ÉDOUARD GOURSAT

Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 261-286
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__261_0>

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

D'ORDRE SUPÉRIEUR (1),

PAR M. GOURSAT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Je m'occupe, dans ce Mémoire, des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et positives d'une variable dans lesquelles le rapport de deux coefficients consécutifs est une fonction rationnelle du rang de l'un d'eux. Après avoir démontré un théorème sur les équations linéaires, je montre comment le problème de Riemann, convenablement généralisé, conduit à des équations linéaires dont l'intégrale générale s'exprime au moyen de séries de cette nature. Les analogies entre ces équations et l'équation d'Euler sont rapidement indiquées, et je termine par quelques mots sur une classe de fonctions qui peuvent être rattachées à ces nouvelles fonctions hypergéométriques, de la même manière que la fonction exponentielle peut être rattachée à la série du binôme, et les transcendantes de Bessel et de Fourier aux fonctions de Gauss.

I.

1. Soit $x = a$ un point singulier pour une équation différentielle linéaire d'ordre m à coefficients uniformes. Toutes les intégrales étant

(1) Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances des 27 novembre 1882 et 15 janvier 1883.

supposées régulières dans le voisinage de ce point, on sait, d'après les travaux bien connus de M. Fuchs, que cette équation sera de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} (x-a)^m \dfrac{d^m y}{dx^m} + P_1(x)(x-a)^{m-1} \dfrac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \\ \quad + P_2(x)(x-a)^{m-2} \dfrac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + P_{m-1}(x)(x-a)\dfrac{dy}{dx} + P_m(x) y = 0, \end{cases}$$

$P_1, P_2, \ldots, P_m$ étant homolorphes pour $x = a$. Je me propose de généraliser un des théorèmes de M. Fuchs, relatif aux équations de cette forme. Pour cela, je recherche d'abord à quelles conditions l'équation (1) admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point a, la valeur de cette intégrale et de ses $p-1$ premières dérivées pouvant être prises arbitrairement pour $x = a$. Une pareille intégrale équivaut en réalité à p intégrales holomorphes linéairement distinctes, $y_1, y_2, \ldots, y_p$, telles que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{d^{p-1}y_1}{dx^{p-1}} & \dfrac{d^{p-2}y_1}{dx^{p-2}} & \ldots & y_1 \\ \dfrac{d^{p-1}y_2}{dx^{p-1}} & \ldots\ldots & \ldots & y_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{p-1}y_p}{dx^{p-1}} & \ldots\ldots & \ldots & y_p \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro pour $x = a$. Inversement, si l'équation (1) admet p intégrales holomorphes satisfaisant à cette condition, on pourra disposer des p constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, de façon que la fonction

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_p y_p,$$

qui est aussi une intégrale de l'équation (1) prenne, ainsi que ses $p-1$ premières dérivées, des valeurs données à l'avance pour $x = a$; car le déterminant des coefficients dans les équations qui déterminent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ est précisément égal à D. En particulier, on pourra disposer de ces p constantes, de façon à avoir p intégrales $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, ayant respectivement les formes suivantes :

$$\begin{array}{l} Y_1 = 1 + (x-a)\varphi_1(x), \\ Y_2 = (x-a)[1+(x-a)\varphi_2(x)], \\ Y_3 = (x-a)^2[1+(x-a)\varphi_3(x)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Y_p = (x-a)^{p-1}[1+(x-a)\varphi_p(x)], \end{array}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ étant des fonctions holomorphes de x pour $x=a$. Il suffit de prendre successivement pour les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des quantités qui satisfont aux p systèmes d'équations

$$\begin{array}{llll} (Y)_a = 1, & & & \\ (Y)_a = 0, & \left(\dfrac{dY}{dx}\right)_a = 1, & & \\ (Y)_a = 0, & \left(\dfrac{dY}{dx}\right)_a = 0, & \left(\dfrac{d^2Y}{dx^2}\right)_a = 1.2, & \\ \dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \\ (Y)_a = 0, & \left(\dfrac{dY}{dx}\right)_a = 0, & \ldots, & \left(\dfrac{d^{p-1}Y}{dx^{p-1}}\right)_a = 1.2\ldots(p-1), \end{array}$$

où l'on a posé $Y = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_p y_p$ et où le sens des symboles précédents est bien aisé à saisir. On voit que les intégrales nouvelles $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ appartiennent respectivement aux exposants $0, 1, 2, \ldots, p-1$, dans le domaine du point $x=a$. La question posée revient d'ailleurs à chercher dans quels cas l'équation (1) admet p intégrales holomorphes pour $x=a$ et appartenant à ces exposants. En effet, si cette équation admet un système d'intégrales $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ de la forme précédente, le déterminant D_1, relatif à ces fonctions, est évidemment différent de zéro pour $x=a$. Il suffit de remarquer que, quand on fait $x=a$, tous les éléments de la seconde diagonale se réduisent respectivement à $1, 1, 1.2, 1.2.3, \ldots, 1.2\ldots(p-1)$, tandis que tous les éléments situés au-dessous sont nuls. Le déterminant se réduit donc à un produit de facteurs, tous différents de zéro.

Remplaçons maintenant y dans le premier membre de l'équation (1) par une série telle que

$$(2)\qquad y = C_0 + C_1(x-a) + \ldots + C_{p-1}(x-a)^{p-1} + C_p(x-a)^p + \ldots,$$

et voyons dans quel cas il est possible d'obtenir un résultat identiquement nul, quels que soient les p coefficients $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$. Pour cela, imaginons qu'on ait développé les coefficients $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de $x-a$, et convergentes dans le domaine du point $x=a$.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_k(x-a)^k + \ldots,\\
P_2(x) &= B_0 + B_1(x-a) + \ldots + B_k(x-a)^k + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_{m-p+1}(x) &= Q_0 + Q_1(x-a) + \ldots + \ldots,\\
P_{m-p+2}(x) &= R_0 + R_1(x-a) + R_2(x-a)^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_{m-2}(x) &= T_0 + T_1(x-a) + \ldots + T_{p-3}(x-a)^{p-3} + \ldots,\\
P_{m-1}(x) &= U_0 + U_1(x-a) + \ldots + U_{p-2}(x-a)^{p-2} + \ldots,\\
P_m\ (x) &= V_0 + V_1(x-a) + \ldots + V_{p-1}(x-a)^{p-1} + \ldots.
\end{aligned}$$

