ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD GOURSAT

Sur l'équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 10 (1881), p. 3-142 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1881_2_10__S3_0>

SUR

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

QUI ADMET POUR INTÉGRALE

LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE,

PAR M. ÉDOUARD GOURSAT,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

1. La série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, considérée comme fonction de son quatrième élément x, n'est définie que pour les valeurs de la variable d'un module inférieur à l'unité. Pour la définir pour des valeurs quelconques de x, on doit la considérer comme une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre; la question revient à trouver ce que devient cette intégrale quand le chemin suivi par la variable aboutit à un point situé en dehors du cercle de rayon 1 décrit de l'origine comme centre. Par une généralisation qui s'offre d'elle-même, on est alors conduit à se poser le même problème pour une intégrale quelconque de cette équation, le chemin suivi par la variable étant simplement assujetti à ne passer par aucun des points critiques qu'elle présente.

Cette équation célèbre, étudiée par Gauss (1) et Kummer (2), admet,

(1) *Œuvres complètes*, t. III, p. 207.

(2) *Journal de Crelle*, t. XV, p. 39.

comme l'a montré ce dernier, vingt-quatre intégrales de la forme

$$x^p(1-x)^q\,F(\alpha',\beta',\gamma',z),$$

où z est l'une des variables x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x-1}{x}$, pourvu qu'aucun des nombres γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$ ne soit un nombre entier. Dans le même travail, Kummer a donné les relations linéaires à coefficients constants qui existent entre trois quelconques de ces intégrales; mais, cet éminent géomètre s'étant placé uniquement au point de vue des valeurs réelles de la variable, les formules qu'il a obtenues présentent quelques difficultés quand on veut passer aux applications, d'autant plus qu'il n'a pas toujours précisé suffisamment le sens de ses intégrales.

Supposons, en effet, qu'on veuille passer d'une valeur de x réelle, positive et inférieure à l'unité, à une valeur de x réelle, positive et supérieure à l'unité; cela ne pourra se faire en attribuant à la variable une suite de valeurs toutes réelles, puisqu'on ne peut passer par le point $x=1$, qui est un point critique pour l'équation différentielle. Il faudra donc attribuer à x une suite de valeurs imaginaires, ce que l'on pourra faire d'une infinité de manières, et, la valeur finale de la fonction dépendant essentiellement de la loi de succession des valeurs de la variable, on voit qu'il est nécessaire, pour l'objet que l'on se propose, d'introduire la considération des valeurs imaginaires dans l'équation différentielle.

La théorie générale de cette équation, quand on n'apporte ainsi aucune restriction aux valeurs de la variable, n'a pas été faite jusqu'ici d'une manière complète, du moins à ma connaissance. Je dois rappeler cependant que M. Tannery (1) a montré qu'en appliquant les principes posés par M. Fuchs (2) pour la théorie des équations différentielles linéaires on retrouvait les intégrales de Kummer; dans un autre Mémoire (3), il a déterminé les relations linéaires entre les intégrales pour un exemple numérique, déjà étudié par M. Fuchs (4). Les résultats obtenus concordent avec ceux que l'on déduit du cas général.

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IV, p. 113.
(2) *Journal de Crelle*, t. LXVI, p. 121.
(3) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VIII, p. 169.
(4) *Journal de Crelle*, t. LXXI, p. 91.

2. Dans la première Partie de ce travail, je développe d'abord une méthode due à Jacobi ([1]) pour retrouver les vingt-quatre intégrales de l'équation différentielle quand aucun des nombres γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$ n'est un nombre entier; puis, par l'application du théorème de Cauchy aux intégrales définies qui représentent les séries hypergéométriques, j'obtiens les relations elles-mêmes entre ces intégrales. Si, parmi les nombres γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$, il se trouve un ou plusieurs nombres entiers, il y a un changement de forme analytique pour certaines intégrales; on obtient les intégrales nouvelles par un procédé d'un usage fréquent en Mathématiques, surtout dans l'étude des équations différentielles. Je termine en recherchant les conditions que doivent remplir les éléments α, β, γ pour que l'intégrale générale soit algébrique. Je suis conduit à une représentation géométrique identique à celle que M. Schwarz ([2]) avait déjà trouvée, en partant de principes tout différents.

La seconde Partie est consacrée à la recherche des transformations que l'on peut faire subir à la série hypergéométrique lorsque, des trois éléments α, β, γ, deux seulement, ou même un seul, restent arbitraires. Je parviens à déterminer toutes les transformations d'une forme très générale, qui comprend toutes les transformations indiquées par Kummer ([3]), et un certain nombre d'autres, que je crois nouvelles. Je donne ensuite quelques-unes des nombreuses formules que l'on peut en déduire.

Je suppose connus les principes relatifs à la théorie des équations différentielles linéaires, me contentant de renvoyer au Mémoire déjà cité de M. Tannery ([4]).

([1]) *Journal de Crelle*, t. LVI, p. 149.
([2]) *Id.*, t. LXXV, p. 292.
([3]) *Id.*, t. XV, p. 64 et 127.
([4]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IV, p. 113.

PREMIÈRE PARTIE.

3. On sait, depuis Euler, que l'intégrale définie

$$y = \int_0^1 V\,du,$$

où

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha},$$

si elle a un sens, vérifie l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0. \tag{1}$$

Pour le démontrer, il suffit simplement de remplacer dans le premier membre de notre équation y, y', y'' par leurs valeurs. Le résultat est évidemment

$$\int_0^1 \left\{ x(1-x)\frac{d^2V}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dV}{dx} - \alpha\beta V \right\} du.$$

Or il est facile de s'assurer que la fonction sous le signe d'intégration n'est autre que

$$-\alpha\frac{d}{du}\left[\frac{u(1-u)}{1-xu}V\right].$$

Le résultat de la substitution sera donc $-\alpha\left[\frac{u(1-u)}{1-xu}V\right]_0^1$, résultat identiquement nul, puisque nous supposons que l'intégrale $\int_0^1 V\,du$ a un sens.

D'une manière générale, considérons l'intégrale définie

$$y = \int_g^h V\,du,$$

où g et h sont des quantités constantes. Si nous portons cette valeur de y dans le premier membre de l'équation (1), nous trouvons comme résultat

$$-\alpha\left[\frac{u(1-u)}{1-xu}\mathrm{V}\right]_g^h.$$

Pour que ce résultat soit nul, il suffit de prendre pour g et h l'une quelconque des valeurs 0, 1, $\pm\infty$, pourvu, bien entendu, que l'intégrale correspondante ait un sens. Il résulte de là que chacune des trois intégrales définies

$$y=\int_0^1 \mathrm{V}\,du,\quad y=\int_{-\infty}^0 \mathrm{V}\,du,\quad y=\int_1^{+\infty} \mathrm{V}\,du,$$

si elle a un sens, satisfait à l'équation différentielle proposée.

Considérons maintenant avec Jacobi l'intégrale définie

$$y=\int_g^{\frac{\varepsilon}{x}} \mathrm{V}\,du,$$

où g et ε sont des constantes, et remplaçons, comme tout à l'heure, y, y', y'' par leurs valeurs dans le premier membre de l'équation (1). Après quelques réductions faciles, le résultat peut s'écrire

$$-(\gamma-\beta-1)\varepsilon^\beta(1-\varepsilon)^{1-\alpha}x^{1-\gamma}(x-\varepsilon)^{\gamma-\beta-1}+\alpha g^\beta(1-g)^{\gamma-\beta}(1-xg)^{-\alpha-1}.$$

Si l'on prend pour ε la valeur $\varepsilon=1$ et pour g l'une des valeurs 0, 1, $+\infty$, le résultat sera nul, pourvu que $1-\alpha$ ait sa partie réelle positive et que le produit $u^\beta(1-u)^{\gamma-\beta}(1-xu)^{-\alpha-1}$ soit nul pour la limite $u=g$, c'est-à-dire pourvu que l'intégrale $y=\int_g^{\frac{1}{x}} \mathrm{V}\,du$ ait un sens.

On a donc en tout six fonctions représentées par des intégrales définies qui vérifient l'équation (1). On trouvera ci-après le Tableau de ces six intégrales, avec les conditions que doivent remplir les quantités α, β, γ pour que ces intégrales aient un sens (l'inégalité $\mathrm{A}>0$ indique simplement que la partie réelle de A est positive).

$$(1)\qquad y=\int_0^1 V\,du\ldots\ldots\qquad \beta>0 \qquad \gamma-\beta>0$$

$$(2)\qquad y=\int_0^{-\infty} V\,du\ldots\ldots\qquad \beta>0 \qquad \alpha+1-\gamma>0$$

$$(3)\qquad y=\int_1^{+\infty} V\,du\ldots\ldots\qquad \gamma-\beta>0 \qquad \alpha+1-\gamma>0$$

$$(4)\qquad y=\int_0^{\frac{1}{x}} V\,du\ldots\ldots\qquad \beta>0 \qquad 1-\alpha>0$$

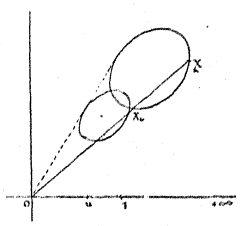
$$(5)\qquad y=\int_1^{\frac{1}{x}} V\,du\ldots\ldots\qquad \gamma-\beta>0 \qquad 1-\alpha>0$$

$$(6)\qquad y=\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} V\,du\ldots\ldots\qquad \alpha+1-\gamma>0 \qquad 1-\alpha>0$$

4. Avant d'aller plus loin, il importe, pour la suite, de bien préciser quelle est celle des valeurs de la fonction V que l'on prend dans l'intégration et aussi d'étudier de plus près les propriétés des fonctions représentées par ces intégrales définies.

5. L'intégrale $y=\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du$ a un sens, pourvu que les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$ soient positives, et en outre pourvu que x n'ait pas une valeur réelle supérieure à l'unité. On pren-

Fig. 1.



dra cette intégrale suivant le chemin rectiligne o-1 (*fig.* 1); pour arguments de u et $1-u$ on prendra 0, et pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $u=0$.

La fonction y ainsi définie est une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan, à condition que le chemin suivi par la variable ne coupe pas la ligne —— $+\infty$. Faisons décrire au point x une courbe fermée ne coupant pas cette ligne; le point xu, correspondant à une valeur de u comprise entre 0 et 1, décrira une courbe fermée homothétique à la précédente et laissant le point 1 à l'extérieur. L'argument de $1 - xu$ reprendra donc sa valeur initiale; il en sera de même de l'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de u, et par suite de l'intégrale elle-même.

Il résulte de ce qui précède que la fonction y pourra, à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité décrit de l'origine comme centre, être développée en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable.

Le coefficient de x^m dans ce développement sera

$$\frac{\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_0}{1.2\ldots m} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\int_0^1 u^{\beta+m-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du,$$

ou

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\Gamma(\beta+m)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+m)},$$

ou encore

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}\,\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Pour toute valeur de x de module inférieur à l'unité, on aura donc

$$\int_0^1 V\,du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\,F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

L'intégrale précédente est susceptible de trois autres formes semblables, que l'on obtient au moyen des changements de variable suivants, indiqués par Jacobi :

$$u = 1 - v,$$

$$u = \frac{v}{1 - x + vx},$$

$$u = \frac{1 - v}{1 - vx}.$$

Par la première substitution, $\int_0^1 \mathrm{V}\,du$ se change en

$$(1-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}v\right)^{-\alpha}dv.$$

Cette dernière intégrale est prise suivant le même chemin que la première. Si l'on fait sur les arguments de v, $1-v$, $1-\frac{x}{x-1}v$ les mêmes conventions que tout à l'heure, il faudra, pour que les deux intégrales soient identiques, prendre pour argument de $1-x$ celui qui est nul pour $x=0$. On aura alors

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du$$
$$=(1-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}v\right)^{-\alpha}dv.$$

Faisons la seconde transformation :

$$u=\frac{v}{1-x+vx}.$$

L'intégrale devient $(1-x)^{-\beta}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}v\right)^{-(\gamma-\alpha)}dv.$ Cette dernière intégrale est prise le long d'un arc de cercle $o\mathrm{M}1$; mais il est facile de s'assurer que l'aire comprise entre cet arc de cercle et la ligne $o\text{-}1$ ne contient pas le point $\frac{x-1}{x}$, qui est un point critique pour la nouvelle fonction sous le signe d'intégration. En effet, à la valeur $v=\frac{x-1}{x}$ correspond pour u la valeur $u=+\infty$; le point A qui figure $\frac{x-1}{x}$ doit donc appartenir à la circonférence dont fait partie l'arc $o\mathrm{M}1$. On pourra, par conséquent, prendre la seconde intégrale suivant le chemin rectiligne $o\text{-}1$ et, en faisant sur les arguments les mêmes conventions que tout à l'heure, on pourra écrire

$$\int_0^1 \mathrm{V}\,du=(1-x)^{-\beta}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}v\right)^{-(\gamma-\alpha)}dv.$$

La transformation $u = \frac{1 - v}{1 - vx}$ donnerait de même

$$\int_0^1 \mathrm{V}\,du = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}(1-vx)^{-(\gamma-\alpha)}\,dv.$$

Chacune des nouvelles intégrales peut à son tour être développée en série pour des valeurs de la variable comprises entre certaines limites. Ainsi, pour des valeurs de x de module inférieur à l'unité, on a

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}(1-vx)^{-(\gamma-\alpha)}\,dv$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{F}(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$

De même, pour des valeurs de x telles que mod. $\left(\frac{x}{x-1}\right) < 1$,

$$(1-x)^{-\alpha} \int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\beta-1}\left(1 - \frac{x}{x-1}v\right)^{-}\,dv$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}(1-x)^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),$$

$$(1-x)^{-\beta} \int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1 - \frac{x}{x-1}v\right)^{-(\gamma-\alpha)}\,dv$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}(1-x)^{-\beta}\mathrm{F}\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

Pour abréger le langage, nous appellerons C_0 et C_1 les cercles décrits des points o et 1 comme centres avec l'unité pour rayon. De même, nous appellerons E_0 et E_1 les portions du plan limitées par la corde commune aux deux cercles précédents et qui contiennent, l'une le point $x = 0$, l'autre le point $x = 1$.

Des considérations précédentes il résulte que l'équation différentielle proposée admet une intégrale uniforme dans tout le plan, pourvu que le chemin suivi par la variable soit assujetti à ne pas couper la ligne indéfinie $1 \text{———} +\infty$. Nous désignerons par φ_1 cette intégrale particulière; pour ce qui va suivre, nous supposerons que le chemin suivi par la variable ne coupe pas non plus la ligne $-\infty \text{———} 0$, quoique cette convention ne soit pas nécessaire.

Dans le cercle C_0, on a

$$\varphi_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$

Dans l'espace E_0, on a de même

$$\varphi_1 = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),$$

l'argument de $(1-x)$ étant supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$. A la vérité, les résultats qui précèdent ne sont établis qu'en supposant positives les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$; mais il est clair que ces résultats subsistent tant que γ n'est pas un nombre entier négatif ou nul. Imaginons qu'on veuille vérifier directement que l'une des quatre fonctions précédentes satisfait à l'équation (1): le signe des quantités β, $\gamma-\beta$ n'interviendra en rien dans le calcul, et, par conséquent, la vérification devra se faire dans tous les cas. Il en serait de même si l'on voulait vérifier que deux de ces fonctions sont égales pour les valeurs de x, qui rendent convergentes les deux séries.

Je fais cette remarque une fois pour toutes, pour n'avoir pas à y revenir dans les cas analogues.

Si les parties réelles de β et de $\gamma-\beta$ sont positives, on a

$$\int_0^1 V\,du = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1.$$

6. L'intégrale $y = \int_0^{-\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$ a un sens, pourvu que les parties réelles de β et de $\alpha+1-\gamma$ soient positives et que x n'ait pas une valeur réelle et négative. On démontrerait sans difficulté que la fonction y est uniforme dans tout le plan, pourvu que le chemin suivi par la variable ne coupe pas la ligne indéfinie $-\infty$ —— 0; il en sera encore de même si le chemin suivi par la variable est en outre assujetti à ne pas couper la ligne 1 —— $+\infty$.

Pour achever de préciser le sens de cette intégrale, il reste à choisir les arguments de u, de $1-u$ et de $1-xu$; pour argument de $1-u$ on prendra 0, pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $u=0$; mais on pourra prendre pour argument de u, $\pm\pi$. Supposons d'abord qu'on prenne arg.$(u) = +\pi$, et faisons le changement de variable :

$$u = \frac{v}{v-1} = (-1)\frac{v}{1-v},$$
$$du = (-1)\frac{dv}{(1-v)^2}.$$

v variant de o à 1, u varie de o à $-\infty$:

$$1 - u = \frac{1}{1-v},$$
$$1 - xu = \frac{1 - v(1-x)}{1-v}.$$

Si nous prenons o pour argument de v et de $1-v$, nous devons prendre π pour argument de (-1), et l'argument de $1-v(1-x)$ sera nul pour $v = 0$. Par ce changement de variable, l'intégrale devient

$$e^{\pi\beta i}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\alpha-\gamma}[1-v(1-x)]^{-\alpha}\,dv.$$

Dans cette dernière intégrale, les arguments de v, $1-v$, $1-v(1-x)$ ont le même sens que dans l'intégrale déjà étudiée. On peut donc lui appliquer les transformations précédentes, et l'on conclut que, tant que $\alpha+\beta+1-\gamma$ n'est pas un nombre entier négatif ou nul, l'équation (1) admet une nouvelle intégrale φ_2, holomorphe dans tout le plan, sous les conditions indiquées plus haut.

Dans le cercle C_1, on a

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)\\ &= x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x).\end{aligned}$$

Dans l'espace E_1, on a de même

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)\\ &= x^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right),\end{aligned}$$

l'argument de x étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Lorsque β et $\alpha+1-\gamma$ auront leurs parties réelles positives, cette fonction φ_2 pourra être représentée par une intégrale définie,

$$\int_0^{-\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du = e^{\pi\beta i}\,\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\,\varphi_2,$$

en supposant que l'on prenne $+\pi$ pour argument de u dans l'intégrale.

Si l'on prenait $-\pi$ pour cet argument, on aurait

$$\int_0^{-\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du = e^{-\pi\beta i}\,\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\,\varphi_2.$$

7. L'intégrale $y=\int_1^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$ a un sens, pourvu que les parties réelles de $\gamma-\beta$ et de $\alpha+1-\gamma$ soient positives et que x n'ait pas une valeur réelle comprise entre zéro et l'unité. Il est facile de voir que si l'on fait décrire à la variable un chemin fermé entourant la ligne o-1, la fonction y revient à sa valeur initiale, multipliée par $e^{\pm 2\pi\alpha i}$; on la rendra uniforme, en convenant que le chemin suivi par la variable ne coupera pas la ligne $0 \text{———} +\infty$.

Cette nouvelle intégrale présente donc une différence essentielle avec les deux intégrales précédentes, quant au chemin suivi par la variable; cela tient à ce que nous ne pouvons passer de la partie supérieure du plan à la partie inférieure, ou inversement, en traversant la ligne droite o-1. L'intégrale considérée cessant d'avoir un sens pour un point de cette droite, rien n'indique que la continuation analytique de la fonction soit représentée après ce passage par le même symbole et nous verrons, en effet, qu'il n'en est pas ainsi.

Pour achever de préciser le sens de cette intégrale, on prendra o pour argument de u, pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $u=0$ et qui varie d'une manière continue quand on fait décrire à la variable la partie positive de l'axe des x. Quant à $1-u$, on pourra prendre $\pm\pi$; supposons qu'on prenne $-\pi$, et posons

$$u=\frac{1}{v},\quad du=\frac{-dv}{v^2},$$

$$1-u=(-1)\frac{1-v}{v},\quad 1-xu=\frac{(-x)}{v}\left(1-\frac{v}{x}\right).$$

Si nous prenons o pour argument de v et de $1-v$, et pour argument de $\left(1-\frac{v}{x}\right)$ celui qui est nul pour $v=0$, nous devrons prendre $(-\pi)$ pour argument de (-1), et pour argument de $(-x)$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} V du$ devient

$$e^{(1+\beta-\gamma)\pi i}(-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(1-v)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{-\alpha}dv.$$

Cette nouvelle intégrale est de la même forme que la première intégrale étudiée, et, en lui appliquant les mêmes transformations, on arrive aux résultats suivants.

Tant que $\alpha+1-\beta$ n'est pas un entier négatif ou nul, l'équation différentielle (1) admet une intégrale φ_3, uniforme dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable ne coupe pas la ligne $0 —— +\infty$, qui peut se développer en série comme il suit.

A l'extérieur du cercle C_0, on a

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= (-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)\\ &= (-x)^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

A l'extérieur du cercle C_1, on a

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right)\\ &= (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}\right).\end{aligned}$$

On suppose l'argument de $(-x)$ compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, ains que celui de $1-x$.

Si les parties réelles de $\gamma-\beta$ et de $\alpha+1+\gamma$ sont positives, on aura

$$\int_1^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du = e^{(1+\beta-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

en supposant qu'on prenne $(-\pi)$ pour argument de $1-u$.

Si l'on prenait $+\pi$ pour cet argument, on aurait

$$\int_1^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du = e^{(\gamma-\beta-1)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3.$$

8. On étudie de la même manière les trois autres intégrales définies $\int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{V}\,du$, $\int_1^{\frac{1}{x}} \mathrm{V}\,du$, $\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \mathrm{V}\,du$. Cette étude ne présentant pas de difficulté, je me contenterai d'indiquer sommairement les résultats.

L'intégrale $y=\int_0^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$ a un sens, pourvu que β et $1-\alpha$ aient leurs parties réelles positives et que x n'ait pas une valeur réelle comprise entre zéro et l'unité. Si l'on assujettit le chemin suivi par la variable à ne pas couper la ligne indéfinie $0 — +\infty$, la fonction y sera uniforme dans toute l'étendue du plan.

