ÉDOUARD GOURSAT

Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (seconde partie)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 395-430
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__395_0>

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

D'ORDRE SUPÉRIEUR

(SECONDE PARTIE),

PAR M. GOURSAT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

1. Avant de poursuivre l'étude des fonctions qui ont fait l'objet du travail précédent (*Annales de l'École Normale*, t. XII, p. 261), il est nécessaire de développer quelques considérations générales sur la théorie des équations linéaires, dont on aura besoin par la suite. Étant données deux équations linéaires du même ordre m, ayant les mêmes points singuliers, à coefficients uniformes,

$$\varphi(y) = 0, \tag{1}$$

$$\psi(z) = 0, \tag{2}$$

on dira que ces deux équations sont de la même classe, ou qu'elles sont *ramifiées* de la même manière, s'il existe un système fondamental d'intégrales de l'équation (1)

$$y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$$

et un système fondamental d'intégrales de l'équation (2)

$$z_0, z_1, \ldots, z_{m-1},$$

tels que tout contour fermé décrit par la variable qui change $y_0, y_1, \ldots,$

y_{m-1} en $(y_0)'$, $(y_1)'$, ..., $(y_{m-1})'$, où

$$(y_i)' = \sum_{k=0}^{k=m-1} C_{ik} y_k, \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

change de même z_0, z_1, ..., z_{m-1} en $(z_0)'$, $(z_1)'$, .., $(z_{m-1})'$, où

$$(z_i)' = \sum_{k=0}^{k=m-1} C_{ik} z_k.$$

Cela revient à dire que les deux équations ont le même groupe. Il est clair que, s'il existe deux systèmes fondamentaux d'intégrales jouissant de cette propriété, il en existe une infinité d'autres; par exemple, il suffira de prendre

$$Y_i = \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{ik} y_k,$$

et de même

$$Z_i = \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{ik} z_k, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

en supposant, bien entendu, que le déterminant des quantités a_{ik} est différent de zéro.

Théorème I. — *Étant données deux équations* (1) *et* (2) *ramifiées de la même manière, l'intégrale générale de la seconde est*

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}},$$

y désignant l'intégrale générale de la première et P_0, P_1, ..., P_{m-1} *des fonctions uniformes de la variable.*

Soient en effet $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ et z_0, z_1, ..., z_{m-1} deux systèmes fondamentaux correspondants d'intégrales; considérons le système des m équations linéaires

$$\begin{aligned}
z_0 &= P_0 y_0 + P_1 \frac{dy_0}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y_0}{dx^{m-1}}, \\
z_1 &= P_0 y_1 + P_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_{m-1} &= P_0 y_{m-1} + P_1 \frac{dy_{m-1}}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y_{m-1}}{dx^{m-1}};
\end{aligned}$$

on en déduit, en résolvant par rapport aux m coefficients inconnus P_0, $P_1, \ldots, P_{m-1}$,

$$P_i = \frac{D_i}{D},$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} y_0 & \frac{dy_0}{dx} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_0}{dx^{m-1}} \\ y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_{m-1} & \frac{dy_{m-1}}{dx} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_{m-1}}{dx^{m-1}} \end{vmatrix},$$

$$D_i = \begin{vmatrix} y_0 & \frac{dy_0}{dx} & \cdots & \frac{d^{i-1}y_0}{dx^{i-1}} & z_0 & \frac{d^{i+1}y_0}{dx^{i+1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_0}{dx^{m-1}} \\ y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}} & z_1 & \frac{d^{i+1}y_1}{dx^{i+1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_{m-1} & \frac{dy_{m-1}}{dx} & \cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdots & \frac{d^{m-1}y_{m-1}}{dx^{m-1}} \end{vmatrix}.$$

La variable décrivant un contour fermé quelconque, les deux déterminants D et D_i sont multipliés par un même facteur constant; P_i est donc une fonction uniforme de x, dont les points singuliers sont précisément les points singuliers des équations (1) et (2). Les coefficients $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ étant déterminés de cette façon, on sait qu'il existe une équation linéaire d'ordre m dont l'intégrale générale est

$$u = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},$$

y désignant l'intégrale générale de l'équation (1). Pour la formation de cette équation, je renverrai au Mémoire de M. Appell (*Annales de l'École Normale*, t. X, 1881). L'équation en u et l'équation en z, admettant m intégrales communes $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, devront être identiques. C. Q. F. D.

Il en résulte qu'on passe de l'équation (1) à l'équation (2) en posant

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}};$$

inversement, on passera de l'équation (2) à l'équation (1) en posant

$$y = Q_0 z + Q_1 \frac{dz}{dx} + \ldots + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}},$$

$Q_0, Q_1, \ldots, Q_{m-1}$ désignant aussi des fonctions uniformes de x, qui sont déterminées par des équations analogues aux précédentes.

Remarque I. — Si y_i est une intégrale de l'équation (1), la fonction

$$z_i = P_0 y_i + P_1 \frac{dy_0}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}}$$

sera une intégrale de l'équation (2). Si $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ sont m intégrales de l'équation (1), les fonctions $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, obtenues de cette façon en faisant successivement $i = 0, 1, \ldots, m-1$, seront m intégrales de l'équation (2). J'ajoute que, si $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ forment un système fondamental, il en est de même de $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$. Supposons en effet qu'entre ces m fonctions il existe une relation de la forme suivante :

$$C_0 z_0 + C_1 z_1 + \ldots + C_{m-1} z_{m-1} = 0,$$

où $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ sont des constantes qui ne sont pas toutes nulles. Si l'on remplace les z par leurs valeurs, on aboutit à la relation

$$P_0 Y_0 + P_1 \frac{dY_0}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} Y_0}{dx^{m-1}} = 0.$$

où l'on a posé

$$Y_0 = C_0 y_0 + C_1 y_1 + \ldots + C_{m-1} y_{m-1};$$

Y_0 ne peut être nul, puisqu'on suppose que $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ forment un système fondamental. Il faudra donc que l'équation (1) admette une intégrale commune avec l'équation d'ordre moindre

$$P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = 0,$$

ayant aussi ses coefficients uniformes. Cette équation ne sera pas *irréductible*. Il est clair d'ailleurs que si cette circonstance se présente, l'ordre de l'équation en z obtenue par la transformation

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

doit subir une réduction. Supposons, pour fixer les idées, que l'équation (1) ait p intégrales communes avec l'équation

$$(3) \qquad P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = 0.$$

L'équation en z obtenue par la transformation ne sera plus que d'ordre $m-p$.

Si l'on désigne par

$$y_0, \; y_1, \; \ldots, \; y_{m-p-1}$$

$m-p$ intégrales distinctes de l'équation (1) qui ne vérifient pas l'équation (3) et $z_1, z_2, \ldots, z_{m-p-1}$ les z correspondants, le calcul précédent montre que $z_1, z_2, \ldots, z_{m-p-1}$ forment un système fondamental d'intégrales de l'équation en z. On peut donc considérer la loi comme générale.

Les intégrales y_i et z_i seront dites correspondantes. L'intégrale y_i étant connue, l'intégrale correspondante z_i est déterminée, à un facteur constant près, en exceptant cependant le cas particulier où l'on pourrait passer de l'équation (1) à l'équation (2) par deux transformations différentes de la forme précédente.

Remarque II. — Supposons que les équations (1) et (2) soient à coefficients rationnels et que leurs intégrales soient toutes régulières dans le voisinage de chaque point critique $x = a_i$ et dans le voisinage du point ∞ ; il résulte de l'expression ci-dessus des coefficients P_i que ces coefficients restent finis pour tout point critique $x = a_i$ quand on les multiplie préalablement par une puissance convenable de $x - a_i$ et pour $x = \infty$ quand on les multiplie par une puissance convenable de $\frac{1}{x}$. Ce sont donc des fonctions *rationnelles* de la variable.

Remarque III. — Étant données $m+1$ équations linéaires ramifiées de la même manière que l'équation (1), soient $z_i^0, z_i^1, \ldots, z_i^m$ les $m+1$ intégrales qui correspondent respectivement à l'intégrale y_i de l'équation (1). On pourra exprimer ces $m+1$ fonctions par des formules analogues aux précédentes, puis éliminer entre les $m+1$ équations les m quantités intermédiaires

$$y_i, \; \frac{dy_i}{dx}, \; \frac{d^2 y_i}{dx^2}, \; \ldots, \; \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}};$$

entre les $m+1$ fonctions $z_i^0, z_i^1, \ldots, z_i^m$, il existe donc une relation linéaire et homogène à coefficients uniformes.

2. La méthode précédente s'applique très facilement à la démonstration du théorème sur les fonctions algébriques ramifiées de la même manière. Je l'indiquerai en quelques mots; soient $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ les m branches d'une fonction algébrique y de x et $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ les m branches d'une fonction uniforme du point analytique (x, y) correspondant aux m branches $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$.

