Annales scientifiques de l'É.N.S.

Louis Raffy

Sur une proposition de M. Hermite

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 99-112

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__99_0>

SUR UNE

PROPOSITION DE M. HERMITE,

PAR M. L. RAFFY,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Soit u une fonction de z, liée à sa dérivée $U = \frac{du}{dz}$ par une équation algébrique $f(u, U) = 0$, où n'entre pas z.

MM. Briot et Bouquet ont fait connaître [1] les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction u soit uniforme et les caractères distinctifs des trois espèces d'intégrales uniformes. D'autre part, M. Hermite a remarqué [2] que, l'intégrale étant uniforme, l'équation $f(u, U) = 0$ ne pouvait être que du genre zéro ou un. J'ai donné [3] les conditions qu'il faut ajouter à celle-là pour que l'intégrale soit doublement périodique, simplement périodique ou rationnelle. Je me propose actuellement de déduire des conditions formulées par MM. Briot et Bouquet la proposition de M. Hermite. Je montrerai ensuite comment on peut éviter dans chaque cas particulier la détermination du genre de l'équation $f(u, U) = 0$. A la vérité, j'ai donné [4] une méthode générale pour trouver le genre d'une courbe algébrique, quelles que soient ses singularités; mais il y a avantage à pouvoir se dispenser de cette recherche. Je terminerai en indiquant sommairement les moyens

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier; *Théorie des Fonctions elliptiques*, 2^e édition, p. 381.

(2) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (autographié), année 1873; *Proceedings of the London mathematical Society*, t. IV, 1873.

(3) *Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. XII, p. 186.

(4) *Ibid.*, p. 156; *Mathematische Annalen*, t XXIII, 1884.

d'obtenir par des opérations purement algébriques l'expression de la fonction u quand on a reconnu qu'elle est uniforme.

I.

Désignons par $f_k(u)$ un polynôme entier en u, de degré au plus égal à $2k$, et soit

$$\begin{aligned} & U^m + U^{m-1} f_1(u) + \ldots + U^{m-k} f_k(u) + \ldots \\ & \quad + U^2 f_{m-2}(u) + U f_{m-1}(u) + f_m(u) = 0 \end{aligned}$$

une équation algébrique entre une fonction u et sa dérivée $U = \frac{du}{dz}$. Je vais donner du genre p de cette équation une expression dont j'aurai à faire usage.

Je partirai de la formule de Riemann

$$2(p + m - 1) = \Sigma\Sigma(r - 1) = N,$$

dans laquelle r désigne le nombre des racines qui forment l'un des systèmes circulaires relatifs à un point critique de la fonction U. La sommation indiquée s'étend : 1° à tous les systèmes circulaires formés par les valeurs finies ou infinies que prend U en un point critique; 2° à tous les points critiques de la fonction U, qu'ils soient situés à l'infini ou à distance finie.

Occupons-nous d'abord des derniers. Soit b_i l'un des points où plusieurs racines deviennent égales : les unes seront différentes de zéro et fourniront à la somme N une partie M_i; les autres seront nulles. Elles pourront être par rapport à $(u - b_i)$ de degré inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

Soit r_{ij} le nombre des racines $U = 0$ qui composent un système circulaire de degré inférieur à l'unité; leur degré étant au plus égal à $1 - \frac{1}{r_{ij}}$, nous le représenterons par $\left(1 - \frac{1 + h_{ij}}{r_{ij}}\right)$. Le produit de ces r_{ij} racines est du degré $r_{ij}\left(1 - \frac{1 + h_{ij}}{r_{ij}}\right) = (r_{ij} - 1 - h_{ij})$, et la partie de la somme N qui provient de ce système est $(r_{ij} - 1)$.

Soit s_{ij} le nombre des racines $U = 0$ qui composent un système circulaire de degré égal à l'unité : le produit des racines de ce système est du degré s_{ij}, et la partie correspondante de la somme N est $(s_{ij} - 1)$.

Soit t_{ij} le nombre des racines $U = 0$ qui composent un système circulaire de degré $\left(1 + \frac{1 + l_{ij}}{t_{ij}}\right)$, supérieur à l'unité : le produit des racines de ce système est du degré $(t_{ij} + 1 + l_{ij})$, et la partie correspondante de la somme N est $(t_{ij} - 1)$.

