ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ELLIOT

Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ, seconde partie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 11 (1882), p. 425-436

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__425_0>

PROPRIÉTÉS

ET

APPLICATIONS DE CERTAINES FONCTIONS

ANALOGUES A LA FONCTION Θ,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

SECONDE PARTIE.

Équations différentielles.

25. Considérons, avec les p intégrales normales de première espèce, un système de q intégrales normales de troisième espèce et de r intégrales normales de seconde espèce. On pourra représenter ces intégrales par les expressions

$$u^{(i)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\varphi_i(x, y)}{F'_y(x, y)}\, dx,$$

$$v^{(k)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\psi_k(x, y)}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]\, F'_y(x, y)}\, dx,$$

$$w^{(h)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\chi_h(x, y)}{[\zeta^{(h)}]\, F'_y(x, y)}\, dx,$$

φ_i, ψ_k et χ_h étant des polynômes ayant les mêmes degrés et les mêmes propriétés que ceux du n° **20**. Considérons le système suivant de $p+q+r$ équations différentielles :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{j=p+q+r} \frac{\varphi_i(x_j, y_j)}{F'_y(x_j, y_j)}\, dx_j = du_i && (i = 1, 2, \ldots, p),\\
&\sum_{j=1}^{j=p+q+r} \frac{\psi_k(x_j, y_j)}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]_j\, F'_y(x_j, y_j)}\, dx_j = dv_k && (k = 1, 2, \ldots, q),\\
&\sum_{j=1}^{j=p+q+r} \frac{\chi_h(x_j, y_j)}{[\zeta_h]_j\, F'_y(x_j, y_j)}\, dx_j = dw_h && (h = 1, 2, \ldots, r).
\end{aligned}
\right.
$$

L'indice j de $[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]$ et de $[\zeta^{(h)}]$ signifie que l'on a remplacé x et y par x_j, y_j dans les fonctions linéaires que représentent ces symboles. Nous regarderons dans les équations (1) les x_j comme fonctions des $p+q+r$ quantités u_i, v_k, w_h. En appelant $x_j^{(0)}$ les valeurs initiales des x_j pour les valeurs initiales $u_i^{(0)}$, $v_k^{(0)}$, $w_h^{(0)}$ des variables, le système (1) peut s'écrire

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{j=p+q+r} [u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(x_j^{(0)})] = u_i - u_i^{(0)},\\
&\sum_{j=1}^{j=p+q+r} [v^{(k)}(x_j) - v^{(k)}(x_j^{(0)})] = v_k - v_k^{(0)},\\
&\sum_{j=1}^{j=p+q+r} [w^{(h)}(x_j) - w^{(h)}(x_j^{(0)})] = w_h - w_h^{(0)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, dans les équations (1), on regarde u_i, v_k, w_h comme fonctions des x_j, les conditions d'intégrabilité sont évidemment satisfaites, puisque le coefficient de dx_j ne contient que la variable x_j. On en conclut que, réciproquement, l'on peut considérer les x_j comme fonctions des u_i, v_k, w_h, et, d'après un théorème de M. Bouquet, ces fonctions resteront holomorphes tant que les coefficients différentiels seront eux-mêmes holomorphes par rapport aux x_j. Pour avoir ces coefficients, il faut résoudre les équations (1) par rapport aux dx_j. Le dénominateur commun est le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1, y_1) & \varphi_1(x_2, y_2) & \cdots & \varphi_1(x_{p+q+r}, y_{p+q+r}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_p(x_1, y_1) & \varphi_p(x_2, y_2) & \cdots & \varphi_p(x_{p+q+r}, y_{p+q+r}) \\ \dfrac{\psi_1(x_1, y_1)}{[\xi^{(1)}, \eta^{(1)}]_1} & \dfrac{\psi_1(x_2, y_2)}{[\xi^{(1)}, \eta^{(1)}]_2} & \cdots & \dfrac{\psi_1(x_{p+q+r}, y_{p+q+r})}{[\xi^{(1)}, \eta^{(1)}]_{p+q+r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\psi_q(x_1, y_1)}{[\xi^{(q)}, \eta^{(q)}]_1} & \dfrac{\psi_q(x_2, y_2)}{[\xi^{(q)}, \eta^{(q)}]_2} & \cdots & \dfrac{\psi_q(x_{p+q+r}, y_{p+q+r})}{[\xi^{(q)}, \eta^{(q)}]_{p+q+r}} \\ \dfrac{\chi_1(x_1, y_1)}{[\zeta^{(1)}]_1} & \dfrac{\chi_1(x_2, y_2)}{[\zeta^{(1)}]_2} & \cdots & \dfrac{\chi_1(x_{p+q+r}, y_{p+q+r})}{[\zeta^{(1)}]_{p+q+r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\chi_r(x_1, y_1)}{[\zeta^{(r)}]_1} & \dfrac{\chi_r(x_2, y_2)}{[\zeta^{(r)}]_2} & \cdots & \dfrac{\chi_r(x_{p+q+r}, y_{p+q+r})}{[\zeta^{(r)}]_{p+q+r}} \end{vmatrix}$$

