ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUICHARD

Sur les fonctions entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 427-432
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__427_0>

SUR

LES FONCTIONS ENTIÈRES,

PAR M. GUICHARD,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

1. *Soient a_1, a_2, ..., a_n une suite ayant le seul point ∞ comme point limite. On peut former une fonction entière, prenant en ces points des valeurs données b_1, b_2, ..., b_n.*

Soient $f(z)$ une fonction ayant les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\varphi(z)$ une fonction méromorphe ayant les pôles a_1, a_2, ..., a_n, et pour résidus correspondants $\frac{b_1}{f'(a_1)}, \frac{b_2}{f'(a_2)}, \ldots, \frac{b_n}{f'(a_n)}$.

$\varphi(z)$ est de la forme

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{z-a_n}\frac{b_n}{f'(a_n)} + P_n(z)\right] + R(z),$$

P_n étant un polynôme, $R(z)$ une fonction holomorphe.

Le produit

$$\varphi(z) f(z) = G(z)$$

satisfait aux conditions de l'énoncé.

Les autres solutions se mettent sous la forme

$$G(z) + \lambda(z) f(z),$$

λ étant holomorphe.

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes :

1° Soit $z = 0$ le point limite d'une suite simplement infinie, a_1, a_2, ..., a_n. On peut former une fonction uniforme ayant le seul point singulier $z=0$, et prenant aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des valeurs données $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

2° Soit $z=0$ le point limite d'une suite n fois infinie, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On peut former une fonction uniforme ayant un seul point singulier d'ordre n, le point $z=0$, et prenant en $a_1, a_2, \ldots$ des valeurs données $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

2. *Soient* G *et* G_1 *deux fonctions entières premières entre elles (n'ayant aucun zéro commun). On peut déterminer deux fonctions entières* λ *et* μ *satisfaisant à la relation*

$$G(z)+\lambda(z)\,G_1(z)=e^{\mu(z)}.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros de $G_1(z)$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les valeurs de $G(z)$ en ces points.

Formons une fonction $\mu(z)$, prenant en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs $Lb_1, Lb_2, \ldots, Lb_n$.

La différence

$$e^{\mu(z)}-G(z)$$

s'annule aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$; donc elle est divisible par $G_1(z)$.

Corollaire. — Posons $A=e^{-\mu(z)}$, $B=\lambda(z)e^{-\mu(z)}$, on aura alors

$$AG+BG_1=1,$$

relation analogue à celle du théorème d'Euler pour les polynômes.

Les autres fonctions holomorphes A_1 et B_1 satisfaisant à cette relation sont de la forme

$$A_1=A+RG_1,$$
$$B_1=B-RG,$$

R étant une fonction holomorphe quelconque.

3. *Soient* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *une suite ayant le seul point limite* $z=\infty$, *il existe une fonction entière* $G(z)$, *prenant en ces points des valeurs données* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *et dont la dérivée* $G'(z)$ *prend, aux mêmes points, des valeurs* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *données à l'avance.*

J'appelle $f(z)$ une fonction holomorphe qui admet comme zéros simples les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\varphi(z)$ l'une des fonctions holomorphes qui prend en ces points des valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_n$. On devra avoir

$$G(z) = \varphi(z) + \lambda(z) f(z),$$

d'où

$$G'(z) = \varphi'(z) + \lambda(z) f'(z) + \lambda'(z) f(z).$$

Assujettissons la fonction λ à prendre aux points a_n les valeurs

$$\frac{c_n - \varphi'(a_n)}{f'(a_n)}.$$

La fonction $G(z)$ est alors une des solutions.

Toutes les autres sont de la forme

$$G_1(z) = G(z) + \lambda(z) f^2(z).$$

On peut maintenant choisir λ de façon que $G''_1(z)$ prenne aux points a_1, $a_2, \ldots, a_n$ des valeurs données $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Toutes les fonctions $G(z)$, satisfaisant à cette triple condition, diffèrent de multiples de $f^3(z)$. Elles sont de la forme

$$G(z) + \lambda(z) f^3(z).$$

On peut choisir λ de façon que leur dérivée troisième prenne aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des valeurs données $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$.

Corollaire. — On en déduit comme cas particulier : il existe une fonction $G(z)$ prenant en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et dont la dérivée prend aux points $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des valeurs β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_n$.