D'après cela, le produit de toutes les racines $U = 0$ qui correspondent à $u = b_i$ est du degré

$$\sum_j (r_{ij} - 1 - h_{ij}) + \sum_j s_{ij} + \sum_j (t_{ij} + 1 + l_{ij}).$$

Si b_i est une racine d'ordre β_i de l'équation $f_m(u) = 0$, le produit des racines de l'équation proposée $F(u, U) = 0$ est du degré de $(u - b_i)^{\beta_i}$, c'est-à-dire du degré β_i : on a donc

$$(1) \qquad \sum_j (r_{ij} - 1 - h_{ij}) + \sum_j s_{ij} + \sum_j (t_{ij} + 1 + l_{ij}) = \beta_i.$$

La partie N_i de la somme N qui provient du point critique b_i a pour expression

$$(2) \qquad N_i = M_i + \sum_j (r_{ij} - 1) + \sum_j (s_{ij} - 1) + \sum_j (t_{ij} - 1).$$

Ajoutons membre à membre toutes les relations, telles que (1), relatives aux points critiques b_i, et désignons par β le degré du polynôme $f_m(u)$; il vient

$$(3) \qquad \sum_i \sum_j (r_{ij} - 1 - h_{ij}) + \sum_i \sum_j s_{ij} + \sum_i \sum_j (t_{ij} + 1 + l_{ij}) = \beta.$$

De même, ajoutons membre à membre les diverses relations, telles que (2), relatives aux divers points critiques b_i; il vient

$$(4) \qquad \sum N_i = \sum_i M_i + \sum_i \sum (r_{ij} - 1) + \sum_i \sum (s_{ij} - 1) + \sum_i \sum (t_{ij} - 1).$$

Pour étudier les points critiques situés à l'infini, posons $u = \frac{1}{v}$, et introduisons, à la place de U, la dérivée $V = \frac{dv}{dz}$; on a

$$U = -\frac{V}{v^2} = -V u^2.$$

Donc, si, pour une valeur de u, r valeurs de V deviennent égales et forment un système circulaire, r valeurs de U deviendront aussi égales pour cette même valeur de u et formeront un système circulaire. Nous n'avons à considérer que les systèmes circulaires formés par les valeurs de V qui correspondent à $u = \infty$ ou à $v = 0$. Ils sont déterminés par l'équation

$$(-V)^m + v^2 f_1\left(\frac{1}{v}\right)(-V)^{m-1} + \ldots - v^{2m-2} f_{m-1}\left(\frac{1}{v}\right)V + v^{2m} f_m\left(\frac{1}{v}\right) = 0.$$

Pour $v = 0$, cette équation peut admettre des racines égales. A celles qui ne sont pas nulles correspond une partie M' de la somme N.

Quant aux racines $V = 0$, soit r'_j le nombre de celles qui composent un des systèmes circulaires de degré $\left(1 - \frac{1 + h'_j}{r'_j}\right)$ inférieur à l'unité : leur produit est du degré $r'_j\left(1 - \frac{1 + h'_j}{r'_j}\right) = (r'_j - 1 - h'_j)$, et la partie correspondante de la somme N est $(r'_j - 1)$.

Soit s'_j le nombre des racines $V = 0$ qui composent un système circulaire de degré égal à l'unité : le produit des racines de ce système est du degré s'_j, et la partie correspondante de la somme N est $(s'_j - 1)$.

Soit t'_j le nombre des racines $V = 0$ qui composent un système circulaire de degré $\left(1 + \frac{1 + l'_j}{t'_j}\right)$ supérieur à l'unité : le produit de ces racines est du degré $(t'_j + 1 + l'_j)$, et la partie correspondante de N est $(t'_j - 1)$.

D'après cela, le produit de toutes les racines $V = 0$ est du degré

$$\sum(r'_j - 1 - h'_j) + \sum_j s'_j + \sum_j (t'_j + 1 + l'_j).$$

Ce degré étant égal à l'ordre de multiplicité $2m - \beta$ de la racine $V = 0$

de l'équation $v^{2m} f_m\left(\frac{1}{v}\right) = 0$, on a

$$(5) \qquad \sum_j (r'_j - 1 - h'_j) + \sum_j s'_j + \sum_j (t'_j + 1 + l'_j) = 2m - \beta.$$