On ramènera cette intégrale à la première forme en posant $u=\frac{v}{x}$; on trouve

$$\begin{aligned}&\int^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du\\ &\quad = e^{\pm\pi\beta i}(-x)^{-\beta}\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{-\alpha}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{\gamma-\beta-1}dv.\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on prend pour arguments de $1-u$ et de $1-xu$ ceux qui sont nuls pour $u=0$. Quant à l'argument de u, en désignant par ω l'argument de $(-x)$, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, on aura pour coefficient de la seconde intégrale $e^{\pm\pi\beta i}$, suivant que l'on prendra pour cet argument $(-\omega\pm\pi)$.

Il en résulte pour l'équation différentielle une nouvelle intégrale φ_4, qui peut, comme les précédentes, être développée en série.

A l'extérieur du cercle C_0, on a

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= (-x)^{-\beta}\,\mathrm{F}\left(\beta+1-\gamma,\beta,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right)\\ &= (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\mathrm{F}\left(1-\alpha,\gamma-\alpha,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

De même, à l'extérieur du cercle C_1,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}\right)\\ &= (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}\right),\end{aligned}$$

les arguments de $(-x)$ et de $(1-x)$ étant compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$.

Pour des valeurs convenables de β et de $1-\alpha$, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du = e^{\pm\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_1.$$

9. L'intégrale $y = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$ a un sens, pourvu que les parties réelles de $1-\alpha$ et $\alpha+1-\gamma$ soient positives et que x n'ait pas une valeur réelle supérieure à l'unité; de plus, la fonction y sera holomorphe si le chemin suivi par la variable ne coupe aucune des lignes indéfinies $-\infty$ —— 0, 1 —— $+\infty$.

On ramène cette intégrale à la première forme en posant $u = \frac{1}{xv}$, et l'on trouve

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du\\ &\quad= e^{\pm\pi i(\gamma-\beta-1)\pm\pi\alpha i}x^{1-\gamma}\int_0^1 v^{\alpha-\gamma}(1-v)^{-\alpha}(1-vx)^{\gamma-\beta-1}\,dv.\end{aligned}$$

Les arguments de u et de $1-u$ sont fixés par la continuité en supposant qu'on parte de l'origine avec l'argument 0 et qu'on décrive le rayon infini $0L$ passant par le point $\frac{1}{x}$. Quant à $1-xu$, on peut prendre pour argument $\pm\pi$. Dans la formule précédente, on prendra le signe $+$ ou le signe $-$ devant $\pi i(\gamma-\beta-1)$ suivant que le point qui figure la valeur de x sera dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure du plan, et le signe $+$ ou $-$ devant $\pi\alpha i$ suivant que l'on prend, pour argument de $1-xu$, $+\pi$ ou $-\pi$.

Tant que $2-\gamma$ ne sera pas un nombre entier négatif ou nul, l'équation (1) admettra une intégrale φ_5, uniforme sous la condition énoncée plus haut.

Dans le cercle C_0, on aura

$$\begin{aligned}\varphi_5 &= x^{1-\gamma}F(\beta+1-\gamma, \alpha+1-\gamma, 2-\gamma, x)\\ &= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x).\end{aligned}$$

De même, dans l'espace E_0,

$$\begin{aligned}\varphi_5 &= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)\\ &= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right),\end{aligned}$$

les arguments de x et de $1-x$ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Pour des valeurs convenables de α, β, γ, on aura

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du = e^{\pm\pi i(\gamma-\beta-1)\pm\pi\alpha i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5.$$

10. L'intégrale $y=\int_1^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$, qui a un sens pourvu que les parties réelles de $1-\alpha$ et de $\gamma-\beta$ soient positives, et que x n'ait pas une valeur réelle négative, est holomorphe aux mêmes conditions que la précédente. On la ramène à la première forme en posant

$$u = \frac{1-x}{x}v+1;$$

on en tire

$$\begin{aligned}&\int_1^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du\\ &\quad= e^{\pm\pi i(\gamma-\beta-1)}x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 v^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{-\alpha}\left(1-\frac{x-1}{x}v\right)^{\beta-1}dv.\end{aligned}$$

Les arguments de u et de $1-xu$ sont définis par la continuité; on part de l'origine avec o pour valeur initiale, et l'on décrit le chemin rectiligne o-1; puis on part du point $x=1$, et l'on décrit le chemin rectiligne qui joint ce point au point $\frac{1}{x}$ avec des valeurs parfaitement déterminées pour ces arguments. Mais il y a ambiguïté pour l'argument de $1-u$.

Dans la formule précédente, on devra prendre le signe + ou le signe — devant $\pi i(\gamma-\beta-1)$, suivant que l'on prend

$$\arg.(1-u)=\arg.(1-x)-\arg.x\pm\pi.$$

Tant que $\gamma+1-\alpha-\beta$ ne sera pas un nombre entier négatif ou nul, on aura une nouvelle intégrale φ_6 de l'équation différentielle, uniforme aux mêmes conditions que la précédente.

Dans le cercle C_1,

$$\begin{aligned}\varphi_6 &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1-x)\\ &= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(1-\alpha,1-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1-x).\end{aligned}$$

Dans l'espace E_1, on aura de même

$$\begin{aligned}\varphi_6 &= x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F\left(\gamma-\alpha,1-\alpha,\gamma+1-\alpha-\beta,\frac{x-1}{x}\right)\\ &= x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F\left(\gamma-\beta,1-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,\frac{x-1}{x}\right),\end{aligned}$$

les arguments de x et de $1-x$ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Pour des valeurs convenables des éléments α, β, γ, on aura

$$\int_1^{\frac{1}{x}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du=e^{\pm\pi i(\gamma-\beta-1)}\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6.$$

11. En résumant tout ce qui précède, on voit que, tant qu'aucun des nombres γ, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$ n'est un nombre entier, l'équation différentielle proposée admet six intégrales particulières, dont chacune peut s'exprimer de quatre manières différentes au moyen de séries hypergéométriques dans certaines parties du plan : ce sont les vingt-quatre intégrales de Kummer.

Nous rendons ces intégrales uniformes en imposant certaines conditions au chemin suivi par la variable; ainsi, pour les intégrales φ_1, φ_2, φ_5, φ_6, ce chemin ne doit couper aucune des lignes $-\infty$ —— 0, 1 —— $+\infty$; pour les intégrales φ_3 et φ_4, ce chemin ne doit pas couper la ligne indéfinie 0 —— $+\infty$.

Ces six intégrales se partagent en trois groupes, chaque groupe comprenant les intégrales qui se comportent d'une manière simple dans le voisinage d'un point critique. Le premier groupe comprend les intégrales φ_1 et φ_5; le second se compose de φ_2 et de φ_6; φ_3 et φ_4 forment le troisième.

Chacune de ces intégrales est susceptible d'être représentée par une intégrale définie, pourvu que les éléments α, β, γ satisfassent à certaines conditions.

Tableau des intégrales.

$$\varphi_1\left\{\begin{array}{ll}(1) & F(\alpha, \beta, \gamma, x),\\ (2) & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),\\ (3) & (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right),\\ (4) & (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right).\end{array}\right.$$

$$\varphi_2\left\{\begin{array}{ll}(1) & F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),\\ (2) & x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),\\ (3) & x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \dfrac{x-1}{x}\right),\\ (4) & x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \dfrac{x-1}{x}\right).\end{array}\right.$$

$$\varphi_3\left\{\begin{array}{ll}(1) & (-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \dfrac{1}{x}\right),\\ (2) & (-x)^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \dfrac{1}{x}\right),\\ (3) & (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \dfrac{1}{1-x}\right),\\ (4) & (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, \alpha+1-\beta, \dfrac{1}{1-x}\right).\end{array}\right.$$

$$\varphi_4 \begin{cases} (1) & (-x)^{-\beta} F\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \dfrac{1}{x}\right), \\ (2) & (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \dfrac{1}{x}\right), \\ (3) & (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \dfrac{1}{1-x}\right), \\ (4) & (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, \beta+1-\alpha, \dfrac{1}{1-x}\right). \end{cases}$$

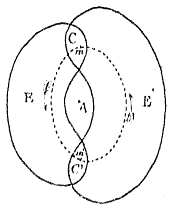
$$\varphi_5 \begin{cases} (1) & x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x), \\ (2) & x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x), \\ (3) & x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \dfrac{x}{x-1}\right), \\ (4) & x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \dfrac{x}{x-1}\right). \end{cases}$$

$$\varphi_6 \begin{cases} (1) & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x), \\ (2) & x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x), \\ (3) & x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \dfrac{x-1}{x}\right), \\ (4) & x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \dfrac{x-1}{x}\right). \end{cases}$$

12. Entre trois de ces intégrales il existe une relation linéaire à coefficients constants dans toute partie du plan où ces intégrales sont holomorphes. Si l'on considère trois des intégrales désignées par φ_1, φ_2, φ_5, φ_6, la relation sera unique dans toute l'étendue du plan; mais il n'en est plus de même si l'on prend l'une des fonctions φ_3 ou φ_4 avec deux des fonctions précédentes; prenons, par exemple, φ_1, φ_2, φ_3. Soient M et M′ deux points situés l'un dans la partie supérieure du plan, l'autre dans la partie inférieure. Il n'existe aucun chemin joignant les deux points M et M′ qui ne coupe au moins l'une des deux lignes $-\infty$ —— 0, 0 —— $+\infty$; l'une au moins des trois fonctions représentées dans le voisinage du point M par φ_1, φ_2, φ_3 ne sera plus représentée après un pareil chemin par le même symbole dans le voisinage du point M′.

La remarque précédente me paraît essentielle, et je ne crois pas inutile de la développer. Soient E, E′ (*fig.* 2) deux aires à contours simples T, T′, dont aucune ne renferme, dans son intérieur, de point critique, pour une équation différentielle linéaire du second ordre; ces deux aires laissent entre elles un point critique A de l'équation différentielle et ont en outre deux parties communes séparées C, C′, c'est-à-dire telles

Fig. 2.



qu'on ne peut passer d'un point de l'aire C à un point de l'aire C′ sans franchir au moins l'un des deux contours T, T′. Soient P, P′ deux intégrales particulières linéairement distinctes, uniformes à l'intérieur de l'aire E; soient de même Q, Q′ deux intégrales distinctes et uniformes dans l'aire E′.

Dans la partie commune C, on a les relations

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Q = \lambda\,P + \mu\,P', \\ Q' = \lambda' P + \mu' P'. \end{cases}$$

De même, dans l'aire C′, on aura d'autres relations

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} Q = \lambda_1 P' + \mu_1 P', \\ Q' = \lambda'_1 P' + \mu'_1 P'. \end{cases}$$

Il s'agit de démontrer que les relations (I) et (II) doivent être différentes, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir à la fois

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \mu_1 = \mu, \quad \lambda'_1 = \lambda', \quad \mu'_1 = \mu'.$$

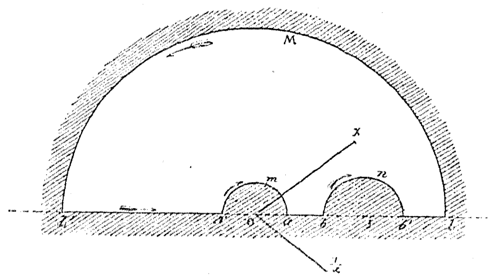
Supposons en effet qu'il en soit ainsi; partons d'un point m situé dans l'aire C avec l'intégrale particulière Q, et décrivons un chemin situé à l'intérieur de l'aire E et aboutissant à un point m' de l'aire C′. Tout le long de ce chemin, notre intégrale sera donnée par $\lambda P + \mu P'$, et dans l'hypothèse où l'on se place, au point m' elle coïncidera avec l'intégrale particulière Q.

Si maintenant nous revenons au point m par un chemin situé à l'intérieur de l'aire E′, nous arrivons évidemment en ce point avec l'intégrale Q. Nous avons ainsi décrit un contour fermé entourant le point A et ramenant l'intégrale à sa valeur primitive. Il en sera de même pour l'intégrale Q'; le point A ne serait donc pas un point critique pour l'équation différentielle considérée. Il est visible que, dans le cas dont il s'agit, les aires C, C' coïncident avec les deux parties du plan, les contours T, T' avec les lignes $-\infty$ —— o, 1 —— $+\infty$, o —— $+\infty$.

Il est donc établi qu'entre les intégrales φ_1, φ_2, φ_3, telles qu'elles ont été définies, il devra exister deux relations différentes, suivant que le point qui figure la valeur de x sera situé dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure du plan.

13. Supposons le point x dans la partie supérieure du plan, et supposons en outre que les parties réelles de β, $\gamma-\beta$, $\alpha+1-\gamma$ soient positives.

Fig. 3.



Si autour des points $x=0$, $x=1$, avec deux rayons très petits r, r', on décrit deux demi-circonférences ama', bnb', et si du point o on décrit en outre une demi-circonférence LML' d'un très grand rayon R, la fonction $V=u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$ sera holomorphe à l'intérieur de l'aire limitée par les trois demi-circonférences précédentes et par les portions de ligne droite $L'a'$, ab, $b'L$.

D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale $\int V\,du$, prise le long du contour entier, devra être nulle, ce qu'on peut écrire

$$\int_{-R}^{-r} V\,du+\int_{+r}^{1-r'} V\,du+\int_{1+r'}^{+R} V\,du=-\int_{LML'} V\,du-\int_{a'ma} V\,du-\int_{bnb'} V\,du.$$

Si maintenant le rayon R augmente indéfiniment, et si les rayons r et

r' tendent en même temps vers zéro, il est visible que chacune des trois intégrales contenues dans le second membre tend vers zéro. Prenons, par exemple, l'intégrale

$$\int_{\mathrm{LML'}} \mathrm{V}\,du = \int_{\mathrm{LML'}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du.$$

Pour des valeurs de u d'un très grand module, cette intégrale pourra s'écrire

$$(-x)^{-\alpha}\int_{\mathrm{LML'}} u^{\gamma-\alpha-2}(1+\varepsilon)\,du,$$

ε étant une quantité infiniment petite.

Posons $u = \mathrm{R}e^{\theta i}$; $\int_{\mathrm{LML'}} \mathrm{V}\,du$ devient

$$i(-x)^{-\alpha}\int_0^{\pi} \mathrm{R}^{\gamma-\alpha-1}e^{(\gamma-\alpha-1)\theta i}(1+\varepsilon)\,d\theta.$$

Soit $\gamma-\alpha-1=\mu+\nu i$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{LML'}} \mathrm{V}\,du &= i(-x)^{-\alpha}\int_0^{\pi} e^{[\mathrm{L(R)}+\theta i](\mu+\nu i)}(1+\varepsilon)\,d\theta\\ &= i(-x)^{-\alpha}\int_0^{\pi} e^{\mu\mathrm{L(R)}-\nu\theta}\, e^{i[\mu\theta+\nu\mathrm{L(R)}]}(1+\varepsilon)\,d\theta.\end{aligned}$$

μ étant par hypothèse un nombre réel négatif, on pourra prendre R assez grand pour que le module maximum de la fonction sous le signe d'intégration soit moindre qu'un nombre donné à l'avance η; le module de l'intégrale sera inférieur à $\pi\eta\,[\mathrm{mod.}\,(-x)^{-\alpha}]$, c'est-à-dire aussi petit qu'on le voudra. On démontrerait d'une manière tout à fait analogue que chacune des deux intégrales $\int_{ama'} \mathrm{V}\,du$, $\int_{bnb'} \mathrm{V}\,du$ a zéro pour limite.

Nous avons, par conséquent, l'égalité

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{V}\,du + \int_0^1 \mathrm{V}\,du + \int_1^{+\infty} \mathrm{V}\,du = 0.$$

Si l'on prend 0 pour argument de u et de $1-u$ le long du chemin

ab, il est clair qu'on devra prendre $+\pi$ pour argument de u le long du chemin $\mathrm{L}a'$, et $-\pi$ pour argument de $1-u$ le long du chemin $b'\mathrm{L}$. En se reportant alors aux expressions des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 par des intégrales définies, on voit que l'égalité précédente donne entre ces fonctions la relation suivante :

$$(\mathrm{I})\quad e^{\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1+e^{(1+\beta-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3.$$

La formule (I) a été établie en supposant que les parties réelles des quantités β, $\gamma-\beta$, $\alpha+1-\gamma$ sont positives.

Pour démontrer qu'elle est générale, il suffit d'employer le procédé bien connu qui consiste à prouver que, si la formule a lieu pour des valeurs de β, $\gamma-\beta$, $\alpha+1-\gamma$ comprises entre certaines limites, elle est encore vraie quand on diminue l'une de ces valeurs de l'unité.

Démontrons d'abord que la formule a lieu quel que soit α; si la formule est démontrée pour certaines valeurs de α, β, γ, elle aura lieu aussi pour les valeurs $\alpha+1$, β, γ; on pourra donc écrire, en remplaçant φ_1, φ_2, φ_3 par les séries correspondantes,

$$\begin{aligned}
&e^{\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\mathrm{F}(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\\
&\quad=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma;x)\\
&\qquad+e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}(-x)^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+2-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+2-\gamma)}\mathrm{F}(\alpha+1,\beta,\alpha+\beta+2-\gamma,1-x)\\
&\quad=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\mathrm{F}(\alpha+1,\beta,\gamma,x)\\
&\qquad+e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+2-\beta)}(-x)^{-\alpha-1}\mathrm{F}\left(\alpha+1,\alpha+2-\gamma,\alpha+2-\beta,\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Multiplions la première de ces relations par $(\alpha-\beta)x+\gamma-2\alpha$, la seconde par $\alpha(1-x)$, et ajoutons. Le coefficient de $\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}$ sera

$$[(\alpha-\beta)x+\gamma-2\alpha]\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,x)+\alpha(1-x)\,\mathrm{F}(\alpha+1,\beta,\gamma,x),$$

c'est-à-dire

$$(\gamma-\alpha)\,F(\alpha-1,\beta,\gamma,x),$$

d'après les relations données par Gauss ([1]) entre trois séries hypergéométriques dont les trois premiers éléments ont des différences entières. On aura, en outre, dans le second membre,

$$e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}(-x)^{-\alpha}\left\{[(\alpha-\beta)x+\gamma-2\alpha]\,F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha(\alpha+1-\gamma)(1-x)}{(\alpha+1-\beta)x}F\left(\alpha+1,\ \alpha+2-\gamma,\alpha+2-\beta,\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

D'après les mêmes relations, la quantité entre accolades n'est autre que

$$(\alpha-\beta)x\,F\left(\alpha-1,\alpha-\gamma,\alpha-\beta,\frac{1}{x}\right),$$

et le coefficient de $F\left(\alpha-1,\alpha-\gamma,\alpha-\beta,\frac{1}{x}\right)$ devient

$$-e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}(\alpha-\beta)(-x)^{-(\alpha-1)}$$
$$=e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta)}(\gamma-\alpha)(-x)^{-(\alpha-1)}.$$

Quant au premier membre, on trouve de même qu'il est égal à

$$e^{\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}(\gamma-\alpha)\,F(\alpha-1,\beta,\alpha+\beta-\gamma,1-x),$$

d'où la relation

$$e^{\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}F(\alpha-1,\beta,\alpha+\beta-\gamma,1-x)$$
$$=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)$$
$$+e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta)}(-x)^{-(\alpha-1)}F\left(\alpha-1,\alpha-\gamma,\alpha-\beta,\frac{1}{x}\right);$$

([1]) *Œuvres complètes*, t. III, p. 133.

qui n'est autre que la formule (I), où l'on a changé α en $\alpha - 1$. Cette formule est donc exacte, quel que soit α.

Tout pareillement, on démontrera que, si la formule (I) a lieu pour deux valeurs de γ différant d'une unité, elle a encore lieu pour une valeur de γ inférieure d'une unité à la plus petite. Par conséquent, elle est vraie pour toute valeur de α et de γ. Il reste à démontrer que β peut aussi être quelconque, ce qui se fera par un procédé absolument semblable.

14. La formule (I) est donc tout à fait générale; on en déduit facilement les autres formules que l'on trouvera ci-dessous :

$$\text{(I)}\qquad e^{\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$\text{(II)}\qquad e^{\pi\alpha i}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{(\alpha+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$\text{(III)}\qquad e^{(\gamma-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_0 = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{(1-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$\text{(IV)}\qquad e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 = \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5 + e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3.$$

La formule (II) se déduit de la formule (I) en permutant α et β. On obtient la formule (III) en changeant, dans la formule (I), α en $\gamma-\alpha$, β en $\gamma-\beta$ et en multipliant par $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$. Enfin, on obtient la formule (IV) en changeant, dans (I), α en $\alpha+1-\gamma$, β en $\beta+1-\gamma$, γ en $2-\gamma$ et multipliant par $x^{1-\gamma}$; remarquons que, si l'on prend, comme nous l'avons supposé, l'argument de x compris entre $-\pi$ et $+\pi$ ainsi que celui de $(-x)$, on aura

$$x = (-x)e^{\pi i}.$$

Les relations (I), (II), (III), (IV) sont distinctes, et l'on peut en déduire toutes les relations linéaires qui existent entre trois des six intégrales. Ces relations sont au nombre de vingt; il y a lieu de remarquer plus particulièrement celles dans lesquelles figurent deux fonctions d'un même groupe, qui permettent de passer du domaine d'un point critique à un autre, et qui sont utiles pour l'*intégration* de l'équation différentielle. Il existe douze relations de cette espèce; dans les huit autres entrent trois fonctions appartenant à trois groupes différents.