Posons

$$\begin{aligned}
z_0 &= P_0 y_0 + P_1 y_0^2 + \ldots + P_{m-1} y_0^{m-1},\\
z_1 &= P_0 y_1 + P_1 y_1^2 + \ldots + P_{m-1} y_1^{m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_{m-1} &= P_0 y_{m-1} + P_1 y_{m-1}^2 + \ldots + P_{m-1} y_{m-1}^{m-1};
\end{aligned}$$

on en déduit

$$P_i = \frac{D_i}{D},$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} y_0 & y_0^2 & \ldots & y_0^{m-1} \\ y_1 & y_1^2 & \ldots & y_1^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-1} & y_{m-1}^2 & \ldots & y_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix},$$

$$D_i = \begin{vmatrix} y_0 & y_0^2 & \ldots & y_0^{i-1} & z_0 & y_0^{i+1} & \ldots & y_0^{m-1} \\ y_1 & y_1^2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & y_1^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & y_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}.$$

On voit, comme plus haut, que, lorsque la variable décrit un contour fermé quelconque, D_i et D sont multipliés par un même facteur constant, qui est ici ± 1; les coefficients P_i sont donc uniformes. Si, de plus, on suppose que la fonction z n'admet que des pôles ou des points critiques algébriques, ces coefficients seront des fonctions rationnelles.

3. Étant données deux équations linéaires ramifiées de la même manière dans le voisinage de chaque point critique $x = a_i$, les deux équations devront admettre un groupe d'intégrales se comportant de

la même manière quand la variable tourne autour de ce point critique. Par exemple, si la première équation admet une intégrale y_1, telle que la nouvelle valeur de cette intégrale, après que x a décrit un contour fermé autour du point $x = a_i$, soit $(y_1)' = \omega_1 y_1$; l'intégrale correspondante z_1 de la seconde équation sera telle que $(z_1)' = \omega_1 z_1$. De même, si la première équation admet un groupe de deux intégrales y_1, y_2 telles que l'on ait

$$(y_1)' = \omega_1 y_1,$$
$$(y_2)' = \omega_2 y_1 + \omega_1 y_2,$$

les intégrales correspondantes z_1, z_2 seront telles que

$$(z_1)' = \omega_1 z_1,$$
$$(z_2)' = \omega_2 z_1 + \omega_1 z_2,$$

et ainsi de suite.

La transformation précédente ramène l'intégration de toutes les équations linéaires d'une même classe à l'intégration d'une seule d'entre elles. Il est donc très important de pouvoir reconnaître si deux équations linéaires données appartiennent ou non à la même classe. Pour fixer les idées, je me borne au cas où les deux équations ont leurs coefficients rationnels et toutes leurs intégrales régulières. Il faudra d'abord que les deux équations aient les mêmes points de ramification (les points singuliers non communs ne peuvent être que des points singuliers apparents). Il faudra, de plus, que, dans le voisinage de l'un quelconque de ces points singuliers, les deux équations admettent un groupe d'intégrales se comportant de la même manière. Les racines des deux équations déterminantes fondamentales devront avoir respectivement des différences entières; en outre, si l'une des équations admet un groupe de p intégrales appartenant à des exposants dont les différences sont entières, la seconde équation devra contenir un groupe analogue de p intégrales, et si le premier groupe contient des logarithmes, il devra y en avoir pareillement dans le second. Ces conditions ne sont pas suffisantes; il faut, en outre, que l'on puisse passer de l'équation (1) à l'équation (2) en posant

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}},$$

$P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ désignant des fonctions rationnelles de la variable. Reprenons l'expression générale du coefficient P_i,

$$P_i = \frac{D_i}{D};$$

ce coefficient ne peut éprouver de discontinuité qu'aux points singuliers. Dans le voisinage du point singulier a_i, par exemple, comme le numérateur et le dénominateur ne changent pas de valeur, à un facteur constant près, quand on remplace les éléments d'un système fondamental par ceux d'un autre système, on peut supposer qu'on a pris pour $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ les intégrales qui jouissent de propriétés simples dans le voisinage du point $x = a_i$ et pour $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ les intégrales correspondantes. On reconnaît alors aisément que ce coefficient peut se mettre sous la forme

$$(x - a_i)^{n_i} Q_i(x - a_i),$$

n_i étant un nombre entier positif ou négatif qui dépend des coefficients des deux équations et $Q_i(x - a_i)$ une fonction holomorphe pour $x = a_i$. Ce coefficient P_i sera donc de la forme

$$P_i = (x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2}\ldots(x - a_\rho)^{n_\rho} Q(x),$$

$Q(x)$ étant une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan. L'étude du même coefficient P_i dans le voisinage du point $x = \infty$ montre que $Q(x)$ ne peut être qu'un polynôme entier en x et donne en même temps une limite supérieure du degré de ce polynôme. Les coefficients $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ ne dépendent donc que d'un nombre *limité* de paramètres inconnus; on aura à rechercher s'il est possible de déterminer ces paramètres de façon que l'équation obtenue par la transformation

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

coïncide avec l'équation (2). Les calculs paraissent devoir être très compliqués; mais on peut considérer la question comme résolue, puisqu'on est ramené dans tous les cas à des calculs algébriques.

4. Étant données deux équations linéaires à coefficients uniformes

d'ordre m

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y, \tag{1}$$

$$\frac{d^m z}{dx^m} = q_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots\ldots\ldots + \ldots + q_m y, \tag{2}$$

ces deux équations sont dites *transformées* l'une de l'autre si l'intégrale générale de l'équation (2) est de la forme

$$z = \Pi(x)\, y,$$

$\Pi(x)$ désignant une fonction de x seul et y étant l'intégrale générale de la première.

Si dans l'équation (1) on fait la transformation

$$y = \frac{1}{\Pi(x)} z,$$

on devra retrouver l'équation (2). Le coefficient de $\dfrac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}$ dans cette équation transformée sera

$$\frac{m\,\Pi'(x)}{\Pi(x)} + p_1;$$

on devra donc avoir

$$\frac{m\,\Pi'(x)}{\Pi(x)} = q_1 - p_1$$

et, par suite,

$$\Pi(x) = e^{\frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} (q_1 - p_1)\,dx}.$$

On voit que la dérivée logarithmique de la fonction $\Pi(x)$ est essentiellement uniforme; on reconnaît, de plus, le moyen de s'assurer si deux équations linéaires sont transformées l'une de l'autre. Si les équations (1) et (2) ont toutes leurs intégrales régulières, la fonction $\Pi(x)$ sera de la forme

$$\Pi(x) = C(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2}\ldots(x - a_\rho)^{\alpha_\rho}.$$

Les intégrales des équations (1) et (2) se correspondent deux à deux et à un système fondamental de l'une correspond un système fondamental de la seconde.

Si deux équations linéaires d'ordre m sont telles qu'entre deux systèmes fondamentaux d'intégrales on ait les relations

$$\frac{z_0}{y_0} = \frac{z_1}{y_1} = \ldots = \frac{z_{m-1}}{y_{m-1}},$$

elles sont transformées l'une de l'autre. Désignons par $\Pi(x)$ la valeur commune des rapports précédents; si l'on forme l'équation d'ordre m dont l'intégrale générale est $u = \Pi(x)y$, y désignant l'intégrale générale de l'équation $\varphi(y) = 0$, cette équation auxiliaire aura m intégrales communes avec l'équation en z; elles seront donc identiques.

5. Les définitions précédentes ne sont que des cas particuliers de la définition suivante. Étant données deux équations linéaires d'ordre m à coefficients uniformes, on dira qu'elles sont de la même *famille* si l'intégrale générale de la seconde est

$$z = \Pi(x)\left(P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right),$$

y désignant l'intégrale générale de la première, P_0, P_1, ..., P_{m-1} des fonctions uniformes de la variable et $\Pi(x)$ une fonction quelconque de x. C'est à M. Poincaré qu'est due l'idée de familles d'équations linéaires (*Comptes rendus*, t. XCIV, p. 1402). Je me borne à un cas particulier dont j'aurai seulement besoin par la suite. Les intégrales des deux équations se correspondent encore deux à deux, ainsi que les systèmes fondamentaux. Il est bien aisé de voir quelle doit être la forme de la fonction $\Pi(x)$; en effet, la transformation par laquelle on passe de l'équation en y à l'équation en z peut être considérée comme équivalente à deux transformations faites successivement :

$$u = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \quad z = \Pi(x) \times u.$$

L'équation en u aura aussi ses coefficients uniformes et, par suite, d'après une remarque antérieure, $\Pi(x)$ devra être de la forme

$$\Pi(x) = e^{\int f(x)dx},$$

$f(x)$ désignant une fonction uniforme.