Le résultat de la substitution de la série (2) à la place de y dans le premier membre de l'équation (1) sera, en n'écrivant que les $p-1$ premières puissances de $x-a$ dont nous avons seulement besoin,

$$\begin{aligned}
&C_0V_0\\
&+(C_0V_1 + C_1V_0 + C_1U_0)(x-a)\\
&+(C_0V_2 + C_1V_1 + C_2V_0 + 2C_2U_0 + C_1U_1 + 2C_2T_0)(x-a)^2\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+[C_0V_{p-1} + C_1V_{p-2} + \ldots + C_{p-1}V_0\\
&\qquad + C_1U_{p-2} + 2C_2U_{p-3} + \ldots + (p-1)C_{p-1}U_0\\
&\qquad\qquad + 2C_2T_0 + \ldots + (p-1)(p-2)C_{p-1}T_0\\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad + 1.2\ldots(p-1)C_{p-1}Q_0](x-a)^{p-1};
\end{aligned}$$

je remarque que les p premiers coefficients $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$ entrent seuls dans le résultat. Écrivons que ce résultat est identiquement nul, quels que soient ces coefficients. En prenant d'abord le terme constant, on a d'abord la première condition

$$V_0 = 0;$$

puis, portant cette valeur dans le coefficient de $x-a$, on a les deux nouvelles conditions

$$V_1 = 0, \quad U_0 = 0.$$

En continuant ainsi de proche en proche, on voit finalement que toutes les quantités

$$\begin{array}{l} V_0,\ V_1,\ \ldots,\ V_{p-1}, \\ U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_{p-2}, \\ T_0,\ T_1,\ \ldots,\ T_{p-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_0,\ R_1, \\ Q_0 \end{array}$$

doivent être nulles. Il en résulte que $Q_m(x)$ contiendra en facteur $(x-a)^p$, $Q_{m-1}(x)$ contiendra $(x-a)^{p-1}, \ldots$; on pourra diviser tous les termes de l'équation (1) par le facteur commun $(x-a)^p$, et l'on en conclut que toute équation répondant à la question est de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-a)^{m-p}\frac{d^m y}{dx^m} = Q_1(x)(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots \\ &\qquad + (x-a)Q_{m-p-1}(x)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + Q_{m-p}(x)\frac{d^p y}{dx^p} + \ldots + Q_m(x)y, \end{aligned}\right.$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ étant des fonctions holomorphes de x dans le domaine du point a.

2. Nous allons maintenant démontrer la proposition réciproque, que l'on doit énoncer ainsi :

THÉORÈME I. — *Toute équation de la forme* (3) *admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point a, la valeur de cette intégrale et de ses $p-1$ premières dérivées pouvant être prises arbitrairement pour $x = a$, pourvu que l'équation*

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(r) = (r-p)\ldots(r-m+1) \\ &\qquad - Q_1(a)(r-p)\ldots(r-m+2) - \ldots - Q_{m-p}(a) = 0 \end{aligned}\right.$$

n'admette pour racine aucun nombre entier positif supérieur à $p-1$.

Il suffit pour cela d'employer un procédé tout à fait semblable à celui que l'on emploie pour démontrer la proposition analogue dans le cas de $p = 1$ [1].

---

[1] *Voir*, par exemple, le travail de M. Tannery dans les *Annales de l'École Normale*, t. IV, 2^e série, p. 158 et suiv.

J'écris l'équation (3) sous la forme suivante :

$$
(3\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(x-a)^{m-p}\frac{d^m y}{dx^m} - Q_1(a)(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} - \ldots - Q_{m-p}(a)\frac{d^p y}{dx^p} \\
&\quad = R_1(x)(x-a)^{m-p}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + R_2(x)(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots \\
&\qquad + (x-a)R_{m-p}(x)\frac{d^p y}{dx^p} + R_{m-p+1}(x)\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \ldots + R_m(x)y,
\end{aligned}
\right.
$$

en faisant

$$
R_i(x) = \frac{Q_i(x) - Q_i(a)}{x-a}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, m-p,
$$

et

$$
R_i(x) = Q_i(x), \quad \text{pour} \quad i = m-p+1, \ldots, m-1, m.
$$

Les fonctions R_i sont évidemment, comme les fonctions Q_i, holomorphes dans le domaine du point $x = a$. Nous allons chercher à satisfaire à l'équation (3 *bis*) en mettant à la place de y une série de la forme

$$
C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_k(x-a)^k + \ldots .
$$

Si l'on substitue à la place de y la série précédente et qu'on égale les coefficients de $(x-a)^{k-p+1}$ dans les deux membres (k désignant un nombre entier positif égal ou supérieur à $p-1$), on aboutit à l'équation

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(k+1)k(k-1)\ldots(k-p+2) \\
&\quad \times [(k-p+1)\ldots(k-m+2) - (k-p+1)\ldots(k-m+3)Q_1(a) - \ldots \\
&\qquad\qquad - (k-p+1)Q_{m-p-1}(a) - Q_{m-p}(a)]C_{k+1} \\
&= A_{k0}C_k + A_{k1}C_{k-1} + \ldots + A_{kk}C_0,
\end{aligned}
\right.
$$

les A étant formés au moyen de quantités numériques et des coefficients des développements des fonctions $R_i(x)$ suivant les puissances ascendantes de $x-a$ par les seules opérations d'addition et de multiplication. Je remarque que le coefficient de C_{k+1} ne sera nul pour aucune valeur entière et positive de k supérieure à $p-2$, car la quantité entre parenthèses n'est autre chose que la fonction $\varphi(r)$ où l'on a changé r en $k+1$, et que par hypothèse aucune racine de l'équation $\varphi(r) = 0$ n'est un nombre entier supérieur à $p-1$. Si l'on fait successivement $k = p-1$, $k = p$, $k = p+1, \ldots$, on déterminera de proche en proche tous les coefficients C_p, C_{p+1}, et les suivants, au moyen des p premiers que l'on peut prendre arbitrairement, et l'on formera une série qui, mise à la place de y dans l'équation (3 *bis*) rendrait les deux membres identiques. Il reste à prouver que cette série est convergente, quelles que soient les valeurs attribuées aux p premiers cofficients C_0, C_1, ..., C_{p-1}.

Pour cela, nous la comparerons à une autre série dont il sera plus aisé de reconnaître la convergence et qui satisfera à une équation analogue à l'équation (3 *bis*).

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & y_1(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + y_2(x-a)^{m-p-2}\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \ldots + y_{m-p}\frac{d^p z}{dx^p} \\ & = \frac{M_1}{1-\frac{x-a}{r}}(x-a)^{m-p}\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \frac{M_2}{1-\frac{x-a}{r}}(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \ldots \\ & + \frac{M_{m-p}}{1-\frac{x-a}{r}}(x-a)\frac{d^p z}{dx^p} + \frac{M_{m-p+1}}{1-\frac{x-a}{r}}\frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}} + \ldots + \frac{M_m}{1-\frac{x-a}{r}}z. \end{aligned}\right.$$

Dans cette équation, M_1, M_2, ..., M_m représentent les modules maxima des fonctions R_1, R_2, ..., R_m dans le domaine du point a, r le rayon de ce domaine, et $y_1, y_2, \ldots, y_{m-p}$ des constantes positives assujetties à la seule condition que le premier membre de l'équation

$$\begin{aligned} \psi(r) = {} & (r-p+1)\ldots(r-m+3)y_1 \\ & + (r-p+1)\ldots(r-m+4)y_2 + \ldots + (r-p+1)y_{m-p-1} + y_{m-p} = 0 \end{aligned}$$

soit positif pour toute valeur positive de r supérieure à $p-2$.

