dont la nature spéciale rend évidents les points dont il s'agit.

VII. *Si* $u = (u', u'')$ *est une quantité imaginaire à éléments positifs et de module* 1, *cas auquel tous les termes de la progression géométrique*

$$u^0 = 1, u, u^2, \ldots$$

ont 1 *aussi pour module commun, la différence des premiers éléments de deux termes consécutifs ne peut surpasser numériquement* $\mathrm{mod}(u - 1)$.

Si, d'autre part, les premiers éléments de

$$u^0 = 1, u, u^2, \ldots, u^K. \tag{3}$$

ne sont jamais négatifs, leurs seconds éléments et même celui de u^{K+1} *ne*

le sont pas non plus. En outre, ces premiers éléments des quantités (3) *vont sans cesse en décroissant par degrés dont les valeurs numériques sont au moins égales à* $1 - u'$. *Par suite* (IV) *leurs seconds éléments vont sans cesse en augmentant.*

La différence des premiers éléments de u^k, u^{k+1} est le premier élément de leur différence $u^{k+1} - u^k = u^k(u - 1)$; numériquement donc, elle ne peut surpasser le module de cette dernière différence qui se réduit à $\mathrm{mod}(u - 1)$, à cause de $\mathrm{mod}\, u^k = 1$.

Si u^k n'a aucun élément négatif, $u^{k+1} = u^k u$ a son second élément positif, puisque ceux de u le sont tous deux (VI); u par hypothèse, puis $u^2 = u.u$, puis $u^3, \ldots$, puis finalement u^{K+1} ont donc leurs seconds éléments tous positifs.

En supposant $k < K$, les facteurs des produits $u^k u = u^{k+1}$, $u^k(1, 0) = u^k$ n'ont ainsi aucun élément négatif; d'autre part, les premiers facteurs sont égaux, et, dans les derniers, le premier élément de $(1, 0)$ surpasse celui de u, tandis que le second élément de $(1, 0)$ est inférieur à celui de u. Le premier élément de u^k est donc supérieur à celui de u^{k+1} (VI) ou, ce qui revient au même, les premiers éléments des termes de la suite (3) décroissent sans cesse.

Soient enfin $h < k$ des exposants tous deux inférieurs à K. On a (III)

$$u^{h+1} - u^h = u^{h+1}\left(1 - \frac{1}{u}\right) = u^{h+1}(1 - u', u''),$$

puis de même

$$u^{k+1} - u^k = u^{k+1}(1 - u', u''),$$

et aucun des éléments de u^{h+1}, u^{k+1}, $(1 - u', u'')$ n'est évidemment négatif. Ces deux produits ayant même dernier facteur pendant que, comme on vient de le voir, les éléments de u^{h+1} sont, le premier supérieur, le second par suite inférieur aux éléments correspondants de u^{k+1}, le premier élément du premier produit, c'est-à-dire de $u^{h+1} - u^h$, est algébriquement supérieur à celui de $u^{k+1} - u^k$ (VI). En d'autres termes, l'excès du premier élément de u^{h+1} sur celui de u^h surpasse algébriquement l'excès correspondant pour u^{k+1} et u^k. Ces deux excès étant négatifs, le second est numériquement le plus grand et, dans la suite (3), la valeur absolue de la différence des premiers éléments de deux termes consécutifs va sans cesse en augmentant; elle est donc

toujours au moins égale à ce qu'elle est pour les deux premiers, c'est-à-dire à $1 - u'$.

VIII. *Si $v = (v', v'')$ est une autre quantité de module 1 et à éléments positifs, le premier supérieur à u', le second par suite inférieur à u'', les éléments d'un terme quelconque de la progression géométrique*

$$v^0 = 1, v, v^2, \ldots, v^K \tag{4}$$

sont positifs à partir de ceux de v et, respectivement aussi, le premier supérieur, le second par suite inférieur aux éléments de noms semblables du terme de même rang dans la progression (3).

Le point en question étant vrai par hypothèse pour v comparé à u, supposons-le établi inclusivement jusqu'à V, U termes correspondants dans les suites (4), (3). Les termes suivants sont Vv, Uu, et, dans le passage du dernier de ces produits à l'autre, le premier élément de chaque facteur croît, tandis que le second décroît; donc (VI) le premier élément de Vv est supérieur algébriquement à celui de Uu, partant positif comme ce dernier. Ce premier élément de Vv est donc aussi numériquement supérieur à celui de Uu. Quant au second élément de Vv, il est forcément positif, puisque les éléments de ses facteurs le sont tous eux-mêmes (VI).

