DÉSIRÉ ANDRÉ

Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 121-134
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__121_0>

ÉTUDE

SUR LES

MAXIMA, MINIMA ET SÉQUENCES

DES PERMUTATIONS,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Toute permutation de n éléments distincts peut se ramener à une permutation de n nombres inégaux, ou, plus simplement, à une permutation des n premiers nombres. Il suffit, pour opérer cette réduction, d'associer, comme numéros ou indices, ces n nombres à ces n éléments, de telle sorte que ces éléments puissent être représentés par les nombres qui leur correspondent.

Dans une permutation quelconque de n nombres inégaux, la comparaison des nombres voisins conduit immédiatement aux notions de *maxima*, de *minima* et de *séquences*, qui ont été introduites dans la Science par J. Bienaymé. L'objet du présent Mémoire, c'est l'étude des maxima, minima et séquences des permutations de n éléments; son but, c'est de déterminer le nombre des permutations de n éléments qui ont μ maxima et μ' minima, ou, ce qui revient au même, le nombre des permutations de n éléments qui présentent s séquences.

I. — Définitions.

2. Considérons toutes les permutations sans répétition que l'on peut former avec les n premiers nombres, ou, plus généralement, avec n nombres inégaux.

Dans l'une quelconque d'elles, un nombre placé entre deux autres est un *maximum* s'il les dépasse tous deux, un *minimum* s'il leur est inférieur; un nombre placé au commencement ou à la fin de la permutation est un *maximum* s'il dépasse le nombre voisin, un *minimum* s'il ne le dépasse pas.

On appelle *séquence* une suite de nombres juxtaposés, dont le premier est un maximum et le dernier un minimum ou réciproquement, mais dont aucun intermédiaire n'est ni un maximum ni un minimum.

Dans la permutation 78125436, qui est formée des huit premiers nombres, il y a trois maxima, 8, 5, 6; trois minima, 7, 1, 3; cinq séquences, 78, 81, 125, 543, 36.

3. On pourrait aussi, dans une permutation quelconque, définir ces mots *maximum, minimum* et *séquence,* à l'aide des $n-1$ différences qu'on obtient en retranchant chaque nombre du suivant, ou, plutôt, à l'aide des signes de ces différences, pris dans l'ordre même où ils se présentent. Le nombre initial serait alors un maximum ou un minimum selon qu'il précéderait un signe $-$ ou un signe $+$; le nombre final, un maximum ou un minimum, selon qu'il suivrait un signe $+$ ou un signe $-$; tout nombre intermédiaire, un maximum ou un minimum, selon qu'il serait compris entre $+$ et $-$, ou entre $-$ et $+$. Quant aux séquences, elles correspondraient aux groupes de signes tous pareils, qui sont placés entre deux signes différents.

Tout cela se vérifie immédiatement sur la suite $+-++---+$, qui nous offre, dans l'ordre où ils se présentent, les signes des sept différences de la permutation (2) donnée plus haut.

4. Les permutations de n nombres inégaux sont susceptibles d'une représentation géométrique très simple. Supposons que, à partir d'un même axe des abscisses, on porte, sur n ordonnées équidistantes, n longueurs proportionnelles à ces nombres inégaux. On obtiendra n points, qu'on pourra joindre par des droites, de manière à former une ligne brisée. Les n sommets de cette ligne brisée correspondront aux n nombres donnés; ses $n-1$ côtés, à leurs $n-1$ différences; les maxima seront représentés par les sommets des angles saillants; les minima, par ceux des angles rentrants; les séquences, par les suites de traits,

tous montants ou tous descendants, qui joignent un maximum et un minimum consécutifs, ou réciproquement.

5. Toutes les définitions qui précèdent sont identiques à celles que J. Bienaymé a données autrefois ([1]), à l'occasion d'un très curieux théorème sur les probabilités.

II. — Notations.

6. Dans tout ce qui va suivre, nous nommerons permutations (n, s) les permutations de n éléments qui présentent s séquences, permutations $[n, \mu, \mu']$ les permutations de n éléments qui présentent μ maxima et μ' minima; nous désignerons par $P_{n,s}$ le nombre des premières et par $M_{n,\mu,\mu'}$ celui des secondes.