Partie supérieure du plan.

$$(1)\qquad e^{\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1+e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(2)\qquad e^{\pi\alpha i}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1+e^{(\alpha+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(3)\qquad e^{(\gamma-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1+e^{(1-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(4)\qquad e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2=\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5+e^{(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(5)\qquad e^{(\gamma-\alpha)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1+e^{(1-\alpha)\pi i}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(6)\qquad e^{(\alpha+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2=\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5+e^{(\alpha+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(7)\qquad e^{(1-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6=\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5+e^{(1-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(8)\qquad e^{(1-\alpha)\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5+e^{(1-\alpha)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(9)\qquad \varphi_1=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\varphi_2+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\varphi_6,$$

$$(10)\qquad \varphi_5=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\varphi_2+\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_6,$$

$$(11)\qquad \varphi_2=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_1+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\varphi_5,$$

$$(12)\qquad \varphi_6=\frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\varphi_1+\frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\varphi_5,$$

$$(13)\quad \varphi_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}\varphi_3 + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}\varphi_4,$$

$$(14)\quad \varphi_5 = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}e^{(1-\gamma)\pi i}\varphi_3 + \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}e^{(1-\gamma)\pi i}\varphi_4,$$

$$(15)\quad \varphi_3 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\varphi_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}e^{(\gamma-1)\pi i}\varphi_5,$$

$$(16)\quad \varphi_4 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}e^{(\gamma-1)\pi i}\varphi_5,$$

$$(17)\quad \varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta)}e^{-\pi\alpha i}\varphi_3 + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha)}e^{-\pi\beta i}\varphi_4,$$

$$(18)\quad \varphi_6 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{-\pi(\gamma-\beta)i}\varphi_3 + \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}e^{-\pi(\gamma-\alpha)i}\varphi_4,$$

$$(19)\quad \varphi_3 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}e^{\pi\alpha i}\varphi_2 - \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha)}e^{\pi(\gamma-\beta)i}\varphi_6,$$

$$(20)\quad \varphi_4 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}e^{\pi\beta i}\varphi_2 - \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta)}e^{\pi(\gamma-\alpha)i}\varphi_6.$$

Partie inférieure du plan.

$$(1)'\quad e^{-\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{(\gamma-1-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(2)'\quad e^{-\pi\alpha i}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{(\gamma-1-\alpha)\pi i}\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(3)'\quad e^{(\beta-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6 = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{(\beta-1)\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(4)'\quad e^{(\gamma-1-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 = \frac{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5 + e^{(\gamma-1-\beta)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(5)'\quad e^{(\alpha-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6 = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{(\alpha-1)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(6)'\quad e^{(\gamma-1-\alpha)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5 + e^{(\gamma-1-\alpha)\pi i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(7)'\quad e^{(\beta-1)\pi i}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6 = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5 + e^{(\beta-1)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\varphi_4,$$

$$(8)'\quad e^{(\alpha-1)\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)}\varphi_6 = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}\varphi_5 + e^{(\alpha-1)\pi i}\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3,$$

$$(14)' \quad \varphi_5 = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)} e^{(\gamma-1)\pi i}\varphi_3 + \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)} e^{(\gamma-1)\pi i}\varphi_4,$$

$$(15)' \quad \varphi_3 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}\varphi_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)} e^{(1-\gamma)\pi i}\varphi_5,$$

$$(16)' \quad \varphi_4 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_1 - \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)} e^{(1-\gamma)\pi i}\varphi_5,$$

$$(17)' \quad \varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta)} e^{\pi\alpha i}\varphi_3 + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha)} e^{\pi\beta i}\varphi_4,$$

$$(18)' \quad \varphi_6 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pi(\gamma-\beta)i}\varphi_3 + \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{\pi(\gamma-\alpha)i}\varphi_4,$$

$$(19)' \quad \varphi_3 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)} e^{-\pi\alpha i}\varphi_2 - \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha)} e^{\pi(\beta-\gamma)i}\varphi_6,$$

$$(20)' \quad \varphi_4 = \frac{\Gamma(\gamma+1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)} e^{-\pi\beta i}\varphi_2 - \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta)} e^{\pi(\alpha-\gamma)i}\varphi_6.$$

15. On déduit les formules (5) et (6) des formules (3) et (4) en permutant α et β. Si dans la formule (4) on change α en $\gamma-\alpha$, β en $\gamma-\beta$, et que l'on multiplie par $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$, on obtient la formule (7); enfin de cette dernière on tire la formule (8), en permutant α, β.

On obtient les formules (9) et (10) en éliminant φ_4 entre (2) et (3) et entre (6) et (7); résolvant (9) et (10) par rapport à φ_2 et à φ_6, on obtient (11) et (12). Des formules (1) et (2) on déduit les formules (13) et (17) en résolvant par rapport à φ_1 et à φ_2. Si dans (13) on change α en $\alpha+1-\gamma$, β en $\beta+1-\gamma$, γ en $2-\gamma$ et si l'on multiplie par $x^{1-\gamma}$, on obtient (14); des deux dernières on tire alors (15) et (16).

On tire de même (18) de (17) en changeant γ en $\gamma-\alpha$, β en $\gamma-\beta$ et en multipliant par $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$; puis de (17) et (18) on tire sans peine (19) et (20).

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, les formules (9), (10), (11), (12) devront avoir lieu pour tout point du plan. Il en est de même de la formule (13), car, la fonction φ_1 étant uniforme dans le voisinage du point o, on peut supposer que le chemin suivi par la variable coupe la ligne $-\infty$ —— o. Mais les autres formules, pour un point pris dans la partie inférieure du plan, seront différentes; la relation entre φ_1, φ_2, φ_3, par exemple, sera

$$
(1)' \quad \left\{
\begin{aligned}
& e^{-\pi\beta i}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}\varphi_2 \\
& \quad = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\varphi_1 + e^{-(\beta+1-\gamma)\pi i}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)}\varphi_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Elle diffère de la formule (1) en ce que π y est remplacé par $(-\pi)$; toutes les autres formules, qui se déduisent de celle-là par des permutations de lettres, se déduiront de la même manière des formules correspondantes déjà établies pour un point pris dans la partie supérieure du plan.

16. Considérons un chemin de forme arbitraire joignant deux points quelconques M et M′ du plan, et ne passant par aucun des points o et 1. Si l'on part du point M avec une solution particulière de l'équation différentielle, cette solution se trouve définie tout le long du chemin suivi par la variable, et l'on arrive au point M′ avec une intégrale déterminée. Les relations précédentes permettent de trouver effectivement cette intégrale quand on se donne le chemin qui joint les deux points M et M′ et la solution particulière avec laquelle on part du point M.

Supposons d'abord qu'on parte d'un point A figurant une valeur réelle comprise entre $x=0$ et $x=1$ et qu'on aille en un point M′ du plan par un chemin direct, ne coupant aucune des lignes $-\infty$ —— o, $+1$ —— $+\infty$. Dans le voisinage du point A, l'intégrale pourra être représentée par $C\varphi_1+C'\varphi_2$, les constantes C, C′ ayant des valeurs convenables. Si le point M′ est dans l'espace E_0, on remplacera φ_2 par sa valeur en fonction de φ_1 et de φ_5, et l'on emploiera pour le calcul effectif de la fonction le développement le plus convenable de chacune de ces fonctions. De même, si le point M′ est dans l'espace E_1, on remplacera φ_1 par sa valeur en fonction de φ_2 et de φ_6.

Si le point M′ est en dehors de l'espace commun aux deux cercles C_0, C_1, on pourra exprimer φ_1, φ_2 au moyen de φ_3 et de φ_4, mais en ayant bien soin d'employer des formules différentes suivant que le point M′ est dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure du plan.

Supposons maintenant que, partant du même point A, on suive un chemin quelconque aboutissant au point M′ et ne passant par aucun des points o et 1. Un pareil chemin se ramène, comme on sait, à une suite de lacets décrits autour des points $x = 0$, $x = 1$ dans un sens ou dans l'autre, suivi du chemin direct allant de A en M' (*fig.* 4).

Fig. 4.

Partons du point A avec une intégrale particulière $C\varphi_1 + C'\varphi_2$, et décrivons un lacet dans le sens direct autour du point critique $x = 0$. Pour voir comment se comporte cette intégrale, il n'y a qu'à remplacer φ_2 par

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_1 + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\varphi_3.$$

Quand la variable décrit le lacet, φ_1 ne change pas, mais φ_3 se change en $e^{2\pi(1-\gamma)i}\varphi_3$, de sorte que l'on revient au point de départ avec l'intégrale

$$\begin{aligned} C\varphi_1 &+ C'\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_1 \\ &+ C'e^{2\pi(1-\gamma)i}\left[\varphi_2 - \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_1\right], \end{aligned}$$

que l'on peut écrire $C_1\varphi_1 + C'_1\varphi_2$:

$$\begin{aligned} C_1 &= C + C'\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\left(1 - e^{2\pi(1-\gamma)i}\right), \\ C'_1 &= C'e^{2\pi(1-\gamma)i}. \end{aligned}$$

Si le lacet était décrit dans le sens rétrograde, $C\varphi_1 + C'\varphi_2$ se changerait en $C_1\varphi_1 + C'_1\varphi_2$, les constantes C_1, C'_1 ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= C + C'\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\left(1 - e^{-2\pi(1-\gamma)i}\right), \\ C'_1 &= C'e^{-2\pi(1-\gamma)i}. \end{aligned}$$

De même, par un lacet décrit autour du point $x = 1$, $C\varphi_1 + C'\varphi_2$ se change en $C_1\varphi_1 + C'_1\varphi_2$:

$$\begin{aligned} C_1 &= Ce^{\pm 2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}, \\ C'_1 &= C' + C\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\left(1 - e^{\pm 2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\right). \end{aligned}$$

On prendra le signe $\pm$ devant $2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)$ suivant que le lacet est décrit dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

Si la variable décrit plusieurs lacets successivement, il y aura lieu d'appliquer les formules plusieurs fois de suite, et l'on retombera finalement dans le cas précédent.

Prenons enfin le cas général où l'on suit un chemin joignant deux points quelconques du plan. On peut remplacer ce chemin par le chemin direct allant de M en A, suivi d'un chemin déterminé allant de A en M'. Pour être ramené au cas précédent, il suffira de déterminer avec quelle intégrale on arrive au point A quand on suit le chemin direct allant de M en A, ce qui se fait sans difficulté, d'après les explications données pour le premier cas.

Considérons par exemple l'équation différentielle

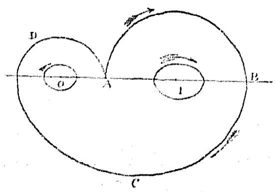
$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{7x}{3}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}y=0,$$

qui admet comme intégrale la série hypergéométrique

$$F(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x).$$

Supposons qu'on parte du point A avec cette solution et qu'on décrive le contour fermé ABCDA (*fig.* 5), environnant les deux points o

Fig. 5.



et 1. Ce contour se ramène à deux lacets décrits dans le sens rétrograde autour des points $x=1$, $x=0$; après un premier lacet, décrit autour du point $x=1$, on reviendra au point de départ avec l'intégrale

$$e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}F(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x)+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\left(1-e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\right)F(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{11}{6}, 1-x);$$

après le second lacet, on aura une intégrale qui pourra être représentée dans les environs du point A par

$$C\,F\left(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x\right) + C_1\,F\left(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{11}{6}, 1 - x\right),$$

C, C_1 ayant les valeurs suivantes :

$$C = e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)\pi \sin(\gamma-\beta)\pi}{\sin\gamma\pi \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi}\left(1 - e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\right)\left(1 - e^{-2\pi i(1-\gamma)}\right),$$

$$C_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{-2\pi(1-\gamma)i}\left(1 - e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\right).$$

Faisons $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, on trouve

$$C = e^{\frac{5\pi i}{3}} + 2\left(1 - e^{\frac{5\pi i}{3}}\right) = 2 - e^{\frac{5\pi i}{3}},$$

$$C_1 = -\tfrac{3}{5}\left(1 - e^{\frac{5\pi i}{3}}\right).$$

17. Lorsque γ, ou bien $\gamma-\alpha-\beta$, ou $\alpha-\beta$, est un nombre entier, on n'a plus qu'une intégrale dans l'un des groupes; pour en trouver une nouvelle, on emploiera le procédé suivant, d'un usage assez fréquent en Mathématiques. Soient $y = F(x, r)$, $y_1 = F_1(x, r)$ deux intégrales distinctes d'une équation différentielle qui viennent se confondre pour une valeur particulière r_1 de la constante r; on obtiendra une autre intégrale en cherchant la limite pour $r = r_1$ de l'expression

$$\frac{F(x, r) - F_1(x, r)}{r - r_1},$$

qui est aussi une intégrale de la même équation différentielle, quelle que soit la valeur de r.

Supposons par exemple que γ soit un nombre entier; on peut admettre qu'il est positif, car, s'il était négatif, on ferait la transformation $y = x^{1-\gamma} y_1$.

Il y aura encore deux cas à distinguer suivant que γ est égal ou supérieur à l'unité.

Premier cas : $\gamma = 1$. — Les deux intégrales

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad \text{et} \quad x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

deviennent identiques pour $\gamma = 1$. D'après ce qui vient d'être dit, on cherchera la limite pour $\gamma = 1$ de l'expression

$$\frac{x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{1-\gamma}.$$

Cette limite n'est autre chose que

$$\varphi_1 \log x + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} + 2\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma},$$

dans laquelle on fait $\gamma = 1$.

La fonction φ_1 étant susceptible de quatre formes différentes, il en résulte également quatre formes pour la nouvelle intégrale.

Soit

$$\varphi_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Désignons $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} + 2\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}$ par $\psi_1(x)$; soit A_m le coefficient de x^m dans le développement de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. On trouve sans peine

$$\psi_1(x) = \sum_{m=1}^{m=+\infty} A_m B_m x^m,$$

$$B_m = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha+m-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \cdots + \frac{1}{\beta+m-1} - 2\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right).$$

Si l'on prend $\varphi_1 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$, et si l'on appelle, comme tout à l'heure, A_m le coefficient du terme général dans la série $F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$, on aura pour $\psi_1(x)$ une nouvelle forme

$$\psi_1(x) = \sum_{m=+1}^{m=+\infty} A_m B_m x^m (1-x)^{1-\alpha-\beta},$$

$$B_m = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha} + \cdots + \frac{1}{m-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \cdots + \frac{1}{m-\beta} - 2\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right).$$

Chacune des deux autres expressions de φ_1 donnera une expression différente de $\psi_1(x)$. C'est ainsi qu'on trouvera

$$\psi_1(x) = -\log(1-x)(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, 1-\beta, 1, \frac{x}{x-1}\right) + (1-x)^{-\alpha} \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m B_m \left(\frac{x}{x-1}\right)^m,$$

$$A_m = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)(1-\beta)(2-\beta)\ldots(m-\beta)}{(1.2\ldots m)^2},$$

$$B_m = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+m-1} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{2-\beta} + \ldots + \frac{1}{m-\beta}$$
$$- 2\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

De même

$$\psi_1(x) = -\log(1-x)(1-x)^{-\beta} F\left(\beta, 1-\alpha, 1, \frac{x}{x-1}\right) + (1-x)^{-\beta} \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m B_m \left(\frac{x}{x-1}\right)^m,$$

$$A_m = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(m-\alpha)}{(1.2\ldots m)^2},$$

$$B_m = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \ldots + \frac{1}{\beta+m-1} + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \ldots + \frac{1}{m-\beta}$$
$$- 2\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

Quelle que soit l'expression que l'on adopte pour $\psi_1(x)$, je désigne par Q la nouvelle intégrale :

$$Q = \varphi_1 \log(x) + \psi_1(x).$$

Cette nouvelle intégrale sera, comme les précédentes, uniforme dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable ne coupe aucune des lignes $-\infty \text{——} 0$, $1 \text{——} +\infty$.

Le même procédé, qui permet de trouver une nouvelle intégrale, permet aussi de trouver les relations linéaires entre cette intégrale particulière et les intégrales déjà connues. Supposons, pour fixer les idées, que la somme $\alpha+\beta$ ne soit pas nulle ni égale à un nombre entier négatif; donnons à γ une valeur un peu différente de l'unité. On connaît les trois intégrales

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$
$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$$

entre lesquelles existe la relation

$$\varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\varphi_1 + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\varphi_3.$$

Remplaçons dans cette relation φ_3 par $\varphi_1+(1-\gamma)Q_1$ et faisons tendre γ vers l'unité; φ_1 et φ_2 se réduisent à $F(\alpha, \beta, 1, x)$ et $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 1-x)$, tandis que Q_1 devient égal à Q. Il s'agit de voir ce que deviennent les coefficients de φ_1 et de Q_1 dans la même hypothèse:

$$\varphi_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}[\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)+\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)]\varphi_1$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\Gamma(\gamma)Q_1.$$

Faisons tendre γ vers l'unité; le coefficient de Q se réduit à $-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$; quant au coefficient de φ_1, le premier facteur a pour limite $\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{[\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)]^2}$. Le second facteur peut s'écrire

$$\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)-\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{1-\gamma}.$$

On aura sa limite en prenant la dérivée du numérateur pour $\gamma=1$, et changeant le signe. Cette limite sera

$$2\Gamma'(1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)-\Gamma(\alpha)\Gamma'(\beta)-\Gamma(\beta)\Gamma'(\alpha).$$

On aura donc

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 1-x) \\ &\quad = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[2\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right]F(\alpha, \beta, 1, x)-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}Q.\end{aligned}\right.$$

Deuxième cas. — Supposons γ supérieur à l'unité, $\gamma=2+m$, m étant un entier qui peut être nul. Voyons d'abord ce que devient la série $F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$ lorsque γ, supposé d'abord un peu différent de $2+m$, tend vers cette valeur. Écrivons les premiers termes de cette série

$$\frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{1.(2-\gamma)}x+\frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{1.2\ldots(2-\gamma)(3-\gamma)}x^2+.$$
$$\frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)\ldots(\alpha+m+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)\ldots(\beta+m+1-\gamma)}{1.2\ldots(m+1)(2-\gamma)(3-\gamma)\ldots(m+1-\gamma)(m+2-\gamma)}x^{m+1}+\ldots$$

Lorsque γ tend vers la valeur $m+2$, les termes en $x, x^2, \ldots, x^m$ conservent des valeurs finies. Mais le terme en x^{m+1} devient infiniment grand, à moins que l'un des facteurs du numérateur ne devienne nul; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'un des nombres α ou β ait l'une des valeurs $1, 2, 3, \ldots, m+1$. Si cette circonstance se présente, tous les autres termes conserveront également des valeurs finies pour $\gamma=2+m$, et nous aurons encore une intégrale. Cette intégrale est uniforme dans le voisinage de l'origine qu'elle admet comme pôle, ce qui prouve qu'elle est différente de l'intégrale $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

L'ensemble des termes à partir du terme en x^m pourra s'écrire

$$C\,F(\alpha, \beta, m+2, x)x^{m+1}.$$

Quant à l'ensemble des termes précédents, on peut de même les remplacer par

$$C_1 F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)x^{m+1-\alpha},$$

de sorte qu'en multipliant par $x^{-(1+m)}$ l'intégrale deviendra

$$C_1 x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)+C\,F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Prenons, par exemple, l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

que l'on obtient en faisant dans l'équation générale

$$\alpha=1, \quad \beta=-2, \quad \gamma=2.$$

Elle admet comme intégrales $y=\frac{1}{x}$ et $y=1-x+\frac{x^2}{3}$, de sorte que l'intégrale générale sera

$$y=\frac{C}{x}+C_1\left(1-x+\frac{x^2}{3}\right).$$

Il est à remarquer que, lorsque la circonstance qui vient d'être signalée se présente, l'origine n'est pas un point critique pour l'intégrale générale, mais peut être un pôle.

Ce cas exceptionnel écarté, on voit que la série

$$F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

présente des termes qui grandissent indéfiniment quand on fait tendre γ vers la valeur $2+m$.

Nous prendrons la fonction

$$x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)(m+2-\gamma),$$

qui est aussi une intégrale de l'équation différentielle, quelle que soit la valeur de γ.

Cherchons la limite de cette intégrale lorsqu'on fait tendre γ vers la valeur $m+2$:

$$\begin{aligned}&(m+2-\gamma)F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)\\ &\quad=(m+2-\gamma)\left[1+\frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{1(2-\gamma)}x+\ldots\right].\end{aligned}$$

Le premier terme de la série entre parenthèses qui devient infini est

$$\frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)\ldots(\alpha+m+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)\ldots(\beta+m+1-\gamma)}{1.2\ldots(m+1)(2-\gamma)(3-\gamma)\ldots(m+1-\gamma)(m+2-\gamma)}x^{m+1}.$$

Faisons tendre γ vers la valeur $m+2$; les termes en $x, x^2, \ldots, x^m$ deviennent nuls, mais les termes suivants conservent des valeurs finies. Le terme en x^{m+1}, par exemple, devient

$$\frac{(\alpha-m-1)(\alpha-m)(\alpha-m+1)\ldots(\alpha-1)(\beta-m-1)\ldots(\beta-1)}{1.2\ldots m.(m+1)(-m)(-m+1)(-m+2)\ldots(-1)}x^{m+1}.$$

La série tend donc vers

$$x^{m+1}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m-1)(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-m-1)}{(-1)^m.1.2\ldots m.1.2\ldots(m+1)}F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Si donc nous considérons l'intégrale

$$\frac{(-1)^m.1.2\ldots m.1.2\ldots(m+1)(m+2-\gamma)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-m-1)(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-m-1)} x^{1-\gamma}\,F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) = F_1,$$

cette intégrale viendra se confondre avec l'intégrale $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ lorsque γ prendra la valeur $2+m$. On obtiendra une nouvelle intégrale en cherchant la valeur limite pour $\gamma = 2+m$ de l'expression

$$\frac{F_1 - F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{2+m-\gamma}.$$

On trouve, comme plus haut, pour cette intégrale,

$$\log x\, F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \gamma},$$

dans laquelle on donne à γ la valeur $2+m$.

On pourra ensuite exprimer cette nouvelle intégrale au moyen des intégrales déjà connues φ_1 et φ_2 par le procédé employé plus haut.

On opérera absolument de la même manière si $\gamma-\alpha-\beta$ ou $\alpha-\beta$ est un nombre entier.