7. *Soit $a = (a', a'')$ une quantité imaginaire de module 1, dont le second élément est positif et le premier non négatif, l'équation*

$$x^m = a \tag{5}$$

possède quelque racine de module 1, à éléments positifs.

En appelant $u = (u', u'')$ une quantité de module 1 à éléments positifs, formons la progression géométrique indéfinie

$$u^0 = 1, u, u^2, \ldots,$$

dont tous les termes ont 1 aussi pour module commun.

Si les premiers éléments de ces puissances restent non négatifs jusqu'à celui de u^G inclusivement, ils décroissent à partir de 1 par degrés au moins égaux à $1 - u'$ (6, VII) et leur diminution totale est ≤ 1. Il

faut donc que $G(1-u')$ soit $\leqq 1$, c'est-à-dire que G ne surpasse pas le plus grand entier E contenu dans $\frac{1}{1-u'}$. De là résulte l'existence d'un certain entier $K_u \leqq E$ tel que les premiers, et par suite les seconds éléments de

$$(6) \qquad u^0 = 1,\ u,\ u^2,\ \ldots,\ u^{K_u},$$

ne sont jamais négatifs, mais tel aussi que le premier élément de u^{K_u+1} l'est certainement (6, VII).

Le premier élément a' de a, n'étant ni <0 ni >1, tombe nécessairement entre ceux de deux termes consécutifs de

$$u^0 = 1,\ u,\ u^2,\ \ldots,\ u^{K_u},\ u^{K_u+1},$$

qui décroissent sans cesse, de 1 à quelque quantité négative; ce sera, par exemple, entre ceux de u^{k_u}, u^{k_u+1} où $k_u \leqq K_u$, et l'excès de a' sur le premier élément de u^{k_u} est numériquement inférieur au même excès pour u^{k_u+1}, par suite et à plus forte raison à $\mathrm{mod}(u-1)$ (6, VII).

A présent, faisons tendre u' vers 1; u, dont le second élément n'est pas de signe contraire à celui de $1=(1, 0)$, tend aussi vers 1, $\mathrm{mod}(u-1)$, vers zéro, et aussi, à plus forte raison, la différence entre les premiers éléments de a et u^{k_u}; u^{k_u} tend donc vers a, puisque les seconds éléments de ces quantités sont tous deux positifs (6, V).

Si χ_u, ρ_u désignent le quotient et le reste de la division de k_u par m, on a

$$u^{m\chi_u} = \frac{u^{k_u}}{u^{\rho_u}},$$

et $\lim u^{\rho_u} = 1$, parce que l'entier ρ_u ne peut surpasser le nombre fixe m; $u^{m\chi_u}$ a donc aussi a pour limite (2).

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ les valeurs successives que prend u^{χ_u} quand u', avec u, tend vers 1. Quel que soit n, les termes de la progression géométrique

$$(7) \qquad \alpha_n^0 = 1,\ \alpha_n,\ \alpha_n^2,\ \ldots,\ \alpha_n^m$$

ont, comme ceux des progressions analogues à (6) dont ils font partie, leurs modules égaux à 1, leurs éléments positifs à partir de ceux de α_n,

les premiers décroissant, les seconds croissant, et, pour n infini, on a, comme nous venons de le voir,

$$\lim \alpha_n^m = a.$$

Soit maintenant $\alpha_0 = (\alpha_0', \alpha_0'')$ une quantité invariable de module 1 et à éléments positifs dont le premier satisfait à l'inégalité

$$\alpha_0' > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-a'}{m}\right)^2;$$

d'où $\mathrm{mod}(\alpha_0 - 1) < \frac{1-a'}{m}$ à cause de $\mathrm{mod}(\alpha_0 - 1) = \sqrt{2(1-\alpha_0')}$. Comme les premiers éléments des termes de la progression

$$(8) \qquad \alpha_0^0 = 1,\ \alpha_0,\ \alpha_0^2,\ \ldots,\ \alpha_0^m$$

décroissent à partir de 1 par degrés égaux numériquement à $\mathrm{mod}(\alpha_0 - 1)$ au plus et, par suite, inférieurs à $\frac{1-a'}{m}$, ils seront tous algébriquement supérieurs à a', partant positifs; de plus leurs seconds éléments seront également positifs et par suite croissants (6, VII).