divisé par le produit $\prod_{j=1}^{j=p+q+r} F'_y(x_j, y_j)$. Appelons Δ_{ij} le mineur obtenu, en supprimant dans Δ la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, on aura

$$dx_j = (-1)^j F'_y(x_j, y_j) \left[\sum_{i=1}^{i=p} (-1)^i \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} du_i + \sum_{k=1}^{k=q} (-1)^{p+k} \frac{\Delta_{p+k,j}}{\Delta} dv_k \right.$$
$$\left. + \sum_{h=1}^{h=r} (-1)^{p+q+h} \frac{\Delta_{p+q+h,j}}{\Delta} dw_h \right].$$

Les coefficients différentiels ne peuvent cesser d'être holomorphes que si les fonctions x_j acquièrent des valeurs annulant Δ, ou bien si l'une ou plusieurs d'entre elles coïncident avec des points situés sur les droites $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$, $(\zeta^{(h)})$, Δ devenant alors infini en même temps que Δ_{ij}, ..., ou bien, enfin, si l'une ou plusieurs d'entre elles deviennent infinies.

26. Le déterminant Δ s'annule quand un certain nombre de points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... coïncident. Supposons que les n points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) coïncident avec un point (a, b), que nous supposerons d'abord un point simple de $F(x, y) = 0$ non situé sur les droites $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$, $(\zeta^{(h)})$. Posons

$$x_s = a + x'_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

et considérons les fonctions symétriques

$$z_1 = \sum_{s=1}^{s=n} x'_s, \quad z_2 = \sum_{s=1}^{s=n} x'^2_s, \quad \ldots, \quad z_n = \sum_{s=1}^{s=n} x'^n_s,$$

d'où l'on déduit

$$dz_t = t \sum_{s=1}^{s=n} x'^{t-1}_s \, dx'_s.$$

Posons, en outre,

$$N_i^{(t)} = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s+i} t x'^{t-1}_s F'_y(x_s, y_s) \Delta_{i,s},$$

$$N_k^{(t)} = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s+p+k} t x'^{t-1}_s F'_y(x_s, y_s) \Delta_{p+k,s},$$

$$N_h^{(t)} = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s+p+q+h} t x'^{t-1}_s F'_y(x_s, y_s) \Delta_{p+q+h,s};$$

on aura

$$dz_t = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{N_i^{(t)}}{\Delta} du_i + \sum_{k=1}^{k=q} \frac{N_k^{(t)}}{\Delta} dv_k + \sum_{h=1}^{h=r} \frac{N_h^{(t)}}{\Delta} dw^h, \tag{3}$$

et l'on pourra, dans le système des équations (1), remplacer les n premières par les équations (3), où t a les valeurs 1, 2, ..., n. Les $p+q+r$ fonctions seront alors $z_1, \ldots, z_n, x_{n+1}, \ldots, x_{p+q+r}$. Les n racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant voisines d'une même racine simple de l'équation $F(x, y) = 0$ sont représentées par une même série

$$y_j = b + b' x'_j + b'' x'^2_j + \ldots \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Après la substitution de ces valeurs, le déterminant Δ devient une fonction alternée de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, et son numérateur est divisible par le produit des facteurs binômes obtenus en faisant la différence de deux quelconques de ces quantités. Le quotient est une fonction symétrique de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, et, par suite, une fonction rationnelle de z_1,

$z_2, \ldots, z_n$. Ce quotient ne s'annule pas en général avec les quantités $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; il conserve d'ailleurs une valeur finie pour de petites valeurs de ces variables.