18. Je terminerai par l'application de la théorie générale à l'exemple suivant

$$(1)' \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} - \tfrac{1}{4}y = 0,$$

que l'on obtient en prenant $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$. Cette équation se présente dans la théorie des fonctions elliptiques, quand on veut définir la fonction complète de première espèce

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

comme fonction du module k, pour les valeurs imaginaires de ce module. Elle a été étudiée à ce point de vue par M. Fuchs [1], puis directement par M. Tannery. Les résultats qu'ils ont obtenus se déduisent

[1] *Journal de Borchardt*, t. 71, p. 91.

sans difficulté du cas général. J'emploierai, pour cet exemple, les notations de M. Tannery.

L'équation (1)' admet une intégrale uniforme dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable ne coupe pas la ligne indéfinie $1 \text{———} +\infty$. Nous la désignerons par P. A l'intérieur du cercle C_0, on a

$$P = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) = 1 + \sum_{m=1}^{m=+\infty} \left[\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}\right]^2 x^m.$$

Soit

$$\varphi(x) = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x).$$

Dans l'espace E_0, on aura de même

$$P = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

γ étant égal à 1, on aura une nouvelle intégrale contenant un logarithme; nous la désignerons par Q. Cette intégrale sera uniforme dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable ne coupe aucune des lignes $-\infty \text{———} 0$, $+1 \text{———} +\infty$. A l'intérieur du cercle C_0, on a, en posant

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}\right]^2 B_m x^m,$$

$$B_m = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2m-1} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2m},$$

$$Q = 4\,\psi(x) + \varphi(x)\log x;$$

de même, dans l'espace E_0,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left\{\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)[\log x - \log(1-x)] + 4\,\psi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right\}.$$

L'équation (1)' ne changeant pas de forme par le changement de x en $1-x$, elle admettra deux autres intégrales P′ et Q′, uniformes dans tout le plan à la même condition que les précédentes.

Dans le cercle C_0, on aura

$$P' = \varphi(1-x),$$
$$Q' = \varphi(1-x)\log(1-x) + 4\,\psi(1-x);$$

dans l'espace E_1, on aura de même

$$P' = \frac{1}{\sqrt{x}}\ \varphi\left(\frac{x-1}{x}\right),$$

$$Q' = \frac{1}{\sqrt{x}}\left\{\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)[\log(1-x)-\log x] + 4\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)\right\}.$$

Ces quatre intégrales suffisent pour exprimer une intégrale quelconque dans toute l'étendue du plan. Pour avoir les relations linéaires qui existent entre ces intégrales faisons, dans la formule (21), $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$; on trouve

$$P' = \frac{2}{\pi}\left[\Gamma(1) - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right]P - \frac{1}{\pi}Q$$

ou bien

$$P' = \frac{4\log 2}{\pi}P - \frac{1}{\pi}Q,$$

et de même

$$P = \frac{4\log 2}{\pi}P' - \frac{1}{\pi}Q'.$$

On peut résoudre soit par rapport à P et Q, soit par rapport à P′ et à Q′. On en tire

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} P' &= \frac{4\log 2}{\pi}P - \frac{1}{\pi}Q,\\ Q' &= \frac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi}P - \frac{4\log 2}{\pi}Q,\\ P &= \frac{4\log 2}{\pi}P' - \frac{1}{\pi}Q',\\ Q &= \frac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi}P' - \frac{4\log 2}{\pi}Q'. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les relations trouvées directement par M. Tannery ([1]).

Ces formules suffisent pour *intégrer* l'équation (1)′, ainsi qu'on l'a vu plus haut pour le cas général. Je prendrai, comme application, l'exemple traité dans le Mémoire déjà cité.

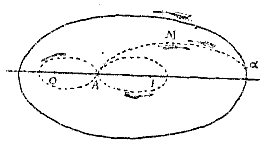
Je suppose qu'on parte d'un point α (*fig.* 6) très voisin du point $x=2$ et dans la partie supérieure du plan, et qu'on décrive le contour d'une

---

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VIII, p. 175.

aire fermée, comprenant les deux points o et 1. Ce chemin peut se ramener au chemin αMA, A étant un point de la droite o-1, par exemple le point $x = \frac{1}{2}$, suivi de deux lacets décrits successivement dans le sens direct autour des points $x = 0$ et $x = 1$ et du chemin AMα.

Fig. 6.



Partons du point α avec l'intégrale P'; nous arrivons au point A avec la même intégrale. Pour suivre sa variation lorsqu'on décrit le lacet o, il n'y a qu'à remplacer P' par sa valeur en fonction de P et de Q :

$$P' = \frac{4 \log 2}{\pi} P - \frac{1}{\pi} Q.$$

Après avoir décrit le lacet o, P reprend sa valeur initiale, mais Q se change en $Q + 2\pi i P$, de sorte que P' devient

$$P' - 2iP.$$

De même, pour voir comment cette intégrale se comporte quand on décrit le lacet 1, remplaçons P par

$$\frac{4 \log 2}{\pi} P' - \frac{1}{\pi} Q';$$

P' ne change pas, mais Q' se change en $Q' + 2\pi i P'$, de sorte que $P' - 2iP$ se change en

$$-3P' - 2iP.$$

On reviendra donc au point α avec l'intégrale

$$-\frac{3\pi + 8i \log 2}{\pi} P' + \frac{2i}{\pi} Q'.$$

Si l'on part du point α avec l'intégrale Q', on arrivera au point A avec l'intégrale

$$\frac{16 \log^2 2 - \pi^2}{\pi} P - \frac{4 \log 2}{\pi} Q.$$

Après le lacet o, l'intégrale sera représentée par

$$\frac{16\log^2 2-\pi^2}{\pi}\,P-\frac{4\log 2}{\pi}\,Q-8i\log 2\,P$$

ou, ce qui revient au même, par

$$Q'-8i\log 2\,P,$$

ou encore par

$$Q'\,\frac{\pi+8i\log 2}{\pi}-\frac{32i\log^2 2}{\pi}\,P'.$$

Après le lacet 1, on aura

$$Q'\,\frac{\pi+8i\log 2}{\pi}+\frac{2i\pi(\pi+8i\log 2)-32i\log^2 2}{\pi}\,P',$$

c'est-à-dire

$$\frac{2i(\pi+4i\log 2)^2}{\pi}\,P'+\frac{\pi+8i\log 2}{\pi}\,Q'.$$

On reviendra au point α avec cette intégrale.

La même équation $(1)'$ admet aussi deux autres intégrales particulières, qui sont susceptibles de développements en série, analogues aux précédents.

On a d'abord l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

qui est uniforme dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable ne coupe pas la ligne $0 \text{——} +\infty$. Je la désignerai par P''.

Pour trouver une autre intégrale, supposons d'abord $\gamma=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$ et β un peu différent de $\frac{1}{2}$. L'équation différentielle admettra les deux intégrales

$$\frac{1}{\sqrt{-x}}\,F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-\beta,\frac{1}{x}\right),\qquad (-x)^{-\beta}\,F\left(\beta,\beta,\beta+\tfrac{1}{2},\frac{1}{x}\right).$$

L'expression

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\,F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-\beta,\dfrac{1}{x}\right)-(-x)^{-\beta}\,F\left(\beta,\beta,\beta+\tfrac{1}{2},\dfrac{1}{x}\right)}{\tfrac{1}{2}-\beta}$$

sera aussi une intégrale. La limite de cette expression quand $\beta = \frac{1}{2}$ nous donnera une nouvelle intégrale Q″ :

$$Q'' = -\log(-x)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{-x}} + \frac{4}{\sqrt{-x}}\,\psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a de même

$$Q'' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[-\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)\log(1-x) + 4\,\psi\left(\frac{1}{1-x}\right)\right].$$

Q″ est uniforme dans toute l'étendue du plan, à la même condition que l'intégrale précédente P″.

Pour toute valeur de x figurée par un point situé dans la partie supérieure du plan, on a les relations

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{4\log 2}{\pi}P'' - \frac{1}{\pi}Q'', \\ P' &= \frac{\pi - 4i\log 2}{\pi}P'' + \frac{i}{\pi}Q''. \end{aligned}\right.$$

De même, pour toute valeur de x figurée par un point situé dans la partie inférieure du plan,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{4\log 2}{\pi}P'' - \frac{1}{\pi}Q'', \\ P' &= \frac{\pi + 4i\log 2}{\pi}P'' - \frac{i}{\pi}Q''. \end{aligned}\right.$$

Les formules précédentes ont été établies, comme la formule (21), en partant des relations (13) et (17), qui ont lieu dans le cas général.

Remarque. — Les formules (23) et (24) paraissent en désaccord avec les formules données par M. Tannery (*loc. cit.*, p. 188). Cela tient à ce que les fonctions P″ et Q″ ne sont pas tout à fait les mêmes que celles qu'il désigne de la même manière. Au lieu du système d'intégrales P″ et Q″, considérons le système suivant,

$$P''_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$Q''_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\log x + 4\,\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

où l'on suppose l'argument de x compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On trouve aisément que l'on a, dans la partie supérieure du plan,

$$P'' = iP''_1, \quad Q'' = iQ''_1 - \pi P''_1,$$

et, en portant ces valeurs de P'' et de Q'' dans la seconde des formules (23), on arrive à la relation

$$P' = \frac{4\log 2}{\pi} P''_1 - \frac{1}{\pi} Q''_1,$$

qui est identique avec la relation obtenue par M. Tannery.

19. Les formules de passage établies plus haut suffisent pour reconnaître si l'équation différentielle admet une intégrale algébrique ou si l'intégrale générale est algébrique. La question a déjà été traitée par M. Schwarz (*Journal de Crelle,* t. 73, p. 292), qui, en se servant de l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait le rapport de deux intégrales particulières de l'équation (1) et des surfaces de Riemann, a été ramené à un problème de Géométrie sphérique où se présentent les polyèdres réguliers. Depuis lors, M. Klein a considéré le cas plus général d'une équation linéaire du second ordre à coefficients rationnels. J'arrive aux mêmes résultats que M. Schwarz par des considérations tout à fait élémentaires.

Si l'équation (1) possède une seule intégrale algébrique, cette intégrale devra se reproduire, à un facteur constant près, quand on tourne autour d'un point critique. Dans le domaine du point o, elle sera représentée par l'une des intégrales φ_1, φ_5; de même, dans le domaine du point $x = 1$, elle coïncidera, à un facteur près, avec l'une des intégrales φ_2, φ_6. Reportons-nous aux relations qui ont lieu entre ces quatre intégrales : on voit que cela ne pourra avoir lieu que si l'un des nombres α, β, $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ est un nombre entier. Dans chacun de ces cas, l'une des séries hypergéométriques qui expriment l'intégrale générale n'aura plus qu'un nombre limité de termes. Soit, par exemple, $\gamma - \alpha = -m$; l'équation (1) admet comme intégrale

$$(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} P,$$

P étant une fonction entière de x; pour que cette intégrale soit algébrique il faut, en outre, que β soit un nombre réel et rationnel.

Si l'équation (1) admet plus d'une intégrale algébrique, l'intégrale générale sera elle-même algébrique. Nous allons nous proposer de trouver tous les cas où il en est ainsi. Nous pouvons exclure de notre recherche les cas où l'un des nombres γ, $\gamma - \alpha - \beta$ serait un nombre entier. On a vu, en effet, que dans ces cas il existait un logarithme dans l'intégrale complète dans le domaine de l'un des points critiques; comme cas exceptionnel, ce logarithme peut disparaître, mais alors le point considéré n'est plus un point de ramification pour l'intégrale générale, et il suffit d'examiner comment se comporte une intégrale dans le voisinage de l'autre point critique pour être fixé sur sa nature. On voit, de plus, que les trois nombres α, β, γ doivent être réels et rationnels; sans quoi il existe, dans le domaine de l'un des points critiques, une intégrale qui prend une infinité de valeurs.

Cela posé, soient y_1 et y_2 deux intégrales particulières linéairement distinctes, uniformes dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable ne coupe aucune des lignes $-\infty$ —— 0, 1 —— $+\infty$.

On part d'un point quelconque A du plan avec une intégrale $cy_1 + c'y_2$, et l'on décrit un chemin fermé quelconque, assujetti seulement à ne passer par aucun des points 0 et 1. On revient au point de départ avec une intégrale $Cy_1 + C'y_2$. Si cette intégrale est une fonction algébrique de x, les coefficients C, C' n'admettront qu'un nombre limité de valeurs, quel que soit le chemin suivi. En particulier, le rapport $\frac{C'}{C}$ n'admettra qu'un nombre limité de valeurs. J'ajoute que, si cela a lieu, quels que soient les coefficients primitifs c, c', l'intégrale générale est algébrique.

Considérons, en effet, la dérivée logarithmique de l'intégrale précédente; on peut la représenter par

$$\frac{Cy'_1 + C'y'_2}{Cy_1 + C'y_2} = \frac{y'_1 + \frac{C'}{C}y'_2}{y_1 + \frac{C'}{C}y_2}.$$

Le rapport $\frac{C'}{C}$ n'admettant qu'un nombre limité de valeurs, il en est de même de cette dérivée logarithmique; comme d'ailleurs elle ne présente d'autres points singuliers que des points critiques et des pôles, il suit de là qu'elle sera une fonction algébrique de x.

Cela étant vrai pour une intégrale quelconque, soient z_1 et z_2 deux intégrales de l'équation (1). On a entre elles la relation

$$z_2 z'_1 - z_1 z'_2 = \mathrm{H} x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1},$$

qui peut aussi s'écrire

$$z_1 z_2 \left(\frac{z'_1}{z_1} - \frac{z'_2}{z_2}\right) = \mathrm{H} x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1},$$

$$z_1 z_2 = \frac{\mathrm{H} x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{\dfrac{z'_1}{z_1} - \dfrac{z'_2}{z_2}}.$$

Le produit de deux intégrales quelconques z_1, z_2 est donc une fonction algébrique de x. Si z_1 et z_2 sont deux intégrales, z_1 et z_1+z_2 seront aussi deux intégrales. Le produit $z_1^2+z_1 z_2$, et par suite z_1, sera une fonction algébrique de la variable.

Tout chemin fermé partant d'un point A et revenant à ce point pouvant se ramener à une suite de lacets décrits autour des points $x=0$, $x=1$, nous sommes donc amenés à étudier comment le rapport précédent se comporte quand on décrit un de ces lacets. Nous prendrons, pour y_1 et y_2, les intégrales φ_1 et φ_2; nous partons d'un point A avec l'intégrale $C\varphi_1 + C'\varphi_2$, et nous décrivons un lacet autour du point 0, dans le sens direct; nous avons vu plus haut (n° 16) qu'on revenait au point A avec l'intégrale $C_1\varphi_1 + C'_1\varphi_2$:

$$C_1 = C + C' \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)}\left(1 - e^{2\pi(1-\gamma)i}\right),$$
$$C'_1 = C' e^{2\pi(1-\gamma)i}.$$

Soient ρ la valeur initiale du rapport $\dfrac{C}{C'}$, ρ' la valeur finale; on aura

$$\rho' = \rho e^{-2\pi(1-\gamma)i} + \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)}\left(\frac{1-e^{2\pi(1-\gamma)i}}{e^{2\pi(1-\gamma)i}}\right).$$

Posons

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)} = -a,$$
$$e^{-2\pi(1-\gamma)i} = \mathrm{K}.$$

La formule précédente s'écrira

$$(\mathrm{A}) \qquad \rho' - a = \mathrm{K}(\rho - a).$$

Si le lacet était décrit dans le sens inverse, on aurait, au contraire,

$$(\mathrm{A})' \qquad \rho' - a = \frac{1}{\mathrm{K}}(\rho - a).$$

Faisons maintenant décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point critique $x = 1$; l'intégrale $C\varphi_1 + C'\varphi_2$ se change en $C_1\varphi_1 + C'_1\varphi_2$:

$$C_1 = C e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)},$$

$$C'_1 = C' + C\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\left(1 - e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\right).$$

En désignant, comme toujours, par ρ et ρ' la valeur initiale et la valeur finale du même rapport, on aura

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho}e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\left(\frac{1 - e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}}{e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}}\right).$$

Posons

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = -b,$$

$$e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} = \mathrm{K}'.$$

La relation entre ρ et ρ' pourra s'écrire

$$(\mathrm{B}) \qquad \left(\frac{1}{\rho'} - b\right) = \mathrm{K}'\left(\frac{1}{\rho} - b\right).$$

Si le lacet était décrit dans le sens inverse, on trouverait de même

$$(\mathrm{B})' \qquad \left(\frac{1}{\rho'} - b\right) = \frac{1}{\mathrm{K}'}\left(\frac{1}{\rho} - b\right).$$

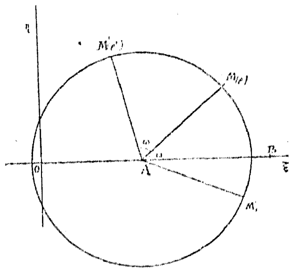
Le problème qu'il s'agit de résoudre pourra se formuler ainsi :

Étant donnée une suite de quantités telles que chacune se déduit de la précédente par l'une des formules (A), (A)$'$, (B), (B)$'$, *dans quels cas arrivera-t-on à un nombre limité de quantités différentes, l'ordre dans* *lequel on applique ces formules successivement restant absolument arbitraire?*

La méthode géométrique m'a paru la plus propre à conduire simplement au résultat.

20. Soient tracés dans un plan (*fig.* 7) deux axes de coordonnées rectangulaires $O\xi$, $O\eta$. Je figure, comme à l'ordinaire, la quantité

Fig. 7.



$\rho = \xi + \eta i$ par le point dont les coordonnées sont ξ et η; soient A et B les points qui figurent les quantités a, b (ces points sont situés sur l'axe $O\xi$).

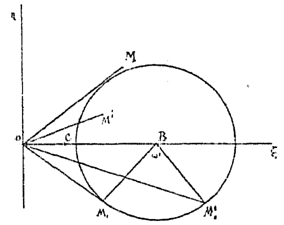
Soient M le point qui figure la valeur initiale de ρ, M' le point qui figure la valeur de ρ', obtenue en faisant décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point critique $x = 0$:

$$\rho' - a = \mathrm{K}(\rho - a).$$

La quantité $\rho - a$ sera figurée par l'extrémité d'un segment mené par l'origine, égal et parallèle au segment AM; si l'on fait tourner ce segment d'un angle ω autour du point A, ω étant égal à $2\pi(\gamma - 1)$, on obtient le segment AM', dont l'extrémité M' figure précisément la quantité ρ'. Si le lacet était décrit dans le sens inverse, on tomberait sur le point M'_1, obtenu en faisant tourner le segment AM autour du point A, mais en sens inverse. La variable décrivant une suite de lacets autour du point O, les diverses valeurs de ρ seront figurées par les sommets d'un polygone régulier inscrit dans la circonférence de rayon AM, l'un des sommets étant précisément le point M.

Supposons maintenant (*fig.* 8) que la variable décrive un lacet autour du point critique $x=1$. Soit M le point qui figure la valeur ini-

Fig. 8.



tiale de ρ; $\frac{1}{\rho}$ sera figuré par le point M_1, $\frac{1}{\rho}-b$ par l'extrémité d'un segment mené par l'origine, égal et parallèle à BM_1, et $K'\left(\frac{1}{\rho}-b\right)$ par l'extrémité d'un segment égal et parallèle au segment BM'_1, qui n'est autre que le segment BM_1, que l'on a fait tourner d'un angle $\omega'=2\pi(\alpha+\beta-\gamma)$ autour du point B. Par suite, le point M'_1 figure la quantité $\frac{1}{\rho'}$ et le point M' la quantité ρ'.

Faisons décrire à la variable plusieurs lacets successifs autour du point $x=1$; le point $\frac{1}{\rho}$ viendra coïncider avec les sommets d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence de centre B; le point ρ lui-même restera sur une circonférence transformée par rayons vecteurs réciproques de la précédente, avec l'origine pour pôle de transformation et l'unité pour module. Si l'on applique cette transformation à toutes les circonférences ayant pour centre le point B, on obtient évidemment un faisceau de circonférences passant par deux points fixes imaginaires. Il est aisé d'avoir les points-cercles de ce faisceau : on a d'abord l'origine, qui correspond au cercle de rayon infini ayant pour centre le point B, et le point $C=\frac{1}{b}$, provenant du cercle de rayon nul.

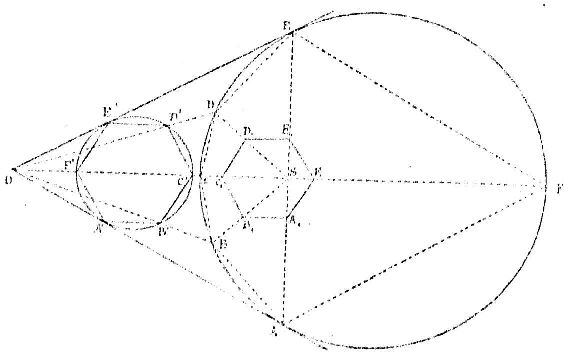
Toutes les circonférences du faisceau seront conjuguées par rapport à ces deux points, qui sont deux points doubles de la transformation homographique

$$\frac{1}{\rho'}-b=K'\left(\frac{1}{\rho}-b\right).$$

Avant d'aller plus loin, je démontrerai le théorème suivant de Géométrie, qui sera utile pour transformer l'énoncé du problème :

Étant donnée une circonférence et n points sur cette circonférence A, B, C, ..., L *tellement disposés que, si l'on fait une inversion en prenant pour pôle un point* O *du plan, les points correspondants* A′, B′, C′, ..., L′ *soient les sommets d'un polygone régulier, soit* O′ *le point conjugué du point* O *par rapport à la circonférence, tous les points de la circonférence décrite sur* OO′ *comme diamètre dans un plan perpendiculaire au plan de la figure jouissent de la même propriété que le point* O.

Fig. 9.