Le premier élément de α_n finit par rester inférieur à celui de α_0, car autrement (6, VIII) celui de α_n^m ne finirait pas non plus par tomber au-dessous de celui de α_0^m; il ne tendrait pas vers a' qui est inférieur au premier élément de α_0^m et, contrairement à ce qui a lieu, α_n^m n'aurait pas a pour limite. On en conclut que les éléments des quantités (7) finissent tous par rester les premiers inférieurs, les seconds supérieurs aux éléments de noms semblables dans les termes de mêmes rangs de la suite (8).

Finalement, des relations

$$a = \alpha_n^m + \varepsilon_n = \alpha_{n+p}^m + \varepsilon_{n+p},$$

où ε_n, ε_{n+p} tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, on tire

$$(9) \qquad \alpha_{n+p} - \alpha_n = -\frac{\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n}{\alpha_{n+p}^{m-1} + \alpha_{n+p}^{m-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_n^{m-1}}.$$

Chaque terme du dénominateur qui est de la forme $\alpha_{n+p}^r\ \alpha_n^s$, où $r + s = m - 1$, est le produit de deux facteurs dont les éléments sont positifs et finissent par rester, les premiers inférieurs, les seconds su-

périeurs aux éléments semblables et aussi positifs du produit $\alpha_0^r \alpha_0^s = \alpha_0^{m-1}$. Il en résulte (6, VI) que les éléments de ce terme finissent également par être constamment le premier inférieur, le second supérieur aux éléments semblables de α_0^{m-1}. En appelant donc A'' le second élément de α_0^{m-1}, celui du dénominateur et, *a fortiori*, son module finiront par rester supérieurs à mA''.

A partir de ce moment, la relation (9) donne

$$\operatorname{mod}(\alpha_{n+p} - \alpha_n) < \frac{\operatorname{mod}(\varepsilon_{n+p} - \varepsilon_n)}{mA''},$$

d'où

$$\lim(\alpha_{n+p} - \alpha_n) = 0,$$

quand n augmente indéfiniment, quelque relation que l'on puisse établir entre p et cet indice. On en conclut (3) que α_n tend vers une certaine limite α de module 1 comme α_n, et qui est racine de l'équation (5) à cause de $\alpha^m = \lim \alpha_n^m = \alpha$ (2).

8. L'équation (5) possède d'autres racines, comme nous le verrons plus loin, mais celle-ci s'en distingue par des particularités qu'il faut noter.

Les termes de la progression géométrique

$$(10) \qquad \alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^m = \alpha,$$

limites des termes correspondants de la suite (7), ont comme eux des éléments non négatifs et α', premier élément de α, est au plus égal à α'_0, comme limite de celui de α_n qui finit, ainsi que nous l'avons reconnu, par rester inférieur à cette quantité. Les degrés de décroissance des premiers éléments des quantités (10) sont au moins égaux numériquement à $1 - \alpha'$ (6, VII) et par suite à $1 - \alpha'_0$ qui n'est certainement pas supérieur à $1 - \alpha'$. Il en résulte que, dans la suite (10), les premiers éléments décroissent bien réellement de 1 à a', les seconds croissant de 0 à a'' et tous restant positifs, en particulier ceux de α.

On remarquera, en outre, que l'équation (5) n'a aucune racine de module 1 et à éléments positifs dont le premier surpasse α'. Effectivement, en appelant β une racine de cette espèce, les termes de la progression

$$\beta^0 = 1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^m$$

auraient tous des éléments non négatifs et les premiers (à partir de β) supérieurs à ceux des termes correspondants de la suite (10) (6, VIII). Le premier élément de β^m serait donc supérieur, partant non égal à celui de $\alpha^m = a$.

Racines de l'équation $x^m = 1$.

9. *En appelant* $\iota = (\iota', \iota'')$ *la racine spéciale de l'équation*

$$x^m = i,$$

dont nous avons implicitement constaté l'existence aux nos 7, 8, *les* $4m$ *quantités de module* 1

$$(1)\qquad \begin{cases} \iota, \iota^2, \ \ldots, \iota^m = i, \\ \iota^{m+1}, \ \ldots, \iota^{2m} = i^2 = -1, \\ \iota^{2m+1}, \ \ldots, \iota^{3m} = i^3 = -i, \\ \iota^{3m+1}, \ \ldots, \iota^{4m} = i^4 = 1 \end{cases}$$

sont distinctes et constituent l'ensemble des racines de l'équation

$$(2)\qquad x^{4m} = 1.$$

Dans la première ligne du tableau (1) les éléments ne sont jamais négatifs et vont les premiers en décroissant de ι' à 0, premier élément de $\iota^m = i = (0, 1)$, les seconds en croissant de ι'' à 1, second élément de i (8). Deux termes quelconques de cette ligne ne peuvent donc être égaux.