Soient toujours $\varphi(y)=0$, $\psi(z)=0$ deux équations d'ordre m à coefficients uniformes. Supposons qu'il existe un système fondamental d'intégrales de la première $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ et un système fondamental d'intégrales de la seconde $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, tels que tout contour fermé, qui change $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ en

$$(y_i)' = \sum_{k=0}^{k=m-1} C_{ik} y_k \quad (i=0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

change $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ en

$$(z_i)' = A \sum_{k=0}^{k=m-1} C_{ik} z_k,$$

A désignant un facteur constant qui ne dépend que du contour décrit par la variable; les deux équations seront de la même famille. Posons, en effet,

$$\begin{aligned}
z_0 &= Q_0 y_0 + Q_1 \frac{dy_0}{dx} + \ldots + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} y_0}{dx^{m-1}},\\
z_1 &= Q_0 y_1 + Q_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}},\\
z_{m-1} &= Q_0 y_{m-1} + Q_1 \frac{dy_{m-1}}{dx} + \ldots + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} y_{m-1}}{dx^{m-1}};
\end{aligned}$$

on en déduit, comme plus haut,

$$Q_i = \frac{D_i}{D};$$

et l'on reconnaît immédiatement que, la variable décrivant le contour précédent, Q_i est multiplié par le facteur constant A. Si l'on pose

$$Q_i = Q_0 P_i,$$

on voit que P_i sera une fonction uniforme, et l'on pourra écrire

$$z = Q_0\left(y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right),$$

$P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ étant uniformes. Je remarque encore que, si les deux équations sont à coefficients rationnels, on peut prendre pour le facteur $\Pi(x)$ un facteur de la forme

$$(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_\rho)^{\alpha_\rho}.$$

6. Comme application des remarques précédentes, je considère l'exemple suivant. Soit z une fonction multiforme de la variable x, jouissant des propriétés suivantes. Entre $n+1$ branches de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Chaque branche de la fonction est uniforme pour toute valeur de x différente de $0, 1, \infty$; dans le voisinage du point $x=0$, on a les n déterminations linéairement indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, dont la première est uniforme pour $x=0$ et dont les autres sont multipliées respectivement par les $n-1$ facteurs constants différents $\omega_2, \omega_3 \ldots, \omega_n$ lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x=0$, de sorte que, en désignant par $(\varphi_1)', \ldots, (\varphi_n)'$ les valeurs nouvelles de ces fonctions après un pareil chemin, on ait

$$(\varphi_1)'=\varphi_1, \quad (\varphi_2)'=\omega_2\varphi_2, \quad (\varphi_3)'=\omega_3\varphi_3, \quad \ldots, \quad (\varphi_n)'=\omega_n\varphi_n.$$

Dans le voisinage du point $x=1$, on a les n branches linéairement indépendantes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, dont la première ψ_1 est multipliée par le facteur constant ω_1 lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x=1$, et dont les $n-1$ autres sont uniformes dans le voisinage de ce point. Enfin, dans le domaine du point $x=\frac{1}{x'}=\infty$, on a n déterminations linéairement indépendantes $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, qui sont respectivement multipliées par n facteurs constants différents ω'_1, $\omega'_2, \ldots, \omega'_n$, lorsque la variable x décrit sur la sphère un petit lacet dans le sens inverse autour du point $x'=0$. Nous allons reconnaître que toutes les fonctions de cette nature, admettant les mêmes multiplicateurs ω et ω', sont ramifiées de la même manière.

En effet, considérons, pour un moment, les parties indéfinies $-\infty$ —— 0, 1 —— $+\infty$ de l'axe réel comme des coupures; les fonctions désignées par φ et ψ deviennent uniformes dans toute l'étendue du plan. D'après nos hypothèses, entre ces $2n$ fonctions doivent exister n relations de la forme suivante :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = l_1\psi_1 + m_1\psi_2 + \ldots + t_1\psi_n, \\ \varphi_2 = l_2\psi_1 + m_2\psi_2 + \ldots + t_2\psi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n = l_n\psi_1 + m_n\psi_2 + \ldots + t_n\psi_n; \end{array}\right.$$

je suppose qu'aucun des coefficients $l_1, l_2, \ldots, l_n$ n'est égal à zéro; si, par exemple, l_i était nul, la branche désignée par φ_i serait uniforme pour $x = 1$ et le quotient $\frac{1}{\varphi_i}\frac{d\varphi_i}{dx}$ serait uniforme dans toute l'étendue du plan. Écartons pour le moment ce cas particulier; comme les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ne sont déterminées qu'à un facteur constant près, on pourra remplacer φ_1 par $\frac{\varphi_1}{l_1}$, φ_2 par $\frac{\varphi_2}{l_2}$, ..., et les relations (4) prennent la forme

$$(4)' \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \psi_1 + f_1(x), \\ \varphi_2 = \psi_1 + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n = \psi_1 + f_n(x), \end{cases}$$

$f_1(x), f_2(x), \ldots$ étant uniformes pour $x = 1$. De ces relations on déduit, en résolvant par rapport aux fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$,

$$(5) \qquad \psi_1 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des coefficients constants qui vérifient la relation

$$(6) \qquad C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 1.$$

Cherchons ce que devient φ_i lorsque la variable x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$. Il n'y a pour cela qu'à remplacer φ_i par $\psi_1 + f_i(x)$; $f_i(x)$ ne change pas et reste égal à $\varphi_i - \psi_1$, tandis que ψ_1 se change en $\omega_1\psi_1$; la branche φ_i devient donc

$$\varphi_i + (\omega_1 - 1)\psi_1 = \varphi_i + (\omega_1 - 1)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n).$$

On voit que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se changent respectivement en

$$\begin{gathered} [1 + C_1(\omega_1 - 1)]\varphi_1 + C_2(\omega_1 - 1)\varphi_2 + \ldots + C_n(\omega_1 - 1)\varphi_n, \\ C_1(\omega_1 - 1)\varphi_1 + [1 + C_2(\omega_1 - 1)]\varphi_2 + \ldots + C_n(\omega_1 - 1)\varphi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1(\omega_1 - 1)\varphi_1 + C_2(\omega_1 - 1)\varphi_2 + \ldots + [1 + C_n(\omega_1 - 1)]\varphi_n. \end{gathered}$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $C_1, C_2, \ldots, C_n$, je considère la fonction

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n constantes arbitraires. Si l'on fait décrire à la variable deux lacets dans le sens direct autour des points $x = 1$, $x = 0$

successivement, cette intégrale se change en

$$\begin{aligned}
&\{\lambda_1[1+C_1(\omega_1-1)]+\lambda_2 C_1(\omega_1-1)+\ldots+\lambda_n C_1(\omega_1-1)]\}\varphi_1\\
+&\{\lambda_1 C_2(\omega_1-1)+\lambda_2[1+C_2(\omega_1-1)]+\ldots+\lambda_n C_2(\omega_1-1)\}\omega_2\varphi_2\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&\{\lambda_1 C_n(\omega_1-1)+\lambda_2 C_n(\omega_1-1)+\ldots+\lambda_n[1+C_n(\omega_1-1)]\}\omega_n\varphi_n.
\end{aligned}$$

Si l'on cherche les intégrales qui se reproduisent, multipliées par un facteur constant S, après un pareil chemin, on est conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1[1-S+C_1(\omega_1-1)]+\lambda_2 C_1(\omega_1-1)+\ldots+\lambda_n C_1(\omega_1-1)=0,\\
&\lambda_1 C_2(\omega_1-1)\omega_2+\lambda_2[\omega_2-S+C_2(\omega_1-1)\omega_2]+\ldots+\lambda_n C_2(\omega_1-1)\omega_2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\lambda_1 C_n(\omega_1-1)\omega_n+\lambda_2 C_n(\omega_1-1)\omega_n+\ldots+\lambda_n[\omega_n-S+C_n(\omega_1-1)\omega_n]=0.
\end{aligned}$$

L'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ conduit à une équation de degré n en S

$$\begin{vmatrix}
1-S+C_1(\omega_1-1) & C_1(\omega_1-1) & \ldots & C_1(\omega_1-1)\\
C_2(\omega_1-1)\omega_2 & \omega_2-S+C_2(\omega_1-1)\omega_2 & \ldots & C_2(\omega_1-1)\omega_2\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
C_n(\omega_1-1)\omega_n & C_n(\omega_1-1)\omega_n & \ldots & \omega_n-S+C_n(\omega_1-1)\omega_n
\end{vmatrix}=0.$$

Si l'on développe ce déterminant après avoir retranché les éléments de la dernière colonne des éléments des $n-1$ autres, on aboutit à l'équation

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&F(S)=(S-1)(S-\omega_2)\ldots(S-\omega_n)-(\omega_1-1)\\
&\qquad\times[C_1(S-\omega_2)\ldots(S-\omega_n)+C_2\omega_2(S-1)(S-\omega_3)\ldots(S-\omega_n)+\ldots\\
&\qquad\qquad+C_n\omega_n(S-1)(S-\omega_2)\ldots(S-\omega_{n-1})]=0.
\end{aligned}\right.$$

Or le chemin précédent équivaut à un lacet décrit sur la sphère dans le sens inverse autour du point $x'=0$. L'équation (7) doit donc admettre pour racines les n quantités $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$, et l'on doit avoir identiquement

$$F(S)=(S-\omega'_1)(S-\omega'_2)\ldots(S-\omega'_n).$$

Si dans cette identité on fait successivement $S=1$, $S=\omega_2$, $\ldots$,

$S = \omega_n$, on en déduit les valeurs des coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$C_1 = \frac{(1-\omega'_1)(1-\omega'_2)\ldots(1-\omega'_n)}{(1-\omega_1)(1-\omega_2)\ldots(1-\omega_n)},$$

$$C_2 = \frac{(\omega_2-\omega'_1)(\omega_2-\omega'_2)\ldots(\omega_2-\omega'_n)}{\omega_2(1-\omega_1)(\omega_2-1)(\omega_2-\omega_3)\ldots(\omega_2-\omega_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_n = \frac{(\omega_n-\omega'_1)(\omega_n-\omega'_2)\ldots(\omega_n-\omega'_n)}{\omega_n(1-\omega_1)(\omega_n-1)(\omega_n-\omega_2)\ldots(\omega_n-\omega_{n-1})}.$$

En égalant les deux derniers termes dans l'identité

$$F(S) = (S-\omega'_1)\ldots(S-\omega'_n),$$

on parvient à la relation

$$\omega_1\omega_2\ldots\omega_n(C_1+C_2+\ldots+C_n) = \omega'_1\omega'_2\ldots\omega'_n,$$

qui, à cause de l'équation (6), devient

$$(8) \qquad \omega_1\omega_2\ldots\omega_n = \omega'_1\omega'_2\ldots\omega'_n.$$

On voit bien que les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ne dépendent que des multiplicateurs ω et ω', et, par suite, deux fonctions de cette nature, ayant les mêmes multiplicateurs, sont de la même classe, comme on l'avait annoncé.