Soit S un point de cette circonférence. D'après une propriété élémentaire de l'inversion,

$$A'B' = \frac{AB}{OA \cdot OB} P,$$

$$A_1 B_1 = \frac{AB}{SA \cdot SB} P_1.$$

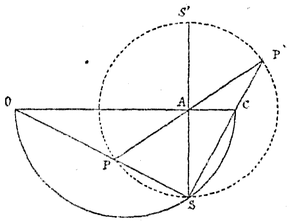
Donc

$$\frac{A_1 B_1}{A'B'} = \left(\frac{P_1}{P}\right) \times \frac{OA}{SA} \times \frac{OB}{SB}.$$

Chacun des rapports $\frac{SA}{OA}$, $\frac{SB}{OB}$ est constant ; donc il en est de même de $\frac{A_1 B_1}{A'B'}$. Si le polygone A′B′C′D′E′F′ a ses côtés égaux, il en sera de même du polygone $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. C. Q. F. D.

Revenons à la question proposée et considérons la circonférence décrite sur OC (*fig.* 10) comme diamètre dans un plan perpendiculaire à celui de la figure; soient S et S′ les points de rencontre de cette circonférence avec la perpendiculaire élevée par le point A au plan de la figure. Concevons la sphère décrite sur SS′ comme diamètre, et faisons une projection sur cette sphère, en prenant le point S pour point de vue.

Fig. 10.



Toutes les circonférences ayant leur centre en A se projettent suivant des circonférences ayant pour pôles les deux points S, S′; quant aux circonférences conjuguées par rapport aux deux points O et C, elles ont pour projections des circonférences ayant PP′ pour axe. Il résulte de ce qui précède qu'étant donné sur la surface de la sphère un point m figurant une valeur de ρ, on trouvera le point m' figurant une nouvelle valeur de ρ en faisant tourner le point m d'un angle ω autour de SS′ ou d'un angle ω' autour de PP′. Cela est évident pour l'axe SS′; quant à l'axe PP′, il suffit de remarquer que, étant donnés dans le plan deux points M, M′ figurant deux valeurs de ρ, dont l'une se déduit de l'autre par l'une des formules (B), (B)′, si l'on fait une inversion avec le point O pour pôle, l'angle $M_1BM'_1$ est égal à ω', et, d'après le théorème précédent, l'angle mpm' doit avoir la même valeur, p désignant le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur l'axe PP′.

On peut donc remplacer l'énoncé du problème par le suivant :

Étant donnés deux diamètres SS′, PP′ *dans une sphère et une suite de points sur la surface, se succédant d'après une loi telle qu'on passe de l'un quelconque au suivant en le faisant tourner d'un angle* ω *autour de* SS′ *ou d'un angle* ω' *autour de* PP′, *dans quels cas aboutira-t-on à un nombre limité de points, l'ordre dans lequel on applique ces constructions restant absolument arbitraire?*

Tout dépend évidemment de l'ordre de symétrie des axes PP′, SS′ et de l'angle V de ces deux axes.

Soient

$$\gamma = \frac{p}{q}, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{p'}{q'}.$$

Les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ étant supposées irréductibles, SS' sera axe de symétrie d'ordre q et PP' d'ordre q'.

Quant à l'angle V, la figure précédente donne

$$V = 2\widehat{AOS},$$

$$\cos\widehat{AOS} = \frac{OA}{OS} = \frac{OA}{\sqrt{OA \times OC}} = \sqrt{\frac{OA}{OC}},$$

$$\cos V = 2\frac{OA}{OC} - 1 = 2ab - 1.$$

Remplaçons a et b par leurs valeurs, il vient

$$\cos V = 2\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha+1-\gamma)} \times \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} - 1,$$

$$\cos V = 2\frac{\sin(\gamma-\alpha)\pi\sin(\gamma-\beta)\pi}{\sin\gamma\pi\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi} - 1.$$

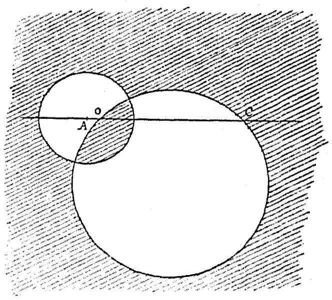
Remarque. — Lorsqu'on diminue ou qu'on augmente la valeur de l'un des nombres α, β, γ d'un nombre quelconque d'unités, q et q' ne changent pas, ni $\cos V$. On pourra donc supposer $1-\gamma$ et $\gamma-\alpha-\beta$ compris entre 0 et 1; on pourra ensuite ramener $\alpha-\beta$ à être compris entre -1 et $+1$; mais, comme il y a symétrie entre les éléments α et β, on pourra supposer aussi $\alpha-\beta$ compris entre 0 et 1. C'est ce que nous ferons pour la suite.

21. La représentation géométrique sur la sphère n'est possible que si le point A est compris entre les points O et C, ou, ce qui revient au même, si le produit $ab = \frac{\sin(\gamma-\alpha)\pi\sin(\gamma-\beta)\pi}{\sin\gamma\pi\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi}$ est compris entre 0 et 1. Dans le cas contraire, on peut démontrer directement que le rapport ρ peut prendre une infinité de valeurs en chaque point du plan. Je m'appuierai, pour cela, sur les remarques suivantes :

I. Il existe un cercle ayant son centre en A et conjugué par rapport au segment OC. Si le point M, qui figure la valeur initiale de ρ, est sur ce cercle, tous les autres points que l'on en déduit sont situés sur le même cercle. Si le point M est extérieur ou intérieur à ce cercle, ceux que l'on en déduit seront eux-mêmes tous extérieurs ou tous intérieurs.

II. Supposons que nous ayons pris pour origine le point A; appelons

Fig. 11.



z et z' les quantités qui sont figurées par les points M et M' dans le nouveau système. Pour la première transformation, on a

$$z' = kz;$$

pour la seconde, z' est liée à z par une relation

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}:$$

$$a = \alpha + \beta i, \quad c = \alpha' + \beta' i,$$
$$b = \gamma + \delta i, \quad d = \gamma' + \delta' i.$$

Cherchons le lieu des points z tels que $\text{mod.}\, z' = \text{mod.}\, z$,

$$\text{mod.}\, z' = \frac{\text{mod.}(az+b)}{\text{mod.}(cz+d)},$$

$$az+b = (\alpha x - \beta y + \gamma) + i(\beta x + \alpha y + \delta),$$

$$\text{mod.}(az+b) = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) + mx + ny + p},$$

$$\text{mod.}(cz+d) = \sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)(x^2+y^2) + m'x + n'y + p'}.$$

Le lieu cherché aura pour équation

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)+mx+ny+p = (\alpha'^2+\beta'^2)(x^2+y^2)^2 + (m'x+x'y+p')(x^2+y^2).$$

C'est une courbe du quatrième ordre, ayant pour points doubles les points circulaires à l'infini. Mais la circonférence de centre A (*fig.* 11), conjuguée au segment OC, fait évidemment partie du lieu; comme les points O et C lui appartiennent également, cette courbe du quatrième ordre se compose de deux circonférences, la circonférence (A) et une autre circonférence passant par les deux points O et C.

Si le point M qui figure la valeur de z est extérieur ou intérieur aux deux circonférences, on aura

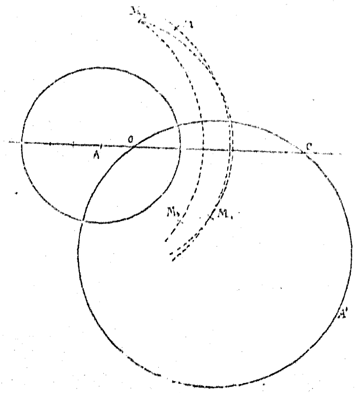
$$\text{mod.}\, z' < \text{mod.}\, z;$$

mais, si ce point est extérieur à l'une, intérieur à l'autre, on aura

$$\text{mod.}\, z' > \text{mod.}\, z.$$

Cela posé, soit M le point qui figure la valeur initiale de ρ, que je suppose extérieur aux deux circonférences (A), (A)'. Appliquons au

Fig. 12.



point M la seconde transformation autant de fois qu'elle nous donne des points différents; nous aurons un certain nombre de points sur une circonférence conjuguée au segment OC. Soit M_1 celui de ces points qui est le plus rapproché du point A; le point M_1 est forcément dans le cercle A', et l'on a $AM_1 < AM$. Appliquons maintenant au point M_1 la première transformation, de façon à obtenir un point M_2 extérieur au cercle A'; on aura $AM_2 = AM_1$. Au point M_2 appliquons la première transformation; nous en déduirons, comme tout à l'heure, un point M_3 plus rapproché de A que le point M_2, et ainsi de suite. On a ainsi une série de points M, M_1, M_2, M_3, ... se succédant d'après une loi telle loi telle qu'on ne retombe jamais sur un point déjà trouvé et qu'on puisse continuer indéfiniment. Le rapport ρ peut donc prendre une infinité de valeurs.

22. La question de Géométrie sphérique à laquelle nous sommes conduits et qui est identique, comme on le verra tout à l'heure, avec la question à laquelle M. Schwarz a été ramené, a été résolue par Steiner (1). On peut aussi déduire la solution d'un Mémoire de M. Jordan (2) sur les polyèdres eulériens.

Il y a deux cas particuliers où la solution s'aperçoit immédiatement:

1° Si l'on a deux axes de symétrie binaire, ces deux axes devront faire entre eux un angle commensurable avec 2π.

2° Si l'on a un axe de symétrie binaire et un axe de symétrie d'ordre K perpendiculaire au premier, on aboutira toujours à un nombre limité de points.

Écartons ces deux cas particuliers et supposons que nous ayons deux axes de symétrie PP', SS', dont l'un PP' est d'ordre $K (K \geqq 3)$. Les répétitions par symétrie de l'axe PP' seront axes de symétrie d'ordre K de la figure formée par les répétitions symétriques d'un point M de la sphère; ces répétitions symétriques devront être en nombre limité: ce qui revient à étudier la figure formée en prenant pour point de départ le point P lui-même. On démontre sans beaucoup de difficulté que, si l'on est conduit à un nombre limité de points, ces points sont les sommets d'un polyèdre régulier.

Les axes PP', SS' devront donc être disposés comme les axes de symétrie d'un polyèdre régulier ayant l'un de ses sommets en P. Il est évident que le plan des deux axes sera pour ce polyèdre un plan de symétrie. Cette condition nécessaire est suffisante. Imaginons, en effet, ce polyèdre régulier et considérons les polygones sphériques réguliers découpés sur la sphère par les pyramides ayant leur sommet au centre de la sphère et pour bases les faces de ce polyèdre. Les répétitions par symétrie de l'un de ces polygones conduiront toujours à un polygone analogue; comme, d'ailleurs, un de ces polygones ne peut coïncider avec lui-même que

(1) *Journal de Crelle*, t. XVIII, p. 295.

(2) *Ibid.*, t. LXVI, p. 22.

d'un nombre limité de manières, il s'ensuit que les répétitions symétriques d'un point seront en nombre limité.

Appliquons cela à quelques exemples.

Exemple I :

$$\gamma = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha + \beta = 0.$$

On a deux axes de symétrie binaire

$$\cos V = 2 \cos \pi\alpha \cos \pi\beta - 1 = \cos 2\alpha\pi.$$

Il suffit que α soit commensurable. On peut le vérifier directement. L'équation différentielle est ici

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\frac{dy}{dx} + \alpha^2 y = 0,$$

$$2x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + (1-2x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\alpha^2 y \frac{dy}{dx} = 0.$$

On en tire

$$d\left[x(1-x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \alpha^2 d(c^2 - y^2),$$

$$\frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{\alpha\, dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$$\arcsin \frac{y}{c} = \alpha \arcsin \sqrt{x} + h.$$

Si α est commensurable, on en déduit une relation algébrique entre y et x.

Exemple II. — Prenons encore l'exemple traité par M. Schwarz :

$$\gamma = \tfrac{2}{3}, \qquad \alpha = -\tfrac{1}{12}, \qquad \beta = \tfrac{1}{4},$$
$$\gamma - \alpha = \tfrac{3}{4}, \quad \gamma - \beta = \tfrac{5}{12}, \quad \gamma - \alpha - \beta = \tfrac{1}{2}.$$

On a un axe de symétrie binaire et un axe de symétrie ternaire. Leur angle est donné par la formule

$$\cos V = \frac{2 \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{12}}{\sin \frac{2\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

C'est précisément l'angle que fait la hauteur dans un tétraèdre régulier avec la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées. L'intégrale générale est donc algébrique.

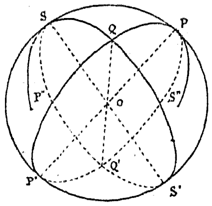
23. Les résultats précédents peuvent être mis sous une forme un peu différente, qui met mieux en évidence leur identité avec les résultats obtenus par M. Schwarz. Supposons que l'on ait d'abord ramené, comme on l'a expliqué plus haut, les trois nombres $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ à être compris entre 0 et 1, et désignons par λ, μ, ν les trois nombres positifs et moindres que l'unité ainsi obtenus :

$$\begin{aligned}\lambda &\equiv 1-\gamma,\\ \mu &\equiv \gamma-\alpha-\beta,\\ \nu &\equiv \alpha-\beta.\end{aligned}$$

Nous allons établir quels sont les systèmes de valeurs de ces trois nombres tels que l'intégrale soit algébrique.

Soient toujours SS' et PP' (*fig.* 13) les deux axes de symétrie.

Fig. 13.



Construisons un triangle SPQ ayant pour base SP et pour angles $PSQ = (1-\gamma)\pi$, $SPQ = (\gamma-\alpha-\beta)\pi$. Évaluons l'angle en Q :

$$\cos Q = \sin P \sin S \cos(SP) - \cos P \cos S,$$

$$\cos Q = \sin\gamma\pi \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi\left[\frac{2\sin(\gamma-\alpha)\pi\sin(\gamma-\beta)\pi}{\sin\gamma\pi\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi}-1\right] + \cos\gamma\pi\cos(\gamma-\alpha-\beta)\pi,$$

ou, en réduisant,

$$\cos Q = \cos(\alpha-\beta)\pi.$$

L'angle Q est compris entre 0 et π; d'ailleurs, on suppose $\alpha-\beta$ compris entre o et 1. On aura, par conséquent,

$$Q = (\alpha - \beta)\pi.$$

Les trois angles du triangle SPQ sont donc

$$S = \lambda\pi,$$
$$P = \mu\pi,$$
$$Q = \nu\pi.$$

Quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire ce triangle? Dans le cas particulier où $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = 0$, les angles S et P sont droits; le point Q est un des pôles du grand cercle SPS′P′. Si l'on construit une double pyramide ayant pour sommets les pôles Q, Q′ et pour base le polygone régulier dont S et P sont deux sommets, les trois plans du trièdre SPQ seront trois plans de symétrie pour cette double pyramide. Si l'axe SS′ est un axe binaire et si l'arc SP est égal à un quadrant, les trois plans du trièdre seront encore trois plans de symétrie pour une double pyramide dont les sommets seront les points P et P′ et dont la base sera dans le plan SQS′Q′.

Ces cas singuliers examinés, voyons ce qui se passe dans le cas général, en supposant qu'il existe un polyèdre régulier admettant les axes de symétrie SS′ et PP′ et ayant un sommet en P. Les trois plans OSP, OPQ, OQS seront trois plans de symétrie pour ce polyèdre; il est d'abord évident que OPS est un plan de symétrie, comme on l'a déjà fait remarquer. Le point P″, symétrique de P par rapport au plan OSQ, est un des sommets de ce polyèdre; comme on peut partir du point P″ au lieu du point P pour trouver les sommets de ce polyèdre, il est clair que la figure admet OSQ pour plan de symétrie. Elle admet aussi OQP; en effet, le point S″ sera l'extrémité d'un axe de symétrie de même ordre que SS′; si nous remplaçons l'axe OS par l'axe OS″, nous formons évidemment la même figure. Donc OQP est un plan de symétrie.

Ainsi, les trois faces du triangle PQS devront être trois plans de symétrie d'un polyèdre régulier. La réciproque est aisée à démontrer; en effet, tout corps admettant ces trois plans de symétrie OPS, OSQ, OQP admettra aussi OSP″ comme plan de symétrie. Si l'on prend le corps symétrique du premier par rapport au plan OSQ, puis le symétrique de ce nouveau corps par rapport au plan OSP″, il coïncidera encore avec lui-même; mais ces deux opérations reviennent à faire tourner le corps d'un angle PSP″ $= 2(1-\gamma)\pi$ autour de OS. Donc OS est un axe de symétrie pour ce corps.

En résumé, pour que l'intégrale générale soit algébrique, il faut et il suffit que les trois plans du trièdre OSPQ soient les trois plans de symétrie d'une double pyramide ou d'un polyèdre régulier.

Il faudra d'abord que les trois angles $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ soient les angles d'un triangle sphérique, ce qui exige que l'on ait

$$\begin{gathered}\lambda+\mu+\nu>1,\\ \lambda+1>\mu+\nu,\\ \mu+1>\nu+\lambda,\\ \nu+1>\lambda+\mu.\end{gathered}$$

Ces conditions équivalent à la condition trouvée précédemment que $\frac{\sin(\gamma-\alpha)\pi\sin(\gamma-\beta)\pi}{\sin\gamma\pi\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi}$ doit être compris entre o et 1.

Il revient évidemment au même de considérer le triangle PQS ou l'un des triangles PQS′, QP′S′, QSP′; les angles de ces triangles ont les valeurs suivantes :

PQS	$\lambda\pi$	$\mu\pi$	$\nu\pi$
PQS′.	$\lambda\pi$	$(1-\mu)\pi$	$(1-\nu)\pi$
P′QS.	$(1-\lambda)\pi$	$\mu\pi$	$(1-\nu)\pi$
P′QS′.	$(1-\lambda)\pi$	$(1-\mu)\pi$	$\nu\pi$

On choisira celui de ces triangles pour lequel la somme des angles est la plus petite. Soient $\lambda'\pi$, $\mu'\pi$, $\nu'\pi$ les angles de ce triangle et soient λ'', μ'', ν'' les nombres λ', μ', ν' rangés par ordre de grandeur décroissante. Le Tableau suivant donne les systèmes de valeurs de λ'', μ'', ν'' tels que l'intégrale générale soit algébrique :

	λ''.	μ''.	ν''.	
I...........	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	»	Pyramides doubles.
II........	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Tétraèdre.
III........	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
IV........	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	Cube et octaèdre.
V..........	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
VI..........	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	Dodécaèdre et icosaèdre.
VII........	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
VIII........	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
IX..........	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	
X..........	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	
XI..........	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	
XII........	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	
XIII........	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
XIV........	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	
XV..........	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	

24. On a écarté le cas intermédiaire où le cercle décrit sur OC comme diamètre est tangent à la perpendiculaire SS′, c'est-à-dire le cas où les deux transformations homographiques

$$\rho' - a = \mathrm{K}(\rho - a), \tag{A}$$

$$\frac{1}{\rho'} - b = \mathrm{K}'\left(\frac{1}{\rho} - b\right) \tag{B}$$

ont un point double commun. Les points doubles de la première sont le point $\xi = a$ et le point $\xi = \infty$, ceux de la seconde sont $\xi = 0$, $\xi = \frac{1}{b}$. Si l'on se reporte aux valeurs de a et de b, qui peuvent être nulles, mais non infinies, on voit qu'il peut arriver de trois manières différentes que les deux transformations homographiques aient un point double commun :

1° $a = 0$; il en sera ainsi lorsque l'un des nombres $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$ sera un entier négatif ou nul.

2° $b = 0$; c'est ce qui arrivera si $\gamma - \alpha$ ou $\gamma - \beta$ est nul ou égal à un entier négatif.

3° $ab = 1$; cette condition donne

$$\sin(\gamma - \alpha)\pi \sin(\gamma - \beta)\pi = \sin\gamma\pi \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi$$

ou bien

$$\cos(\alpha - \beta)\pi = \cos(\alpha + \beta)\pi,$$

d'où

$$(\alpha - \beta) \pm (\alpha + \beta) = 2m;$$

l'un des nombres α ou β devra être un nombre entier.

Pour voir ce qui se passe dans chacun de ces cas, supposons le point double commun rejeté à l'infini; les transformations homographiques seront définies par les formules

$$z' - z_0 = K(z - z_0),$$
$$z' - z_1 = K'(z - z_1),$$

les points z_0, z_1 étant les deux autres points doubles. Elles donnent lieu à une construction géométrique fort simple : étant donné dans le plan un point M qui figure une valeur de z, on trouvera le point M′ figurant la valeur de z' en faisant tourner le rayon z_0M d'un angle ω autour de z_0, ou le rayon z_1M d'un angle ω' autour de z_1. Partant d'un point quelconque du plan, il est clair qu'on peut appliquer ces constructions successivement dans un ordre tel qu'on ne retombe jamais sur un point déjà trouvé; par exemple, on s'arrangera de façon que la distance z_0M n'aille jamais en décroissant. Il y a exception pour le point double commun, qui coïncide toujours avec lui-même.

Il y aura donc une intégrale particulière dont la dérivée logarithmique n'admet qu'une seule valeur en chaque point du plan; cette dérivée logarithmique est une fraction rationnelle. Dans l'hypothèse adoptée où les nombres α, β, γ sont réels et rationnels, l'intégrale particulière correspondante sera une fonction algébrique. On voit, de plus, qu'il n'en existera pas d'autre.

Il faut pourtant remarquer que cela cesserait d'être vrai si les deux autres points doubles étaient les mêmes; dans ce cas, toutes les intégrales seraient algébriques. C'est ce qui arriverait si l'on avait à la fois $a = 0$, $b = 0$.

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\tfrac{3}{2}-2x)\frac{dy}{dx}-\tfrac{1}{4}y=0,$$
$$\alpha=\beta=\tfrac{1}{2},\quad \gamma=\tfrac{3}{2}.$$

Elle admet une intégrale particulière algébrique $\frac{1}{\sqrt{x}}$, mais l'intégrale générale

$$\frac{C}{\sqrt{x}}+\frac{C'\arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

est une fonction *transcendante*.