En posant généralement $\iota^k = (\iota'_k, \iota''_k)$, on a

$$\begin{aligned} \iota^{m+q} &= \iota^m \ \iota^q = \quad i\iota^q = (-\iota''_q, \iota'_q), \\ \iota^{2m+q} &= \iota^{2m}\, \iota^q = - \ \iota^q = (-\iota'_q, -\iota''_q), \\ \iota^{3m+q} &= \iota^{3m}\, \iota^q = -i\iota^q = (\iota''_q, -\iota'_q). \end{aligned}$$

Ces formules évidentes, combinées avec ce que nous savons sur la première ligne de notre tableau, montrent que les éléments vont : dans la seconde ligne, le premier en décroissant de $-\iota''$ à -1, le second en décroissant aussi de ι' à 0;

Dans la troisième, le premier en croissant de $-\iota'$ à 0, le second en décroissant de $-\iota''$ à -1;

Dans la quatrième, le premier en croissant de ι'' à 1, le second

en croissant de $-\iota'$ à 0. Il résulte évidemment de cette discussion que dans les trois dernières lignes du tableau (1) les termes diffèrent aussi les uns des autres et de ceux de la première.

A cause de

$$\iota^{4m-q}\,\iota^{q}=\iota^{4m}=1 \quad \text{et} \quad \iota^{m+q}\,\iota^{m-q}=\iota^{2m}=-1,$$

on a (6, III)

$$(\iota'_{4m-q},\ \iota''_{4m-q})=(\iota'_{q},\ -\iota''_{q}),\quad (\iota'_{m+q},\ \iota''_{m+q})=(-\iota'_{m-q},\ \iota''_{m-q}).$$

Si donc on écrit les quantités (1) sur un cercle en conservant leur ordre de succession, deux d'entre elles sont conjuguées quand elles sont équidistantes de 1 (et de -1); au lieu de cela, leurs éléments sont les seconds égaux, les premiers égaux, mais de signes contraires, quand elles sont équidistantes de i (et de $-i$).

Toutes ces quantités satisfont évidemment à l'équation (2) à cause de

$$(\iota^{k})^{4m}=(\iota^{m})^{4k}=(\iota^{4})^{k}=1.$$

Il nous reste ainsi à constater qu'aucune autre $\theta=(\theta',\ \theta'')$ ne peut jouir de la même propriété.

Si d'abord le module de θ est $\gtrless 1$, on a aussi

$$\text{mod}\ \theta^{4m}\gtrless 1,\quad \text{d'où}\quad \theta^{4m}\ \text{non}=1.$$

Si, en second lieu, θ a 1 pour module avec des éléments tous deux positifs le premier $>\iota'$, les éléments des termes de la suite

$$\theta,\ \theta^{2},\ \ldots,\ \theta^{m}$$

sont positifs et, respectivement, les premiers supérieurs, les seconds inférieurs à ceux des termes correspondant, de la première ligne de notre tableau (6, VIII). En particulier, θ^{m} a des éléments positifs et ne peut ainsi se réduire à aucune des quantités $i,\ -1,\ -i,\ 1$; l'égalité

$$(\theta^{m}-i)\,(\theta^{m}+1)\,(\theta^{m}+i)\,(\theta^{m}-1)=\theta^{4m}-1=0$$

est donc impossible.

Si, en troisième lieu, θ a pour module 1 avec des éléments positifs tombant le premier entre ceux de ι^{k}, ι^{k+1} racines consécutives de la première ligne du tableau (1), le second par suite aussi entre ceux des

mêmes racines, considérons les rapports

$$\eta = (\eta', \eta'') = \theta : \iota^k, \quad \zeta = (\zeta', \zeta'') = \iota^{k+1} : \theta$$

qui, tous deux aussi, ont 1 pour module. Leurs éléments sont tous positifs; effectivement, η étant aussi égal à $(\theta', \theta'')\ (\iota'_k, -\iota''_k)$ (6, III), on a

