

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DÉSIRÉ ANDRÉ

Mémoire sur la multiplication dont le multiplicateur est la différence $x - \alpha$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 12 (1883), p. 33-44 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__S33_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE SUR LA MULTIPLICATION

DONT

LE MULTIPLICATEUR EST LA DIFFÉRENCE $x - \alpha$,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Ce Mémoire sur la multiplication par $x - \alpha$ ressemble beaucoup à celui que nous avons donné sur la multiplication par $x + \alpha$. On s'y propose un but analogue : la détermination du nombre exact des variations qui se gagnent dans la multiplication du polynôme $f(x)$ par le binôme $x - \alpha$, où α est positif. On y emploie une méthode identique, consistant à considérer certains trinômes, dits *trinômes éleveurs*; à partager le multiplicande $f(x)$ en *tronçons*; et à chercher les changements qu'éprouve le nombre des variations contenues dans chaque tronçon du multiplicande, lorsqu'on passe de ce tronçon du multiplicande au tronçon correspondant du produit.

2. Toutefois, malgré ces ressemblances, le présent Mémoire, par ses résultats, diffère du précédent plus qu'on n'aurait pu le prévoir. Le théorème auquel il conduit pour la détermination du nombre des variations gagnées dans la multiplication par $x - \alpha$ est un peu moins simple que celui qu'on a trouvé pour le nombre des variations perdues dans la multiplication par $x + \alpha$. Tandis, en effet, que les variations perdues ont toutes la même origine, les variations gagnées proviennent, comme on le verra, de trois sources essentiellement différentes.

3. L'ordre que nous suivons, dans ce second Mémoire, n'est autre que celui que nous avons suivi dans le premier. Seulement nous profitons de l'identité de la méthode employée pour éviter les redites, et pour abréger notre exposition autant qu'on le peut faire sans nuire à sa clarté.

CHAPITRE I.

TRINOMES ÉLÉVATEURS.

4. Nous appelons *trinôme élevé* tout groupe de trois termes consécutifs, c'est-à-dire de trois termes non séparés par des lacunes, qui présente deux permanences, et où le carré du coefficient moyen est moindre que le produit des coefficients extrêmes.

Nous nommons de tels groupes *trinômes*, parce qu'ils se composent chacun de trois termes; nous les qualifions d'*élevateurs*, parce que c'est, en partie, grâce à eux que, dans la multiplication par $x - \alpha$, le nombre des variations est augmenté, ou, si l'on veut, *élevé*.

5. Si nous désignons par L, M, N les valeurs absolues des trois coefficients, tout trinôme élevé est de la forme

$$\pm (Lx^{p+1} + Mx^p + Nx^{p-1});$$

et nous avons, entre L, M, N, la relation

$$M^2 < LN,$$

d'où il faut bien remarquer que le signe $=$ est exclu.

6. Dans un trinôme élevé L, M, N, la fraction $\frac{M}{L}$ est toujours inférieure à la fraction $\frac{N}{M}$ et ne peut jamais lui être égale. La première de ces fractions est la *limite inférieure* du trinôme, la seconde en est la *limite supérieure*. L'intervalle qui les sépare est l'*amplitude* du trinôme. Comme les deux limites ne sont jamais égales, cette amplitude ne se réduit jamais à zéro.

7. Soit α un nombre positif quelconque. Ce nombre est *compris* dans

le trinôme élévateur (L, M, N) , s'il satisfait à cette double condition

$$\frac{M}{L} \leq \alpha < \frac{N}{M},$$

où il faut bien remarquer que la fraction $\frac{N}{M}$, que α ne peut jamais atteindre, est une *limite inaccessible*.

Il est évident qu'il existe une infinité de nombres positifs compris dans un trinôme élévateur quelconque.

8. Ainsi définis, les trinômes élévateurs sont, en apparence, identiques aux groupes que nous avons considérés, dans notre précédent Mémoire, sous le nom de *trinômes abaisseurs* de la seconde espèce. En réalité, ils diffèrent de ces derniers par deux particularités essentielles, sur lesquelles nous ne saurions trop insister : d'abord, dans le trinôme élévateur (L, M, N) , le carré M^2 n'atteint jamais le produit LN ; ensuite, lorsque le nombre α est compris dans ce même trinôme élévateur, il n'atteint jamais non plus la fraction $\frac{N}{M}$.

9. Les mots *distincts*, *imbriqués*, *compatibles* se définissent, pour les trinômes élévateurs, de la même façon que pour les trinômes abaisseurs du précédent Mémoire. Toutefois il est bon de faire observer que deux trinômes élévateurs compatibles sont forcément distincts.