7. La méthode ne s'applique plus si l'un des nombres l qui figurent dans les relations (4) est égal à zéro. Supposons, par exemple, $l_1 = 0$; alors l'intégrale φ_1 sera uniforme dans toute l'étendue du plan; cette circonstance ne pourra se présenter que si l'un des multiplicateurs ω' est égal à l'unité. Les équations (4)' prennent la forme

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= f_1(x),\\ \varphi_2 &= \psi_1 + f_2(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_n &= \psi_1 + f_n(x);\end{aligned}$$

on en tire de même

$$\psi_1 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n,$$

les coefficients C vérifiant la relation

$$C_2 + C_3 + \ldots + C_n = 1.$$

En formant, comme plus haut, l'équation en S correspondant à un contour autour du point $x' = 0$, on trouve l'équation

$$(S-1)\left\{\begin{array}{l}(S-\omega_2)(S-\omega_3)\ldots(S-\omega_n)-(\omega_1-1)\\ \quad\times[C_2\omega_2(S-\omega_3)\ldots(S-\omega_n)+C_3\omega_3(S-\omega_2)\ldots(S-\omega_n)+\ldots\\ \qquad\qquad\qquad+C_n\omega_n(S-\omega_2)\ldots(S-\omega_{n-1})]\end{array}\right\}=0.$$

On en déduira, comme plus haut, les valeurs des coefficients C_2, $C_3, \ldots, C_n$; mais la valeur de C_1 est tout à fait indéterminée. Ce fait était facile à prévoir, car, si l'on a $C_1 \neq 0$, comme la fonction φ_1 n'est déterminée qu'à un facteur constant près, on pourra prendre pour ce coefficient C_1 telle valeur qu'on voudra différente de zéro. Au contraire, si $C_1 = 0$, on voit que les fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre $n-1$ à coefficients uniformes. Mais la connaissance des multiplicateurs ω et ω' ne suffit pas pour décider devant laquelle de ces deux circonstances on se trouve en présence.

8. Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, définies dans le précédent travail, rentrent évidemment dans la catégorie des fonctions définies au n° **6**. Il suffit de poser

$$\begin{array}{lll}\omega_1 = e^{2\pi i(b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}-a_1-a_2-\ldots-a_n)}, & & \\ \omega_2 = e^{2\pi i(1-b_1)}, & \omega_3 = e^{2\pi i(1-b_2)}, \quad \ldots, & \omega_n = e^{2\pi i(1-b_{n-1})}, \\ \omega'_1 = e^{-2\pi i a_1}, & \omega'_2 = e^{-2\pi i a_2}, \quad \ldots, & \omega'_n = e^{-2\pi i a_n};\end{array}$$

comme vérification, nous voyons que les multiplicateurs vérifient bien la relation (8). On déduit de là plusieurs conséquences :

1° Connaissant les quantités a et b, les formules établies précédemment donnent immédiatement les valeurs des coefficients $C_1, C_2, \ldots C_n$; on connaît donc le groupe de l'équation correspondante. La recherche des cas où cette équation s'intègre algébriquement est donc ramenée à la recherche des cas où les substitutions de ce groupe appartiennent à un groupe d'ordre fini, question qui a été traitée par M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV), et qui est du domaine de l'Algèbre plutôt que de l'Analyse.

2° Si l'on augmente ou si l'on diminue chacun des membres a et b d'un nombre entier quelconque, les multiplicateurs ω et ω' ne changent pas, ni par suite les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Toutes les fonctions hypergéométriques qui se déduisent de l'une d'elles par ce procédé appartiennent donc à la même classe, et, par suite, entre $n+1$ d'entre elles, il existe une relation linéaire et homogène à coefficients rationnels. Ces coefficients se calculent du reste comme les coefficients des relations analogues entre les fonctions de Gauss proprement dites.

3° Étant donnée une équation linéaire d'ordre n à coefficients uniformes, dont les intégrales jouissent des propriétés dont il vient d'être question (n° 6), on pourra toujours trouver une équation hypergéométrique d'ordre n admettant les mêmes multiplicateurs. Ces deux équations seront de la même classe, et, par suite, l'intégrale générale de la première sera

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}},$$

y désignant l'intégrale générale de l'équation hypergéométrique et P_0, P_1, ..., P_{n-1} des fonctions uniformes de la variable. En particulier, si l'équation considérée a toutes les intégrales régulières, P_0, P_2, ..., P_{n-1} seront les fonctions rationnelles.

Le cas singulier qui a été examiné correspond au cas où l'un des nombres a_i ou $a_i - b_h + 1$ est un nombre entier négatif. Dans le premier cas, il est clair, en effet, que l'une des intégrales se réduit à un polynôme. Dans le second cas, une des intégrales est le produit de x^{1-b_i} par une fonction entière; il suffit, pour le voir, de faire la transformation $y = x^{1-b_i} z$.

9. Avant d'aller plus loin, je vais généraliser le théorème sur les séries hypergéométriques qui a été démontré dans le travail déjà cité. Soit, comme plus haut, z une fonction multiforme de x, telle qu'entre $n+1$ branches il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants, et que chaque branche soit holomorphe pour toute valeur de x, différente de 0, 1, ∞. Dans le voisinage de chacun de ces points critiques, on a n branches qui ont respectivement les formes suivantes :

Pour $x = 0$........ $\varphi_1(x)$, $\quad x^{r_1}\varphi_2(x)$, $\quad \ldots$, $\quad x^{r_{n-1}}\varphi_n(x)$,

Pour $x = 1$........ $\psi_1(x)$, $\quad \psi_2(x)$, $\quad \ldots$, $\quad \psi_{n-1}(x)$, $\quad (1-x)^{R}\psi_n(x)$,

Pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$... $x'^{r'_1}\pi_1(x')$, $\quad x'^{r'_2}\pi_2(x')$, $\quad \ldots$, $\quad x'^{r'_n}\pi_n(x')$, les fonctions φ_i, ψ_i, π_i étant holomorphes dans le domaine du point correspondant. Supposons de plus qu'aucun des nombres R, $r_i - r_h$, $r'_i - r'_h$ ne soit égal à un nombre entier. L'équation hypergéométrique correspond au cas où les nombres R, r, r' vérifient la relation

$$\Sigma r + \Sigma r' + R = n - 1.$$

Je vais démontrer maintenant que *l'intégrale générale d'une pareille équation s'exprime toujours au moyen de séries hypergéométriques d'ordre supérieur;* mais, si la relation précédente n'est pas vérifiée, le nombre des éléments qui figurent dans le coefficient du terme général sera supérieur à $2n - 1$. En effet, l'équation ayant $n - 1$ intégrales holomorphes pour $x = 1$, l'équation fondamentale déterminante relative à ce point critique admettra pour racines R et puis $n - 1$ nombres entiers positifs tous différents, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, dont la somme sera par conséquent supérieure à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. L'équation pourra avoir en outre des points singuliers *apparents,* mais la somme des racines des équations déterminantes correspondantes sera un nombre entier essentiellement positif A. On aura entre ces diverses quantités la relation

$$\Sigma r + \Sigma r' + R + \Sigma\lambda + A = \frac{n(n-1)}{2}$$

ou

$$\Sigma r + \Sigma r' + R = \frac{n(n-1)}{2} - \Sigma\lambda - A = n - 1 - A',$$

A′ étant un nombre entier positif. Cela posé, considérons l'équation hypergéométrique correspondant aux valeurs suivantes des a et des b :

$$\begin{array}{llll} 1 - b_1 = r_1, & 1 - b_2 = r_2, & \ldots, & 1 - b_{n-1} = r_{n-1}, \\ a_1 = r'_1 + \mu_1, & a_2 = r'_2 + \mu_2, & \ldots, & a_n = r'_n + \mu_n, \end{array}$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant des nombres entiers tels que

$$\Sigma b_i - \Sigma a_i = (n-1) - \Sigma r - \Sigma r' - \Sigma\mu = R,$$

ou

$$\Sigma\mu = A'.$$

Les a et les b étant déterminés de cette façon, soit $F(y) = 0$ l'équation hypergéométrique correspondante, et soit $F_1(z) = 0$ l'équation proposée. Nous venons de voir que ces deux équations sont ramifiées de la même manière, et, par suite, l'intégrale générale de $F_1(z) = 0$ sera

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

y désignant l'intégrale générale de l'équation $F(y) = 0$, et $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ des fonctions rationnelles de x. Pour découvrir la forme de ces coefficients, désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ un système fondamental d'intégrales de l'équation $F(y) = 0$, et soient $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les intégrales correspondantes de l'équation $F(z) = 0$; on a trouvé pour expression de P_i

$$P_i = \frac{D_i}{D},$$

D et D_i désignant les deux déterminants écrits plus haut. Ce coefficient ne peut cesser d'être holomorphe qu'aux points $0, 1, \infty$. En l'étudiant dans le voisinage de chacun des points 0 et 1, on reconnaît qu'il reste holomorphe pour ce point. Les coefficients $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ sont, par conséquent, des fonctions *entières* de la variable.