Par suite, la partie N' de la somme N qui correspond aux racines $V = 0$ a pour expression

$$(6) \qquad N' = \sum_j (r'_j - 1) + \sum_j (s'_j - 1) + \sum_j (t'_j - 1).$$

Ajoutons membre à membre les relations (3) et (5), nous trouvons

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_i \sum_j (r_{ij} - 1 - h_{ij}) + \sum_i \sum_j s_{ij} + \sum_i \sum_j (t_{ij} + 1 + l_{ij}) \\ &+ \sum_j (r'_j - 1 - h'_j) + \sum_j s'_j + \sum_j (t'_j + 1 + l'_j) = 2m. \end{aligned} \right.$$

Or on a évidemment

$$N = \sum_i N_i + M' + N',$$

et la formule de Riemann devient

$$2(p + m - 1) = \sum_i N_i + M' + N'$$

ou bien, en vertu des équations (4) et (6),

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2(p + m - 1) = &\sum_i M_i + \sum_i \sum_j (r_{ij} - 1) + \sum_i \sum_j (s_{ij} - 1) + \sum_i \sum_j (t_{ij} - 1) \\ &+ M' + \sum_j (r'_j - 1) + \sum_j (s'_j - 1) + \sum_j (t'_j - 1). \end{aligned} \right.$$

Désignons par σ le nombre total des systèmes circulaires formés par les racines $U = 0$ de degré égal à l'unité, par τ celui des systèmes circulaires formés par les racines $U = 0$ de degré supérieur à l'unité, par σ' celui des systèmes circulaires formés par les racines $V = 0$ de degré égal à l'unité, par τ' celui des systèmes circulaires formés par les racines $V=0$ de degré supérieur à l'unité. Nous aurons

$$\sum_i\sum_j(s_{ij}-1)=\sum_i\sum_j s_{ij}-\sigma,\quad \sum_j(s'_j-1)=\sum_j s'_j-\sigma,$$
$$\sum_i\sum_j(t_{ij}-1)=\sum_i\sum_j t_{ij}-\tau,\quad \sum_j(t'_j-1)=\sum_j t'_j-\tau'.$$

La formule (8) devient alors

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} 2(p+m-1)=&\sum_i \mathrm{M}_i+\sum_i\sum_j(r_{ij}-1)+\sum_i\sum_j s_{ij}-\sigma+\sum_i\sum_j t_{ij}-\tau\\ &+\mathrm{M}'+\sum_j(r'_j-1)+\sum_j s'_j-\sigma'+\sum_j t'_j-\tau'.\end{aligned}\right.$$

Ajoutant membre à membre les deux équations (7) et (9), le terme $2m$ disparaît, ainsi que plusieurs autres, et il reste

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} 2(p-1)=&\sum_i \mathrm{M}_i+\mathrm{M}'+\sum_i\sum_j h_{ij}+\sum_j h'_j\\ &-\sum_i\sum_j(1+l_{ij})-\sum_j(1+l'_j)-(\sigma+\sigma'+\tau+\tau').\end{aligned}\right.$$

C'est la formule que nous avions en vue d'obtenir.

Pour en déduire la proposition de M. Hermite, nous allons rappeler les conditions trouvées par MM. Briot et Bouquet. Les voici :

Pour que l'équation irréductible

$$\mathrm{U}^m+\mathrm{U}^{m-1}f_1(u)+\ldots+f_m(u)=0$$

admette une intégrale uniforme, il faut et il suffit :

1° Que les coefficients $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_m(u)$ soient des polynômes entiers, et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré, ..., le dernier du degré $2m$;

2° Que chaque racine de l'équation, tant qu'elle ne devient pas nulle, reste uniforme par rapport à u;

3° Que chaque racine nulle et d'un degré plus petit que l'unité soit du degré $1-\frac{1}{p}$, p étant le nombre des racines du système circulaire auquel elle appartient;

4° Enfin que l'équation différentielle, que l'on déduit de la proposée en posant $u = \frac{1}{v}$, présente pour $v = 0$ les mêmes caractères.

La première de ces conditions a été exprimée dès le début; en vertu des conditions 2° et 4°, tous les nombres M_i et le nombre M' sont nuls; en vertu des conditions 3° et 4°, tous les nombres h_{ij} et h'_j sont nuls. La formule précédente devient alors

$$(11) \qquad 2(p-1) = -\sum_i \sum_j (1 + l_{ij}) - \sum_j (1 + l'_j) - (\sigma + \sigma' + \tau + \tau').$$

Tous les termes qui figurent au second membre étant négatifs ou nuls, le premier membre ne peut être que négatif ou nul. Donc p ne peut avoir d'autre valeur que zéro ou un, ce qu'il fallait démontrer.