Je démontrerai d'abord que l'équation (6) admet comme intégrale une série à coefficients positifs et convergents dans les environs du point $x=a$,

$$(7)\qquad z = \sum_0^\infty g_k(x-a)^k,$$

les p coefficients g_0, g_1, ..., g_{p-1} étant des nombres positifs que l'on peut prendre arbitrairement. Si, en effet, on substitue cette série à la place de z dans l'équation (6) multipliée par $1-\frac{x-a}{r}$ et que l'on égale les coefficients de $(x-a)^{k-p+1}$, on trouve la relation

$$\left\{\begin{aligned}
&(k+1)k(k-1)\ldots(k-p+2)[\,(k-p+1)\ldots(k-m+3)y_1\\
&\qquad\qquad + (k-p+1)\ldots(k-m+4)y_2+\ldots+y_{m-p}]g_{k+1}\\
&= g_k\Big[k(k-1)\ldots(k-m+2)\left(\frac{y_1}{r}+\mathrm{M}_1\right)+k(k-1)\ldots(k-m+3)\left(\frac{y_2}{r}+\mathrm{M}_2\right)+\ldots\\
&\qquad + k(k-1)\ldots(k-p+1)\left(\frac{y_{m-p}}{r}+\mathrm{M}_{m-p}\right)+k(k-1)\ldots(k-p+2)\mathrm{M}_{m-p+1}\Big]\\
&\quad + (k-1)(k-2)\ldots(k-p+2)\mathrm{M}_{m-p+2}g_{k-1}+(k-2)\ldots(k-p+2)\mathrm{M}_{m-p+3}g_{k-2}+\ldots\\
&\quad + (k-p+2)\mathrm{M}_{m-1}g_{k-p+2}+\mathrm{M}_m g_{k-p+1}.
\end{aligned}\right.$$

Le coefficient de g_{k+1} n'étant nul pour aucune valeur entière et positive de k supérieure à $p-2$, on pourra calculer de proche en proche tous les coefficients au moyen des p premiers $g_0, g_1, \ldots, g_{p-1}$. La relation (8) peut s'écrire

$$g_{k+1} = \mathrm{A}g_k + \mathrm{B}g_{k-1} + \ldots + \mathrm{L}g_{k-p+1},$$

A, B, C, ..., L étant des fonctions rationnelles de k dont la première a pour limite $\frac{y_1+r\mathrm{M}}{y_1 r}$ et dont toutes les autres ont zéro pour limite. Posons $\frac{x-a}{r}=t$, et soit

$$h_s = g_k \times r_s;$$

la série (7) devient

$$z = \sum_0^\infty h_k \times t^k,$$

les coefficients h étant liés par la relation

$$h_{k+1} = \mathrm{A}rh_k + \mathrm{B}r^2 h_{k-1} + \ldots + \mathrm{L}r^p h_{k-p+1}. \tag{9}$$

Prenons un nombre n assez grand pour que, pour toute valeur de k supérieure à n, la somme $\mathrm{A}r+\mathrm{B}r^2+\ldots+\mathrm{L}r^p$ soit comprise entre $\frac{y_1+\mathrm{M}_1 r}{y_1}$ et un nombre positif l supérieur à ce dernier et par suite supérieur à l'unité. Soit H la plus grande des valeurs absolues des coefficients $h_0, h_1, \ldots, h_n$. L'équation (9) montre que l'on aura successivement

$$\begin{aligned}
&h_{n+1} < l\mathrm{H},\\
&h_{n+2} < l^2\mathrm{H},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&h_{n+q} < l^q\mathrm{H},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La série (7) sera donc convergente, pourvu que le module de $l\dfrac{x-a}{r}$ soit plus petit que l'unité. Comme on peut prendre l aussi rapproché qu'on le veut de $\dfrac{y_1+\mathrm{M}_1 r}{y_1}$, on voit que cette série sera convergente tant que le module de $x-a$ sera plus petit que $\dfrac{y_1 r}{y_1+\mathrm{M}_1 r}$, et cela quelles que soient les valeurs que l'on ait prises pour les p coefficients g_0, $g_1, \ldots, g_{p-1}$.

Si maintenant on substitue la même série (7) à la place de z dans l'équation (6) et qu'on égale les coefficients de $(x-a)^{k-p+1}$ dans les deux membres, on aboutit à la relation

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&(k+1)k\ldots(k-p+2)[\quad(k-p+1)\ldots(k-m+3)y_1\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (k-p+1)\ldots(k-m+4)y_2+\ldots+y_{m-p}]g_{k+1}\\
&\quad = \mathrm{B}_{k0}g_k+\mathrm{B}_{k1}g_{k-1}+\ldots+\mathrm{B}_{kk}g_0,
\end{aligned}\right.$$

les quantités positives B_{ki} étant formées avec les quantités positives M comme les quantités A_{ki} de l'équation (5) le sont avec les coefficients des développements des fonctions $\mathrm{R}_i(x)$ suivant les puissances ascendantes de $x-a$. Il suit de là qu'on a, en général, $\mathrm{B}_{ki} > \operatorname{mod}\mathrm{A}_{ki}$. Si, en outre, $g_0, g_1, \ldots, g_{p-1}$ sont positifs, il en sera de même de tous les coefficients suivants $g_p, g_{p+1}, \ldots$. Si l'on compare les équations (5) et (10), on reconnaît de suite qu'à partir d'une certaine limite t le coefficient de C_{k+1} est toujours supérieur au coefficient de g_{k+1}. Si donc, pour k inférieur à t, on a constamment $\operatorname{mod}\mathrm{C}_k < g_k$, cette inégalité subsistera pour toute valeur de k supérieure à t.

Des équations (5) et (10) on tire

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_k &= \mathcal{A}_{k0}\,\mathrm{C}_0+\mathcal{A}_{k1}\,\mathrm{C}_1+\ldots+\mathcal{A}_{k,p-1}\,\mathrm{C}_{p-1},\\
g_k &= \mathcal{B}_{k0}\,g_0+\mathcal{B}_{k1}\,g_1+\ldots+\mathcal{B}_{k,p-1}\,g_{p-1},
\end{aligned}$$

les quantités $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant indépendantes des quantités C et g, et les quantités $\mathfrak{B}$ étant essentiellement positives. Soit $\mathfrak{A}$ le module maximum des quantités $\mathfrak{A}_{ki}$, pour $k \leq t$, $i \leq p-1$, et $\mathfrak{B}$ le module minimum de la somme

$$\mathfrak{B}_{k0} + \mathfrak{B}_{k1} + \ldots + \mathfrak{B}_{k,p-1}$$

pour les valeurs de k inférieures à t; aucune des quantités $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne pourra être nulle. Soit, de plus, $\mathfrak{C}$ le module maximum des quantités $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$. Il suffira de prendre tous les coefficients $g_0, g_1, \ldots, g_{p-1}$ supérieurs à la quantité $p\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ pour que l'inégalité

$$\operatorname{mod} C_k < g_k$$

soit vérifiée pour toute valeur de k inférieure à t et, par suite, pour toute valeur de k. Il est donc établi qu'il existe une série convergente dans les environs du point a et qui satisfait à l'équation (3), les p premiers coefficients de cette série pouvant être pris arbitrairement; c'est précisément ce qu'il s'agissait de démontrer.