Je m'appuierai, en second lieu, sur les lemmes suivants :

Lemme I. — *Le produit d'une série hypergéométrique par un polynôme entier en x est une série hypergéométrique.*

Soit en effet la série

$$S = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_m x^m + \ldots,$$

où le rapport

$$\frac{u_{m-1}}{u_m} = \varphi(m) = \frac{(m)(b_1 + m - 1)(b_2 + m - 1)\ldots(b_{n-1} + m - 1)}{(a_1 + m - 1)\ldots(a_n + m - 1)},$$

vérifiant la condition $\varphi(0) = 0$.

Soit P un polynôme entier en x tel que

$$P = A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p;$$

le coefficient de x^m dans le produit $S \times P$ sera

$$\begin{aligned} &A_0 u_m + A_1 u_{m-1} + \ldots + A_p u_{m-p}, \\ &= u_m [A_0 + A_1 \varphi(m) + A_2 \varphi(m)\varphi(m-1) + \ldots + A_p \varphi(m)\ldots\varphi(m-p+1)]. \end{aligned}$$

Il est visible que le rapport de deux coefficients consécutifs est une fonction rationnelle de m.

Lemme II. — *Étant donné un nombre quelconque de séries hypergéométriques de la même classe, la somme des produits obtenus en multipliant chacune d'elles par un polynôme entier en x est aussi une série hypergéométrique.*

Je remarque d'abord que, dans deux séries de même classe, le rapport de deux coefficients de même rang est une fonction rationnelle du rang de l'un d'eux. Prenons, pour fixer les idées, le cas de deux séries; le raisonnement est absolument le même, quel qu'en soit le nombre,

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 x + \ldots + u_m x^m + \ldots, \\ S' &= v_0 + v_1 x + \ldots + v_m x^m + \ldots, \\ P &= A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p, \\ Q &= B_0 + B_1 x + \ldots + B_q x^q. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^m dans la somme $S \times P + S' \times Q$ sera

$$A_0 u_m + A_1 u_{m-1} + \ldots + A_p u_{m-p} + B_0 v_m + B_1 v_{m-1} + \ldots + B_q v_{m-q},$$

ou, en posant $\frac{u_{m-1}}{u_m} = \varphi(m)$, $\frac{v_m}{u_m} = \psi(m)$,

$$\begin{aligned} u_m [A_0 &+ A_1 \varphi(m) + \ldots + A_p \varphi(m) \varphi(m-1) \ldots \varphi(m-p+1) \\ &+ B_0 \psi(m) + B_1 \varphi(m) \psi(m-1) + \ldots + B_q \varphi(m) \ldots + \varphi(m-q+1) \psi(m-q)]. \end{aligned}$$

Le rapport de deux coefficients consécutifs est bien une fonction rationnelle du rang. Il résulte du dernier lemme que toute expression de la forme

$$P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}},$$

où y désigne une série hypergéométrique et $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ des fonctions entières de x, est elle-même une série hypergéométrique d'ordre supérieur, car y, $\frac{dy}{dx}, \cdots$ sont évidemment de la même classe. En l'appliquant à la fonction précédente, on en déduit le théorème annoncé.

10. Ceci posé, je vais faire l'application des considérations qui viennent d'être exposées à une question dont un cas particulier a été traité par Clausen (*Journal de Crelle*, t. 3, p. 89); je me propose de trouver *tous* les cas où le carré d'une série hypergéométrique de Gauss est une série hypergéométrique d'ordre supérieur. Prenons l'équation linéaire

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

et concevons qu'on forme l'équation linéaire du troisième ordre qui admet pour intégrales les carrés des intégrales de cette équation; y_1, y_2 désignant deux intégrales distinctes de la première équation, l'intégrale générale de la seconde sera

$$Cy_1^2+C'y_1y_2+C''y_2^2.$$

Cette équation du troisième ordre admettra les mêmes points singuliers 0, 1, ∞, et les exposants de discontinuité seront respectivement

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } x=0\ldots\ldots\ldots & 0,\ 1-\gamma,\ 2-2\gamma, \\ \text{Pour } x=1\ldots\ldots\ldots & 0,\ \gamma-\alpha-\beta,\ 2(\gamma-\alpha-\beta), \\ \text{Pour } x=\dfrac{1}{x'}=\infty\ldots\ldots & 2\alpha,\ \alpha+\beta,\ 2\beta. \end{array}$$

On aura une équation hypergéométrique si $2(\gamma-\alpha-\beta)=1$; c'est précisément le cas traité par Clausen. Mais, outre ce cas particulier, le théorème démontré au précédent paragraphe nous apprend que l'intégrale générale s'exprimera au moyen de séries hypergéométriques toutes les fois que $2(\gamma-\alpha-\beta)$ sera égal à un nombre entier positif impair; cette condition suffisante est d'ailleurs nécessaire. On a donc le théorème suivant :

Théorème II. — *Pour que le carré d'une série hypergéométrique ordinaire* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *soit une série hypergéométrique d'ordre supérieur, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\gamma=\alpha+\beta+\frac{2n+1}{2},$$

n étant nul ou égal à un nombre entier positif.

Si $2(\gamma-\alpha-\beta)$ était égal à un nombre entier négatif impair, en multipliant toutes les intégrales de l'équation du troisième ordre considérée par $(1-x)^{2(\gamma-\alpha-\beta)}$, on sera ramené à une nouvelle équation qui sera dans les conditions voulues. Donc :

Théorème III. — *Toutes les fois que l'on aura*

$$\gamma = \alpha + \beta + \frac{2n+1}{2},$$

n étant un nombre entier négatif, le carré de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *sera le quotient d'une série hypergéométrique d'ordre supérieur par une puissance de* $(1-x)$.

Ce théorème peut d'ailleurs se déduire du précédent au moyen de la formule

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$

Voici une vérification de ces théorèmes qui donne en même temps le moyen de mettre le carré de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sous la forme indiquée. Reprenons la formule de Clausen

$$(9) \qquad [F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x)]^2 = F\begin{pmatrix} 2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta \\ \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+2\beta, x \end{pmatrix};$$

on en déduit par la différentiation

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) \times F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+\tfrac{3}{2}, x) \\ &\quad = F\begin{pmatrix} 2\alpha+1, \alpha+\beta+1, 2\beta+1 \\ \alpha+\beta+\tfrac{3}{2}, 2\alpha+2\beta+1, x \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, la transformation

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

donne, en supposant $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$,

$$F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \beta+\tfrac{1}{2}, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) = \frac{F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x)}{\sqrt{1-x}}.$$

Si l'on élève au carré, qu'on remplace le carré de $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, x)$ par l'expression précédente, puis, qu'on change α en $\alpha+\frac{1}{2}$, β en $\beta+\frac{1}{2}$, on parvient à la nouvelle formule

$$(11) \quad F[(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+\tfrac{3}{2}, x)]^2 = \frac{F\begin{pmatrix} 2\alpha+1, \alpha+\beta+1, 2\beta+1 \\ \alpha+\beta+\tfrac{3}{2}, 2\alpha+2\beta+2, x \end{pmatrix}}{(1-x)}.$$

Considérons maintenant une série dont les éléments vérifient la relation

$$\gamma - \alpha - \beta = \frac{2n+1}{2};$$

une pareille série peut évidemment s'écrire $F(\alpha - n, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, x)$. Elle est de la même classe que la série $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, x)$, et l'on a une relation de la forme

$$\begin{aligned} &F(\alpha - n, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x) \\ &\quad = PF(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x) + QF(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \tfrac{3}{2}, x), \end{aligned}$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de la variable. En étudiant, comme on l'a déjà expliqué plusieurs fois, la forme de ces coefficients dans le voisinage des points 0, 1, ∞, on découvre bien aisément que P est un polynôme entier de degré n en x et que Q est de la forme $x(1-x)Q_1$, Q_1 étant un polynôme de degré $n-1$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} &F(\alpha - n, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x) \\ &\quad = PF(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x) + (1-x)RF(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \tfrac{3}{2}, x), \end{aligned}$$

P et R étant des fonctions entières de x. On en tire, en élevant les deux membres au carré,

$$\begin{aligned} &[F(\alpha - n, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x)]^2 \\ &\quad = P^2[F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x)]^2 + R^2(1-x)^2[F(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \tfrac{3}{2}, x)]^2 \\ &\qquad + 2PR(1-x)F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x)F(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \tfrac{3}{2}, x); \end{aligned}$$

si maintenant on remplace dans le second membre

$$[F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x)]^2,$$
$$(1-x)[F(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \tfrac{3}{2}, x)]^2,$$
$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \tfrac{1}{2}, x) \times F(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \tfrac{3}{2}, x)$$

par leurs expressions tirées des formules (9), (10) et (11) au moyen de séries hypergéométriques qui appartiennent à la même classe, on pourra, d'après le lemme II, transformer le second membre en une série de même nature, mais d'ordre plus élevé.