$$\eta' = \theta'\,\iota'_k + \theta''\,\iota''_k, \quad \eta'' = -\theta'\,\iota''_k + \theta''\,\iota'_k,$$

quantités positives parce que ι'_k, ι''_k, θ', θ'' le sont et satisfont aux inégalités $\theta' < \iota'_k$, $\theta'' > \iota''_k$; de même pour ζ. On a, d'autre part,

$$\eta\zeta = \iota, \quad \text{d'où} \quad \eta'\zeta' - \eta''\zeta'' = \iota'$$

et, par suite,

$$\eta' > \iota', \quad \zeta' > \iota',$$

puisque η', ζ' sont l'un et l'autre < 1. On ne peut donc avoir

$$\theta^{km} = 1,$$

car autrement on aurait aussi

$$\eta^{km} = \theta^{km} : \iota^{kmk} = 1,$$

et l'équation (2) admettrait une racine η ayant 1 pour module avec deux éléments positifs, le premier $> \iota'$, ce qui ne peut être comme nous venons de le voir.

Si enfin θ est une quantité de module 1 ayant des éléments l'un négatif, l'autre positif ou négatif, on peut évidemment poser

$$\theta = \theta_0\, i \quad \text{ou} \quad = \theta_0 \times (-1) \text{ ou } \theta_0 \times (-i),$$

θ_0 désignant quelque quantité de module 1 à éléments positifs, et θ_0 ne peut figurer dans la première ligne du tableau (1), sans quoi θ coïnciderait avec l'une des racines des trois dernières lignes. On a ainsi

$$\theta_0^{km} \text{ non} = 1, \quad \text{d'où aussi} \quad \theta^{km} \text{ non} = 1,$$

à cause de l'égalité évidente

$$\theta^{km} = \theta_0^{km}.$$

10. *En posant $\iota^k = v$, les racines de l'équation*

$$x^m = 1 \tag{3}$$

sont les m quantités de module 1

$$(4) \qquad \upsilon,\ \upsilon^2,\ \upsilon^3,\ \ldots,\ \upsilon^{m-1},\ \upsilon^m = 1.$$

Toute racine ξ de l'équation (3) satisfait aussi à l'équation (2), à cause de

$$\xi^{4m} = (\xi^m)^4 = 1;$$

il en résulte

$$\xi = \iota^k,$$

k désignant quelqu'un des entiers $1, 2, \ldots, 4m$.

Soient q le quotient et $r < 4$ le reste de la division de k par 4. On a

$$\iota^k = \iota^{4q}\,\iota^r, \quad \text{d'où} \quad (\iota^k)^m = \iota^{4mq}\,\iota^{rm} = \iota^{rm}.$$

Si donc ι^k est racine de l'équation (3), il faut que r soit nul, faute de quoi l'on aurait

$$rm = \text{ou } m, \text{ ou } 2m, \text{ ou } 3m, \quad \text{d'où} \quad \iota^{rm} = \text{ou } i, \text{ ou } -1, \text{ ou } -i,$$

et partant

$$\text{non} = 1.$$

Il faut donc que ξ soit de la forme

$$\iota^{4q} = \upsilon^q,$$

q désignant l'un des entiers $1, 2, \ldots, m$, c'est-à-dire que ξ soit l'un des termes de la suite (4).

Tous les termes de cette suite satisfont d'ailleurs à l'équation (3), à cause de

$$(\upsilon^k)^m = \iota^{4mk} = 1.$$

11. Il y a plusieurs observations intéressantes à faire au sujet de ces racines.

1. *Elles comprennent toujours*

$$1 = \upsilon^m = \iota^{4m};$$

on y trouve en outre

$$-1 = \upsilon^{\frac{m}{2}} = \iota^{2m},$$

si m est pair, et de plus

$$i = \upsilon^{\frac{m}{4}} = \iota^m, \quad -i = \upsilon^{\frac{3m}{4}} = \iota^{3m}$$

si m est divisible par 4.

II. *Les racines* $1, \upsilon, \upsilon^2, \ldots$ *et* $\upsilon^{\frac{m-1}{2}} = \iota^{2m-2}$ *si* m *est impair, ou* $\upsilon^{\frac{m}{2}} = \iota^{2m} = -1$ *si* m *est pair, ont leurs seconds éléments positifs ou du moins non négatifs, et leurs premiers éléments vont sans cesse en décroissant. Les racines* $1, \upsilon^{m-1}, \upsilon^{m-2}, \ldots$ *et* $\upsilon^{\frac{m+1}{2}}$, *si* m *est impair ou* $\upsilon^{2m} = -1$, *sont respectivement conjuguées aux précédentes.*

Tout ceci résulte de l'étude que nous avons faite du tableau (1).