Le déterminant mineur $\mathrm{N}_i^{(t)}$ se déduit de Δ en remplaçant les n premiers termes de la $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale par les quantités

$$t x_1'^{t-1}\,\mathrm{F}'_y(x_1, y_1),\quad \ldots,\quad t x_n'^{t-1}\,\mathrm{F}'_y(x_n, y_n),$$

et les autres par zéro. Après la substitution, il deviendra une fonction alternée de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, divisible par le même produit de facteurs binômes que précédemment. En supprimant ces facteurs, le coefficient de du_i dans dz_t deviendra une fonction holomorphe de $z_1, \ldots, z_n$, $x_{n+1}, \ldots, x_{p+q+r}$ pour de petites valeurs de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. On en conclut que les fonctions $z_1, \ldots, z_n, x_{n+1}, \ldots, x_{p+q+r}$ restent holomorphes dans le voisinage des valeurs considérées, et que les fonctions intégrales x_1, $x_2, \ldots, x_n$ se permutent entre elles comme les racines d'une équation algébrique (¹).

27. Supposons que les n points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, n pouvant être l'unité, coïncident avec un point (a, b), situé sur la droite $(\xi^{(g)}, \eta^{(g)})$. Le déterminant Δ, développé par rapport aux éléments de la $p+g^{\text{ième}}$ ligne horizontale, a ses n premiers termes infinis et du premier ordre. Après avoir posé, comme précédemment,

$$x_1 = a + x'_1,\quad \ldots,\quad x_n = a + x'_n,$$

et remplacé les y par leur développement en série relatif à la branche de courbe qui contient le point simple (a, b), les dénominateurs des n termes de Δ, dont il a été question, contiendront en facteurs le premier x'_1, le second $x'_2, \ldots$, le $n^{\text{ième}}$ x'_n. En développant maintenant le déterminant $\mathrm{N}_i^{(t)}$ par rapport à la $p+g^{\text{ième}}$ ligne horizontale; le dénominateur des n premiers termes contiendront aussi respectivement les facteurs x'_1, x'_2, x'_n,. On voit, en chassant les dénominateurs, que le coefficient de du_i est une fraction qui reste finie. Il en est de même du coefficient de dw_h et de celui de dv_k si k est différent de g. Pour $k=g$, le déterminant $\mathrm{N}_g^{(t)}$ ne devient pas infini, et Δ est infini, en sorte que le

(¹) *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 90.

coefficient de dv_g est nul. Si n est différent de 1, on continuera la démonstration comme dans le cas précédent, en introduisant au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Les coefficients de du_i, dv_k, dw_h dans la différentielle dz_t seront des fonctions rationnelles en $z_1, \ldots, z_n, x_{n+1}, \ldots, x_{p+q+r}$, holomorphes pour de petites valeurs des variables z. Dans cette nouvelle hypothèse, un certain nombre de fonctions intégrales peuvent se permuter.

Il n'y a évidemment rien à changer au raisonnement, si le point (a, b) est sur une droite $(\zeta^{(h)})$, à moins qu'il ne soit au point de contact, auquel cas les termes qui étaient infinis du premier ordre sont infinis du second ordre; mais, comme cette modification se présente à la fois au numérateur et au dénominateur des coefficients de du_i, dv_k, dw_h, on arrive à la même conclusion.

28. Supposons que les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ coïncident avec un point critique (a, b) de $F(x, y) = 0$. Si les racines $y_1, \ldots, y_n$ appartiennent à un même système circulaire de p racines, on sait que l'on peut déterminer les constantes $b', b'', \ldots$, et les exposants $q_1, q_2, \ldots, q_s$ de façon qu'en posant

$$x = a + x'^p, \quad y = b + b' x'^{q_1} + b'' x'^{q_2} + \ldots + y' x'^{q_s},$$

y' soit une fonction holomorphe de x' pour de petites valeurs de cette variable. Par cette substitution, les coefficients différentiels des intégrales des trois espèces deviendront

$$\frac{p\,\varphi_i^{(s)}(x', y')}{F_{y'}^{(s)\prime}(x', y')}\,dx',$$

$$\frac{p\,\psi_k^{(s)}(x, y')}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]^{(s)}\,F_{y'}^{(s)\prime}(x', y')}\,dx',$$

$$\frac{p\,\chi_h^{(s)}(x', y')}{[\zeta^{(h)}]^{(s)}\,F_{y'}^{(s)\prime}(x', y')}\,dx'.$$