Comme nous l'avons déjà dit (1), le but du présent Mémoire, c'est de trouver une méthode simple pour calculer les nombres $P_{n,s}$ et $M_{n,\mu,\mu'}$. Mais, avant de procéder à cette recherche, nous allons faire plusieurs remarques utiles.

7. D'abord, la différence $\mu - \mu'$ ne peut jamais avoir que l'une de ces trois valeurs, $+1$, 0, -1.

Ensuite, la somme $\mu + \mu'$ est, au moins, égale à 2, et, au plus, égale à n.

Enfin, le nombre s des séquences est toujours égal à $\mu + \mu' - 1$, d'où il suit qu'il ne peut être ni inférieur à 1, ni supérieur à $n - 1$.

D'ailleurs, $\mu + \mu'$ est égal à 2, et, par suite, s est égal à 1, lorsque les nombres qui forment la permutation sont rangés par ordre de grandeurs, soit croissantes, soit décroissantes; $\mu + \mu'$ est égal à n, et, par suite, s est égal à $n - 1$, lorsque la permutation est du genre de celles que nous avons étudiées déjà ([1]) sous le nom de *permutations alternées*.

8. De ce que la différence $\mu - \mu'$ ne peut avoir que les trois valeurs $+1$, 0, -1, il suit qu'il existe trois sortes de permutations $[n, \mu, \mu']$,

---

([1]) *Comptes rendus*, séance du 6 septembre 1875.

([2]) *Journal de Mathématiques*, mai 1881.

savoir : les permutations $[n, \sigma+1, \sigma]$, les permutations $[n, \sigma, \sigma]$ et les permutations $[n, \sigma, \sigma+1]$.

Il est évident, si s est pair et égal à 2σ, que les permutations $(n, 2\sigma)$ se partagent en deux classes : les permutations $[n, \sigma+1, \sigma]$ et les permutations $[n, \sigma, \sigma+1]$. On a donc alors, identiquement,

$$P_{n,2\sigma} = M_{n,\sigma+1,\sigma} + M_{n,\sigma,\sigma+1}.$$

Si, au contraire, s est impair et égal à $2\sigma-1$, les permutations $(n, 2\sigma-1)$ se confondent avec les permutations $[n, \sigma, \sigma]$, et l'on a simplement

$$P_{n,2\sigma-1} = M_{n,\sigma,\sigma}.$$

9. On voit, sur cette dernière égalité, que les nombres $M_{n,\sigma,\sigma}$ se confondent avec les nombres $P_{n,2\sigma-1}$. On verra par la suite (25) que les nombres $M_{n,\sigma+1,\sigma}$ et $M_{n,\sigma,\sigma+1}$ se déduisent immédiatement des nombres $P_{n,2\sigma}$. Ainsi, les nombres P et les nombres M sont liés entre eux de telle sorte que la connaissance des uns entraîne aussitôt celle des autres, et qu'il nous suffit de nous occuper soit des nombres P, soit des nombres M. Dans nos recherches, et afin d'obtenir des vérifications, nous avons étudié séparément et les nombres P et les nombres M. Nous ne reproduirons ici que la plus simple de ces études, celle des nombres P.

III. — Formule fondamentale.

10. Évidemment, toute permutation des n premiers nombres peut être regardée comme provenant d'une certaine permutation des $n-1$ premiers nombres, où l'on a introduit le nombre n à une certaine place. Nous sommes conduits, par cette remarque, à rechercher comment varie le nombre des séquences d'une permutation des $n-1$ premiers nombres, lorsque l'on introduit, dans cette permutation, le nombre n à une place quelconque.