Remarque. — L'équation déterminante fondamentale relative au point critique $x = a$ sera

$$\begin{aligned} r(r-1)\ldots(r-p+1)(r-p)\ldots(r-m+1) \\ - Q_1(a)(r-p)\ldots(r-m+2) - \ldots - Q_{m-p}(a) = 0. \end{aligned}$$

Elle admet comme racines les nombres entiers $0, 1, 2, \ldots, p-1$ et en outre les racines de l'équation $\varphi(r) = 0$. La démonstration du théorème précédent suppose qu'aucune de ces racines n'est un nombre entier supérieur à $p-1$, ce qui est bien d'accord avec la théorie générale et avec une remarque faite plus haut.

Le théorème précédent donne, comme cas particuliers, les théorèmes fondamentaux de M. Fuchs; il suffit de faire successivement $p = m$, $p = 1$, pour avoir ces deux propositions qui contiennent toute la théorie des équations à intégrales régulières.

3. Lorsque l'équation déterminante fondamentale relative à un point critique admet un groupe de p racines telles que les différences de deux d'entre elles soient des nombres entiers, il y correspond un groupe de p intégrales, qui contiennent en général des logarithmes. Comme cas

particulier, il peut arriver que tous les logarithmes disparaissent. Le théorème précédent fournit un moyen commode de reconnaître les cas où cette circonstance se présente, lorsque les racines du groupe en question forment une progression arithmétique dont la raison est l'unité telle que

$$r,\quad r+1,\quad r+2,\quad \ldots,\quad r+p-1.$$

Si, en effet, on fait la transformation

$$y=(x-a)^r z,$$

l'équation déterminante de la transformée en z admettra le groupe de racines

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,$$

et la nouvelle équation devra être de la forme (3) pour que tous les logarithmes disparaissent.

Les autres cas peuvent se ramener à celui-là; on sait d'abord que si deux racines du groupe sont égales, il y aura toujours au moins une intégrale contenant un logarithme. Imaginons que les racines du groupe, rangées par ordre de grandeur croissante, soient

$$r,\quad r+\alpha_1,\quad r+\alpha_2,\quad \ldots,\quad r+\alpha_p,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des nombres entiers positifs et croissants. Si l'on forme l'équation linéaire admettant comme intégrales toutes les intégrales de l'équation proposée et en outre les fonctions

$$(x-a)^{r+1},\quad \ldots,\quad (x-a)^{r+\alpha_1-1},\quad (x+a)^{r+\alpha_1+1},\quad \ldots,\quad (x-a)^{r+\alpha_p-1},$$

la nouvelle équation en z devra admettre un groupe d'intégrales appartenant respectivement aux exposants

$$r,\quad r+1,\quad \ldots,\quad r+\alpha_p-1,\quad r+\alpha_p,$$

et l'on pourra lui appliquer la méthode précédente. Pour la formation de l'équation en z, on commencera par former une équation en Y admettant comme intégrales les fonctions

$$(x-a)^{r+1},\quad \ldots,\quad (x-a)^{r+\alpha_1-1},\quad (x-a)^{r+\alpha_1+1},\quad \ldots,\quad (x-a)^{r+\alpha_p-1},$$

et l'on cherchera ensuite l'équation linéaire qui admet les intégrales de l'équation proposée et de cette nouvelle équation. Pour cette dernière question, je renverrai au Mémoire de M. Appell publié dans les *Annales de l'École Normale* (année 1881). On peut aussi opérer de la manière suivante.

Soit l'équation linéaire

$$\varphi(y) = 0$$

et soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$, q fonctions connues de x. Considérons l'équation

$$\varphi(y) = C_1\varphi(z_1) + C_2\varphi(z_2) + \ldots + C_q\varphi(z_q),$$

où l'on regarde $C_1, C_2, \ldots, C_q$ comme des constantes arbitraires. Cette équation admet évidemment comme intégrales toutes les intégrales de l'équation $\varphi(y) = 0$, et en outre les q fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_q$. Pour obtenir l'équation cherchée, il suffira de différentier q fois les deux membres de la relation précédente et d'éliminer les q constantes arbitraires entre ces $q+1$ relations.

II.

4. Étant données $2n-1$ quantités constantes

$$\begin{gathered} a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n, \\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-1}, \end{gathered}$$

telles qu'aucune des quantités

$$b_i, \quad b_i - b_h, \quad a_i - a_h, \quad \sum_{i=1}^{n-1} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ne soit un nombre entier, je me propose de montrer qu'il existe une fonction multiforme de la variable x, jouissant des propriétés suivantes. Entre $n+1$ déterminations de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Chaque branche de la fonction est holomorphe pour toute valeur de x différente de $0, 1, \infty$. Dans le voisinage du point $x=0$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$P_1(x), \quad x^{1-b_1}P_2(x), \quad \ldots, \quad x^{1-b_{n-1}}P_n(x),$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant holomorphes pour $x = 0$. Dans le domaine du point $x = 1$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,\ Q_{n-1}(x),\ (1-x)^{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}-a_1-a_2-\ldots-a_n} Q_n(x),$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ étant holomorphes dans le domaine de ce point. Enfin, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$x'^{a_1} R_1(x'),\ x'^{a_2} R_2(x'),\ \ldots,\ x'^{a_n} R_n(x'),$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ désignant des fonctions holomorphes dans le voisinage du point critique $x' = 0$. Nous allons reconnaître que, sous les restrictions admises, il existe effectivement une fonction multiforme y remplissant ces conditions et que cette fonction est entièrement déterminée à n facteurs constants près, c'est-à-dire que, si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ désignent n branches linéairement indépendantes d'une pareille fonction, toute autre détermination s'exprime par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen de ces n branches. Cela revient à démontrer que toute fonction y remplissant ces conditions satisfait à une équation linéaire qui est *complètement* déterminée. Si l'on désigne toujours par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les n déterminations linéairement indépendantes, toute autre détermination satisfait évidemment à l'équation linéaire

$$(11)\quad \begin{vmatrix} \frac{d^n y}{dx^n} & \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dy}{dx} & y \\ \frac{d^n F_1}{dx^n} & \frac{d^{n-1} F_1}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dF_1}{dx} & F_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^n F_n}{dx^n} & \frac{d^{n-1} F_n}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dF_n}{dx} & F_n \end{vmatrix} x^{\Sigma b_i + \frac{n(n-1)}{2}} (x-1)^{\Sigma a_i - \Sigma b_i + n} = 0.$$