L'indice s de $[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]$ et de $[\zeta^{(h)}]$ indique ce que deviennent ces fonctions linéaires par la substitution. Les nouvelles expressions ne sont plus linéaires en x' et y'; mais elles ne s'annulent pas pour de petites valeurs de x', puisque par hypothèse le point (a, b) n'est pas sur les droites $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$, $(\zeta^{(h)})$. On peut répéter alors le raisonnement précédent; les deux termes de chaque coefficient dans l'expression de la différentielle dz_t sont toujours des fonctions alternées ayant un facteur commun que l'on pourra supprimer.

On fera une seconde substitution analogue si un second groupe de n' points vient coïncider avec le point critique (a, b), les n' racines $y_{n+1}, \ldots, y_{n+n'}$ appartenant à un autre système circulaire.

Enfin, si une ou plusieurs des fonctions x_j deviennent infinies, on effectuera pour ces fonctions la transformation $x = \frac{1}{x'}$.

29. Le déterminant Δ peut aussi s'annuler sans que deux des points (x_j, y_j) coïncident. Il suffit que les $p+q+r$ points soient situés sur une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ (n° 20). Appelons (a_j, b_j) les $p+q+r$ points dans cette hypothèse; la courbe adjointe qui les contient rencontre encore la courbe $F(x, y) = 0$ en $p+q+r-2$ autres points (a'_j, b'_j), et l'on aura

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(a_j) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) = \Gamma_i,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(a_j) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j) = \Delta_k,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(a_j) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j) = \varepsilon_h.$$

Soient $\overline{u}_i$, $\overline{v}_k$, $\overline{w}_h$ les valeurs des variables u_i, v_k, w_h dans le cas particulier dont nous nous occupons. Les équations (2) pourront s'écrire

$$\overline{u}_i - u_i^{(0)} = \Gamma_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j^{(0)}),$$

$$\overline{v}_k - v_k^{(0)} = \Delta_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j^{(0)}),$$

$$\overline{w}_h - w_h^{(0)} = \varepsilon_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j^{(0)}),$$

ou plus simplement, en supposant que les variables u_i, v_k, w_h soient nulles quand les points (x_j, y_j) coïncident tous avec l'origine (x_0, y_0) des intégrales

$$\overline{u}_i = \Gamma_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j),$$

$$\overline{v}_k = \Delta_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j),$$

$$\overline{w}_h = \varepsilon_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j).$$

On voit ainsi que les quantités u_i, v_k, w_h conservent la même valeur quand les courbes adjointes du degré $m+q+r-3$ passent par les $p+q+r-2$ points (a'_j, b'_j). Donc à un système déterminé de valeurs de ces quantités répondent une infinité de systèmes de $p+q+r$ points qui se déplacent sur la courbe $F(x,y)=0$, en restant sur une courbe adjointe d'ordre $m+q+r-3$.

30. Il résulte des considérations précédentes que toute fonction rationnelle et symétrique des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{h+q+r}$ est une fonction méromorphe des $p+q+r$ variables indépendantes u_i, v_k, w_h, à l'exception du cas d'indétermination dont il vient d'être question. On peut la regarder comme une fonction abélienne de ces variables admettant un système de $2p+q$ périodes; la fonction ne changera pas si l'on augmente simultanément toutes les variables de multiples quelconques des quantités contenues dans une même colonne verticale du tableau suivant