Voici quelques conséquences de la formule (11).

Supposons $p = 1$. Le second membre de l'équation (11) doit être nul. On a donc

$$\sigma = \sigma' = \tau = \tau' = 0;$$

c'est-à-dire que les racines $U = 0$ et les racines $V = 0$ sont toutes de degré inférieur à l'unité. Par suite, les deux premiers termes du second membre disparaissent d'eux-mêmes, et l'équation (11) est satisfaite.

Supposons maintenant $p = 0$. L'équation (11) devient

$$2 = \sum_i \sum_j (1 + l_{ij}) + \sum_j (1 + l'_j) + \sigma + \sigma' + \tau + \tau'.$$

Il est impossible que l'un des deux nombres σ et σ' soit différent de zéro en même temps que l'un des deux nombres τ et τ'; car, si cela était, l'un au moins des deux premiers termes du second membre subsisterait; par suite, ce second membre serait supérieur ou égal à 3.

En conséquence, ou bien τ et τ' sont nuls tous les deux, ou bien σ et σ' sont nuls tous les deux, c'est-à-dire que l'équation $f(u, U) = 0$ et sa transformée ne peuvent offrir à la fois des racines nulles d'un degré égal à l'unité et des racines nulles d'un degré supérieur à l'unité [1].

Premier cas : $\tau = \tau' = 0$. — Les deux premiers termes du second membre disparaissent; il reste

$$2 = \sigma + \sigma';$$

---

[1] *Théorie des Fonctions elliptiques*, p. 402, *Remarque*.

donc, quand l'intégrale est uniforme, les racines $U=0$ et les racines $V=0$ de degré égal à l'unité forment en tout deux systèmes circulaires, et deux seulement [1].

Deuxième cas : $\sigma=\sigma'=0$. — La formule (11) devient

$$2=\sum_i\sum_j(1+l_{ij})+\sum_j(1+l'_j)+\tau+\tau'.$$

Il est impossible que τ et τ' soient tous deux différents de zéro; car, si cela était, les deux premiers termes du second membre subsisteraient; par suite, ce second membre serait supérieur ou égal à 4.

Soit donc, par exemple, $\tau'=0$. Le terme $\Sigma(1+l'_j)$ disparaît : il vient

$$2=\sum_i\sum_j(1+l_{ij})+\tau,$$

ce qui exige $\tau=1$ et $l_{ij}=0$. L'hypothèse $\tau=0$ donnerait $\tau'=1$ et $l'_j=0$.

Ainsi, quand l'intégrale est uniforme, il n'y a qu'un seul système circulaire de racines $U=0$ ou un seul système de racines $V=0$ qui soient de degré supérieur à l'unité [2]; et, si ce système comprend t racines, elles sont du degré $1+\frac{1}{t}$ [3].

II.

Nous allons maintenant revenir à la formule générale (10) pour la comparer successivement avec trois théorèmes que nous avons établis dans notre travail déjà cité (p. 181-186). Pour la définition des paramètres c et c'_0 et les trois formes de l'équation $f(u,U)=0$, nous renvoyons au premier Chapitre de ce Mémoire.

Théorème I. — *Pour que l'intégrale d'une équation différentielle algé-*

---

(1) *Théorie des Fonctions elliptiques*, p. 402, *Remarque*.
(2) *Ibid.*
(3) *Ibid.*, p. 385-386.

brique $F(u, U) = 0$ *soit uniforme et doublement périodique, il faut et il suffit :* 1° *que les paramètres* c *et* c'_0 *soient tous nuls;* 2° *que l'équation proposée soit du genre un.*