11. Prenons une permutation quelconque des $n-1$ premiers nombres. Elle présente n places où l'on peut introduire le nombre n, savoir : 2 places extérieures et $n-2$ places intérieures; et ces n places, relativement à l'effet de l'introduction du nombre n sur le nombre des séquences, se partagent en cinq espèces, qui sont les suivantes :

1° Les places extérieures qui touchent un maximum extrême;

2° Les places extérieures qui touchent un minimum extrême;

3° Les places intérieures qui touchent un maximum intermédiaire;

4° Les places intérieures qui touchent un maximum extrême;

5° Enfin, les places intérieures qui ne touchent aucun maximum, ni intermédiaire, ni extrême.

Comme il n'y a jamais, dans une permutation, deux maxima juxtaposés, aucune place ne peut toucher deux maxima à la fois; par suite, les places que présente chaque permutation rentrent bien toutes dans les cinq espèces que nous venons d'énumérer.

12. Si l'on introduit successivement le nombre n dans les places de chacune de ces cinq espèces, et que l'on examine, dans chaque cas, l'effet produit par cette introduction sur le nombre des séquences de la permutation, on constate les faits que voici :

Le nombre des séquences ne change pas quand on introduit le nombre n dans les places de la première espèce et dans celles de la troisième;

Le nombre des séquences augmente d'une unité quand on introduit n dans les places de la deuxième espèce et dans celles de la quatrième;

Le nombre des séquences augmente de deux unités quand on introduit n dans les places de la cinquième espèce.

L'examen dont nous énonçons les résultats n'est pas difficile. Il se simplifie beaucoup lorsqu'on s'aide, pour y procéder, de la représentation graphique des permutations.

13. Ainsi, par l'introduction du nombre n dans une permutation des $n-1$ premiers nombres, le nombre des séquences de cette permutation ou bien ne change pas, ou bien augmente soit de une, soit de deux unités. Il s'ensuit que les seules permutations des $n-1$ premiers nombres qui puissent fournir des permutations (n, s) sont les permutations $(n-1, s)$, les permutations $(n-1, s-1)$ et les permutations $(n-1, s-2)$.

14. Toute permutation $(n-1, s)$ contient s places où l'introduction du nombre n ne change pas le nombre s des séquences. Chaque permutation $(n-1, s)$ donne donc s permutations (n, s).

Toute permutation $(n-1, s-1)$ contient 2 places où l'introduction du nombre n augmente d'une unité le nombre $n-1$ des séquences. Chaque permutation $(n-1, s-1)$ donne donc 2 permutations (n, s).

Toute permutation $(n-1, s-2)$ contient $n-s$ places où l'introduction du nombre n augmente de deux unités le nombre $s-2$ des séquences. Chaque permutation $(n-1, s-2)$ donne donc $n-s$ permutations (n, s).

Or, en introduisant le nombre n, aux places qu'on vient d'indiquer, dans les permutations $(n-1, s)$, dans les permutations $(n-1, s-1)$, dans les permutations $(n-1, s-2)$, il est bien évident qu'on n'obtient que des permutations (n, s), qu'on les obtient toutes et qu'on n'en répète aucune. Donc, on a identiquement

$$P_{n,s} = s P_{n-1,s} + 2 P_{n-1,s-1} + (n-s) P_{n-1,s-2}.$$

15. Telle est la formule que nous nous proposions d'établir dans le présent Chapitre. C'est, pour la théorie générale de la structure des permutations, une formule fondamentale. Nous l'avons exposée pour la première fois dans une courte Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter (1) à l'Académie des Sciences.

IV. — Triangle des nombres P.

16. La formule fondamentale qu'on vient d'établir subsiste, telle quelle, pour toutes les valeurs de s supérieures à 2.

Lorsque s est égal à 2, elle se réduit à l'égalité

$$P_{n,2} = 2 P_{n-1,2} + 2 P_{n-1,1},$$

qu'on peut établir directement par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent.

---

(1) Le 10 décembre 1883.