Prenons au contraire l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\tfrac{1}{3}-\frac{2x}{3}\right)\frac{dy}{dx}+\tfrac{20}{9}y=0,$$
$$\alpha=-\tfrac{5}{3},\quad \beta=\tfrac{4}{3},\quad \gamma=\tfrac{1}{3}.$$

On a à la fois $a=0$, $b=0$; l'équation admet les deux intégrales particulières

$$x^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{6x}{5}\right),\quad (1-x)^{\frac{2}{3}}\left[1-\frac{6(1-x)}{5}\right],$$

de sorte que l'intégrale générale est algébrique.

25. On a supposé, dans ce qui précède, que les deux intégrales φ_1 et φ_2 étaient distinctes, c'est-à-dire qu'aucun des deux nombres α, β n'était nul ni égal à un entier négatif. Si cette circonstance se présente, on remplacera φ_2 par une autre intégrale, φ_5 par exemple, et, en opérant comme plus haut, on sera conduit à considérer deux transformations homographiques. Ces deux transformations homographiques auront un point double commun, puisque l'équation (1) admet comme intégrale une fonction entière, dont la dérivée logarithmique est une fraction rationnelle. Si les deux autres points doubles sont différents (ce qui aura lieu, en général), il n'existera pas d'autre intégrale algébrique. Mais, si les deux autres points doubles coïncident, l'intégrale générale sera algébrique. Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que, l'un des éléments α, β étant nul ou égal à un entier négatif, l'autre élément soit égal à un nombre entier positif.

Ainsi l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\tfrac{1}{2}\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

où

$$\alpha=-2,\quad \beta=1,\quad \gamma=\tfrac{1}{2},$$

admet deux intégrales particulières algébriques, et, par suite, l'intégrale générale est algébrique :

$$y=C\left(1-4x+\frac{8x^2}{3}\right)+C'x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

SECONDE PARTIE.

---

1. Les Mémoires de Gauss et de Kummer sur la série hypergéométrique contiennent un grand nombre de formules qui ne rentrent pas dans les formules données plus haut et qui n'ont lieu que lorsque les éléments α, β, γ satisfont à certaines conditions. Le type général de ces formules est le suivant :

$$x^{-p}(1-x)^{-q}\,F(\alpha,\beta,\gamma,x)=t^{p'}(1-t)^{q'}\,F(\alpha',\beta',\gamma',t),$$

t étant une fonction algébrique de x.

La fonction $x^p(1-x)^q t^{p'}(1-t)^{q'}\,F(\alpha',\beta',\gamma',t)$ est alors une intégrale de l'équation différentielle

$$(1)\qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0;$$

de sorte que l'on est ramené à rechercher dans quels cas l'équation (1) admet des intégrales de la forme précédente. Telle est, ou à peu près, la voie suivie par Kummer; mais il n'indique aucun moyen de trouver tous les cas où il existe de pareilles intégrales. C'est ce que je me suis proposé de faire dans la seconde Partie de ce travail.

2. Je me placerai pour cela à un point de vue un peu différent. Désignons, avec Riemann, par $P(x)$ une fonction non uniforme de la variable x, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle n'admet dans toute l'étendue du plan ou de la sphère que trois points critiques, les points 0, 1, ∞ ; elle est holomorphe dans toute région du plan à contour simple, ne renfermant aucun des points 0 et 1.

2° Entre trois branches quelconques de cette fonction P', P'', P''' il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants :

$$C'P' + C''P'' + C'''P''' = 0.$$

3° Chacune des branches de la fonction reste finie pour $x = 0$, $x = 1$, et aussi pour $x = \infty$, quand on la multiplie par une puissance convenable de x ou de $1 - x$.

Riemann a démontré, dans un de ses Mémoires, que certaines branches de la fonction P pouvaient s'exprimer par des produits tels que $x^{-p}(1-x)^{-q}F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. On peut aujourd'hui le démontrer plus simplement. Il résulte en effet d'un théorème donné par M. Tannery [1] que les diverses branches de la fonction P sont des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients uniformes, n'admettant d'autre point critique que les points 0, 1, ∞, toutes ces intégrales étant d'ailleurs *régulières* dans le voisinage d'un point critique. Ainsi que l'a montré M. Fuchs, cette équation sera de la forme

$$(2)\quad x^2(1-x)^2\frac{d^2P}{dx^2} + [l - (l+m)x]x(1-x)\frac{dP}{dx} + (Ax^2 + Bx + C)P = 0.$$

On passe de l'équation (1) à l'équation (2) en posant

$$y = x^p(1-x)^q P;$$

A, B, C, l, m sont donnés par les formules

$$(3)\quad \begin{cases} l = 2p + \gamma, \quad m = 2q + \alpha + \beta + 1 - \gamma, \quad A = (p + q + \alpha)(p + q + \beta), \\ C = p(p - 1 + \gamma), \quad A + B + C = q(q + \alpha + \beta - \gamma). \end{cases}$$

[1] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IV, p. 130.

Inversement, on passera de l'équation (2) à l'équation (1) en posant $P = x^{-p}(1-x)^{-q} y$; α, β, γ, p, q seront déterminés en fonction de A, B, C, l, m par les formules (3). Le théorème de Riemann est démontré par là même.

[*Pour achever de définir la fonction* P, *il faut ajouter la condition suivante : si* P′, P″ *sont deux branches linéairement distinctes, le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} P' & P'' \\ \dfrac{dP'}{dx} & \dfrac{dP''}{dx} \end{vmatrix}$$

devra être différent de zéro pour tout point du plan autre que les points 0 *et* 1. *Si en effet ce déterminant était nul pour* $x = a$, *le point* $x = a$ *serait pour l'équation différentielle un point* À APPARENCE SINGULIÈRE. *Considérons, par exemple, les intégrales de l'équation* (1); *il est clair qu'elles satisfont aux conditions qui servent à définir la fonction* P. *Si l'on multiplie toutes ces intégrales par le binôme* $(x-2)$, *il en est de même, au premier abord, des nouvelles fonctions ainsi obtenues. Cependant, elles satisfont à l'équation différentielle linéaire*

$$\begin{aligned} & x(1-x)(x-2)^2 \frac{d^2 z}{dx^2} \\ & \quad + \{[\gamma - (\alpha+\beta+1)x](x-2) - 2x(1-x)\}(x-2)\frac{dz}{dx} \\ & \quad + \{2x(1-x) + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma](x-2) - \alpha\beta(x-2)^2\} z = 0, \end{aligned}$$

qui n'est pas comprise dans la forme (2). *Mais le déterminant* D *est évidemment nul pour le point* $x = 2$.]

Remarquons qu'étant donné un système de valeurs pour A, B, C, l, m, il en résulte quatre systèmes de valeurs pour p, q, α, β, γ; l'équation (2), et par suite l'équation (1), admet donc quatre intégrales de la forme $x^{-p}(1-x)^{-q} F(\alpha, \beta, \gamma, x)$: résultat bien connu.

Soit maintenant t une nouvelle variable liée à x par la relation $x = \varphi(t)$; si, relativement à t, la fonction P satisfait aux mêmes conditions que relativement à x, quand on fera dans l'équation (2) le changement de variable $x = \varphi(t)$, on devra trouver une équation différentielle (4), analogue à l'équation (2),

$$(4)\quad t^2(1-t)^2\frac{d^2P}{dt^2}+[l'-(l'+m')t]t(1-t)\frac{dP}{dt}+(A't^2+B't+C')P=0.$$

Il est clair que le problème traité par Kummer rentre dans celui-ci; si, en effet, l'équation (1) admet une intégrale

$$x^p(1-x)^q t^{p'}(1-t)^{q'}F(\alpha', \beta', \gamma', t),$$

l'équation (2) admettra l'intégrale

$$t^{p'}(1-t)^{q'}F(\alpha', \beta', \gamma', t).$$

Si donc dans l'équation (2) on fait le changement de variable $x=\varphi(t)$, on devra obtenir une équation différentielle telle que l'équation (4).

La question qui se pose est donc la suivante :

Reconnaître pour quelles valeurs des constantes A, B, C, l, m *il existe des changements de variable* $x=\varphi(t)$ *par lesquels l'équation* (2) *ne change pas de forme,* A, B, C, l, m *étant remplacés simplement par des constantes nouvelles* A', B', C', l', m'.

Quand on aura trouvé les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients A, B, C, l, m, les relations (3) donneront les conditions que doivent remplir les éléments α, β, γ eux-mêmes.

3. Dans l'équation (2), faisons le changement de variable $x=\varphi(t)$; on a, en désignant par x' et x'' les dérivées de x par rapport à t,

$$\frac{dP}{dx}=\frac{\frac{dP}{dt}}{x'},$$

$$\frac{d^2P}{dx^2}=\frac{\frac{d^2P}{dt^2}}{x'^2}-\frac{x''\frac{dP}{dt}}{x'^3},$$

de sorte que la nouvelle équation différentielle sera

$$\frac{x^2(1-x)^2}{x'^2}\frac{d^2P}{dt^2}+\left[\frac{l-(l+m)x}{x'}x(1-x)-\frac{x''x^2(1-x)^2}{x'^3}\right]\frac{dP}{dt}+(Ax^2+Bx+C)P=0.$$

Supposons x, x', x'' remplacés par leurs valeurs en fonction de t.

Pour que la nouvelle équation ait la forme voulue, il faudra que l'on ait

$$\frac{x^2(1-x)^2}{x'^2(Ax^2+Bx+C)} = \frac{t^2(1-t)^2}{A't^2+B't+C'}, \tag{5}$$

$$\frac{l-(l+m)x}{x(1-x)}x' - \frac{x''}{x'} = \frac{l'-(l'+m')t}{t(1-t)}. \tag{6}$$

Cette dernière équation peut être intégrée une fois, car elle n'est autre que

$$\frac{d}{dt}\mathrm{L}[x^l(1-x)^m] - \frac{d}{dt}\mathrm{L}(x') = \frac{d}{dt}\mathrm{L}[t^{l'}(1-t)^{m'}].$$

On pourra donc remplacer le système des équations (5) et (6) par un système formé de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x(1-x)}dx = \frac{\sqrt{A't^2+B't+C'}}{t(1-t)}dt, \tag{5}$$

$$\frac{dx}{x^l(1-x)^m} = \frac{\mathrm{K}\,dt}{t^{l'}(1-t)^{m'}}. \tag{7}$$

Les constantes A', B', C', l', m', K sont arbitraires; il s'agit de voir dans quels cas on peut les déterminer de façon que les équations (5) et (7) aient une intégrale commune.

4. On aperçoit sans peine cinq transformations qui réussissent dans tous les cas, quelles que soient les valeurs de A, B, C, l, m; ce sont les suivantes :

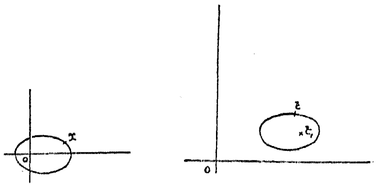
$$x = 1-t, \quad x = \frac{1}{t}, \quad x = \frac{1}{1-t}, \quad x = \frac{t}{t-1}, \quad x = \frac{t-1}{t}.$$

Ce résultat est d'ailleurs évident si l'on se reporte à la définition de la fonction P. Si une fonction multiforme vérifie les conditions exigées quand on prend x pour variable, il est clair qu'elle les vérifiera aussi quand on prendra l'une quelconque des variables $1-x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x-1}{x}$, car les valeurs de l'une d'elles, pour les valeurs 0, 1, ∞ attribuées à x, sont aussi 0, 1, ∞ dans un certain ordre. Il résulte de là une méthode très simple pour retrouver les vingt-quatre intégrales de

Kummer, lorsque les éléments α, β, γ sont quelconques. Je ne m'y arrêterai pas.

J'ajoute qu'il ne peut exister de transformation du premier degré par rapport aux deux variables, différente de celles-là. Considérons la transformation $x = \frac{at+b}{ct+d}$. Si les valeurs de t, qui correspondent aux valeurs $0, 1, \infty$ attribuées à x sont aussi $0, 1, \infty$ dans un certain ordre, la transformation sera l'une des précédentes. Supposons, au contraire, que pour $x=0$, par exemple, t prenne une valeur finie t_1, différente de 0 et de 1 (*fig.* 14). Faisons décrire à la variable x un

Fig. 14.



petit lacet entourant l'origine : le point t décrira un petit lacet entourant le point t_1. Après un pareil chemin, une intégrale quelconque de l'équation (4) reviendra à sa valeur initiale : le point $x=0$ ne serait donc pas lui-même un point critique pour l'équation (2), ce qui est contre l'hypothèse.

On voit de plus que, si pour des valeurs convenables de A, B, C, l, m on peut faire la transformation $x=\varphi(t)$, on pourra, pour les mêmes valeurs des constantes, faire les cinq autres transformations

$$x=\varphi(1-t), \quad x=\varphi\left(\frac{1}{t}\right), \quad x=\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right), \quad x=\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right), \quad x=\varphi\left(\frac{t-1}{t}\right).$$

De la forme des équations (5) et (7) on peut encore déduire d'autres conséquences. Si pour des valeurs de A, B, C, l, m on peut faire deux transformations différentes $x=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$, pour des valeurs convenables des mêmes constantes on pourra faire la transformation $\varphi(x)=\psi(t)$. Ainsi, d'une transformation $x=\varphi(t)$ on pourra déduire toutes celles que l'on obtient soit en remplaçant x par $1-x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x-1}{x}$, soit en remplaçant t par $1-t$, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$,

$\frac{t-1}{t}$, soit en faisant les deux opérations simultanément, ce qui fait en tout trente-six transformations, pouvant d'ailleurs n'être pas toutes différentes. Nous déterminerons en même temps toutes ces transformations, ainsi que les transformations inverses.

5. Si les équations (5) et (7) admettent une intégrale commune, cette intégrale vérifiera aussi l'équation obtenue en divisant ces deux équations membre à membre :

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}\,x^{l-1}(1-x)^{m-1} = K\sqrt{A't^2+B't+C'}\,t^{l'-1}(1-t)^{m'-1}.$$

Prenons la dérivée logarithmique; il vient

$$\begin{aligned} dx&\left[\frac{2Ax+B}{2(Ax^2+Bx+C)}+\frac{l-1}{x}+\frac{m-1}{x-1}\right]\\ &= dt\left[\frac{2A't+B'}{2(A't^2+B't+C')}+\frac{l'-1}{t}+\frac{m'-1}{t-1}\right]. \end{aligned}$$

Remplaçons dx et dt par des quantités proportionnelles tirées de l'équation (5) et élevons au carré; il vient finalement

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\{(2Ax+B)x(x-1)+2(Ax^2+Bx+C)[(l-1)(x-1)+(m-1)x]\}^2}{(Ax^2+Bx+C)^3}\\ &\quad=\frac{\{(2A't+B')t(t-1)+2(A't^2+B't+C')[(l'-1)(t-1)+(m'-1)t]\}^2}{(A't^2+B't+C')^3}. \end{aligned}\right.$$

Si cette relation n'est pas une identité, on voit que x sera lié à t par une équation algébrique qui sera au plus du sixième degré par rapport à chacune des variables.

La relation (8) sera une identité si les deux membres sont nuls ou s'ils se réduisent à des quantités constantes et égales.

1° Pour que les deux membres de l'équation (8) soient identiquement nuls, il faut et il suffit que

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}\,x^{l-1}(1-x)^{m-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{A't^2+B't+C'}\,t^{l'-1}(1-t)^{m'-1}$$

se réduisent à des constantes; $Ax^2+Bx+C=0$ ne devra admettre d'autre racine que 0 et 1, et, de même, $A't^2+B't+C'=0$. Toutes les combinaisons possibles sont résumées dans le Tableau ci-dessous :

1er cas.	2e cas.	3e cas.	4e cas.	5e cas.	6e cas.
$A+B=0$,	$A=0$,	$A=0$,	$A=C$,	$A=0$,	$B=0$,
$C=0$,	$C=0$,	$B+C=0$,	$B-2A=0$,	$B=0$,	$C=0$,
$l=m=\frac{1}{2}$,	$l=\frac{1}{2},\ m=1$,	$l=1,\ m=\frac{1}{2}$,	$l=1,\ m=0$,	$l=m=1$,	$l=0,\ m=1$.
$\lambda=\pm\frac{1}{2}$,	$\lambda=\pm\frac{1}{2}$,	$\mu=\pm\frac{1}{2}$,	$\mu=\pm 1$,	$\nu=\pm 1$,	$\lambda=\pm 1$,
$\mu=\pm\frac{1}{2}$,	$\nu=\pm\frac{1}{2}$,	$\nu=\pm\frac{1}{2}$,	$\lambda=\pm\nu$,	$\lambda=\pm\mu$,	$\mu=\pm\nu$.

On a inscrit au-dessous les conditions correspondantes que doivent remplir les éléments α, β, γ; λ, μ, ν désignent respectivement les quantités $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$:

$$\lambda=1-\gamma, \quad \mu=\gamma-\alpha-\beta, \quad \nu=\beta-\alpha.$$

On aura pour A', B', C', l', m' des conditions identiques. Dans chacun de ces cas, les équations (5) et (7) se réduisent à une seule et l'on peut faire une infinité de changements de variable qui n'altèrent pas la forme de l'équation (2). Par exemple, si l'on a $A+B=0$, $C=0$, $l=m=\frac{1}{2}$, il suffira de prendre pour x une intégrale de l'une des équations différentielles suivantes, où K est arbitraire :

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{K\,dt}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{K\,dt}{(1-t)\sqrt{t}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{K\,dt}{t\sqrt{1-t}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{K\,dt}{t}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{K\,dt}{1-t}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{K\,dt}{t(1-t)}.$$

Il est aisé de s'assurer que, dans tous ces cas, l'intégrale générale de l'équation (4), et par suite de l'équation (2), s'exprime au moyen de fonctions élémentaires. Je remarque d'abord qu'on peut ramener le deuxième et le troisième cas au premier en changeant x en $\frac{x}{x-1}$ ou en $\frac{1}{x}$; de même, le cinquième et le sixième cas se ramènent au quatrième par le changement de x en $\frac{1}{1-x}$ ou en $1-x$. Il reste à considérer les deux équations

$$x(1-x)\frac{d^2P}{dx^2}+(\tfrac{1}{2}-x)\frac{dP}{dx}+AP=0,$$

$$x^2\frac{d^2P}{dx^2}+x\frac{dP}{dx}+AP=0.$$

L'intégrale générale de la première équation est, comme on l'a déjà vu,

$$\arcsin\frac{P}{C_1}=\sqrt{A}\arcsin\sqrt{x}+C_2.$$

Quant à la seconde, l'intégrale générale est

$$P=C_1x^r+C_2x^{-r},$$

r désignant $\sqrt{-A}$. Comme cas particulier, si A était nul, l'intégrale générale serait

$$P=C_1+C_2\,L(x).$$

2° Il peut arriver que les deux membres de l'équation (8) se réduisent à des constantes; il faudra pour cela que Ax^2+Bx+C admette comme facteur double x ou $x-1$ ou se réduise à une constante. On a inscrit ci-dessous toutes les combinaisons possibles :

1er cas.	2e cas.	3e cas.
$B=0$,	$A=C$,	$A=0$;
$C=0$,	$B-2A=0$,	$B=0$,
$l=0$,	$m=0$,	$l+m=2$,

On trouve pour α, β, γ les mêmes conditions que dans les trois derniers cas examinés.

Supposons, par exemple, $A=C$, $B-2A=0$, $m=0$; on pourra faire l'une quelconque des transformations

$$x=K_1t^n,\quad x=K_1(1-t)^n,\quad x=K_1\left(\frac{t}{t-1}\right)^n,$$

où K_1 et n sont arbitraires. On voit sans peine que l'intégrale générale de l'équation (2) est encore de la forme

$$P=C_1x^r+C_2x^{r'}.$$

En résumé, lorsque l'équation (8) se réduit à une identité, on peut effectuer sur l'équation (2) une infinité de changements de variable qui n'altèrent pas la forme de cette équation, et l'on pourrait en déduire une infinité de relations rentrant dans le type des formules de Kummer. Mais il est à remarquer que toutes ces relations auraient lieu entre des fonctions qui s'expriment au moyen des fonctions élémentaires, exponentielles, circulaires ou logarithmiques.

6. J'écarte donc ces cas particuliers et je suppose que l'équation (8) ne se réduit pas à une identité; s'il existe une intégrale commune aux deux équations (5) et (7), x sera une fonction algébrique de t au plus du sixième degré par rapport à x et à t. Ce n'est donc que parmi les fonctions algébriques que nous avons à chercher des fonctions qui puissent servir à la transformation de l'équation (2). Nous déterminerons d'abord les transformations rationnelles; on démontrera plus loin que toutes les autres se ramènent à celles-là.

Soit $x = \frac{R}{S}$ une transformation rationnelle; R et S sont deux polynômes d'un degré au plus égal au sixième, et l'un au moins d'un degré supérieur au premier. Parmi les valeurs de t qui correspondent aux valeurs $0, 1, \infty$ attribuées à x, il y en aura au moins une qui sera différente de $0, 1, \infty$. Supposons, par exemple, que pour $x = 0$ on ait $t = 0$, pour $x = \infty$, $t = 1$. Alors R sera égal à Kt^r, S à $K'(1-t)^s$. Les valeurs de t qui correspondent à $x = 1$ sont les racines de l'équation $Kt^r - K'(1-t)^s = 0$. L'un au moins des nombres r, s étant supérieur à l'unité, le premier membre de cette équation ne se réduit pas à une constante; d'ailleurs elle n'admet comme racine ni 0 ni 1. Il y a, par conséquent, des valeurs finies de t correspondant à $x = 1$ qui ne sont ni 0 ni 1.

Je suppose donc que pour $x = 0$, par exemple, t prenne une valeur finie t_1, qui n'est ni zéro ni l'unité. Le point $x = 0$ sera un point critique pour la valeur de t, qui devient égale à t_1. En effet, faisons décrire à la variable x un petit lacet autour de l'origine (*fig.* 14); si t était une fonction holomorphe de x dans le voisinage du point $x = 0$, cette variable reviendrait à sa valeur initiale après avoir décrit un petit lacet autour du point t_1. On en conclurait comme plus haut que l'origine n'est pas un point critique pour l'équation différentielle (2).