$2\pi\sqrt{-1}$	0	...	0	$2\alpha_{11}$	...	$2\alpha_{1p}$	0	0	...	0
0	$2\pi\sqrt{-1}$	...	0	$2\alpha_{21}$	...	$2\alpha_{2p}$	0	0	...	0
.	....	...	.	....	...	....	.	.	...	.
0	0	...	$2\pi\sqrt{-1}$	$2\alpha_{p1}$	...	$2\alpha_{pp}$	0	0	...	0
0	0	...	0	$2A_{11}$	...	$2A_{1p}$	$2\pi\sqrt{-1}$	0	...	0
.	.	...	.	....	...	....	....	.	...	.
0	0	...	0	$2A_{q1}$	...	$2A_{qp}$	0	0	...	$2\pi\sqrt{-1}$
0	0	...	0	a_{11}	...	a_{1q}	0	0	...	0

Soit la fonction rationnelle $z = \frac{\Psi(x, y)}{\Phi(x, y)}$; nous pouvons ramener la recherche des quantités x_j, y_j à celle des fonctions symétriques

$$\begin{aligned}
M_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + \ldots.\\
M_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots,\\
\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
M_{p+q+r} &= z_1 z_2 \ldots z_{p+q+r},
\end{aligned}$$

lesquelles s'obtiendront de la façon suivante.

Supposons que dans le théorème IX on regarde les points $(x_1 y_1)$, ..., (x_{p+q+r}, y_{p+q+r}) qui sont complètement arbitraires comme étant ceux qui satisfont aux équations différentielles simultanées (1), la fonction V deviendra, en tenant compte de ces équations, une fonction des $p + q + r$ variables indépendantes u_i, v_k, w_h, et l'équation (29), qui fournit une relation entre les points (x_1, y_1), ..., (x_{p+q+r}, y_{p+q+r}) et cette fonction V, renferme la solution du problème.

Pour avoir un nombre suffisant de relations, nous supposerons que la courbe $\Psi = 0$ soit remplacée par $\Phi + \lambda\Psi = 0$, en sorte que les points (α_l, β_l) dépendent de cette constante arbitraire λ. On aura ainsi

$$V(u_i, v_k, w_h) = \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\Theta^{(q)}_{(r)}[u_i - u^{(i)}(\alpha_l) - C_i, \ldots]}{\Theta^{(q)}_{(r)}[u_i - u^{(i)}(\alpha_l) - C_i, \ldots]},$$

$$P = \prod_{j=1}^{j=p+q+r} \left[1 + \lambda \frac{\Psi(x_j, y_j)}{\Phi(x_j, y_j)}\right],$$

$$C = \frac{V(0, 0, 0)}{\left[1 + \lambda \frac{\Psi(x_0, y_0)}{\Phi(x_0, y_0)}\right]^{p+q+r}}.$$

La fonction P ordonnée par rapport aux puissantes croissantes de λ a précisément pour coefficients les fonctions symétriques M_1, M_2, ..., M_{p+q+r}. Si l'on donne à λ $p + q + r$ valeurs différentes, on obtiendra $p + q + r$ équations du premier degré qui permettront d'exprimer ces quantités par des fonctions linéaires des $p + q + r$ fonctions $V(u_i, v_k, w_h)$ répondant aux valeurs attribuées à λ.

Cas d'indétermination.

31. Nous avons vu qu'il y a indétermination dans la résolution des équations abéliennes quand les variables ont les valeurs

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{u}_i &= 2\,C_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j),\\ \overline{v}_k &= 2\,D_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j),\\ \overline{w}_h &= 2\,E_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j).\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, on sait, par le théorème fondamental sur les zéros, que les $p+q+r$ zéros de la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(x)-G_i, v^{(k)}(x)-g_k, w^{(h)}(x)-\gamma_h]$ sont les points (x_j, y_j) constituant le système intégral des équations abéliennes où les variables des seconds membres u_i, v_k, w_h ont les valeurs G_i+C_i, g_k+D_k, γ_h+E_h. Il en résulte que ces zéros ne sont plus déterminés quand on donne aux constantes les valeurs

$$\begin{aligned} G_i &= C_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j),\\ g_k &= D_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j),\\ \gamma_h &= E_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j).\end{aligned}$$

Or la fonction $\Theta_{(r)}^{(q)}$ devient, dans ce cas,

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[u^{(i)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - C_i, \ \ldots\right],$$

et, d'après le théorème V, elle est identiquement nulle.