Lorsque s est égal à 1, la formule fondamentale se réduit à l'égalité

$$P_{n,1} = P_{n-1,1},$$

que l'on peut regarder comme évidente, puisque l'on a toujours, évidemment,

$$P_{n,1} = 2.$$

17. Cette formule fondamentale, étendue ainsi à toutes les valeurs possibles de s, résout parfaitement le problème que nous nous sommes proposé. Elle nous donne, en effet, un moyen régulier et simple pour calculer, de proche en proche, les nombres $P_{n,s}$, et, par suite, comme nous le verrons (**25**), les nombres $M_{n,\mu,\mu'}$.

Bornons-nous aux nombres $P_{n,s}$. Ces nombres ne sont autre chose que les diverses valeurs d'une variante à deux indices. Ils constituent tous ensemble une Table à double entrée; et, grâce à notre formule fondamentale, cette Table peut s'obtenir facilement, à l'aide d'un procédé tout à fait analogue à celui qui nous donne le triangle de Pascal.

18. Supposons, écrits sur une même ligne, les nombres $P_{n-1,s}$ qui correspondent aux différentes valeurs de s; et, au-dessous d'eux, sur une seconde ligne, les nombres $P_{n,s}$ qui correspondent aux mêmes valeurs de s. Ces deux lignes présentent cet aspect

$$\begin{array}{llll} P_{n-1,1}, & P_{n-1,2}, & P_{n-1,3}, & \ldots, \\ P_{n,1}, & P_{n,2}, & P_{n,3}, & \ldots; \end{array}$$

et l'on voit que notre formule fondamentale nous donne chaque terme de la seconde ligne en fonction du terme de la première qui est juste au-dessus, et des deux termes placés à la gauche de ce dernier. On pourra donc former facilement un triangle des nombres $P_{n,s}$, dans lequel les nombres d'une même ligne correspondront à une même valeur de n, et les nombres d'une même colonne à une même valeur de s.

Il est commode, pour former ce triangle, d'écrire, au commencement de chaque ligne, la valeur correspondante de n, et, au haut de chaque colonne, la valeur correspondante de s. Lorsqu'on a pris ces précautions, la règle de formation du triangle peut s'énoncer ainsi :

Chaque terme est égal à celui qui est au-dessus, multiplié par le *numéro de la colonne où il se trouve; plus le terme qui est à la gauche du précédent, multiplié par 2; plus le terme qui est à la gauche de ce dernier, multiplié par la différence des numéros de la ligne et de la colonne qui se croisent sur le terme qu'on est en train de calculer.*

19. En prenant les précautions et appliquant la règle qu'on vient d'indiquer, on obtient le triangle que voici :

	1	2	3	4	5	6	7	.
2	2							
3	2	4						
4	2	12	10					
5	2	28	58	32				
6	2	60	236	300	122			
7	2	124	836	1852	1682	544		
8	2	252	3012	9576	14622	10332	2770	
.	.	...	....	....	.....	.....	....	.

20. Le calcul qui donne le triangle ci-dessus est susceptible de plusieurs vérifications : d'abord, le premier terme de chaque ligne est toujours égal à 2; ensuite, le dernier terme de la ligne n est toujours égal au nombre des permutations alternées de n éléments; enfin, la somme des termes de cette même ligne n est toujours égale au nombre total des permutations de n éléments, c'est-à-dire au produit $1.2.3...n$.

V. — Permutations symétriques.

21. Lorsqu'on examine le triangle qu'on vient de former, on s'aperçoit qu'il ne contient que des nombres pairs; et l'on est conduit, par induction, à énoncer ce théorème :

Le nombre des permutations de n éléments qui présentent s séquences est toujours un nombre pair.

Ce théorème se démontre immédiatement, de proche en proche, et en toute rigueur, à l'aide de notre formule fondamentale. On peut aussi le déduire de ce fait remarquable que les permutations de n éléments qui présentent s séquences sont symétriques deux à deux.