III. Cette racine υ, dont les m premières puissances donnent ainsi l'ensemble de toutes les racines et dont aucune puissance d'exposant $< m$ n'est égale à 1, est ce que l'on nomme une racine *primitive* de l'équation (3). Il y a d'autres racines primitives, mais celle-ci se distingue d'elles et de toutes les racines par cette particularité que *de toutes les racines à seconds éléments positifs, elle est celle dont le premier élément est le plus grand,* ou bien encore *dont la différence à l'unité a le plus petit module.*

Effectivement, si $\theta = (\theta', \theta'')$ est une quantité de module 1, le carré de mod $(\theta - 1)$ se réduit à $2(1 - \theta')$ et décroît ainsi toujours quand θ' augmente.

IV. *La racine* $\upsilon^{m-1} = \upsilon^{-1}$ *conjuguée de* υ *est également primitive,* car ses puissances fournissent aussi, quoique dans l'ordre circulaire inverse, toutes les racines de notre équation.

Son premier élément est égal à celui de υ et par suite le module de son excès sur l'unité est égal à mod $(\upsilon - 1)$. Elle ne diffère de υ que par le signe du second élément, qui pour elle est négatif.

V. Les racines (4) ayant 1 pour module commun *se notent graphiquement par des points situés tous sur la circonférence qui a l'origine pour centre et l'unité pour rayon.*

La distance de deux points correspondant à des racines contiguës est constante et égale à

$$\text{mod}\,(\upsilon - 1) = \text{mod}\,(\upsilon^{-1} - 1).$$

On a effectivement

$$\text{mod}\,(\upsilon^{k+1} - \upsilon^k) = \text{mod}\,\upsilon^k . \text{mod}\,(\upsilon - 1) = \text{mod}\,(\upsilon - 1).$$

Le polygone fermé de m côtés, obtenu en joignant chacun de ces points au suivant, est donc équilatéral, partant régulier, puisqu'il est inscrit dans une circonférence.

En joignant ces points de diverses manières, on peut obtenir d'autres polygones réguliers, mais *dont les côtés sont toujours plus grands que ceux du précédent.* Effectivement, l'expression générale de ces côtés est

$$\operatorname{mod}(\upsilon^k - \upsilon^h) = \operatorname{mod}(\upsilon^{k-h} - 1);$$

comme h non $= k$, elle a sa plus petite valeur quand $k - h = \pm 1$ (III), c'est-à-dire quand les extrémités du côté considéré correspondent à des racines qui sont contiguës dans la suite (4) écrite circulairement.

On peut nommer *polygone principal des racines* ce polygone régulier de moindre côté. Il est symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles et l'un de ses sommets coïncide toujours avec le point 1.

VI. En marchant sur le polygone principal de manière à rencontrer les racines dans l'ordre où les engendrent les puissances successives de υ, *on fait une seule fois le tour de l'origine dans le sens de rotation direct*, ce qui résulte immédiatement de la manière dont varient simultanément les éléments des termes des suites (1) et (4). Pour ce motif, on peut nommer υ la *racine principale directe* de l'équation (3).

Au contraire, *on fait dans le sens de rotation rétrograde le tour de l'origine, mais toujours une fois seulement,* en marchant sur le polygone principal, de manière à rencontrer les racines dans l'ordre où les fournissent les puissances de υ^{-1}. On peut aussi nommer υ^{-1} la *racine principale rétrograde* de l'équation (3).

Ces propriétés graphiques des racines principales ont une très grande importance dans la théorie des fonctions qui se forment par des raccordements de séries entières.

12. *Quand m augmente indéfiniment, chaque racine principale tend vers* 1 *et, par suite, le côté du polygone principal vers zéro.*

En écrivant 1 au commencement de la première ligne du tableau (1), on obtient une progression géométrique dans les termes de laquelle les premiers éléments décroissent de 1 à 0 par degrés au moins égaux

à $1 - \iota'$ (6, VII). On a donc

$$1 - \iota' < \frac{1}{m}, \quad \text{d'où} \quad \lim \iota' = 1 = \lim \iota = \lim \iota^1 = \lim \upsilon,$$

parce que ι conserve 1 pour module (6, V).