10. Soient les trinômes élévateurs

$$(L, M, N), (L', M', N'), (L'', M'', N''), \dots$$

Pour qu'ils soient compatibles entre eux, il faut évidemment et il suffit que la plus grande, μ , des fractions $\frac{M}{L}, \frac{M'}{L'}, \frac{M''}{L''}, \dots$ soit inférieure à la plus petite, ν , des fractions $\frac{N}{M}, \frac{N'}{M'}, \frac{N''}{M''}, \dots$. En d'autres termes, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\mu < \nu,$$

d'où il convient de remarquer que le signe $=$ est toujours exclu.

11. Les trinômes élévateurs comprenant α peuvent être parfois des *trinômes élévateurs superflus*.

Un trinôme élévateur comprenant α est *superflu* lorsque ses deux premiers coefficients composent ou terminent une suite de coefficients consécutifs, tous de même signe, formant une progression géométrique de raison α , et précédés immédiatement soit d'une lacune, soit d'un coefficient de signe contraire, soit d'un coefficient de même signe, trop petit en valeur absolue pour faire partie de la progression.

Pour qu'un trinôme élévateur soit superflu, la première condition, nécessaire mais non pas suffisante, c'est donc que la limite inférieure de ce trinôme soit juste égale au nombre α .

Il est évident, d'ailleurs, sur leur définition même, que les trinômes élévateurs superflus ne se peuvent présenter que dans des cas très rares, tout à fait exceptionnels.

CHAPITRE II.

REMARQUES SUR LES TERMES DU POLYNÔME $f(x)$.

12. Nous supposons toujours que le polynôme $f(x)$ soit ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x . Ce polynôme peut d'ailleurs être complet ou incomplet. Si a_p est le coefficient de x^p dans le multiplicande $f(x)$, et A_p le coefficient de x^{p+1} dans le produit de $f(x)$ par $x - \alpha$, nous disons que a_p et A_p sont deux coefficients correspondants. Tous les coefficients du multiplicande ont leurs correspondants au produit; mais la réciproque n'est pas vraie : dans toute portion du produit qui répond à une lacune du multiplicande se trouve un terme *surnuméraire*, qui provient du terme du multiplicande placé à gauche de la lacune, et qui a toujours un signe contraire à celui de ce terme. Il se trouve au produit un autre terme surnuméraire provenant du dernier terme du multiplicande, et de signe contraire à ce dernier terme.

13. Nous emploierons, dans la multiplication par $x - \alpha$, les mots *coefficients disparaissants, variables, essentiellement invariables, accidentellement invariables*, avec les significations que nous leur avons données dans notre précédent Mémoire.

14. Dans cette multiplication par $x - z$, tout coefficient disparaissant, variable ou accidentellement invariable, est évidemment précédé d'un coefficient de même signe. Pour qu'un coefficient soit essentiellement invariable, il faut et il suffit, ou bien qu'il occupe, dans le polynôme $f(x)$, la première de toutes les places, ou bien qu'il suive immédiatement une lacune, ou bien, enfin, qu'il soit précédé immédiatement d'un terme de signe contraire.

15. Si l'on considère l'un quelconque des trinômes éleveurs du multiplicande, et que ce trinôme comprenne le nombre z , il est évident que son terme moyen est variable ou disparaissant, et que son dernier terme est accidentellement invariable. Il faut avoir soin de remarquer que, contrairement à ce qui arrive pour les trinômes abaisseurs, le dernier coefficient d'un trinôme éleveur n'est jamais un coefficient disparaissant.

Il suit de là qu'un trinôme éleveur comprenant z ne peut présenter que deux aspects différents, et il est évident, réciproquement, que si un groupe de trois termes consécutifs, offrant deux permanences, présente l'un ou l'autre de ces deux aspects, ce groupe constitue un trinôme éleveur comprenant le nombre z .

CHAPITRE III.

PARTAGE DU POLYNÔME $f(x)$ EN TRONÇONS.

16. Supposons marqués, dans le multiplicande $f(x)$, tous les coefficients invariables, soit essentiellement, soit accidentellement. Ces coefficients, ainsi marqués, partagent le multiplicande en *plusieurs tronçons*. Chaque tronçon se compose de deux termes invariables qui en sont les limites, et des termes, tous variables, que ces limites enserrent. Il n'y a d'exception que pour le tronçon terminal, qui se compose du dernier terme invariable du multiplicande et de tout ce qui le suit.