22. Considérons, en effet, une quelconque des permutations des n premiers nombres; traçons-en la représentation graphique; et, au milieu de la figure ainsi formée, menons une parallèle à l'axe des abscisses, à égales distances du sommet le plus haut et du sommet le plus bas. Il est clair que la hauteur de cette parallèle, au-dessus de cet axe des abscisses, sera mesurée, à l'échelle employée, par le nombre $\frac{n+1}{2}$. Il est clair aussi que, si n est pair et égal à 2ν, la ligne brisée représentant la permutation aura ν sommets au-dessus de cette parallèle et ν sommets au-dessous; que si n est impair et égal à $2\nu+1$, cette ligne brisée aura, en outre, un sommet et un seul sur cette parallèle même.

Cela posé, contruisons, par rapport à la parallèle que nous avons menée, la figure symétrique de la ligne brisée considérée. Nous obtenons une nouvelle ligne brisée, et cette ligne représente une nouvelle permutation, de façon que notre figure nous offre finalement deux lignes brisées, symétriques l'une de l'autre, et représentant deux permutations.

Ces deux permutations seront, pour nous, deux *permutations symétriques*. A la façon dont on les a obtenues, il est évident que leurs séquences sont en même nombre, de mêmes longueurs, et se correspondent chacune à chacune; il est non moins évident que les maxima de l'une correspondent aux minima de l'autre, et réciproquement.

23. De ce procédé géométrique d'obtenir la permutation symétrique d'une permutation donnée, on peut déduire un procédé purement arithmétique.

Si l'on considère, en effet, les nombres qui occupent la même place dans deux permutations symétriques, les sommets correspondants des deux lignes brisées qui les représentent seront deux points symétriques par rapport à la parallèle que nous avons menée; la droite qui les joint aura son milieu sur cette parallèle, et, par suite, la demi-somme des ordonnées de ces deux sommets sera égale à $\frac{n+1}{2}$. La somme de ces ordonnées sera, par conséquent, $n+1$; et les nombres correspondants des deux permutations ayant pour somme $n+1$, chacun d'eux sera ce qui manque à l'autre pour faire cette somme $n+1$.

De là ce procédé purement arithmétique, qui nous a été indiqué par M. Fritz Hofmann, de Munich :

Étant donnée une permutation des n premiers nombres, il suffit, pour obtenir la permutation symétrique, de remplacer chacun de ces nombres par ce qui lui manque pour faire $n + 1$.

24. On simplifierait un peu le passage d'une permutation de n éléments à la permutation symétrique, en choisissant pour éléments, non plus les n premiers nombres, mais un système de nombres deux à deux égaux et de signes contraires, auxquels, si n était impair, on adjoindrait le zéro. Toute permutation de ces n nouveaux nombres pourrait aussi être représentée par une ligne brisée ; mais alors la parallèle que nous avons considérée coïnciderait avec l'axe même des abscisses ; les lignes brisées représentant deux permutations symétriques seraient symétriques par rapport à cet axe, et, pour déduire d'une permutation quelconque la permutation symétrique, il suffirait de changer, dans la permutation donnée, les signes de tous les éléments.

25. Quoi qu'il en soit, de ce que les permutations de n éléments sont symétriques deux à deux, et, par conséquent, vont par couples, on déduit immédiatement ce fait bien connu que ces permutations sont toujours en nombre pair.

De ce que deux permutations symétriques présentent le même nombre de séquences, on déduit que les permutations (n, s) sont aussi toujours en nombre pair, ce qui constitue justement le théorème énoncé plus haut.

Enfin, de ce que les maxima d'une permutation correspondent aux minima de la permutation symétrique et réciproquement, on conclut que les permutations $[n, \sigma + 1, \sigma]$ sont en même nombre que les permutations $[n, \sigma, \quad + 1]$, et, par suite, si l'on se reporte à ce qui précède (8), que l'on a identiquement

$$M_{n,\sigma+1,\sigma} = M_{n,\sigma,\sigma+1} = \tfrac{1}{2} P_{n,2\sigma}.$$

Cette double identité, jointe à l'identité trouvée déjà (8),

$$M_{n,\sigma,\sigma} = P_{n,2\sigma-1},$$

nous donne le moyen d'écrire les valeurs des nombres M, dès que nous connaissons celles des nombres P.