Dans le cas où les éléments α, β, γ vérifient la relation

$\gamma - \alpha - \beta = -\frac{2n-1}{2}$, n étant un nombre entier positif, on pourra poser

$$F(\alpha+n, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) = P\,F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) + Q\,F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+\tfrac{3}{2}, x),$$

et l'on trouve de même que P est de la forme $\frac{P_1}{(1-x)^n}$ et Q de la forme $\frac{x Q_1}{(1-x)^{n-1}}$, P_1 et Q_1 étant des fonctions entières de x, de degrés n et $n-1$. On pourra donc écrire

$$F(\alpha+n, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) = \frac{P_1 F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, x) + Q_1 x(1-x) F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+\frac{3}{2}, x)}{(1-x)^n}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, on pourra, en se servant des formules (9), (10), (11), mettre le carré du numérateur du second membre sous forme d'une série hypergéométrique d'ordre supérieur; d'où résulte l'expression annoncée.

11. Le problème qui vient d'être traité n'est qu'un cas particulier de celui-ci : dans quels cas le produit de deux séries hypergéométriques de Gauss est-il une série hypergéométrique d'ordre supérieur? Je rappellerai quelques notions dont nous allons avoir besoin. On appelle équation *irréductible* une équation linéaire à coefficients uniformes qui n'admet aucune intégrale appartenant à une équation d'ordre moindre à coefficients uniformes. Si une équation à coefficients uniformes admet une intégrale d'une équation irréductible, elle les admet toutes. Si une équation a toutes ses intégrales régulières, une équation irréductible qui admet une intégrale commune avec la première aura aussi toutes ses intégrales régulières. Cela posé, considérons les deux équations

$$\varphi(y) = x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

$$\psi(z) = x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2} + [\gamma' - (\alpha'+\beta'+1)x]\frac{dz}{dx} - \alpha'\beta' z = 0;$$

soit $F(P) = 0$ l'équation linéaire du quatrième ordre qui admet pour intégrale le produit des intégrales des équations $\varphi(y) = 0$, $\psi(z) = 0$.

On pourrait former cette équation par la méthode de M. Appell (*Annales de l'École Normale,* 1881); mais nous pouvons étudier les propriétés de cette équation sans avoir besoin de la former. Si y_1, y_2 désignent deux intégrales distinctes de $\varphi(y) = 0$, z_1, z_2 deux intégrales distinctes de $\psi(z) = 0$, l'intégrale générale de l'équation $F(P) = 0$ sera

$$C_1 y_1 z_1 + C_2 y_1 z_2 + C_3 y_2 z_1 + C_4 y_2 z_2.$$

qui contient bien quatre termes linéairement indépendants

$$y_1 z_1,\ y_1 z_2,\ y_2 z_1,\ y_2 z_2.$$

Il est clair que cette intégrale générale est holomorphe pour toute valeur de x différente de 0, 1, ∞. Pour étudier la forme des intégrales dans le voisinage du point $x = 1$, supposons que l'on ait pris

$$\begin{aligned}
y_1 &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),\\
y_2 &= (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, 1 - x),\\
z_1 &= F(\alpha', \beta', \alpha' + \beta' + 1 - \gamma', 1 - x),\\
z_2 &= (1 - x)^{\gamma' - \alpha' - \beta'} F(\gamma' - \alpha', \gamma' - \beta', \gamma' + 1 - \alpha' - \beta', 1 - x);
\end{aligned}$$

le produit $y_1 z_1$ est holomorphe pour $x = 1$, tandis que les trois autres produits appartiennent respectivement aux exposants $\gamma - \alpha - \beta$, $\gamma' - \alpha' - \beta'$, $\gamma + \gamma' - \alpha - \alpha' - \beta - \beta'$ dans le domaine de ce point. Si l'équation $F(P) = 0$ est bien du quatrième ordre et si elle est *irréductible,* on voit qu'elle admet deux intégrales distinctes $y_1 z_2$ et $y_2 z_1$ non holomorphes pour $x = 1$, et, par suite, aucune de ses intégrales ne peut s'exprimer par une série hypergéométrique. Nous sommes donc amenés à rechercher dans quels cas l'équation $F(P) = 0$, en général du quatrième ordre, se réduit au troisième, ou bien dans quels cas cette équation n'est pas irréductible.

D'une manière générale, soient $\varphi(y) = 0$, $\psi(z) = 0$ deux équations linéaires du second ordre à coefficients uniformes et $F(P) = 0$ l'équation linéaire qui admet pour intégrale le produit de deux intégrales de ces deux équations; y_1, y_2, z_1, z_2 désignant respectivement des intégrales distinctes des équations $\varphi(y) = 0$, $\psi(z) = 0$, l'intégrale générale de l'équation $F(P) = 0$ sera

$$C_1 y_1 z_1 + C_2 y_1 z_2 + C_3 y_2 z_1 + C_4 y_2 z_2.$$

Elle sera donc en général du quatrième ordre. Pour qu'elle se réduise au troisième ordre, il faudrait que l'on eût entre les quatre intégrales $y_1 z_1$, $y_1 z_2$, $y_2 z_1$, $y_2 z_2$ une relation de la forme

$$Ay_1 z_1 + By_1 z_2 + Cy_2 z_1 + Dy_2 z_2 = 0,$$

A, B, C, D étant des constantes convenablement choisies. Cette relation peut s'écrire

$$Y_1 z_2 - Y_2 z_1 = 0,$$

en posant

$$Y_1 = By_1 + Dy_2, \quad Y_2 = -Ay_1 - Cy_2;$$

Y_1, Y_2 seront, comme y_1, y_2, deux intégrales distinctes de l'équation $\varphi(y) = 0$, sans quoi le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ serait constant, ce qui est contraire à l'hypothèse. La relation précédente peut s'écrire

$$\frac{z_1}{Y_1} = \frac{z_2}{Y_2};$$

elle montre que l'équation $\psi(z) = 0$ est une transformée de l'équation $\varphi(y) = 0$. Cette condition nécessaire est suffisante. Soit en effet

$$z = \Pi(x) y$$

la transformation qui permet de passer de l'équation $\psi(z) = 0$ à l'équation $\varphi(y) = 0$. L'intégrale générale de $F(P) = 0$ ne contiendra que trois termes distincts

$$\Pi(x) y_1^2, \; \Pi(x) y_1 y_2, \; \Pi(x) y_2^2.$$

Il peut arriver que l'équation $F(P) = 0$, tout en étant du quatrième ordre, admette toutes les intégrales d'une équation du troisième ordre à coefficients uniformes. Nous avons à rechercher dans quels cas cette circonstance peut se présenter. Supposons qu'il existe trois intégrales P_1, P_2, P_3 vérifiant une équation du troisième ordre à coefficients uniformes

$$\begin{aligned}
P_1 &= ly_1 z_1 + my_1 z_2 + ny_2 z_1 + py_2 z_2,\\
P_2 &= l'y_1 z_1 + m'y_1 z_2 + n'y_2 z_1 + p'y_2 z_2,\\
P_3 &= l''y_1 z_1 + m''y_1 z_2 + n''y_2 z_1 + p''y_2 z_2;
\end{aligned}$$

prenons trois nombres λ, λ', λ'', tels que l'on ait

$$\lambda l + \lambda' l' + \lambda'' l'' = 0,$$
$$\lambda n + \lambda' n' + \lambda'' n'' = 0,$$

et posons

$$Y_2 = (\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'') y_1 + (\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'') y_2;$$

on aura

$$\lambda P_1 + \lambda' P_2 + \lambda'' P_3 = Y_2 z_2;$$

il en résulte que l'on ne peut avoir en même temps

$$\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' = 0,$$
$$\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'' = 0,$$

car on en conclurait la relation

$$\lambda P_1 + \lambda' P_2 + \lambda'' P_3 = 0.$$

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' \neq 0;$$

prenons trois nombres μ, μ', μ'', tels que l'on ait

$$\mu m + \mu' m' + \mu'' m'' = 0,$$
$$\mu l + \mu' l' + \mu'' l'' = 0,$$

et posons

$$Z_1 = (\mu n + \mu' n' + \mu'' n'') z_1 + (\mu p + \mu' p' + \mu'' p'') z_2;$$

on aura

$$\mu P + \mu' P_1 + \mu'' P_2 = y_2 Z_1.$$

On aura aussi

$$\mu n + \mu' n' + \mu'' n'' \neq 0;$$

il en résulte que y_2 et Y_2 constituent un système fondamental d'intégrales de la première équation $\varphi(y) = 0$ et Z_1, z_2 un système fondamental d'intégrales de l'équation $\psi(z) = 0$. Pour simplifier les notations, remplaçons y_2 et z_2 par Y_1 et Z_2. L'équation du troisième ordre en question admettra un système fondamental d'intégrales de la forme suivante :