Si un tronçon non terminal du multiplicande a pour coefficients limites a_p et a_q , le tronçon correspondant du produit a pour coeffi-

cients limites A_p et A_q . Si le tronçon terminal du multiplicande commence par a_r , c'est par A_r que commence le tronçon terminal du produit.

Le mot *tronçon*, employé sans complément, désignera toujours un tronçon du multiplicande.

17. Nous pouvons remarquer qu'un trinôme éleveur comprenant α n'est jamais à cheval sur deux tronçons du multiplicande; qu'aucune permanence ou variation ne peut passer d'un tronçon dans un tronçon voisin; qu'un tronçon qui contient une lacune du polynôme $f(x)$ n'en contient qu'une seule; enfin qu'un tronçon composé seulement de deux termes consécutifs du multiplicande n'apporte jamais aucun changement dans le nombre des permanences, ni dans celui des variations.

18. D'après ces remarques, pour arriver à déterminer le nombre exact des variations gagnées, il nous suffit de comparer chaque tronçon du multiplicande au tronçon correspondant du produit. Il est clair que notre étude sera complète, si nous considérons successivement :

1° Les tronçons non terminaux et sans lacune, présentant trois termes au moins, et finissant par un coefficient essentiellement invariable;

2° Les tronçons non terminaux et sans lacune, présentant trois termes au moins, et finissant par un coefficient accidentellement invariable;

3° Les tronçons présentant une lacune;

4° Enfin le tronçon terminal.

CHAPITRE IV.

EXAMEN DES TRONÇONS.

19. Considérons les tronçons non terminaux et sans lacune, de trois termes au moins, qui finissent par un coefficient essentiellement invariable.

L'un quelconque d'entre eux nous présente une suite de perma-

nences, suivie d'une variation unique. Le tronçon correspondant du produit nous présente, au contraire, une variation unique, suivie de permanences. Quand on passe de ce tronçon du multiplicande au tronçon correspondant du produit, on ne gagne ni ne perd aucune variation; et il en est encore de même lorsqu'un, ou plusieurs, ou la totalité des coefficients intermédiaires deviennent des coefficients disparaissants.

Quoi qu'il arrive, d'ailleurs, le tronçon considéré du multiplicande ne présente jamais aucun trinôme élévateur comprenant z .

20. Considérons maintenant les tronçons non terminaux et sans lacune, de trois termes au moins, finissant par un coefficient accidentellement invariable.

Un tronçon de cette sorte ne nous présente aucune variation. Le tronçon correspondant du produit nous en présente toujours deux, excepté lorsque tous les coefficients intermédiaires sont disparaissants, car alors il n'en présente plus aucune. Il est d'ailleurs évident que le tronçon considéré du multiplicande nous présente toujours un trinôme élévateur unique, comprenant z , par lequel il se termine; et que ce trinôme devient superflu dans le cas exceptionnel où tous les coefficients intermédiaires deviennent disparaissants.

Un tronçon de l'espèce précédente (19) ne nous faisait jamais gagner ni perdre aucune variation. Un tronçon de la présente sorte nous fait gagner deux variations, toutes les fois que le trinôme élévateur, comprenant z , qu'il nous présente, n'est pas un trinôme élévateur superflu.

21. Nous avons déjà fait remarquer (17) qu'un tronçon contenant une lacune n'en contient qu'une seule. Cette lacune sépare les deux derniers termes de ce tronçon; en quelque sorte elle le termine. Si elle nous présente une variation, c'est-à-dire si les deux termes qu'elle sépare sont de signes contraires, cette variation subsiste au produit, et il ne se perd ni ne se gagne aucune variation.

Si cette lacune nous présente, au contraire, une permanence, c'est-à-dire si les deux termes qu'elle sépare ont le même signe, le tronçon considéré du produit ne contient aucune variation, tandis que le tronçon correspondant du produit en contient toujours deux : on gagne deux variations.

Ce résultat subsiste lors même que ce dernier tronçon nous offrirait des termes disparaissants. D'ailleurs, ce tronçon du multiplicande ne nous présente aucun trinôme élévateur. Nous pouvons donc résumer ce que nous venons de dire sous cette forme : toute lacune séparant deux termes de même signe nous fait gagner une couple de variations.

22. Considérons enfin le tronçon terminal du multiplicande. Ce tronçon ne présente que des permanences. Le tronçon terminal du produit présente toujours une variation. Donc le tronçon terminal, qui ne nous offre d'ailleurs aucun trinôme élévateur, nous fait toujours gagner une variation unique.