THÉORÈME II. — *Pour que l'intégrale soit rationnelle, il faut et il suffit que l'équation* $F(u, U) = 0$ *vérifie les conditions suivantes :* 1° *un au moins des paramètres* c *et* c'_0 *est infini; aucun d'eux n'est fini et différent de zéro;* 2° *une seule valeur de* u *vérifie à la fois les deux équations* $\frac{u}{U} = \infty$ *et* $\frac{du}{dU} = \infty$; 3° *si cette solution est* $u = b$, *les* p *valeurs de* U *qui deviennent nulles avec* $u - b$ *et sont d'un degré supérieur à l'unité forment un seul système circulaire; leur développement commence par un terme en* $(u - b)^{1+\frac{1}{p}}$ *et ne contient pas de terme en* $(u - b)^{1+\frac{2}{p}}$. *Si cette solution est* $\frac{1}{u} = v = 0$, *les* p *valeurs de* V *qui deviennent nulles avec* v *et sont d'un degré supérieur à l'unité forment un seul système circulaire; leur développement commence par un terme en* $v^{1+\frac{1}{p}}$ *et ne contient pas de terme en* $v^{1+\frac{2}{p}}$; 4° *l'équation* $F(u, U) = 0$ *est du genre zéro.*

THÉORÈME III. — *Pour que l'intégrale soit uniforme et simplement périodique, il faut et il suffit que l'équation* $F(u, U) = 0$ *vérifie les conditions suivantes :* 1° *aucun des paramètres* c *et* c'_0 *n'est infini; les valeurs de* U *qui deviennent nulles pour des valeurs finies de* u *et sont de degré égal à l'unité, ainsi que celles de* V *qui deviennent nulles pour* $v = 0$ *et sont de degré égal à l'unité, forment en tout deux systèmes circulaires;* 2° *l'équation* $F(u, U) = 0$ *est du genre zéro.*

Dans le cas où les paramètres c et c'_0 sont tous nuls, que faut-il pour que l'équation proposée soit du genre un? Par hypothèse, il n'y a pas de racine $U = 0$ ou $V = 0$ qui soit d'un degré supérieur à l'unité. Donc $\sigma = \sigma' = \tau = \tau' = 0$. Par suite, les termes $\Sigma\Sigma(1 + l_{ij})$ et $\Sigma(1 + l'_j)$ disparaissent. La formule (10) devient

$$0 = \sum_i M_i + M' + \sum_i \sum_j h_{ij} + \sum h'_j.$$

On en conclut $M_i = M' = 0$ et $h_{ij} = h'_j = 0$. Donc d'abord toutes les racines multiples différentes de zéro sont uniformes aux environs des points critiques; en outre, toute racine nulle est de degré $1 - \frac{1}{r_{ij}}$, si elle appartient à un système composé de r_{ij} racines.

Dans le cas où les paramètres c et c'_0 sont tous finis et n'ont que deux valeurs distinctes, il n'y a aucune racine d'ordre supérieur à l'unité. Donc $\tau = \tau' = 0$; les deux termes mentionnés plus haut disparaissent encore. Enfin la somme $\sigma + \sigma'$ est égale à 2.

Que faut-il pour que le genre soit zéro? La formule (10) se réduit dans le cas présent à

$$0 = \sum_i \mathrm{M}_i + \mathrm{M}' + \sum_i \sum_j h_{ij} + \sum_j h'_j.$$

On en tire les mêmes conclusions que précédemment.

Supposons enfin qu'aucun des paramètres c et c'_0 n'est différent de zéro, qu'un seul d'entre eux est infini, et que les t racines nulles forment un système circulaire unique du degré $1 + \frac{1}{t}$, c'est-à-dire que $\tau + \tau'$ est égal à 1 et que σ et σ' sont nuls.

Que faut-il pour que le genre soit égal à zéro?

Supposons d'abord $\tau = 1$, $\tau' = 0$. Le terme $\Sigma(1 + h'_j)$ disparait; le terme $\Sigma\Sigma(1 + l_{ij})$ se réduit à l'unité, et il vient

$$0 = \sum_i \mathrm{M}_i + \mathrm{M}' + \sum_i \sum_j h_{ij} + \sum_j h'_j;$$

d'où les mêmes conclusions que précédemment. On les retrouverait encore en supposant $\tau = 0$ et $\tau' = 1$.

En résumé, quand une équation $f(u, \mathrm{U}) = 0$ de l'espèce considérée vérifie, abstraction faite de son genre, les conditions de nos trois théorèmes, la condition relative au genre revient dans tous les cas aux suivants :

1° Chaque racine U, tant qu'elle ne devient pas nulle, est une fonction uniforme de u;

2° Chaque racine nulle et d'un degré inférieur à l'unité est du degré $1 - \frac{1}{p}$, si elle fait partie d'un système circulaire de p racines;

3° L'équation transformée $f\left(\frac{1}{v}, -\frac{V}{v^2}\right) = 0$ présente pour $v = 0$ les mêmes caractères.