VI. — Propriété remarquable des permutations.

26. Si, dans le triangle des nombres $P_{n,s}$, on considère une ligne quelconque autre que la première ou la seconde, et que, dans cette ligne, on fasse, d'une part la somme des termes de rang pair, de l'autre celle des termes de rang impair, on constate que ces deux sommes sont égales. On est conduit, par ce résultat, à énoncer le théorème suivant :

Parmi les permutations de n éléments, il y a autant de permutations ayant un nombre pair de séquences que de permutations en ayant un nombre impair.

27. Ce théorème exprime une propriété très remarquable, ce me semble, des permutations de n éléments. Il n'est établi que par induction. Pour le démontrer en toute rigueur, nous poserons

$$\begin{gathered} P_{n,1}+P_{n,3}+P_{n,5}+\ldots+P_{n,\theta}=V_n, \\ P_{n,2}+P_{n,4}+P_{n,6}+\ldots+P_{n,\tau}=W_n, \end{gathered}$$

désignant par θ et par τ, respectivement, le plus grand nombre impair et le plus grand nombre pair non supérieurs à $n-1$.

28. Cela posé, considérons la première somme V_n. Si nous remplaçons successivement, dans notre formule fondamentale, l'indice s par toutes les valeurs impaires 1, 3, 5, ..., θ, qu'il est susceptible de prendre, nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned} &P_{n,1}=1\,P_{n-1,1}, \\ &P_{n,3}=3P_{n-1,3}+2P_{n-1,2}+(n-3)P_{n-1,1}, \\ &P_{n,5}=5P_{n-1,5}+2P_{n-1,4}+(n-5)P_{n-1,3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &P_{n,\theta}=\theta P_{n-1,\theta}+2P_{n-1,\theta-1}+(n-\theta)P_{n-1,\theta-2}, \end{aligned}$$

dans la dernière desquelles $P_{n-1,\theta}$ est nul, lorsque θ est égal à $n-1$.

Additionnons membres à membres toutes ces égalités, nous trouvons, après quelques réductions, pour ainsi dire évidentes,

$$V_n=(n-2)V_{n-1}+2W_{n-1}.$$

29. Donnons de même à l'indice s, dans notre formule fondamentale, toutes les valeurs paires $2, 4, 6, \ldots, \tau$ qu'il est susceptible de prendre, nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned}
&P_{n,2} = 2P_{n-1,2} + 2P_{n-1,1},\\
&P_{n,4} = 4P_{n-1,4} + 2P_{n-1,3} \quad + (n-4)P_{n-1,2}\\
&P_{n,6} = 6P_{n-1,6} + 2P_{n-1,5} \quad + (n-6)P_{n-1,4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&P_{n,\tau} = \tau P_{n-1,\tau} + 2P_{n-1,\tau-1} + (n-\tau)P_{n-1,\tau-2},
\end{aligned}$$

dans la dernière desquelles $P_{n-1,\tau}$ est nul, lorsque τ est égal à $n-1$.

Additionnons, membres à membres, toutes ces égalités, nous trouvons, après quelques réductions,

$$W_n = (n-2)W_{n-1} + 2V_{n-1}.$$

30. Les deux relations que nous venons d'obtenir, entre les sommes V_n, W_n, V_{n-1} et W_{n-1}, sont tout à fait analogues l'une à l'autre. Si nous retranchons membres à membres la seconde de la première, nous trouvons l'égalité

$$V_n - W_n = (n-4)(V_{n-1} - W_{n-1}).$$

Cette égalité nous fait voir que la différence $V_n - W_n$ est nulle lorsque n est égal à 4. Il s'ensuit, d'après cette même égalité, que cette différence est nulle aussi pour toutes les valeurs suivantes de n. Et le théorème, qui fait l'objet du présent Chapitre, se trouve ainsi rigoureusement démontré.

VII. — Nombre moyen des séquences.

31. Supposons formé le Tableau complet des permutations de n éléments, et cherchons le nombre total S_n des séquences qui y sont contenues. Nous avons évidemment

$$S_n = 1P_{n,1} + 2P_{n,2} + 3P_{n,3} + \ldots + (n-1)P_{n,n-1};$$

et il s'agit de calculer le second membre de cette égalité.