CHAPITRE V.

NOMBRE EXACT DES VARIATIONS GAGNÉES.

23. Si l'on reprend, en les comparant, toutes les conséquences tirées de l'examen de nos quatre sortes de tronçons, on est amené à énoncer le théorème suivant, qui est vrai dans tous les cas et ne souffre aucune exception :

THÉOREME FONDAMENTAL. — *Dans la multiplication du polynôme entier $f(x)$ par le binôme $x - \alpha$, où α est positif, il se gagne : autant de couples de variations qu'il y a, dans $f(x)$, de trinômes éleveurs comprenant α et non superflus; plus autant de couples de variations qu'il y a, dans $f(x)$, de lacunes présentant une permanence; plus, enfin, une variation unique.*

24. Comme on le savait depuis longtemps, le nombre total des variations gagnées dans la multiplication de $f(x)$ par $x - \alpha$ est toujours un nombre *impair*. On voit, sur l'énoncé qui précède, que ce nombre total se compose de trois parties : la première, toujours *paire*, susceptible de s'annuler, et dépendant à la fois de la forme de $f(x)$ et de la valeur numérique de α ; la deuxième, toujours *paire* aussi et susceptible de s'annuler, dépendant de la forme du polynôme $f(x)$, mais non pas de la valeur de α ; la troisième enfin, constamment égale à l'unité, et ne dépendant ni de la forme de $f(x)$, ni de la valeur de α .

CHAPITRE VI.

PROBLÈMES DIVERS.

25. PROBLÈME I. — *Combien gagne-t-on de variations quand on multiplie le polynôme $f(x)$ par le binôme $x - \alpha$?*

Notre théorème fondamental nous fournit précisément la solution de ce problème. Pour donner un exemple numérique, supposons qu'il s'agisse de multiplier par $x - 3$ le polynôme

$$x^6 + 2x^5 + 12x^4 + x^2 + 4x + 32.$$

Ce polynôme contient deux trinômes élevateurs, savoir

$$\begin{array}{ll} (1) & x^6 + 2x^5 + 12x^4, \\ (2) & x^2 + 4x + 32, \end{array}$$

qui ont pour limites respectives 2 et 6, 4 et 8. Le premier comprend seul la valeur numérique de α , et comme, pour cette valeur, il n'est pas superflu, il nous fait gagner deux variations.

Mais le polynôme donné contient une lacune présentant une permanence, puisque le terme en x^3 y manque entre deux termes de même signe. Donc, finalement, on gagne un nombre de variations égal à $2 + 2 + 1$, c'est-à-dire à 5.

26. PROBLÈME II. — *Un polynôme $f(x)$ étant donné, trouver les changements qu'éprouve le nombre des variations gagnées dans la multiplication de ce polynôme par $x - \alpha$, lorsque α prend successivement toutes les valeurs, depuis 0 jusqu'à $+\infty$?*

D'après notre théorème fondamental (23), pour résoudre cette question, il nous suffit de trouver les changements qu'éprouve le nombre des trinômes élevateurs, comprenant α et non superflus, que présente le polynôme $f(x)$.

Reprenons pour exemple le polynôme du problème précédent (25); rappelons-nous les limites de ses trinômes élevateurs, et remarquons que, quelle que soit la valeur numérique de α , on doit toujours compter

d'abord trois variations gagnées, savoir : deux variations dues à la lacune qui figure dans ce polynôme, plus la variation unique dont nous avons parlé dans notre énoncé (23).

Cela étant, lorsque α est inférieur à 2, il n'est compris dans aucun trinôme élévateur. On gagne seulement 3 variations.

Lorsque α est égal à 2, il est compris dans le premier trinôme; mais celui-ci est alors superflu. On gagne encore trois variations.

Lorsque α est intermédiaire entre 2 et 4, il est compris dans le premier trinôme. On gagne 5 variations.

Lorsque α est égal à 4, il est compris dans les deux trinômes; mais le second est encore superflu. On gagne encore 5 variations.

Lorsque α est intermédiaire entre 4 et 6, il est compris dans les deux trinômes. On gagne 7 variations.

Lorsque α est égal à 6, il est compris dans le second trinôme seulement. On gagne 5 variations; et il en est de même lorsque α est intermédiaire entre 6 et 8.

Enfin, lorsque α est soit égal, soit supérieur à 8, il n'est plus compris dans aucun des deux trinômes élévateurs. On ne gagne plus que les 3 variations indépendantes de la valeur de α .