Il faudra par conséquent que plusieurs valeurs de t deviennent égales à t_1 pour $x=0$; soit n leur nombre. On aura

$$x=(t-t_1)^n f(t),$$

$f(t)$ étant une fonction rationnelle de t qui n'est ni nulle ni infinie pour $t=t_1$. On aura de même

$$\frac{dx}{dt}=(t-t_1)^{n-1} f_1(t),$$

$f_1(t)$ jouissant des mêmes propriétés que $f(t)$ relativement au point t_1.

D'ailleurs, d'après l'équation (5),

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x(1-x)}{t(1-t)}\frac{\sqrt{A't^2+B't+C'}}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}.$$

Le quotient $\frac{1-x}{t(1-t)}$ est différent de zéro pour $t=t_1$. Si aucun des deux trinômes $A't^2+B't+C'$, Ax^2+Bx+C n'est nul pour $x=0$, $t=t_1$, on aura

$$\frac{dx}{dt}=(t-t_1)^n\psi(t),$$

$\psi(t)$ étant une fonction uniforme de t dans le voisinage du point t_1 et différente de zéro pour $t=t_1$, ce qui est évidemment absurde. Si $A't^2+B't+C'$ était nul pour $t=t_1$ sans que C fût nul, on aurait

$$\frac{dx}{dt}=(t-t_1)^{n+\frac{1}{2}}\psi(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt}=(t-t_1)^{n+1}\psi(t),$$

$\psi(t)$ ayant la même signification que plus haut, ce qui est encore impossible.

D'où l'on conclut que :

Si, pour $x=0$, t prend une valeur finie t_1 différente de zéro et de l'unité, il faudra que le coefficient C *soit nul.*

7. Reste à trouver les valeurs que peut prendre le nombre entier n. Plusieurs suppositions sont à examiner :

Première hypothèse :

$$A' t_1^2 + B' t_1 + C' \lessgtr 0, \quad B \lessgtr 0.$$

On aura

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}\,\psi(t) = (t - t_1)^{\frac{n}{2}} \psi_1(t).$$

D'ailleurs

$$\frac{dx}{dt} = (t - t_1)^{n-1} f_1(t).$$

Il faudra donc que

$$\frac{n}{2} = n - 1, \quad \text{d'où} \quad n = 2.$$

Deuxième hypothèse :

$$A' t_1^2 + B' t_1 + C' \lessgtr 0, \quad B = 0.$$

On aurait

$$\frac{dx}{dt} = \psi(t), \quad \text{d'où} \quad n = 1.$$

Donc cette hypothèse est à rejeter.

Troisième hypothèse :

$$A' t_1^2 + B' t_1 + C' = 0, \quad 2A' t_1 + B' \lessgtr 0, \quad B \lessgtr 0.$$

On aura

$$\frac{dx}{dt} = (t - t_1)^{\frac{n+1}{2}} \psi(t), \quad \text{d'où} \quad \frac{n+1}{2} = n - 1, \quad n = 3.$$

Quatrième hypothèse :

$$A' t_1^2 + B' t_1 + C' = 0, \quad 2A' t_1 + B' \lessgtr 0, \quad B = 0.$$

On aura

$$\frac{dx}{dt} = (t - t_1)^{\frac{1}{2}} \psi(t), \quad \text{d'où} \quad n = \tfrac{3}{2}.$$

La transformation étant supposée rationnelle, cette hypothèse est à rejeter.

Cinquième hypothèse :

$$A' t_1^2 + B' t_1 + C' = 0, \quad 2A' t_1 + B' = 0, \quad B \lesseqgtr 0.$$

On aura

$$\frac{dx}{dt} = (t - t_1)^{\frac{n}{2}+1} \psi(t),$$

d'où l'on tire

$$\frac{n}{2} + 1 = n - 1, \quad n = 4.$$

Sixième hypothèse :

$$A' t_1^2 + B' t_1 + C' = 0, \quad 2A' t_1 + B' = 0, \quad B = 0.$$

On aura

$$\frac{dx}{dt} = (t - t_1)\psi(t), \quad \text{d'où} \quad n = 2.$$

Les seules valeurs admissibles pour le nombre entier n sont, par conséquent, 2, 3, 4.

On obtiendra les valeurs correspondantes de l en remarquant que le rapport $\frac{\frac{dx}{dt}}{x^l}$ doit rester fini pour $x = 0$, $t = t_1$, ce qui exige que l'on ait $l = \frac{n-1}{n}$.

8. On prouverait de même que, si t prend une valeur différente de 0, 1, ∞ pour $x = 1$ ou pour $x = \infty$, on devra avoir $A + B + C = 0$ dans le premier cas et $A = 0$ dans le second. Il suffit, pour le voir, de changer x en $1 - x$ ou en $\frac{1}{x}$. En écartant le cas singulier où l'on aurait à la fois $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, on voit que, si l'on attribue à x les valeurs 0, 1, ∞, il y aura au moins une de ces valeurs pour laquelle aucune des valeurs de t ne sera différente de 0, 1, ∞. Nous supposerons que c'est pour la valeur $x = \infty$; nous supposerons en outre que, pour $x = 0$, t prend une valeur finie t_1, différente de 0 et de 1 ; on aura toujours $C = 0$. Il y aura deux cas à distinguer, suivant que parmi les valeurs de t correspondant à $x = 1$ il y en a, ou non, qui ne soient pas 0, 1, ∞.

La transformation aura l'une des formes suivantes :

$$(a)\qquad x = R^n t^r (1-t)^s,$$
$$(b)\qquad x = R^n t^r,$$
$$(c)\qquad x = R^n (1-t)^s,$$
$$(d)\qquad x = R^n,$$
$$(e)\qquad x = \frac{R^n t^r}{(1-t)^s},$$
$$(f)\qquad x = \frac{R^n (1-t)^s}{t^r},$$
$$(g)\qquad x = \frac{R^n}{t^r},$$
$$(h)\qquad x = \frac{R^n}{(1-t)^s},$$
$$(i)\qquad x = \frac{R^n}{t^r (1-t)^s}.$$

R désigne une fonction entière, au plus du troisième degré, qui n'admet aucun facteur double, et qui n'est nulle ni pour $t=0$, ni pour $t=1$; n est un des nombres 2, 3, 4; r et s sont des nombres entiers positifs.

On peut réduire ces transformations à un moindre nombre. Ainsi l'on peut supprimer les formes (c), (f), (h), qui se ramènent aux formes (b), (e), (g) par le changement de t en $1-t$. Prenons encore la transformation (g); soit r' le degré du numérateur.

Si $r' \leqq r$, par le changement de t en $\frac{1}{t}$, $\frac{R^n}{t^r}$ se change en $\frac{R_1^n}{t^{r'-r}}$ ou en $R_1^n t^{r-r'}$ et l'on est ramené à la forme (b) ou à la forme (d). Si $r' > r$, on changera t en $\frac{t-1}{t}$; $\frac{R^n}{t^r}$ se change en $\frac{R_1^n}{t^{r'-r}(1-t)^r}$, et l'on est ramené à la forme (i). Prenons de même la forme (e); soit s' le degré du numérateur. Si $s' \leqq s$, changeons t en $\frac{t}{t-1}$; $\frac{P^n t^r}{(1-t)^s}$ se change en

$$\frac{P_1^n t^r}{(1-t)^{s'-s}} = P_1^n t^r (1-t)^{s-s'},$$

et l'on retombe sur la forme (a) ou la forme (b). Si $s' > s$, on changera t en $\frac{1}{t}$; $\frac{P^n t^r}{(1-t)^s}$ se change en $\frac{P_1^n}{t^{s'-s}(1-t)^s}$, et la transformation est ramenée à la forme (i).

On peut donc se borner à considérer les quatre formes suivantes :

$$(a) \qquad x = \mathrm{R}^n t^r (1-t)^s,$$

$$(b) \qquad x = \mathrm{R}^n t^r,$$

$$(d) \qquad x = \mathrm{R}^n,$$

$$(i) \qquad x = \frac{\mathrm{R}^n}{t^r(1-t)^s}.$$

9. Nous allons maintenant calculer effectivement les coefficients inconnus qui entrent dans ces transformations. Supposons d'abord que pour $x = 1$ aucune valeur de t ne soit différente de $0, 1, \infty$. Si la transformation a la forme (a), les valeurs de t pour $x = 1$ sont données par l'équation

$$\mathrm{R}^n t^r (1-t)^s - 1 = 0.$$

Il est clair que cette équation n'admet pour racine ni $t = 0$, ni $t = 1$, et que le premier membre ne se réduit pas à une constante. Prenons de même la forme (b); l'équation $\mathrm{R}^n t^r - 1 = 0$ ne devra admettre d'autre racine que $t = 1$. Donc on aura

$$\mathrm{R}^n t^r = 1 + \mathrm{H}(1-t)^s.$$

Or le premier membre admet des facteurs multiples, tandis que le second n'en admet pas; l'égalité est impossible.

Si l'on a la forme (d), l'équation $\mathrm{R}^n - 1 = 0$ ne devra admettre d'autre racine que 0 et 1, ce qui exige que n soit égal à 2 et que R soit du premier degré. On trouve sans peine qu'il faut prendre $\mathrm{R} = 2t - 1$, d'où résulte la transformation

$$x = (2t-1)^2.$$

Pour que la forme (i) convienne, il faudra de même que $\mathrm{R}^n - t^r(1-t)^s$ se réduise à une constante H. L'équation $\mathrm{R}^n - \mathrm{H} = 0$ ne devra admettre comme racines que $t = 0$ et $t = 1$. On retombe ainsi dans le cas précédent, ce qui fournit la transformation

$$x = \frac{(2t-1)^2}{4t(t-1)}.$$

Pour que ces transformations puissent être effectuées, il faut que l'on ait $\mathrm{C} = 0$, $l = \frac{1}{2}$. On trouvera ci-après le Tableau des transformations que l'on en déduit par le procédé indiqué plus haut, ainsi que des transformations inverses. On a mis à côté les conditions que doivent remplir les constantes A, B, C, l, m et les éléments α, β, γ eux-mêmes; λ, μ, ν ont la même signification que plus haut.

$C=0$, $l=\frac{1}{2}$, $\lambda=\pm\frac{1}{2}$.	I....	$x=(2t-1)^2$,	$x=\left(\frac{2-t}{t}\right)^2$,	$x=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$,
	II...	$x=\frac{(2t-1)^2}{4t(t-1)}$,	$x=\frac{(2-t)^2}{4(1-t)}$,	$x=\frac{(1+t)^2}{4t}$,
$A+B+C=0$, $m=\frac{1}{2}$, $\mu=\pm\frac{1}{2}$.	III..	$x=4t(1-t)$,	$x=\frac{4(t-1)}{t^2}$,	$x=\frac{-4t}{(1-t)^2}$;
	IV..	$x=\frac{1}{4t(1-t)}$,	$x=\frac{t^2}{4(t-1)}$,	$x=\frac{(1-t)^2}{-4t}$,
$A=0$, $l+m=\frac{3}{2}$, $\nu=\pm\frac{1}{2}$.	V...	$x=\frac{1}{(2t-1)^2}$,	$x=\left(\frac{t}{2-t}\right)^2$,	$x=\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2$,
	VI..	$x=\frac{4t(t-1)}{(2t-1)^2}$,	$x=\frac{4(1-t)}{(2-t)^2}$,	$x=\frac{4t}{(1+t)^2}$,
$A+B=0$, $l=m$, $\lambda=\pm\mu$.	VII..	$x=\frac{1+\sqrt{t}}{2}$,	$x=\frac{1+\sqrt{1-t}}{2}$,	$x=\frac{1+\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$,
		$x=\frac{1+\sqrt{1-t}}{2\sqrt{1-t}}$,	$x=\frac{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}}{2\sqrt{t-1}}$,	$x=\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t-1}}{2\sqrt{t}}$,
	VIII.	$x=\frac{(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})^2}{4\sqrt{t(t-1)}}$,	$x=\frac{(1+\sqrt{1-t})^2}{4\sqrt{1-t}}$,	$x=\frac{(1+\sqrt{t})^2}{4\sqrt{t}}$,
$B+C=0$, $l+2m=2$, $\mu=\pm\nu$.	IX..	$x=\frac{2}{1+\sqrt{t}}$,	$x=\frac{2}{1+\sqrt{1-t}}$,	$x=\frac{2\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$,
		$x=\frac{2\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}$,	$x=\frac{2\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}}$,	$x=\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{t-1}}$,
	X...	$x=\frac{4\sqrt{t(t-1)}}{(\sqrt{t}+\sqrt{t-1})^2}$,	$x=\frac{4\sqrt{1-t}}{(1+\sqrt{1-t})^2}$,	$x=\frac{4\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^2}$,
$A-C=0$, $2l+m=2$, $\lambda=\pm\nu$.	XI..	$x=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$,	$x=\frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}$,	$x=\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$,
		$x=\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}$,	$x=\frac{\sqrt{t}-\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}+\sqrt{t-1}}$,	$x=\frac{\sqrt{t-1}-\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}}$,
	XII..	$x=\left(\frac{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}-\sqrt{t}}\right)^2$,	$x=\left(\frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}\right)^2$,	$x=\left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right)^2$.

Les transformations VII, IX, XI sont les inverses des transformations rationnelles. Quant aux transformations VIII, X, XII, on les obtient en combinant, comme on l'a déjà expliqué, les transformations I et II. On peut aussi les obtenir en combinant III et IV ou V et VI.

Le Tableau précédent renferme toutes les transformations signalées par Kummer, dans le cas où deux des trois éléments α, β, γ sont arbitraires.

10. Supposons maintenant que, pour $x = 1$, plusieurs des valeurs de t soient différentes de 0, 1, ∞ ; on aura à la fois

$$C = 0, \quad A + B = 0.$$

Examinons quelles sont les formes de la transformation qui peuvent convenir.

Soit

$$x = R^n t^r (1 - t)^s.$$

Les valeurs de t pour $x = 1$ sont données par l'équation

$$R^n t^r (1 - t)^s - 1 = 0.$$

Cette équation n'admettant comme racine ni 0 ni 1, il faudra que l'on ait

$$R^n t^r (1 - t)^s = 1 + S^{n'}.$$

S est une fonction entière de même nature que R; n et n' sont un des nombres 2, 3, 4; r et s sont des entiers positifs. Remarquons, en outre, que chacun des membres de cette égalité doit être d'un degré inférieur ou, au plus, égal au sixième, et que l'on ne peut supposer $n = n' = 2$, car on devrait avoir en même temps $l = m = \frac{1}{2}$ et l'on retomberait sur un cas particulier examiné.

Ces distinctions bien établies, nous allons démontrer que l'égalité précédente est impossible. On voit d'abord que S ne pourra être du premier degré, car alors le second membre n'admettrait pas de facteur multiple, le premier en admettant. Supposons

$$S = at^2 + bt + c, \quad n' = 2;$$

n sera égal à 3 ou à 4, et le premier membre sera d'un degré supérieur au quatrième. Soit

$$S = at^2 + bt + c, \quad n' = 3;$$

les deux membres seront du sixième degré; le second membre admet au plus un facteur multiple d'un ordre de multiplicité égal à 2. Il ne peut en être de même du premier membre, car, si R est du premier degré, n égal à 2, l'un au moins des nombres entiers r, s sera supérieur à l'unité.

Supposons enfin

$$S = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad n' = 2;$$

n sera égal à 3 ou à 4, et le premier membre admettra soit un facteur quadruple, soit un facteur triple et un facteur double. Le second membre ne peut admettre de facteur quadruple; il ne peut pas non plus admettre un facteur double et un facteur triple. Le facteur double devrait être t ou $t-1$; supposons que ce soit t: il faudra que l'on ait $c = 0$, $d = 1$, mais alors l'équation

$$at^3 + bt^2 + 2 = 0$$

n'admet pas de racine triple.

Examinons de même la forme (d). Pour que cette forme convienne il faudra que l'on ait

$$R^n - 1 = S^{n'} t^r (1-t)^s.$$

C'est une égalité identique à la précédente, sauf qu'ici r et s peuvent être nuls. On verra d'abord que R ne peut être du premier degré. Si R est du second degré et n égal à 2, on devra prendre, pour n', 3 ou 4, et le second membre admettra un facteur triple ou quadruple, alors que le premier n'en admet pas. Le reste de la discussion s'achève comme tout à l'heure, et l'on démontre que l'égalité précédente est impossible.

Pour que la forme (b) convienne, il faudra que l'on ait

$$R^n t^r - 1 = S^{n'} (1-t)^s,$$

s pouvant être nul. Si s est nul, on retombe dans le cas précédent. Supposons donc r et s différents de zéro. Les fonctions R et S seront au plus du second degré; comme l'un des nombres n, n' doit être supérieur à 2, il faudra que l'une au moins soit du premier degré. Soit

$$R = at + b;$$

je dis que $R^n t^r - 1$ ne peut présenter qu'un facteur multiple, qui est un facteur double. En effet, tout facteur multiple devra diviser la dérivée, c'est-à-dire

$$R^{n-1} t^{r-1}[nat + r(at+b)].$$

La seule racine de la dérivée qui convienne est évidemment donnée par l'équation du premier degré

$$nat + r(at+b) = 0.$$

D'ailleurs, cette racine n'annule pas la dérivée seconde

$$n(n-1)a^2t^2 + 2nrat(at+b) + r(r-1)(at+b)^2 = 0.$$

De la première on tire

$$\frac{at}{r} = \frac{at+b}{-n},$$

et, en portant dans la seconde équation, le résultat est

$$-nr(r+n),$$

toujours différent de zéro, puisque r et n sont des entiers positifs. $S^{n'}(1-t)^s$ ne pourra donc admettre qu'un facteur double; or, si $n'=2$, n est supérieur à 2, le premier membre est au moins du quatrième degré. Donc S devra être du second degré ou s supérieur à l'unité; dans les deux cas, le second membre admet plus d'un facteur multiple.

La seule forme qui puisse convenir est donc la forme (i),

$$x = \frac{R^n}{t^r(1-t)^s}.$$

Les valeurs de t pour $x=1$ ne pourront être ni 0 ni 1; elles devront toutes être racines multiples de l'équation

$$R^n - t^r(1-t)^s = 0,$$

au même degré de multiplicité.

On est alors amené à résoudre le problème suivant :

Trouver deux fonctions entières R *et* S *et deux nombres entiers n, n' de telle sorte que l'équation*

$$R^n - S^{n'} = 0$$

n'admette que les deux racines $t=0$, $t=1$, R, S, n, n' étant soumis aux restrictions déjà indiquées.

On ne peut supposer $n=n'=2$, pour la raison qu'on a vue plus haut. On ne peut pas non plus supposer $n=n'=4$, car l'équation

$$R^4 - S^4 = 0$$

admet toujours plus de deux racines distinctes. Les seules hypothèses admissibles sont les suivantes, en supposant $n \leqq n'$:

$$\begin{array}{llll} n=3, & n=2, & n=2, & n=3, \\ n'=3, & n'=4, & n'=3, & n'=4. \end{array}$$

11. Soit

$$n=n'=3.$$

L'équation $R^3 - S^3 = 0$ équivaut aux trois équations

$$R=S, \quad R=jS, \quad R=j^2S.$$

Le premier membre de l'une d'elles devra se réduire à une constante, et les deux autres devront admettre chacune une racine distincte, ce qui exige qu'elles soient du premier degré.

Soient

$$R=t+u, \quad S=t+v.$$

Il faudra que l'on ait

$$u=j^2v, \quad 1+u=j+jv,$$

d'où l'on tire

$$v=j^2, \quad u=j.$$

On a en effet l'identité

$$(t+j)^3-(t+j^2)^3=3j(j-1)t(1-t),$$

et l'on en déduit la transformation

$$x = \frac{(t+j)^3}{3j(j-1)t(1-t)}.$$

On trouvera ci-dessous les transformations qui se ramènent à celle-là; j désigne une quelconque des racines cubiques imaginaires de l'unité :

$$\text{XIII} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{c} A+B=0, \ C=0, \\ l=m=\frac{2}{3}, \\ \overline{\lambda=\pm\frac{1}{3}, \ \mu=\pm\frac{1}{3}.} \end{array}\right\} \quad x = \frac{(t+j)^3}{3j(j-1)t(1-t)},$$

$$\text{XIV} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{c} A=0, \ C=0, \\ l=m=\frac{2}{3}, \\ \overline{\lambda=\pm\frac{1}{3}, \ \nu=\pm\frac{1}{3}.} \end{array}\right\} \quad x = \frac{(t+j)^3}{(t+j^2)^3},$$

$$\text{XV} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{c} A=0, \ B+C=0, \\ l=m=\frac{2}{3}, \\ \overline{\mu=\pm\frac{1}{3}, \ \nu=\pm\frac{1}{3}.} \end{array}\right\} \quad x = \frac{3j(j-1)t(1-t)}{(t+j)^3}.$$

Transformations inverses.

$$\text{XVI.} \left\{\begin{array}{c} A=C=-B, \\ l=m=\frac{2}{3}, \\ \overline{\lambda=\pm\mu,} \\ \lambda=\pm\nu. \end{array}\right\} \begin{array}{lll} x = \dfrac{j^2\sqrt[3]{t} - j\sqrt[3]{t-1}}{\sqrt[3]{t-1} - \sqrt[3]{t}}, & x = \dfrac{\sqrt[3]{t-1} - \sqrt[3]{t}}{j^2\sqrt[3]{t} - j\sqrt[3]{t-1}}, & x = \dfrac{j^2\sqrt[3]{t} - j}{1 - \sqrt[3]{t}}, \\ x = \dfrac{1 - \sqrt[3]{t}}{j^2\sqrt[3]{t} - j}, & x = \dfrac{j^2\sqrt[3]{1-t} - j}{1 - \sqrt[3]{1-t}}, & x = \dfrac{1 - \sqrt[3]{1-t}}{j^2\sqrt[3]{1-t} - j}. \end{array}$$

12. Soient

$$n = 2, \quad n' = 4.$$

Il s'agit de déterminer deux polynômes R et S tels que

$$R^2 - S^4 = H t^r (1-t)^s,$$

la constante H étant introduite pour faciliter les calculs. Cette identité peut s'écrire

$$(R - S^2)(R + S^2) = H t^r (1-t)^s.$$

On en déduira

$$R - S^2 = H' t^r, \quad R + S^2 = H''(1-t)^s.$$

En effet, les deux équations $R - S^2 = 0$, $R + S^2 = 0$ ne peuvent avoir d'autre racine que o et 1 ; d'ailleurs, ces équations ne doivent pas admettre de racines communes, car une racine commune annulerait R et S. L'une des équations n'admettra donc que la racine $t=0$ et l'autre la racine $t=1$, à moins que le premier membre de l'une d'elles ne se réduise à une constante, circonstance que l'on examinera plus loin.