$$Y_1 Z_1, \quad Y_2 Z_2, \quad a Y_1 Z_1 + b Y_2 Z_2 + c Y_1 Z_2 + d Y_2 Z_1$$

ou bien, ce qui revient au même, de la forme

$$Y_1 Z_1, \quad Y_2 Z_2, \quad c Y_1 Z_2 + d Y_2 Z_1.$$

Supposons d'abord qu'aucun des nombres c, d ne soit nul. On peut remplacer la troisième intégrale par $Y_1 Z_2 + \frac{d}{c} Y_2 Z_1$, et, comme Y_2 n'est déterminée qu'à un facteur constant près, on pourra prendre, pour former un système fondamental d'intégrales de cette équation du troisième ordre, les trois fonctions

$$Y_1 Z_1,\quad Y_2 Z_2,\quad Y_1 Z_2 + Y_2 Z_1.$$

Remarquons, en outre, qu'aucun des produits $Y_1 Z_2$, $Y_2 Z_1$ ne devra satisfaire séparément à l'équation du troisième ordre, car il devrait exister une relation de la forme

$$A Y_1 Z_1 + B Y_2 Z_1 + C Y_1 Z_2 + D Y_2 Z_1 = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. J'imagine maintenant que nous fassions décrire à la variable un contour fermé quelconque; les valeurs finales de nos trois intégrales devront pouvoir s'exprimer linéairement au moyen des valeurs initiales. Soient

$$C Y_1 + C' Y_2,\quad C_1 Y_1 + C'_1 Y_2,\quad D Z_1 + D' Z_2,\quad D_1 Z_1 + D'_1 Z_2$$

les valeurs nouvelles des fonctions Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 après un pareil contour. Nos trois intégrales se changent respectivement en

$$\begin{aligned}
&(C Y_1 + C' Y_2)(D Z_1 + D' Z_2),\\
&(C Y_1 + C' Y_2)(D_1 Z_1 + D'_1 Z_2) + (C_1 Y_1 + C'_1 Y_2)(D Z_1 + D' Z_2),\\
&(C_1 Y_1 + C'_1 Y_2)(D_1 Z_1 + D'_1 Z_2);
\end{aligned}$$

pour que ces valeurs puissent s'exprimer linéairement au moyen des premières, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{gathered}
C D' = D C',\\
C_1 D'_1 = C'_1 D_1,\\
C D'_1 + C_1 D' = C' D_1 + C'_1 D
\end{gathered}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{D}{C} = \frac{D'}{C'} = \frac{D_1}{C_1} = \frac{D'_1}{C'_1}.$$

Ces relations expriment que les deux équations $\varphi(y) = 0$, $\psi(z) = 0$

sont de la même famille, comme on l'a vu au n° 5. Si la valeur commune de ces rapports est égale à l'unité, quel que soit le contour décrit par la variable, les deux équations seront de la même classe. Réciproquement, si l'on se donne deux équations de la même famille, si l'on appelle y_1, y_2 deux intégrales distinctes de l'une d'elles et z_1, z_2 les intégrales correspondantes de la seconde, le calcul qui vient d'être effectué montre que les trois fonctions $y_1 z_1$, $y_2 z_2$, $y_1 z_2 + y_2 z_1$ doivent satisfaire à une même équation du troisième ordre à coefficients uniformes, et le produit de deux intégrales correspondantes quelconques vérifie la même équation.

Il nous reste à examiner le cas particulier où l'on aurait $c = 0$ ou $d = 0$. Supposons, par exemple, $c = 0$, de sorte qu'un système fondamental de l'équation du troisième ordre sera

$$Y_1 Z_1, \quad Y_2 Z_2, \quad Y_1 Z_2,$$

et $Y_2 Z_1$ ne vérifiera point cette équation. Soient, comme plus haut,

$$CY_1 + C'Y_2, \quad C_1 Y_1 + C'_1 Y_2, \quad DZ_1 + D'Z_2, \quad D_1 Z_1 + D'Z_2$$

les valeurs nouvelles de Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 après que la variable a décrit un contour fermé. Les valeurs finales des produits $Y_1 Z_1$, $Y_2 Z_2$, $Y_1 Z_2$ seront

$$\begin{gathered}(CY_1 + C'Y_2)(DZ_1 + D'Z_2),\\ (C_1 Y_1 + C'_1 Y_2)(D_1 Z_1 + D'_1 Z_2),\\ (CY_1 + C'Y_2)(D_1 Z_1 + D'_1 Z_2);\end{gathered}$$

pour que ces valeurs s'expriment linéairement au moyen des valeurs initiales, il faut et il suffit que l'on ait

$$C'D = 0, \quad C'_1 D_1 = 0, \quad C'D_1 = 0.$$

Ces conditions entraînent la relation $C' = 0$, quel que soit le contour décrit par la variable. Si en effet C' n'était pas nul pour un certain contour, on aurait pour ce contour $D = 0$, $D_1 = 0$. Il en résulterait que Z_1 et Z_2 se changeraient respectivement en $D'Z_2$, $D'_1 Z_2$, ce qui est manifestement impossible, puisque Z_1, Z_2 sont supposées distinctes. On voit donc que le quotient $\frac{1}{Y_1}\frac{dY_1}{dx}$ sera une fonction uniforme, et l'équation $\varphi(y) = 0$ ne sera pas irréductible. Il est d'ailleurs facile de voir que, dans ce cas, les produits Y_1Z_1, Y_1Z_2 vérifient une équation du second ordre à coefficients uniformes.

Ce cas exceptionnel écarté, nous voyons qu'en général :

Théorème IV. — *Pour que l'équation* $F(P) = 0$, *qui admet pour intégrale le produit de deux intégrales quelconques de deux équations linéaires du second ordre à coefficients uniformes et irréductibles, soit vérifiée par toutes les intégrales d'une équation du troisième ordre à coefficients uniformes, il faut et il suffit que les deux équations du second ordre soient de la même famille.*

J'ai supposé, pour fixer les idées, les coefficients fonctions uniformes de la variable x; mais la méthode et les résultats subsistent, en supposant que ces coefficients sont des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y).

12. Revenant à la question proposée, je remarque que toutes les équations hypergéométriques de même famille que l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

rentrent dans l'une des trois catégories suivantes :

1° Les transformées de cette équation, au nombre de trois, que l'on obtient par l'une des transformations

$$y = x^{1-\gamma}z, \quad y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}z, \quad y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}z;$$

2° Les équations de même classe : ces équations, en nombre infini, s'obtiennent, comme on sait, en prenant pour α', β', γ' des nombres tels que les différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ soient des nombres entiers;

3° Les transformées des équations de même classe; ces dernières sont également en nombre infini.

Nous allons examiner séparément chacune de ces hypothèses. Considérons d'abord les deux équations

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2} + [2 - \gamma - (\alpha + \beta + 3 - 2\gamma)x]\frac{dz}{dx} - (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)z = 0,$$

telles que l'on passe de l'une à l'autre en posant

$$y = x^{1-\gamma} z.$$

Si y_1, y_2 désignent deux intégrales distinctes de la première équation, les trois fonctions

$$x^{\gamma-1} y_1^2, \quad x^{\gamma-1} y_1 y_2, \quad x^{\gamma-1} y_2^2$$

constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation du troisième ordre. Les racines de l'équation déterminante relative au point $x = 1$ sont 0, $\gamma - \alpha - \beta$, $2(\gamma - \alpha - \beta)$. Pour que le produit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \times F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

qui vérifie cette équation, s'exprime au moyen d'une série hypergéométrique d'ordre supérieur, il faut et il suffit que $2(\gamma - \alpha - \beta)$ soit un nombre entier positif impair.

Si $2(\gamma - \alpha - \beta)$ était égal à un nombre entier négatif impair, le produit considéré serait égal, comme plus haut, au quotient d'une série hypergéométrique par une puissance entière et positive de $1 - x$.