De là nous pouvons conclure que la fonction $V(u_i, v_k, w_h)$ est indéterminée quand les variables ont les valeurs (4); car, prenant le quotient des fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$ qui entrent dans la fonction V et qui répondent à la même valeur de l, on aura, pour les deux termes de ce quotient, les expressions

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[C_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - u^{(i)}(\alpha_l), \;\ldots\right],$$

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[C_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - u^{(i)}(\alpha_l) \;\ldots\right],$$

qui sont nulles toutes les deux.

Interprétation géométrique.

32. On sait que le problème de l'inversion de Jacobi revient géométriquement à chercher les p points d'intersection de la courbe fondamentale $F(x,y)=0$, avec une courbe de degré supérieur à $m-3$, qui satisfait à toutes les conditions relatives aux points critiques, et que l'on assujettit en outre à passer par un nombre de points de $F(x,y)=0$ suffisant pour la déterminer. On peut donner du problème plus général dont il a été question dans ce travail une interprétation analogue en se servant de courbes adjointes d'ordre supérieur à $m+q+r-3$; nous prendrons des courbes de l'ordre $m+q+r-2$.

Remarquons d'abord que la méthode employée au n° **20** pour déterminer le nombre des points de la courbe $F(x,y)=0$ par lesquels on doit faire passer une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$, afin de la déterminer conduirait à un nombre trop élevé pour des courbes d'un ordre quelconque n. Les points communs aux deux courbes $F(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$ restent les mêmes si l'on remplace la seconde équation par $\Phi(x,y)+f(x,y)\,F(x,y)=0$, f étant un polynôme du degré $n-m$, dont les coefficients sont arbitraires. Mais les courbes considérées dont l'une est $\Phi(x,y)=0$, étant adjointes et passant par conséquent par $\frac{1}{2}(q+r)(q+r-1)$ points situés en dehors de la courbe $F(x,y)=0$, il faut que la courbe $f(x,y)=0$ passe aussi par ces points, et le nombre des paramètres de la fonction $f(x,y)$ ne suffira que si l'on a

$$(n-m+1)(n-m+2) \geqq (q+r)(q+r-1),$$

ou bien

$$(n-m-q-r+2)(n-m+q+r+1) \geqq 0.$$

Cette condition n'est pas remplie pour des courbes du degré $m+q+r-3$. Quand le degré n est égal à $m+q+r-2$, on peut ou non employer la fonction $f(x,y)$ sans changer le nombre des conditions. Le nombre des points de $F(x,y)=0$ par lesquels on doit faire passer une courbe adjointe du degré $m+q+r-2$ pour la déterminer est

$$\tfrac{1}{2}(m+q+r-2)(m+q+r+1)-A-\tfrac{1}{2}(q+r)(q+r-1)-(m-2)(q+r),$$

ou, en remplaçant A par sa valeur,

$$p+2q+2r+m-2.$$

Le nombre des points d'intersection avec la courbe $F(x,y)=0$, qui se trouvent ainsi déterminés par les autres, est

$$m(m+q+r-2)-2A-(m-2)(q+r)-(p+2q+2r+m-2)=p.$$

Supposons maintenant que l'on choisisse $q+r$ des $p+2q+2r+m-2$ points en dehors de la courbe $F(x,y)=0$; il est clair que $p+q+r$ points seront déterminés par les autres.

Le théorème d'Abel fournit pour la recherche de ces points $p+q+r$ équations dont les p premières coïncident avec les équations (1). Il n'en est pas de même des $q+r$ autres, à cause du logarithme ou de la fonction algébrique qu'introduit ce théorème. Mais ces quantités disparaîtront (n° **21**), si l'on choisit les $q+r$ points que l'on doit prendre en dehors de la courbe $F(x,y)=0$, respectivement sur chacune des $q+r$ droites $(\xi^{(h)}, \eta^{(h)}), (\zeta^{(h)})$. Donc la résolution des équations différentielles (1) revient au problème suivant : *Trouver les $p+q+r$ points d'intersection avec $F(x,y)=0$ d'une courbe adjointe du degré $m+q+r-2$ passant par $p+q+r+m-2$ points de $F(x,y)=0$ et par $q+r$ points situés respectivement sur chacune des droites $(\xi^{(h)}, \eta^{(h)})$, $(\zeta^{(h)})$, en dehors de la courbe.*

FIN DU TOME ONZIÈME.