13. *Chaque racine principale de l'équation* (3) *est la* $q^{ième}$ *puissance de la racine de même nom de l'équation*

$$x^{qm} = 1.$$

En appelant, par exemple, φ la racine principale directe de cette dernière équation et en raisonnant comme nous l'avons fait pour les équations (2) et (3), on aperçoit facilement que les racines de l'équation (3) sont celles des puissances

$$\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{qm}$$

dont les exposants sont multiples de q et que, parmi les puissances de cette espèce dont les seconds éléments sont positifs, φ^q est celle dont le premier élément est le plus grand.

Racines d'une équation binôme quelconque.

14. *Quelle que soit* $A = (A', A'')$ *l'équation binôme*

$$x^m = A \tag{1}$$

possède au moins une racine.

Cette proposition a déjà été établie dans le cas où A est une quantité réelle ≥ 0 (4) et dans celui où, étant imaginaire, elle a 1 pour module avec des éléments non négatifs (7). Il nous reste donc à examiner seulement les cas suivants :

1° Si A se réduit à $-1 = i^2$ ou à $-i = i^3$, le carré ι^2 ou le cube ι^3 de la racine ι de l'équation (2) du n° 9, ou même de toute autre racine de cette équation, satisfera évidemment à celle dont il s'agit.

2° En supposant toujours $\mathrm{mod} A = 1$, trois cas peuvent encore se

présenter :

$$\begin{aligned} &\text{I}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A' < 0,\quad A'' > 0;\\ &\text{II}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A' < 0,\quad A'' < 0;\\ &\text{III}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A' > 0,\quad A'' < 0. \end{aligned}$$

La division de A par i, i^2 ou i^3 suivant la circonstance rend ses deux éléments positifs et, par suite, (7) donne la certitude que la nouvelle équation ainsi obtenue possède au moins une racine. En la désignant par α, il est évident que l'équation proposée admet pour racines $i\alpha$ dans le premier cas, $i^2\alpha$ et $i^3\alpha$ dans les deux autres.

3° Si mod A non $= 1$, soient R ce module et a la quantité $\frac{A}{R}$ dont le module est 1. Les équations $x^m = R$, $x^m = a$ ont certainement une racine au moins chacune, comme on l'a vu précédemment. Si l'on nomme r, α ces deux racines, le produit $r\alpha$ est une racine de l'équation proposée, à cause de

$$r^m \alpha^m = R a = A.$$

15. *En appelant* ρ *la racine de l'équation* (1) *dont nous venons de reconnaître l'existence* (*ou même une autre quelconque*), *les racines de cette équation sont les m quantités*

$$\rho\upsilon,\ \rho\upsilon^2,\ \ldots,\ \rho\upsilon^m = \rho, \tag{2}$$

$\upsilon, \upsilon^2, \ldots, \upsilon^m$ *désignant toujours les racines de l'équation* (3) *du n°* 10.

A cause de $\rho^m = A$, l'équation (1) peut s'écrire

$$x^m = \rho^m \quad \text{ou bien encore} \quad \left(\frac{x}{\rho}\right)^m = 1,$$

d'où (10)

$$\frac{x}{\rho} = \text{ou } \upsilon,\ \text{ou } \upsilon^2,\ \ldots,\ \text{ou } \upsilon^m,$$

et x est égal à l'une ou à l'autre des quantités (2) qui, d'autre part, satisfont évidemment à l'équation considérée.

16. Les quantités υ, υ^2, ... υ^m ayant 1 pour module commun, les racines (2) ont toutes un même module r qui est la racine $m^{\text{ième}}$ positive de $R = \text{mod}\, A$, car l'équation (1) entraîne évidemment $(\text{mod}\, x)^m = R$. On a $r \gtreqless 1$ selon que l'on a $R \gtreqless 1$.

Ces racines se notent donc graphiquement par des points tous situés sur la circonférence qui a l'origine pour centre et r pour rayon.

La distance de deux points qui correspondent à deux racines contiguës de la suite (2) écrite circulairement est constante et égale à $r \bmod (\upsilon - 1)$ à cause de

$$\rho\omega^{k+1} - \rho\omega^{k} = \rho\omega^{k}(\omega - 1).$$

En les joignant donc deux à deux dans l'ordre où les racines sont écrites, on obtient un polygone équilatéral, partant régulier, puisqu'il est inscrit dans une circonférence.