27. PROBLÈME III. — *Entre quelles limites faut-il prendre la valeur numérique de α , pour que, dans la multiplication de $f(x)$ par $x - \alpha$, il se gagne un nombre donné de variations?*

Soit $2h + 1$ ce nombre donné. D'après notre théorème fondamental (23), il nous suffit de chercher les régions où α est compris dans $h - \lambda$ trinômes élévateurs non superflus, λ étant le nombre des lacunes représentant une permanence.

28. PROBLÈME IV. — *Quel est le plus grand nombre de variations qu'on puisse gagner dans la multiplication d'un polynôme donné $f(x)$ par un binôme de la forme $x - \alpha$?*

D'après notre théorème fondamental (23), ce nombre *maximum* est égal à $2\theta + 2\lambda + 1$, si l'on désigne par λ le nombre des lacunes représentant une permanence, et par θ le plus grand nombre de trinômes élévateurs, compatibles et non superflus, qu'on puisse trouver dans le polynôme $f(x)$.

Il est à remarquer, dans cette multiplication de $f(x)$ par $x - \alpha$, que le nombre des variations gagnées ne peut jamais descendre au-dessous de $2\lambda + 1$. Ce binôme $2\lambda + 1$ est le *minimum* du nombre des variations gagnées.

CHAPITRE VII.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.

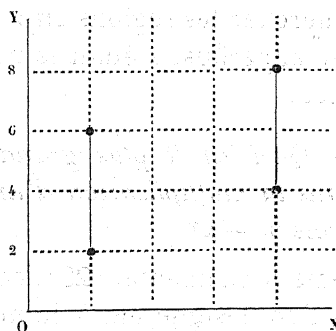
29. Les trinômes élevateurs se peuvent représenter, *graphiquement*, de la même manière que les trinômes abaisseurs de notre précédent Mémoire.

Seulement, tandis que le tableau des trinômes abaisseurs pouvait contenir des *gros points isolés*, le tableau des trinômes élevateurs n'en contiendra jamais aucun. C'est là une conséquence immédiate de ce fait : que les gros points isolés représentent des trinômes d'amplitude nulle, qu'il y a de pareils trinômes parmi les trinômes abaisseurs, et qu'il n'y en a jamais parmi les trinômes élevateurs.

30. En appliquant ce mode de représentation aux trinômes élevateurs du polynôme

$$x^6 + 2x^5 + 12x^4 + x^3 + 4x + 32,$$

que nous avons déjà étudié (25), nous obtenons le Tableau que voici :



31. Pour montrer l'usage de ce mode de représentation graphique, supposons qu'il s'agisse du polynôme auquel se rapporte le Tableau

ci-dessus; et qu'on demande dans combien de trinômes éleveurs, non superflus, est compris le nombre donné z .

Sur l'axe OY, on marquera le point z ; puis, par ce point, on mènera, mentalement, une parallèle à l'axe OX des abscisses. Il est évident que cette parallèle pourra, soit tomber entre deux horizontales pointillées, soit coïncider avec une de ces horizontales.

Si cette parallèle tombe entre deux horizontales pointillées, ou bien elle ne rencontre rien, ou bien elle ne rencontre que des traits pleins. Le nombre des traits pleins qu'elle rencontre nous donne exactement, dans tous les cas, le nombre des trinômes éleveurs, non superflus, qui comprennent z .

Si cette parallèle coïncide avec l'une des horizontales pointillées, elle peut rencontrer : des traits pleins, des gros points représentant des limites supérieures de trinômes, des gros points représentant des limites inférieures. Les traits pleins rencontrés donnent chacun un trinôme éleveur comprenant z et non superflu. Les gros points représentant les limites supérieures des trinômes ne donnent absolument rien, puisque ces limites supérieures (7) sont inaccessibles : il ne faut donc pas les compter. Quant aux gros points représentant les limites inférieures des trinômes, chaque fois que l'on en rencontre un, il faut se reporter au polynôme $f(x)$, pour voir si le trinôme éleveur correspondant est ou n'est pas un trinôme éleveur superflu. S'il n'est pas superflu, on le compte; sinon, non.

32. Ce qui précède nous montre nettement de quelle façon, à l'aide de notre représentation graphique, on peut résoudre le premier (25) des problèmes que nous nous sommes proposé. Pour résoudre les trois autres, il nous suffit d'observer ce qui se passe lorsque le point z , partant de l'origine, s'élève de plus en plus sur l'axe OY, en emportant avec lui, vers le haut, la parallèle menée mentalement à l'axe des abscisses.