Considérons en second lieu les deux équations de la même classe

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

$$x(1-x)\frac{d^2 z}{dx^2} + [\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)x]\frac{dz}{dx} - \alpha'\beta' z = 0.$$

Nous venons de voir que le produit de deux intégrales correspondantes de ces deux équations satisfait à une équation linéaire du troisième ordre, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de la variable. Il est clair que l'intégrale générale est holomorphe pour toute valeur de x différente de 0, 1, ∞, et qu'une intégrale particulière est holomorphe pour $x = 0$. Pour l'étudier dans le voisinage du point $x = 1$, nous prendrons

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$
$$y_2 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, 1 - x),$$

et, par suite,

$$z_1 = F(\alpha', \beta', \alpha' + \beta' + 1 - \gamma', 1 - x),$$
$$z_2 = (1 - x)^{\gamma' - \alpha' - \beta'} F(\gamma' - \alpha', \gamma' - \beta', \gamma' + 1 - \alpha' - \beta', 1 - x).$$

Un système fondamental d'intégrales sera constitué par les fonctions

$$y_1 z_1, \quad y_1 z_2 + y_2 z_1, \quad y_2 z_2;$$

les exposants de discontinuité sont donc o, $\gamma + \gamma' - \alpha - \alpha' - \beta - \beta'$, δ, δ désignant le plus petit des nombres $\gamma - \alpha - \beta$, $\gamma' - \alpha' - \beta'$. Comme on suppose qu'aucun des nombres $\gamma - \alpha - \beta$, $\gamma' - \alpha' - \beta'$ n'est égal à un nombre entier, pour que le produit $F(\alpha, \beta, \gamma, x) \times F(\alpha', \beta', \gamma', x)$ s'exprime par une série hypergéométrique, il faudra, d'après le théorème général, que l'on ait

$$\gamma + \gamma' - \alpha - \alpha' - \beta - \beta' = n,$$

n désignant un nombre entier positif qui peut être nul.

Les autres cas s'étudient de la même manière, mais ne conduisent à aucun résultat qu'on ne puisse déduire des précédents. En résumé :

Théorème V. — *Le produit* $F(\alpha, \beta, \gamma, x) \times F(\alpha', \beta', \gamma', x)$ *est une série hypergéométrique d'ordre supérieur dans les deux cas suivants et dans ces cas seulement :*

1° *Lorsque l'on a les relations*

$$\alpha' = \alpha + 1 - \gamma,$$
$$\beta' = \beta + 1 - \gamma,$$
$$\gamma' = 2 - \gamma,$$
$$\gamma - \alpha - \beta = \frac{2n + 1}{2},$$

n étant nul ou égal à un nombre entier positif;

2° *Lorsque les différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ sont des nombres entiers et lorsque l'on a*

$$\gamma + \gamma' - \alpha - \alpha' - \beta - \beta' = n,$$

n étant nul ou égal à un nombre entier positif.

Dans le cas où n serait égal à un nombre entier négatif, le produit considéré serait égal au quotient d'une série hypergéométrique par une puissance convenable de $1 - x$.

13. Voici comment on pourra mettre le produit sous la forme voulue, au moins dans un cas fort étendu. Soient $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$, $F(\alpha'', \beta'', \gamma'', x)$ deux séries hypergéométriques de la même classe telles que les deux quantités $\gamma' - \alpha' - \beta'$, $\gamma'' - \alpha'' - \beta''$ soient de la forme $\frac{2n+1}{2}$, n étant un nombre entier positif, qui n'est pas nul pour les deux séries en même temps. Prenons une série auxiliaire de la même classe que les deux premières, telles que l'on ait $\gamma - \alpha - \beta = \frac{1}{2}$, et que γ soit supérieur à γ' et à γ''. On aura entre ces trois séries des relations de la forme

$$F(\alpha', \beta', \gamma', x) = P\,F(\alpha, \beta, \gamma, x) + Q\,F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x),$$
$$F(\alpha'', \beta'', \gamma'', x) = P_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) + Q_1 F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x),$$

P, Q, P_1, Q_1 étant des fonctions entières de x et l'une au moins des fonctions Q, Q_1 contenant le facteur $(1 - x)$. Si l'on multiplie membre à membre les deux égalités précédentes et que l'on remplace les carrés de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x)$ et le produit de ces deux séries par $(1 - x)$ par leurs valeurs tirées des formules (9), (10), (11), on pourra, d'après le lemme II, transformer le second membre en une série de même nature, mais d'ordre plus élevé.

On opérait d'une façon tout à fait analogue, lorsque les deux quantités $\gamma' - \alpha' - \beta'$, $\gamma'' - \alpha'' - \beta''$ sont de la forme $\frac{2n+1}{2}$, où n est un nombre entier négatif, pour mettre le produit

$$F(\alpha', \beta', \gamma', x) \times F(\alpha'', \beta'', \gamma'', x)$$

sous forme de quotient d'une série hypergéométrique d'ordre supérieur par une puissance entière de $(1 - x)$.

14. Une équation linéaire à intégrales régulières n'est pas complètement déterminée par la connaissance des racines des diverses équations déterminantes fondamentales relatives aux points critiques qu'elle présente, dès que l'ordre de cette équation ou le nombre de ses points critiques à distance finie est supérieur à deux. Mais, si une ou plusieurs des équations déterminantes admettent des groupes de racines dont les différences soient des nombres entiers et si, en outre, on assujettit l'intégrale générale à ne pas contenir de logarithmes dans le domaine du point critique correspondant, on introduit entre les coefficients un certain nombre de relations nouvelles, et il peut arriver de cette façon que ces coefficients soient complètement déterminés.

Telles sont les fonctions de M. Pochammer (*Journal de Crelle*, t. 71), et les séries hypergéométriques que nous venons d'étudier. Telles sont encore certaines fonctions d'une seule variable que j'ai définies à propos des séries hypergéométriques de deux variables (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, novembre 1882).

Mais on peut se proposer de généraliser le théorème de Riemann à un autre point de vue, en n'apportant aucune restriction à la forme de l'intégrale générale dans le voisinage d'un point singulier et en faisant intervenir les relations linéaires entre les divers groupes d'intégrales appartenant à chaque point critique. Étant données deux équations linéaires d'ordre m ayant un même point singulier $x = a$, je dirai que les équations sont de même *forme* dans le voisinage de ce point lorsque l'on pourra trouver deux systèmes fondamentaux d'intégrales des deux équations appartenant aux mêmes exposants et se comportant de la même manière dans le domaine de ce point. En d'autres termes, les équations déterminantes sont identiques, ainsi que les multiplicateurs ω_{ik}. (*Voir* le travail de M. Tannery déjà cité.) Considérons maintenant deux équations linéaires d'ordre m ayant les mêmes points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ et la même forme dans le voisinage de chacun de ces points, ainsi que pour le point $x = \infty$. Les deux équations auront un certain nombre de coefficients identiques, et, en général, elles auront en outre un certain nombre de coefficients tout à fait arbitraires. Ces derniers ne pourront intervenir que dans les relations linéaires entre les divers groupes d'intégrales. Le but de cette Note est de montrer que ces relations ne peuvent être les mêmes pour les deux équations, à moins qu'elles ne soient identiques. Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi; les deux équations seront évidemment de la même classe et, $y_1, y_2, \ldots, y_m, z_1, z_2, \ldots, z_m$ désignant deux systèmes fondamentaux correspondants, on aura

$$z_i = P_0 y_i + P_1 \frac{dy_i}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}},$$

$P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ désignant des fonctions rationnelles de la variable dont nous allons chercher la forme. Posons

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} \\ y_2 & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_m & \frac{dy_m}{dx} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix},$$

$$D_i = \begin{vmatrix} y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}} & z_1 & \frac{d^{i+1}y_1}{dx^{i+1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} \\ y_2 & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_m & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix};$$

on a $P_0 = \frac{D_0}{D}$, et en général $P_i = \frac{D_i}{D}$. Le coefficient P_0 ne peut présenter de discontinuité qu'aux points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$; dans le voisinage du point a_1, par exemple, on a

$$D = (x - a_1)^{r_1 + r_2 + \ldots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}} \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant uniforme et continu dans le domaine du point a_1 et différent de zéro pour $x = a_1$; $r_1, r_2, \ldots, r_m$ désignant les racines de l'équation déterminante fondamentale.

Pour évaluer D_0, imaginons qu'on ait remplacé $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par les intégrales qui appartiennent à ces exposants, et $r_1, r_2, \ldots, r_m$ par les intégrales correspondantes qui, par hypothèse, appartiennent aux mêmes exposants; on reconnaît alors bien aisément que le numérateur peut s'écrire

$$(x - a_1)^{r_1 + r_2 + \ldots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}} \psi_1(x),$$

$\psi_1(x)$ étant uniforme et continu pour $x = a_1$. On voit donc que P_0 est holomorphe pour $x = a_1$; on démontrerait de la même manière qu'il est holomorphe pour $x = a_2, a_3, \ldots, a_\rho$ et pour $x = \infty$. Il s'ensuit que P_0 est une fonction holomorphe sur toute la sphère; c'est donc une constante.

De même P_i ne peut présenter de discontinuité qu'aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$; dans le voisinage du point $x = a_1$, par exemple, on trouve qu'il est de la forme

$$(x - a_1)^i \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant holomorphe pour $x = a_i$. Il en résulte que P_i sera de la forme

$$[(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\rho)]^i \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ désignant une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan. Dans le domaine du point $x = \infty$, on trouve de même que ce coefficient peut s'écrire

$$x^i \psi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ étant holomorphe pour $x = \infty$. On devra donc avoir

$$\Phi(x) = x^{i(1-\rho)} \psi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ étant holomorphe pour $x = \infty$. Il en résulte que, pour $x = \infty$, on a $\Phi(x) = 0$; donc $\Phi(x)$, et par suite P_i, est identiquement nul. On voit donc que les équations en y et en z sont identiques, ou, ce qui revient au même, qu'une équation linéaire est complètement définie par les conditions précédentes.

FIN DU TOME DOUZIÈME.