On peut vérifier ces conditions par de simples divisions et éliminations, ainsi que je l'ai montré antérieurement. Je vais indiquer un nouveau moyen, plus simple, de reconnaître que les racines U et V (pour $v = 0$) restent uniformes, tant qu'elles ne s'annulent pas. Je ferai usage de quelques lemmes qu'il suffira d'énoncer à raison de leur évidence immédiate.

Lemme I. — *Étant donnée une fonction algébrique y qui admet n déterminations pour chaque valeur de la variable x, si au point $x = 0$ plusieurs de ces déterminations deviennent égales, pour qu'elles soient aux environs de l'origine des fonctions uniformes de x, il faut et il suffit que celles des différences $y_k - y_l$ qui deviennent nulles pour $x = 0$ soient toutes de degré entier par rapport à x.*

Lemme II. — *Si, au point $x = 0$, l'une des déterminations y_n de y devient nulle, les $n - 1$ différences $\frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_n}$ deviennent infinies en ce point.*

Il n'y a d'exception que si la différence $y_n - y_k$ est nulle elle-même avec x, et si son degré est au moins double du degré commun de y_n et de y_k.

Lemme III. — *Si pour $x = 0$ plusieurs déterminations de y deviennent égales, les unes étant nulles, les autres différentes de zéro, pour que ces dernières soient aux environs de l'origine des fonctions uniformes de x, il faut et il suffit (sous réserve du cas d'exception) que celles des différences $\frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_l}$ qui deviennent nulles pour $x = 0$ soient toutes de degré entier par rapport à x.*

Cette proposition est une conséquence des deux précédentes.

Lemme IV. — *Étant donnée une équation algébrique irréductible $f(x, y) = 0$, si pour $x = 0$ plusieurs déterminations de y deviennent nulles, et sont du même degré $\frac{q}{p}$ (q étant premier avec p), si de plus elles se distribuent en systèmes circulaires composés chacun de p racines, leurs développements en série diffèrent dès le premier terme.*

En effet, ayant posé $x = x'^p$, $y = tx'^q$, l'équation $f(x'^p, tx'^q) = 0$ se réduit pour $x' = 0$ à une équation en t dont toutes les racines sont simples; car, si deux d'entre elles étaient égales, les racines ne seraient séparées que par une approximation ultérieure, et l'un au moins des systèmes circulaires qu'elles formeraient se composerait de racines en nombre égal non à p, mais à un multiple de p.

Cela posé, on formera l'équation dont les racines w sont les différences $\frac{1}{U_k} - \frac{1}{U_l}$ des inverses des racines de l'équation proposée. Soit $\varphi(w, u) = 0$ cette équation, et $\psi(u)$ l'ensemble de ses termes indépendants de w. Il suffit évidemment d'effectuer un certain nombre de divisions algébriques pour former les polygones de Newton relatifs aux diverses racines w qui deviennent nulles avec le polynôme $\psi(u)$, et par suite pour trouver leurs degrés.

Soit $u = b$ une racine de $\psi(u)$. Si pour $u = b$ l'équation proposée n'admet pas de racines U égales à zéro, les valeurs $\frac{1}{U_k}$, $\frac{1}{U_l}$ sont assimilables aux racines y_k, y_l considérées dans le lemme **I**. Pour que toutes les racines U restent uniformes aux environs du point b, il faut et il suffit que les racines w nulles avec $(u - b)$ soient toutes de degré entier par rapport à $(u - b)$.

Si pour $u = b$ l'équation proposée admet à la fois des racines multiples différentes de zéro et des racines nulles, nous supposerons d'abord que ces racines ne soient pas d'un degré égal à l'unité.

A deux racines nulles U_k, U_l de degré différent, correspondent dans l'équation en w des racines infinies (lemme II). Deux racines U_k, U_l nulles et de même degré sont dans les conditions du lemme IV : leurs développements diffèrent dès le premier terme. Le cas d'exception du lemme II se trouve écarté. Le lemme IV est donc applicable, en assimilant U_k et U_l à y_k et à y_l. Ainsi il faut et il suffit que les racines w nulles avec $(u - b)$ soient toutes de degré entier.