32. Pour y arriver, écrivons les unes sous les autres, en les déduisant de notre formule fondamentale, les $n-1$ égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
P_{n,1} &= 1\,P_{n-1,1},\\
P_{n,2} &= 2\,P_{n-1,2} + 2\,P_{n-1},\\
P_{n,3} &= 3\,P_{n-1,3} + 2\,P_{n-1,2} + (n-3)P_{n-1,1},\\
P_{n,4} &= 4\,P_{n-1,4} + 2\,P_{n-1,3} + (n-4)P_{n-1,2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
P_{n,n-2} &= (n-2)P_{n-1,n-2} + 2\,P_{n-1,n-3} + 2\,P_{n-1,n-4},\\
P_{n,n-1} &= 2\,P_{n-1,n-2} + 1\,P_{n-1,n-3},
\end{aligned}$$

Si nous multiplions les deux membres de la première de ces égalités par 1, les deux membres de la deuxième par 2, ceux de la troisième par 3, et ainsi de suite, puis, que nous ajoutions membres à membres toutes les égalités ainsi multipliées, nous obtenons, après quelques simplifications faciles, l'identité

$$S_n = \sum_{1}^{n-2}{}_k [(n-2)k + 2(n-1)]P_{n-1,k}$$

ou bien

$$S_n = (n-2)\sum_{1}^{n-2}{}_k kP_{n-1,k} + 2(n-1)\sum_{1}^{n-2}{}_k P_{n-1,k}.$$

Or, dans cette dernière égalité, le premier Σ n'est autre chose que le nombre total S_{n-1} des séquences contenues dans le tableau des permutations de $n-1$ éléments ; le second Σ n'est autre chose que le nombre même $(n-1)!$ de ces permutations. Donc nous avons identiquement

$$S_n = (n-2)S_{n-1} + 2(n-1)(n-1)!$$

33. Cette formule nous permet de calculer de proche en proche, par voie récurrente, les valeurs successives de S_n. Elle nous permet aussi de démontrer que l'on a, quel que soit n,

$$S_n = \frac{2n-1}{3}n!$$

En effet, cette expression de S_n est évidemment exacte lorsque n est égal à 2 ; et la formule considérée nous montre que si cette expression est vraie pour une valeur quelconque de n, elle l'est aussi pour la valeur suivante.

34. Le nombre S_n ainsi obtenu, il suffit, pour trouver le *nombre moyen* des séquences d'une permutation de n éléments, de diviser le nombre total S_n des séquences par le nombre total $n!$ des permutations. En faisant cette division, on obtient, pour la valeur moyenne du nombre s des séquences, l'expression $\frac{2n-1}{3}$.

Comme, dans toute permutation, la somme $\mu + \mu'$ du nombre des maxima et du nombre des minima dépasse toujours d'une unité le nombre s des séquences, la valeur moyenne de la somme $\mu + \mu'$, dans une permutation de n éléments, est égale à $\frac{2n-1}{3} + 1$, c'est-à-dire à $\frac{2n+2}{3}$.

Si l'on considère à présent les rapports $\frac{s}{n}$ et $\frac{\mu + \mu'}{n}$, on voit qu'ils ont pour valeurs moyennes respectives $\frac{2n-1}{3n}$ et $\frac{2n+2}{3n}$; et il est évident, lorsque n croît indéfiniment, que chacune de ces fractions tend vers la limite $\frac{2}{3}$.

35. Dans la séance de l'Académie des Sciences du 6 septembre 1875, J. Bienaymé a fait connaître la *valeur probable* du rapport $\frac{s}{n}$ dans les permutations de n éléments. La formule qu'il avait donnée, sans démonstration, a été démontrée, dès la séance suivante et de la façon la plus élégante, par M. J. Bertrand. La valeur probable, donnée par J. Bienaymé, se confond, comme cela devait être, avec la valeur moyenne que nous venons de trouver.