Le coefficient de $\frac{d^n y}{dx^n}$ sera

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} F_1}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dF_1}{dx} & F_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{n-1} F_n}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{dF_n}{dx} & F_n \end{vmatrix} x^{\Sigma b_i + \frac{n(n-1)}{2}} (x-1)^{\Sigma a_i - \Sigma b_i + n}.$$

Ce coefficient ne peut éprouver de discontinuité qu'aux points o, ı, ∞. Étudions la forme de ce coefficient dans le voisinage du point $x = 0$. Comme le déterminant précédent est simplement multiplié par un facteur constant quand on remplace les éléments d'un système fondamental par ceux d'un autre système fondamental, on peut supposer que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ désignent les n déterminations dont il a été question au début. On reconnaît alors immédiatement que ce coefficient est de la forme

$$x^{n-1}\varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ étant holomorphe pour $x = 0$. Dans le voisinage du point $x = 1$, on trouve de même que ce coefficient peut s'écrire

$$(x-1)\varphi_2(x),$$

$\varphi_2(x)$ étant holomorphe pour $x = 1$. Le coefficient $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ est donc de la forme

$$x^{n-1}(x-1)\Phi(x),$$

$\Phi(x)$ étant une fonction holomorphe de x dans toute l'étendue du plan. Pour achever de déterminer ce coefficient, il suffira de l'étudier dans le voisinage du point $x = \dfrac{1}{x'} = \infty$. Pour cela, supposons que F_1, $F_2, \ldots, F_n$ désignent respectivement les n branches

$$x'^{a_1}R_1(x'), \quad \ldots, \quad x'^{a_n}R_n(x');$$

on voit de suite que, dans le voisinage du point $x' = 0$, ce coefficient peut s'écrire

$$x'^{\Sigma a_i - \Sigma b_i}\left(\frac{1-x'}{x'}\right)^{\Sigma a_i - \Sigma b_i + n}\psi(x'),$$

$\psi(x')$ étant holomorphe pour $x' = 0$. On devra donc avoir

$$\Phi(x) = \psi_1(x'),$$

$\psi_1(x')$ étant aussi holomorphe pour $x' = 0$. D'où il suit que $\Phi(x)$ ne peut être qu'une quantité constante, et le coefficient de $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ est, à un facteur constant près différent de zéro, $x^{n-1}(x-1)$.

En étudiant la forme du coefficient de $\dfrac{d^p y}{dx^p}$ dans le voisinage de chacun des points o, 1, ∞, on reconnaît de même que, dans le voisinage du point $x = 0$, on peut l'écrire $x^{p-1}\varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant holomorphe pour $x = 0$, qu'il est holomorphe pour $x = 1$, et que, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on peut l'écrire $x^p\psi(x')$. Ce coefficient est donc égal au produit de x^{p-1} par un binôme du premier degré en x. Enfin on trouve de même que le coefficient de y est constant.

En résumé, l'équation (11) aura la forme suivante :

$$\text{(11 bis)} \left\{ \begin{aligned} & x^{n-1}(x-1)\frac{d^n y}{dx^n} + (Ax-B)x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (Cx-D)x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots \\ & \qquad + (Hx-K)x\frac{d^2y}{dx^2} + (Lx-M)\frac{dy}{dx} + Ny = 0, \end{aligned} \right.$$

A, B, C, D, ..., L, M, N étant $2n-1$ constantes.

5. Pour déterminer ces constantes, je m'appuierai sur les remarques suivantes. Toute fonction qui, dans le voisinage d'un point a, peut se mettre sous la forme $(x-a)^\alpha\varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant holomorphe pour $x = a$, appartient au moins à l'exposant α, mais peut appartenir à un exposant supérieur à α; c'est ce qui arrivera si $\varphi(a) = 0$. Il suit de là que la somme des racines de l'équation fondamentale déterminante de l'équation (11 *bis*) relative au point $x = 0$ sera égale à

$$n - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i + \lambda,$$

λ étant un nombre entier positif qui ne peut être nul que dans le cas où ces racines sont respectivement

$$0,\ 1-b_1,\ 1-b_2,\ \ldots,\ 1-b_{n-1}.$$

De même la somme des racines de l'équation fondamentale déterminante relative au point $x = \infty$ devra être égale à

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \mu,$$

μ étant un nombre entier positif qui ne peut être nul que si ces racines ont précisément les valeurs

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Dans le voisinage du point $x = 1$, l'équation (11 *bis*) doit admettre $n-1$ intégrales holomorphes. L'équation déterminante correspondante doit donc admettre $n-1$ racines entières, toutes distinctes. La somme de ces racines entières aura la plus petite valeur lorsque ces racines seront $0, 1, 2, \ldots, n-2$. La somme de toutes les racines sera donc égale à

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \nu,$$

ν étant un nombre entier positif qui ne peut être nul que si ces racines sont précisément

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ \sum b_i - \sum a_i.$$

Cela posé, la formule générale

$$\sum r + \sum r' = \frac{n(n-1)(\rho-1)}{2},$$

où ρ désigne le nombre des points critiques à distance finie, donne, dans le cas présent,

$$n - 1 + \lambda - \sum b_i + \sum a_i + \mu + \sum b_i - \sum a_i + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \nu = \frac{n(n-1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$\lambda + \mu + \nu = 0,$$

et, par conséquent,

$$\lambda = \mu = \nu = 0.$$

Les racines des diverses équations fondamentales devront donc avoir les valeurs écrites plus haut.

Posons

$$\begin{aligned} r(r-1+b_1)(r-1+b_2)\ldots(r-1+b_{n-1}) &= \varphi(r), \\ (r+a_1)(r+a_2)\ldots+(r+a_n) &= \psi(r). \end{aligned}$$

Nous déterminerons A, B, C, ..., M, N par les équations suivantes, qui devront se réduire à des identités

$$(12)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-n+1)+\mathrm{B}\,r(r-1)\dots(r-n+2)+\dots+\mathrm{M}\,r=\varphi(r), \\ r(r-1)\dots(r-n+1)+\mathrm{A}\,r(r-1)\dots(r-n+2)+\dots+\mathrm{L}\,r+\mathrm{N}=\psi(r), \end{cases}$$

car le premier membre de la première de ces équations n'est autre que le premier membre de l'équation déterminante relative au point $x=0$, et le premier membre de la seconde est égal au premier membre de l'équation déterminante relative au point $x=\infty$, où l'on aurait changé r en $-r$. On déduit de ces identités les valeurs des coefficients inconnus sans aucune ambiguïté. Désignons d'une manière générale par P_i^j la somme des produits j à j des i premiers nombres entiers; la première de nos équations peut s'écrire

$$r^n+\left[\mathrm{B}-\frac{n(n-1)}{2}\right]r^{n-1}+(\mathrm{D}-\mathrm{BP}_{n-2}^1+\mathrm{P}_{n-1}^2)+r^{n-2}+\dots+(\mathrm{M}-\mathrm{K}+\dots\pm\mathrm{P}_{n-1}^{n-1})r$$
$$=r^n+\mathrm{S}_1r^{n-1}+\mathrm{S}_2r^{n-2}+\dots+\mathrm{S}_{n-1}r+\mathrm{S}_n,$$

$\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \dots, \mathrm{S}_n$ étant des fonctions connues de $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. On en déduit successivement les valeurs des coefficients B, D, ..., K, M :

$$\mathrm{B}=\frac{n(n-1)}{2}+\sum b_i-(n-1),$$

$$\mathrm{D}=\sum(1-b_i)(1-b_h)+\mathrm{BP}_{n-2}^1-\mathrm{P}_{n-1}^2,$$

....