Supposons enfin que pour $u = b$ l'équation proposée admette des racines multiples différentes de zéro, et des racines nulles, dont plusieurs pourront être de degré égal à l'unité. Celles-ci ne peuvent, comme on sait, former plus de deux systèmes circulaires. Or on connaît en fonction rationnelle des coefficients de l'équation proposée les deux valeurs de u telles que b. On pourra donc séparer les racines nulles de degré égal à l'unité et compter combien de couples de ces racines (U_k, U_l) auront une différence de degré supérieur à 2. Soit n ce nombre. L'équation en w admettra $2n$ racines nulles de degré fractionnaire, ni plus ni moins. Sauf ces $2n$ racines de degré fractionnaire, toutes les racines nulles de l'équation en w sont, d'après ce qui précède, de degré entier par rapport à $(u - b)$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que les racines U qui deviennent égales sans s'annuler au point $u = b$ soient uniformes aux environs de ce point.

Le cas d'exception que nous venons de traiter ne peut se présenter que si l'intégrale, supposée uniforme, est simplement périodique.

On n'aura qu'à répéter sur l'équation transformée les opérations ci-dessus indiquées pour s'assurer que les racines V restent uniformes aux environs du point $v = 0$ tant qu'elles ne s'annulent pas.

III.

Ayant reconnu que l'intégrale u est uniforme, voici comment on pourra l'obtenir.

Dans un important Mémoire (1) publié récemment, M. Nœther a montré qu'on peut, par de simples opérations algébriques et sans résoudre aucune équation de degré supérieur à 1, obtenir toutes les courbes adjointes d'une courbe donnée, quelles que soient ses singularités. Par suite, on saura exprimer en fonction d'un paramètre les coordonnées de toute courbe de genre zéro ou un.

Si donc la fonction u est rationnelle ou simplement périodique, l'équation $f(u, U) = 0$ étant alors du genre zéro, on sera ramené à intégrer une différentielle rationnelle (2).

Si la fonction u est doublement périodique, l'équation $f(u, U) = 0$ est du genre un : on aura

$$u = \psi[t, \sqrt{R(t)}], \quad U = \chi[t, \sqrt{R(t)}],$$

---

(1) *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. XXIII, 1884).

(2) *Voir* notre Mémoire déjà cité, p. 145 et suiv.

$R(t)$ représentant un polynôme entier du quatrième degré,

$$R(t) = a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4.$$

Pour achever, par des opérations purement algébriques, la solution de notre problème, il convient d'introduire la fonction $\wp$ de M. Weierstrass, qui effectue l'inversion sans exiger la connaissance des racines de l'équation $R(t) = 0$. Nous emploierons les formules que M. Halphen vient de publier dans le LIV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (p. 171-173).

Désignons par I_2 et I_3 les deux invariants de $R(t)$, et posons

$$g_2 = \frac{1}{a_0^2} I_2, \quad g_3 = \frac{1}{a_0^3} I_3.$$

La fonction $\wp\xi$ de la variable ξ étant définie par l'équation

$$\wp'^2\xi = 4\wp^3\xi - g_2\wp\xi - g_3,$$

et la constante η par les deux relations concordantes

$$\wp\eta = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}, \quad \wp'\eta = \frac{a_3 a_0^2 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3},$$

on aura, d'après M. Halphen,

$$t = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{\wp'\xi - \wp'\eta}{\wp\xi - \wp\eta}, \quad \sqrt{R(t)} = \sqrt{a_0}[\wp(\xi + \eta) - \wp\xi],$$

ou, en remplaçant $\wp(\xi + \eta)$ par sa valeur connue,

$$\sqrt{R(t)} = \sqrt{a_0}\,\frac{(6\wp^2\xi - \frac{1}{2}g_2)(\wp\eta - \wp\xi) + 4\wp^3\xi - g_2\wp\xi - g_3 - \wp'\xi\wp'\eta}{2(\wp\xi - \wp\eta)^2}.$$

Par suite, l'intégrale u sera exprimée en fonction de $\wp\xi$ et de $\wp'\xi$; or ξ est une fonction linéaire de z. L'intégration sera donc effectuée, dans ce cas comme dans les précédents, sans qu'on ait eu à résoudre aucune équation algébrique.