Les deux suites (a) et (b) ayant le seul point limite $z = \infty$.

4. *Une fonction entière, n'ayant pas de zéros doubles, satisfait à une équation différentielle de la forme*

$$\frac{d^2y}{dz^2} = P\frac{dy}{dz} + Qy, \tag{1}$$

P *et* Q *étant des fonctions entières de* z.

En effet, soit $G(z)$ une fonction holomorphe, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ses zéros supposés simples. Formons une fonction P qui, en ces points, prenne les valeurs

$$\frac{G''(a_1)}{G'(a_1)}, \quad \frac{G''(a_2)}{G'(a_2)}, \quad \ldots.$$

La différence $G''(z) - G'(z) \times P$ est divisible par $G(z)$; en appelant Q le quotient, on a la relation (1).

Toutes les fonctions satisfaisant à cette relation sont

$$\begin{aligned} P_1 &= P + \lambda G, \\ Q_1 &= Q - \lambda G'. \end{aligned}$$

On peut encore donner aux polynômes P et Q une autre forme.

G et G′ étant premier entre eux, on peut trouver deux fonctions A et B tels que

$$AG' + BG = 1;$$

d'où

$$\begin{aligned} P &= AG'' + \lambda G, \\ Q &= BG'' - \lambda G', \end{aligned}$$

d'où

$$BP - AQ = \lambda.$$

Sous cette forme, on voit qu'on peut choisir λ de manière que P et Q soient premiers entre eux. Il suffit pour cela de prendre λ premier avec G″.

5. *Équations du troisième ordre auxquelles peut satisfaire une fonction entière n'ayant pas de zéros doubles.*

Soit $G(z)$ une fonction satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2} = P\frac{dy}{dz} + Qy.$$

Elle satisfait à l'équation du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dz^3} = P\frac{d^2y}{dz^2} + (P' + Q)\frac{dy}{dz} + Q'y.$$

Supposons qu'elle satisfasse à une autre équation

$$\frac{d^3y}{dz^3} = A\frac{d^2y}{dz^2} + B\frac{dy}{dz} + Cy,$$

on aura

$$(A-P)\frac{d^2y}{dz^2}+(B-P'-Q)\frac{dy}{dz}+(C-Q')y=1,$$

d'où

$$[P(A-P)+(B-P'-Q)]\frac{dy}{dz}+[Q(A-P)+C-Q']y=0.$$

G et G′ étant premiers entre eux,

$$B=-P(A-P)+P'+Q+\lambda G,$$
$$C=-Q(A-P)+Q'-\lambda G',$$

équation qui contient deux indéterminées λ et A.

6. *Deux fonctions entières G et G_1, n'ayant pas de zéros doubles, satisfont à une même équation différentielle, linéaire, à coefficients entiers du troisième ordre*

$$(1)\qquad \frac{d^3y}{dz^3}=A\frac{d^2y}{dz^2}+B\frac{dy}{dz}+Cy.$$

En effet, soient P, Q, P_1, Q_1 les fonctions satisfaisant aux relations

$$G''=PG'+QG,$$
$$G''_1=P_1G'_1+Q_1G_1.$$

Si G satisfait à (1), on doit avoir

$$B=-P(A-P)+P'+Q+\lambda G,$$
$$C=-Q(A-P)+Q'-\lambda G'.$$

Si G_1 satisfait à la même équation, on aura

$$B=-P_1(A-P_1)+P'_1+Q_1+\lambda_1G_1,$$
$$C=-Q_1(A-P_1)+Q'_1-\lambda_1G'_1.$$

En égalant les valeurs de B et C, on a deux équations du premier degré pour déterminer λ et λ_1. Le dénominateur commun est

$$GG'_1-G_1G'.$$

Le numérateur de λ contient A au premier degré; on pourra donc choisir A de façon que le numérateur ait les mêmes zéros que le dénominateur; λ étant entier, il en est de même de B et C, et par suite de λ_1.

La démonstration ne subsiste pas dans les deux cas suivants :

1° $GG'_1 - G_1G'$ est identiquement nul;

2° Le coefficient de A, dans le numérateur de λ, n'est pas premier avec $GG'_1 - G_1G'$.