Les valeurs de A, C, ..., N se déduisent de la seconde des équations (12). On a, par exemple,

$$\mathrm{A}=\sum a_i+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Les coefficients de l'équation (12 *bis*) étant déterminés de cette façon, il est aisé de s'assurer que les intégrales de cette équation satisfont bien aux conditions énoncées. Cela est évident pour les points singuliers 0 et ∞. L'équation déterminante relative au point $x=1$ sera

$$r(r-1)\dots(r-n+1)+r(r-1)\dots(r-n+2)(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0;$$

elle admet les $n-1$ racines $0, 1, 2, \ldots, n-2$, et en outre la racine $n-1+B-A$, c'est-à-dire, d'après les valeurs trouvées pour ces coefficients, $\Sigma b_i - \Sigma a_i$. Le théorème démontré au début de ce travail nous apprend d'ailleurs que, pourvu que $\Sigma b_i - \Sigma a_i$ ne soit pas un nombre entier, l'équation (11 *bis*) admet $n-1$ intégrales holomorphes dans le domaine du point $x=1$, et une intégrale appartenant à l'exposant $\Sigma b_i - \Sigma a_i$.

Je remarque en passant que ce théorème, combiné avec la remarque précédente, relative aux exposants de discontinuité, aurait pu faire découvrir immédiatement la forme de l'équation (11 *bis*).

Si l'on fait $n=2$, on retrouve l'équation d'Euler, comme on devait s'y attendre. Si l'on prend $n=3$, on about it à l'équation suivante du troisième ordre :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)\frac{d^3y}{dx^3} + [(3+a_1+a_2+a_3)x - (1+b_1+b_2)]\,x\frac{d^2y}{dx^2} \\ & \quad + [(1+a_1+a_2+a_2+a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3)x - b_1b_2]\frac{dy}{dx} + a_1a_2a_3y = 0. \end{aligned}\right.$$

Les constantes qui entrent dans l'équation (11 *bis*) sont en nombre $2n-1$, précisément égal au nombre des quantités a et b. L'équation (11 *bis*) est donc la plus générale de cette forme. Il n'en résulte pas que toute équation de cette forme admette un système d'intégrales jouissant des propriétés énoncées plus haut. Mais, pour qu'il en soit ainsi, ces coefficients ne doivent satisfaire à aucune relation d'égalité. Ils doivent seulement satisfaire à certaines relations d'inégalité, qui expriment qu'aucun des nombres b_i, $b_i - b_h$, $a_i - a_h$, $\Sigma b_i - \Sigma a_i$ n'est égal à un nombre entier.

6. Nous allons maintenant chercher la forme des intégrales de cette équation dans le voisinage de l'origine. Je cherche d'abord la forme de l'intégrale holomorphe. Il suffit pour cela de remplacer y par une série telle que

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m,$$

dans le premier membre de l'équation (11 *bis*) et d'égaler à zéro le coefficient de x^m. Ce coefficient sera

$$\begin{aligned}&[m(m-1)\ldots(m-n+1)+\mathrm{A}m(m-1)\ldots(m-n+2)+\ldots+m\mathrm{L}+\mathrm{N}]\mathrm{C}_m\\ &-[(m+1)m\ldots(m-n+2)+\mathrm{B}(m+1)m\ldots(m-n+3)+\ldots+(m+1)\mathrm{M}]\mathrm{C}_{m+1},\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les identités (12),

$$\mathrm{C}_m\psi(m)-\mathrm{C}_{m+1}\varphi(m+1).$$

On devra donc avoir

$$\frac{\mathrm{C}_{m+1}}{\mathrm{C}_m}=\frac{\psi(m)}{\varphi(m+1)}=\frac{(a_1+m)(a_2+m)\ldots(a_n+m)}{(m+1)(b_1+m)\ldots(b_{n-1}+m)}.$$

Si l'on prend $\mathrm{C}_0=1$, on aura

$$\mathrm{C}_m=\frac{(a_1m)(a_2m)\ldots(a_nm)}{(1.m)(b_1m)\ldots(b_{n-1}m)},$$

où le symbole $(\lambda.k)$ représente le produit $\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$ et où l'on prend $(\lambda.0)=1$. Je désignerai dorénavant une pareille série de la manière suivante :

$$\mathrm{F}\begin{pmatrix}a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\\ b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, x\end{pmatrix}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_1m)(a_2m)\ldots(a_nm)}{(1.m)(b_1m)\ldots(b_{n-1}m)}x^m.$$

L'analogie entre cette série et la série de Gauss est manifeste, ainsi qu'entre l'équation (11 *bis*) et l'équation de la série hypergéométrique. Mais cette analogie se poursuit plus loin. Si en effet on fait la transformation

$$y=x^{1-b_i}z\quad(i=1, 2, \ldots, n-1),$$

les intégrales de la nouvelle équation en z jouiront, relativement aux points singuliers, de propriétés analogues à celles de l'équation en y elle-même. Seulement les quantités qui joueront le rôle des quantités a_i et b_i seront ici

$$\begin{aligned}&a_1+1-b_i,\ a_2+1-b_i,\ \ldots,\ a_n+1-b_i\\ &2-b_i,\ b_1+1-b_i,\ \ldots,\ b_{n-1}+1-b_i.\end{aligned}$$

L'équation en y admet donc aussi l'intégrale

$$y=x^{1-b_i}\mathrm{F}\begin{pmatrix}a_1+1-b_i, & a_2+1-b_i, & \ldots, & a_n+1-b_i\\ 2-b_i, & b_1+1-b_i, & \ldots & b_{n-1}+1-b_i, x\end{pmatrix};$$

chacune de ces séries est convergente comme la première à l'intérieur du cercle C_0 de rayon égal à l'unité ayant l'origine pour centre. Dans ce cercle, l'intégrale générale de l'équation (11 *bis*) sera

$$y = C\,F\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_{n-1}, & x \end{pmatrix}$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n-1} C_i x^{1-b_i} F\begin{pmatrix} a_1+1-b_i, & a_2+1-b_i, & \ldots, & a_{n-1}+1-b_i, & a_n+1-b_i \\ 2-b_i, & b_1+1-b_i, & \ldots, & b_{n-1}+1-b_i, & x \end{pmatrix},$$

$C, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ étant n constantes arbitraires.

Faisons encore la transformation $x = \frac{1}{t}$, puis posons

$$y = t^{a_i} z \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La nouvelle équation en z aura encore les trois points singuliers 0, 1, ∞ et il est facile de voir que les intégrales possèdent les mêmes propriétés que les intégrales de l'équation en y. Seulement les quantités a_i et b_i sont remplacées respectivement par

$$a_i,\ a_i+1-b_1,\ a_i+1-b_2,\ \ldots,\ a_i+1-b_{n-1},$$
$$a_i+1-a_1,\ a_i+1-a_2,\ \ldots,\ a_i+1-a_n,$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation (11 *bis*) est, à l'extérieur du cercle C_0,

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C'_i x^{-a_i} F\begin{pmatrix} & a_i, & a_i+1-b_1, & \ldots, & a_i+1-b_{n-1} \\ a_i+1-a_1, & a_i+1-a_2, & \ldots, & a_i+1-a_n, & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, l'intégrale générale de l'équation (13) est, à l'intérieur du cercle C_0,

$$y = C\,F\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & x \end{pmatrix} + C_1 x^{1-b_1} F\begin{pmatrix} a_1+1-b_1, & a_2+1-b_1, & a_3+1-b_1 \\ 2-b_1, & b_2+1-b_1, & x \end{pmatrix}$$
$$+ C_2 x^{1-b_2} F\begin{pmatrix} a_1+1-b_2, & a_2+1-b_2, & a_3+1-b_2 \\ 2-b_2, & b_1+1-b_2, & x \end{pmatrix},$$

et, à l'extérieur de ce cercle,

$$y = C'_1 x^{-a_1} F\begin{pmatrix} a_1, \ a_1+1-b_1, \ a_1+1-b_2 \\ a_1+1-a_2, \ a_1+1-a_3, \ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$+ C'_2 x^{-a_2} F\begin{pmatrix} a_2, \ a_2+1-b_1, \ a_2+1-b_2 \\ a_2+1-a_1, \ a_2+1-a_3, \ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$+ C'_3 x^{-a_3} F\begin{pmatrix} a_3, \ a_3+1-b_1, \ a_3+1-b_2 \\ a_3+1-a_1, \ a_3+1-a_2, \ \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Tous ces résultats sont faciles à démontrer directement en se servant des formules (12).

7. On pourrait étendre à ces fonctions un grand nombre des relations données par Gauss et Kummer pour la série hypergéométrique ordinaire. J'indiquerai seulement les deux suivantes :

$$\frac{d F\begin{pmatrix} a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n \\ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_{n-1}, \ x \end{pmatrix}}{dx} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}} F\begin{pmatrix} a_1+1, \ a_2+1, \ \ldots, \ a_n+1 \\ b_1+1, \ b_2+1, \ \ldots, \ b_{n-1}+1, \ x \end{pmatrix},$$

$$(a_2 - a_1) F\begin{pmatrix} a_1, \ a_2, \ a_3 \\ b_1, \ b_2, \ x \end{pmatrix} + a_1 F\begin{pmatrix} a_1+1, \ a_2, \ a_3 \\ b_1, \ b_2, \ x \end{pmatrix} - a_2 F\begin{pmatrix} a_2+1, \ a_1, \ a_3 \\ b_1, \ b_2, \ x \end{pmatrix} = 0.$$

D'une manière générale, si l'on considère toutes les fonctions qui se déduisent de l'une d'elles en augmentant ou en diminuant chacun des éléments a et b d'un nombre entier quelconque comme appartenant à la même *famille*, entre $n+1$ fonctions de la même famille, il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de la variable.

La fonction F est susceptible d'être représentée par une intégrale définie multiple. Ainsi l'on a

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 u_1^{a_1-1} u_2^{a_2-1} \ldots u_{n-1}^{a_{n-1}-1} (1-u_1)^{b_1-a_1-1} \ldots (1-u_{n-1})^{b_{n-1}-a_{n-1}-1}$$
$$\times (1 - x u_1 \ldots u_{n-1})^{-a_n} du_1 du_2 \ldots du_{n-1}$$
$$= \frac{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{n-1})\Gamma(b_1-a_1)\ldots\Gamma(b_{n-1}-a_{n-1})}{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_{n-1})} F\begin{pmatrix} a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n \\ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_{n-1}, \ x \end{pmatrix},$$

pourvu que les parties réelles des quantités a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1};

$b_1 - a_1, \ldots, b_{n-1} - a_{n-1}$ soient positives. Ce mode de représentation permet même de faire la théorie complète de l'équation (11 *bis*), comme l'étude de l'intégrale définie

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

et des intégrales de même forme, permet de faire la théorie de l'équation hypergéométrique ordinaire. Je renverrai, pour plus de détails, à un travail sur une classe d'intégrales définies (*Acta mathematica*, t. II).

Si la somme $\Sigma b_i - \Sigma a_i$ est positive, on sait que la série F est encore convergente pour $x = 1$, et que sa somme s'exprime au moyen des intégrales eulériennes de seconde espèce. Il résulte de là une méthode pour trouver les relations linéaires entre les intégrales de l'équation (11 *bis*) tout à fait analogue à la méthode suivie par Gauss (*Œuvres complètes*, t. III : *Definitio seriei nostræ*, etc.). Les coefficients de ces relations s'expriment au moyen des fonctions Γ.

Lorsque l'un des nombres b_i, $b_i - b_h$, $a_i - a_h$, $\Sigma b_i - \Sigma a_i$ est un nombre entier, le théorème général ne subsiste plus et l'intégrale générale contient des logarithmes dans le domaine de l'un des points singuliers. Je n'entrerai pas dans l'étude de ces cas particuliers qui, depuis les travaux de M. Fuchs, ne peut présenter que des difficultés secondaires; je remarque seulement que les intégrales écrites plus haut subsistent tant qu'aucun des nombres b_i, $b_i - b_h$, $a_i - a_h$ n'est égal à un nombre entier.

8. La règle célèbre de Gauss pour décider de la convergence d'une série trouve dans ce qui précède une interprétation analytique très simple. Considérons une série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots$$

telle que le rapport de deux termes consécutifs soit une fonction rationnelle de m ayant pour limite l'unité lorsque m augmente indéfiniment. On pourra toujours mettre ce rapport sous la forme

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{(a_1+m)(a_2+m)\ldots(a_n+m)}{(m+1)(b_1+m)\ldots(b_{n-1}+m)}.$$

La série

$$\Phi(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_m x^m + \ldots$$

sera égale, à un facteur constant près, à la série F elle-même. Or, dans le voisinage du point $x = 1$, l'équation (11 *bis*) admet $n-1$ intégrales holomorphes et une intégrale appartenant à l'exposant $\Sigma b_i - \Sigma a_i$. On aura donc, pour une valeur de x voisine de l'unité,

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + (1-x)^{\Sigma b_i - \Sigma a_i} \Phi_2(x),$$

Φ_1 et Φ_2 étant holomorphes pour $x = 1$. D'après le théorème bien connu d'Abel, la série $\Phi(x)$ sera convergente si $\Sigma b_i - \Sigma a_i$, ou du moins sa partie réelle, est un nombre positif. On voit que c'est précisément la règle de Gauss. En tout autre point de la circonférence C_0, la série F ne sera convergente que si la partie réelle de $\Sigma b_i - \Sigma a_i$ est supérieure à -1 (1).

9. Les résultats obtenus par Clausen (*Journal de Crelle*, t. 3, p. 89) se déduisent facilement des précédents. Considérons l'équation

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

et imaginons qu'on ait formé l'équation du troisième ordre $\varphi(z) = 0$ qui est vérifiée par le produit de deux intégrales quelconques de cette équation. Cette équation admettra les mêmes points critiques 0, 1, ∞ et les racines des équations fondamentales seront respectivement

Pour $x = 0$...........	0,	$1-\gamma$,	$2-2\gamma$,
Pour $x = 1$...........	0,	$\gamma-\alpha-\beta$,	$2\gamma-2\alpha-2\beta$,
Pour $x = \dfrac{1}{x'} = \infty$	2α,	$\alpha+\beta$,	2β;

pour que cette équation ait la forme (13), il faut que l'un des deux nombres $\gamma-\alpha-\beta$, $2\gamma-2\alpha-2\beta$ soit égal à l'unité. Comme on suppose que $\gamma-\alpha-\beta$ n'est pas un nombre entier, il faudra que l'on ait

$$\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}.$$

(1) DARBOUX, *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. IV, p. 13).

Cette condition est d'ailleurs suffisante et les quantités a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 seront ici

$$\begin{array}{ccc} 2\alpha, & \alpha+\beta, & 2\beta, \\ \gamma, & 2\gamma-1; & \end{array}$$

en comparant alors les intégrales qui appartiennent aux mêmes exposants dans le domaine du point $x=0$, on obtient les formules suivantes :

$$[F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x)]^2 = F\begin{pmatrix} 2\alpha, & \alpha+\beta, & 2\beta \\ \gamma, & 2\gamma-1, & x \end{pmatrix},$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, x) \times F(\tfrac{1}{2}-\alpha, \tfrac{1}{2}-\beta, 2-\gamma, x) = F\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \alpha+\frac{1}{2}-\beta, & \beta+\frac{1}{2}-\alpha \\ \gamma, & 2-\gamma, & x \end{pmatrix}.$$

Ce sont précisément les résultats trouvés par Clausen. J'aurai l'occasion de montrer, dans un prochain travail, comment on peut les généraliser.

10. Aux fonctions précédentes peuvent être rattachées des fonctions analogues aux transcendantes de Fourier et de Bessel. D'une manière générale, considérons une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable

$$u_0 + u_1 x + \ldots + u_m x^m + \ldots$$

et supposons que le rapport d'un terme au précédent soit une fonction rationnelle du rang de ce terme,

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{P(m)}{Q(m)}.$$

Trois cas peuvent se présenter :

1° Le numérateur est d'un degré supérieur au dénominateur. Alors la série est divergente pour toute valeur de x, sauf pour $x=0$.

2° Le numérateur et le dénominateur sont du même degré. Le rapport a une limite que l'on peut, par un changement linéaire de variable, supposer égale à l'unité; c'est le cas que nous venons d'étudier.

3° Le numérateur est d'un degré inférieur au dénominateur. La série est alors convergente pour toute valeur finie de x; elle définit une fonction holomorphe de cette variable dans toute l'étendue du plan, qui peut se réduire à un polynôme si la série est limitée.

Les transcendantes de Fourier fournissent les exemples les plus simples de ces dernières. On voit ainsi s'offrir une double série de fonctions dont les termes les plus simples sont, d'une part, la série du binôme et la série de Gauss, d'autre part, la fonction exponentielle et la série de Fourier. Ces dernières servent à intégrer une nouvelle classe d'équations linéaires à coefficients rationnels; ce sont les équations de la forme suivante :

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + (\mathrm{B} - \mathrm{A}x)x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots \\ & \quad + (\mathrm{K} - \mathrm{H}x)x\frac{d^2 y}{dx^2} + (\mathrm{M} - \mathrm{L}x)\frac{dy}{dx} - \mathrm{N}y = 0. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\begin{aligned} r(r-1)\ldots(r-n+1) + \mathrm{B}r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + \mathrm{M}r \qquad &= \psi(r), \\ \mathrm{A}r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{L}r + \mathrm{N} &= \varphi(r); \end{aligned}$$

en cherchant à déterminer une série

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{C}_m x^m$$

qui, mise à la place de y dans l'équation (14), rende le premier membre identiquement nul, on est conduit à la relation

$$\psi(m+1)\mathrm{C}_{m+1} - \mathrm{C}_m\varphi(m) = 0.$$

Si l'équation $\psi(r) = 0$ n'admet pour racine aucun nombre entier positif, l'équation (14) admettra l'intégrale

$$y = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(0)\varphi(1)\ldots\varphi(m-1)}{\psi(1)\ldots\psi(m)} x^m,$$

qui rentre bien dans la catégorie précédente.

Le seul point singulier à distance finie pour l'équation (14) est le point $x = 0$, et toutes les intégrales sont régulières dans le voisinage de ce point. L'équation fondamentale est précisément l'équation $\psi(r) = 0$. Si toutes ses racines sont distinctes et si la différence de deux quelconques d'entre elles n'est jamais égale à un nombre entier, en faisant la transformation

$$y = x^{r_i} z,$$

où r_i est l'une de ces racines, on obtiendra une équation en z de même forme que l'équation (14). Il suit de là que l'intégrale générale s'exprime au moyen de séries analogues à la première. Lorsque les racines de l'équation $\psi(r) = 0$ ne satisfont pas à la condition précédente, l'intégrale générale contiendra en général des logarithmes. Mais je n'aborderai point l'étude de ces cas particuliers.

Remarquons que, dans le rapport $\frac{\varphi(m)}{\psi(m+1)}$, le dénominateur est forcément de degré n, mais le numérateur peut être de degré inférieur à $n-1$. C'est donc d'après le degré du dénominateur que l'on doit classer ces fonctions.

De même que les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, les nouvelles séries peuvent, dans certains cas, être représentées par des intégrales multiples définies. Ainsi l'on a

$$\int_0^1 \int_0^1 u^{a_1-1} v^{a_2-1} (1-u)^{b_1-a_1-1} (1-v)^{b_2-a_2-1} e^{xuv} \, du \, dv$$
$$= \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1-a_1)\Gamma(b_2-a_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \, G\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \\ b_1, & b_2, & x \end{pmatrix},$$

en posant

$$G\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \\ b_1, & b_2, & x \end{pmatrix} = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(a_1.m)(a_2.m)}{(1.m)(b_1.m)(b_2.m)} x^m,$$

pourvu que les parties réelles des quantités a_1, a_2, $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ soient positives. Ceci conduit à regarder les nouvelles séries comme des cas limites des séries hypergéométriques. Ainsi la série précédente peut être considérée comme la limite de

$$F\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & \dfrac{x}{a_3} \end{pmatrix},$$

lorsque le module de a_3 augmente indéfiniment.