S est forcément du premier degré, mais R peut être du premier, du deuxième ou du troisième degré. Supposons R du premier degré,

$$R = at + b, \quad S = mt + n,$$
$$R - S^2 = -m^2t^2 + (a - 2mn)t + b - n^2,$$
$$R + S^2 = \quad m^2t^2 + (a + 2mn)t + b + n^2.$$

Comme on peut toujours supposer $n=1$, on devrait avoir à la fois

$$b = 1, \quad a = 2m, \quad m^2 + a + 2m + 2 = 0, \quad 2m^2 + a + 2m = 0,$$

ce qui est impossible.

Prenons R du second degré :

$$R = at^2 + bt + c.$$

Si aucun des trinômes $R - S^2$, $R + S^2$ ne se réduit au premier degré, on devra avoir

$$c = 1, \quad b = 2m, \quad a + m^2 + 4m + 2 = 0, \quad 2a + 2m^2 + 4m = 0;$$

on en tire

$$m = -1:$$

S serait égal à $1 - t$.

Supposons que $R - S^2$ se réduise au premier degré; il faudra que l'on ait

$$c = 1, \quad a = m^2, \quad 2m^2 + 2m + 2 + b = 0, \quad 4m^2 + b + 2m = 0;$$

on en tire successivement

$$m = 1, \quad b = -6, \quad a = 1,$$

d'où l'identité

$$(t^2 - 6t + 1)^2 - (t + 1)^4 = -16t(1 - t)^2.$$

Si R était du troisième degré, il faudrait que l'on ait

$$R - (mt + n)^2 = t^3, \quad R + (mt + n)^2 = (1 - t)^3;$$

d'où l'on tire

$$[(1 - t)^3 - t^3)] = 2(mt + n)^2,$$

égalité impossible, car les deux racines de l'équation $(1-t)^3 - t^3 = 0$ sont distinctes.

Si l'une des fonctions $R - S^2$, $R + S^2$ se réduit à une constante, R sera forcément du second degré. Soit

$$R = m^2 t^2 + 2mt + c, \quad S = mt + 1,$$
$$R + S^2 = 2m^2 t^2 + 4mt + c + 1.$$

Il faudra que l'on ait

$$c = -1, \quad m = -2,$$

d'où l'identité

$$(4t^2 - 4t - 1)^2 - (2t-1)^4 = 16t(1-t),$$

que l'on pourrait déduire de l'identité précédente en changeant t en $\dfrac{t}{t-1}$.

On trouvera ci-dessous le Tableau des transformations correspondantes :

$$\text{XVII..}\left\{\begin{array}{c} A+B=0,\ C=0, \\ l=\frac{1}{2},\ m=\frac{3}{4}, \\ - \\ \lambda=\pm\frac{1}{2},\ \mu=\pm\frac{1}{4}. \end{array}\right\} x = \frac{(t^2-6t+1)^2}{-16t(1-t)^2}, \quad x = \frac{(t^2+4t-4)^2}{-16t^2(1-t)}, \quad x = \frac{(1+4t-4t^2)^2}{16t(1-t)},$$

$$\text{XVIII.}\left\{\begin{array}{c} A+B=0,\ C=0, \\ l=\frac{3}{4},\ m=\frac{1}{2}, \\ - \\ \lambda=\pm\frac{1}{4},\ \mu=\pm\frac{1}{2}. \end{array}\right\} x = \frac{(1+t)^4}{16t(1-t)^2}, \quad x = \frac{(2-t)^4}{16t^2(1-t)}, \quad x = \frac{(2t-1)^4}{-16t(1-t)},$$

$$\text{XIX..}\left\{\begin{array}{c} A=0,\ C=0, \\ l=\frac{1}{2},\ m=\frac{3}{4}, \\ - \\ \lambda=\pm\frac{1}{2},\ \nu=\pm\frac{1}{4}. \end{array}\right\} x = \frac{(t^2-6t+1)^2}{(1+t)^4}, \quad x = \frac{(t^2+4t-4)^2}{(2-t)^4}, \quad x = \frac{(1+4t-4t^2)^2}{(2t-1)^4},$$

$$\text{XX...}\left\{\begin{array}{c} A=0,\ C=0, \\ l=m=\frac{3}{4}, \\ - \\ \lambda=\pm\frac{1}{4},\ \nu=\pm\frac{1}{2}. \end{array}\right\} x = \frac{(1+t)^4}{(t^2-6t+1)^2}, \quad x = \frac{(2-t)^4}{(t^2+4t-4)^2}, \quad x = \frac{(2t-1)^4}{(1+4t-4t^2)^2},$$

$$\text{XXI..}\left\{\begin{array}{c} A=0,\ B+C=0, \\ l=\frac{3}{4},\ m=\frac{1}{2}, \\ - \\ \mu=\pm\frac{1}{2},\ \nu=\pm\frac{1}{4}. \end{array}\right\} x = \frac{16t(1-t)^2}{(1+t)^4}, \quad x = \frac{16t^2(1-t)}{(2-t)^4}, \quad x = \frac{-16t(1-t)}{(2t-1)^4},$$

$$\text{I..}\left\{\begin{array}{c} A=0,\ B+C=0, \\ l=m=\frac{3}{4}, \\ \text{—} \\ \mu=\pm\frac{1}{4},\ \nu=\pm\frac{1}{2}. \end{array}\right\} \quad x=\frac{-16(1-t)^2}{(t^2-6t+1)^2},\quad x=\frac{-16t^2(1-t)}{(t^2+4t-4)^2},\quad x=\frac{16t(1-t)}{(1+4t-4t^2)^2}.$$

Transformations inverses.

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{c} A=C,\ B=2A, \\ l=\frac{3}{4},\ m=\frac{1}{2}, \\ \text{—} \\ \lambda=\pm\frac{\mu}{2}=\pm\nu. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(x^2-6x+1)^2}{-16x(1-x)^2}=t, & \dfrac{(1+x)^4}{16x(1-x)^2}=t, & \dfrac{(x^2-6x+1)^2}{(1+x)^4}=t, \\[2ex] \dfrac{(1+x)^4}{(x^2-6x+1)^2}=t, & \dfrac{16x(1-x)^2}{(1+x)^4}=t, & \dfrac{-16x(1-x)^2}{(x^2-6x+1)^2}=t, \end{array}\right.$$

$$\text{IV.}\left\{\begin{array}{c} C=4A,\ B=-4A, \\ l=\frac{1}{2},\ m=\frac{3}{4}, \\ \text{—} \\ \frac{\lambda}{2}=\pm\mu=\pm\nu. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(x^2+4x-4)^2}{-16x^2(1-x)}=t, & \dfrac{(2-x)^4}{16x^2(1-x)}=t, & \dfrac{(x^2+4x-4)^2}{(2-x)^4}=t, \\[2ex] \dfrac{(2-x)^4}{(x^2+4x-4)^2}=t, & \dfrac{16x^2(1-x)}{(2-x)^4}=t, & \dfrac{-16x^2(1-x)}{(x^2+4x-4)^2}=t, \end{array}\right.$$

$$\text{V..}\left\{\begin{array}{c} A=4C,\ B=-4C, \\ l=\frac{3}{4},\ m=\frac{3}{4}, \\ \text{—} \\ \lambda=\pm\mu=\pm\frac{\nu}{2}. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(1+4x-4x^2)^2}{16x(1-x)}=t, & \dfrac{(2x-1)^4}{-16x(1-x)}=t, & \dfrac{(1+4x-4x^2)^2}{(2x-1)^4}=t, \\[2ex] \dfrac{(2x-1)^4}{(1+4x-4x^2)^2}=t, & \dfrac{-16x(1-x)}{(2x-1)^4}=t, & \dfrac{16x(1-x)}{(1+4x-4x^2)^2}=t, \end{array}\right.$$

13. Soit

$$n=2,\quad n'=3.$$

Il faut déterminer R et S de telle sorte que l'on ait

$$R^2-S^3=H\,t^r(1-t)^s.$$

R peut être du premier, du deuxième ou du troisième degré; S peut être du premier ou du deuxième degré, ce qui fait en tout six cas à examiner.

Premier cas. — Supposons R et S du premier degré,

$$R=at+b,\quad S=mt+n,$$

le polynôme R^2-S^3 sera du troisième degré; il admettra un facteur double et un facteur simple. Soit t le facteur double; il faudra que l'on ait

$$b^2=n^3,\quad 2ab=3mn^2,\quad (a+b)^2=(m+n)^3.$$

On peut toujours prendre $b = 1$, $n = 1$. On aura alors

$$a = \frac{3m}{2},$$

et par suite

$$\left(\frac{3m}{2} + 1\right)^2 = (m+1)^3$$

On en tire

$$m = -\tfrac{3}{4}, \quad a = -\tfrac{9}{8},$$

d'où l'identité

$$(9t - 8)^2 - (4 - 3t)^3 = -27t^2(1 - t).$$

Deuxième cas. — Supposons R du deuxième degré, S du premier degré :

$$R = at^2 + bt + c, \quad S = mt + n.$$

Le polynôme $R^2 - S^3$ sera du quatrième degré; il ne peut admettre deux facteurs doubles. Si l'on avait

$$R^2 - S^3 = Ht^2(1 - t)^2,$$

on en conclurait

$$S^3 = R^2 - Ht^2(1 - t)^2.$$

Or l'équation $R^2 - Ht^2(1 - t)^2 = 0$ se dédouble en deux équations au plus du deuxième degré,

$$R = \pm\sqrt{H}\, t(1 - t),$$

et par conséquent ne peut admettre de racine triple; $S^2 - R^3$ aura donc un facteur triple et un facteur simple.

Soit t le facteur triple, on aura les conditions

$$c^2 = n^3, \quad 2bc = 3mn^2, \quad b^2 + 2ac = 3m^2n, \quad (a + b + c)^2 = (m + n)^3.$$

Prenons $n = 1$, $c = 1$; on en tire

$$b = \frac{3m}{2}, \quad a = \frac{3m^2}{8}, \quad \frac{9m^4}{64} + \frac{9m^3}{8} = m^3,$$

par conséquent

$$m = -\tfrac{8}{9}, \quad b = -\tfrac{4}{3}, \quad a = \tfrac{8}{27},$$

d'où résulte l'identité

$$(8t^2 - 36t + 27)^2 - (9 - 8t)^3 = -64t^3(1 - t).$$

Troisième cas. — Soient R du troisième degré et S du premier degré :

$$R = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad S = mt + n.$$

$R^2 - S^3$ admettra un facteur quadruple et un facteur double, ou deux facteurs triples, ou un facteur quintuple et un facteur simple.

On ne peut avoir $R^2 - S^3 = t^4(1 - t)^2$, car on en tirerait

$$S^3 = R^2 - t^4(1 - t)^2.$$

Pour que l'équation $R^2 - t^4(1 - t)^2 = 0$ admette seulement une racine triple, il faudra que l'on ait

$$R = t^2(1 - t) + H;$$

mais alors l'équation $R + t^2(1 - t) = 0$ devient $2t^2(1 - t) + H = 0$ et n'admet jamais une racine triple.

On ne peut pas avoir non plus $R^2 - S^3 = Ht^3(1 - t)^3$, car on en tirerait

$$R^2 = S^3 + Ht^3(1 - t)^3,$$

et le second membre n'admet dans aucun cas trois facteurs doubles.

Il reste à examiner si l'on peut avoir

$$R^2 - S^3 = Ht^5(1 - t).$$

Prenons $n = 1$, $d = 1$; il faudra que l'on ait

$$2c = 3m, \quad 2c^2 + 4b = 6m^2, \quad 2bc + 2a = m^3, \quad b^2 + 2ac = 0,$$
$$(a + b + c + 1)^2 = (m + 1)^3;$$

on en tire successivement

$$c = \frac{3m}{2}, \quad b = \frac{3m^2}{8}, \quad a = -\frac{m^3}{16},$$

et, en portant dans la quatrième relation, on arrive à la condition

$$\frac{9m^4}{64} - \frac{3m^4}{16} = 0, \quad \text{d'où} \quad m = 0.$$

Cette hypothèse est donc à rejeter.

Quatrième cas. — Supposons R du premier degré et S du deuxième degré,

$$R = at + b, \quad S = mt^2 + n + p.$$

$R^2 - S^3$ ne pourra admettre deux facteurs triples. Si l'on avait

$$R^2 - S^3 = t^3(1 - t)^3,$$

on en déduirait

$$R^2 = S^3 + t^3(1 - t)^3;$$

or le second membre admet évidemment plus d'un facteur distinct.

Si l'on avait

$$S^3 = R^2 - t^4(1 - t)^2,$$

chacune des deux équations $R = \pm t^2(1 - t)$ devrait admettre une racine triple. On aurait

$$R - t^2(1 - t) = (ut + v)^3,$$
$$R + t^2(1 - t) = (u_1 t + v_1)^3.$$

Donc

$$2R = (ut + v)^3 + (u_1 t + v_1)^3;$$

R étant du premier degré, l'égalité est impossible.

Si l'on avait

$$S^2 - R^3 = H t^5 (1 - t),$$

on trouve comme condition

$$n = 0, \quad ab = 0.$$

L'hypothèse ne donne encore rien.

Cinquième cas. — R et S sont du deuxième degré.

On démontre, comme pour les cas précédents, que cette hypothèse est à rejeter.

Sixième cas. — R est du troisième degré et S du deuxième degré :

$$R = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad S = mt^2 + nt + p.$$

$R^2 - S^3$ pourra être d'un degré inférieur au sixième. On ramène par des transformations faciles le second membre de l'identité

$$R^2 - S^3 = H t^r (1 - t)^s$$

à avoir l'une des formes suivantes :

$$\mathrm{H}t^3,\quad \mathrm{H}t^2,\quad \mathrm{H}t,\quad \mathrm{H}t^2(1-t)^2,\quad \mathrm{H}t^2(1-t),\quad \mathrm{H}t(1-t).$$

Si l'on avait, par exemple,

$$\mathrm{R}^2-\mathrm{S}^3=\mathrm{H}t^4(1-t),$$

en changeant t en $\frac{1}{t}$ et en multipliant par t^6, on en déduit

$$\mathrm{R}_1^2-\mathrm{S}_1^3=-\mathrm{H}t(1-t).$$

Si l'on avait

$$\mathrm{R}^2-\mathrm{S}^3=\mathrm{H}t^3,$$

on en conclurait que l'équation $\mathrm{S}^3+\mathrm{H}t^3$ a trois racines doubles, ce qui est impossible.

Supposons que l'on ait

$$\mathrm{R}^2-\mathrm{S}^3=\mathrm{H}t^2;$$

on en déduira

$$\mathrm{R}^2-\mathrm{H}t^2=\mathrm{S}^3.$$

Il faudrait donc que l'on eût

$$\mathrm{R}+\sqrt{\mathrm{H}}\,t=(ut+v)^3,$$
$$\mathrm{R}-\sqrt{\mathrm{H}}\,t=(u_1t+v_1)^3.$$

Donc

$$2\sqrt{\mathrm{H}}\,t=(ut+v)^3-(u_1t+v_1)^3.$$

ce qui est inadmissible.

Si l'on a

$$\mathrm{R}^2-\mathrm{S}^3=\mathrm{H}t^2(1-t)^2,$$

on devra avoir de même

$$\mathrm{R}+\sqrt{\mathrm{H}}\,t(1-t)=(ut+v)^3,$$
$$\mathrm{R}-\sqrt{\mathrm{H}}\,t(1-t)=(u_1t+v_1)^3,$$

et par suite

$$(ut+v)^3-(u_1t+v_1)^3=2\sqrt{\mathrm{H}}\,t(1-t).$$

Nous avons vu plus haut qu'il fallait prendre pour cela

$$ut+v=t+j,\quad u_1t+v_1=t+j^2;$$

on en tire

$$R = \tfrac{1}{2}(t+j)^3 + \tfrac{1}{2}(t+j^2)^3 = t^3 - \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{3}{2}t + 1,$$
$$S = (t+j)(t+j^2) = (t^2 - t + 1),$$

d'où l'identité

$$(2t^3 - 3t^2 - 3t + 2)^2 - 4(t^2 - t + 1)^3 = -27t^2(1-t)^2.$$

Si l'on voulait avoir

$$R^2 - S^3 = Ht^2(1-t),$$

on aurait, en supposant $d = p = 1$, les conditions suivantes :

$$m^3 = a^2, \quad 3m^2 n = 2ab, \quad 3m^2 + 3mn^2 = b^2 + 2ac, \quad 3n = 2c,$$
$$(m+n+1)^3 = (a+b+c+1)^2;$$

on en tire successivement

$$a = m\sqrt{m}, \quad b = \frac{3\sqrt{m}\,n}{2}, \quad c = \frac{3n}{2},$$

et, en portant dans la troisième, on a

$$m(2\sqrt{m} - 2)^2 = 0.$$

Si l'on prend $n = 2\sqrt{m}$, on aura

$$a = m\sqrt{m}, \quad b = 3m, \quad c = 3\sqrt{m},$$

et l'on est conduit à l'identité

$$(mt^2 + 2\sqrt{m}\,t + 1)^3 - (m\sqrt{m}\,t^3 + 3mt^2 + 3\sqrt{m}\,t + 1)^2 = 0.$$

Cette hypothèse ne fournit donc aucune transformation.

Supposons que l'on ait

$$R^2 - S^3 = Ht(1-t),$$

les conditions sont alors

$$m^3 = a^2, \quad 3m^2 n = 2ab, \quad 3m^2 + 3mn^2 = b^2 + 2ac, \quad 6mn + n^3 = 2a + 2bc,$$
$$3m + 3n^2 + 3n = c^2 + 2b + 2c;$$

on en tire successivement

$$a = m\sqrt{m}, \quad b = \frac{3n\sqrt{m}}{2}, \quad c = \frac{6mn + n^3 - 2m\sqrt{m}}{3n\sqrt{m}}.$$

Portons ces valeurs dans la troisième équation; elle devient

$$n^3 - 12mn + 16m\sqrt{m} = 0,$$

ou, en posant $n = u\sqrt{m}$,

$$u^3 - 12u + 16 = (u+4)(u-2)^2 = 0.$$

On aura donc soit $n = 2\sqrt{m}$, soit $n = -4\sqrt{m}$. Si l'on prend $n = 2\sqrt{m}$, on aboutira à la même identité que tout à l'heure.

Prenons $n = -4\sqrt{m}$; on en déduit

$$a = m\sqrt{m}, \quad b = -6m, \quad c = \tfrac{15}{2}\sqrt{m},$$

et, en portant ces valeurs dans la dernière équation, on aboutit à la relation $\sqrt{m} = 4$, d'où l'on tire

$$m = 16, \quad n = -16, \quad a = 64, \quad b = -96, \quad c = 30,$$

ce qui conduit à l'identité

$$(64t^3 - 96t^2 + 30t + 1)^2 - (16t^2 - 16t + 1)^3 = -108t(1-t).$$

Si l'on voulait avoir $R^2 - S^3 = Ht$, les conditions seraient

$$a^2 = m^3, \quad 3m^2n = 2ab, \quad 3m^2 + 3mn^2 = b^2 + 2ac,$$
$$6mn + n^3 = 2a + 2bc, \quad c^2 + 2b = 3m + 3n^2.$$

Des premières on tire, comme plus haut,

$$n = -4\sqrt{m}, \quad a = m\sqrt{m}, \quad b = -6m, \quad c = \frac{15\sqrt{m}}{2},$$

et, en portant dans la dernière, on trouve $m = 0$.

On trouvera ci-après le Tableau des transformations que l'on déduit des identités précédentes :

$$A + B = 0, \quad C = 0, \quad l = \tfrac{1}{2}, \quad m = \tfrac{2}{3}, \qquad \lambda = \pm\tfrac{1}{2}, \quad \mu = \pm\tfrac{1}{3}.$$

$$\text{XXVI}\ldots\ \left\{\begin{array}{lll} x = \dfrac{(9t-8)^2}{-27t^2(1-t)}, & x = \dfrac{(1-9t)^2}{-27t(1-t)^2}, & x = \dfrac{(9-8t)^2 t}{27(1-t)}, \\[2ex] x = \dfrac{(1+8t)^2(1-t)}{27t}, & x = \dfrac{(t-9)^2 t}{-27(1-t)^2}, & x = \dfrac{(t+8)^2(1-t)}{-27t^2}, \end{array}\right.$$

$$\text{XXVII}\ldots\ \left\{\begin{array}{lll} x = \dfrac{(8t^2-36t+27)^2}{-64t^3(1-t)}, & x = \dfrac{(8t^2+20t-1)^2}{-64t(1-t)^3}, & x = \dfrac{(8-36t+27t^2)^2}{64(1-t)}, \\[2ex] x = \dfrac{(27t^2-18t-1)^2}{64t}, & x = \dfrac{(t^2+18t-27)^2}{64t^3}, & x = \dfrac{(t^2-20t-8)^2}{64(1-t)^3}, \end{array}\right.$$

$$\text{XXVIII}\ldots\ x = \frac{(2t^3-3t^2-3t+2)^2}{-27t^2(1-t)^2},$$

$$\text{XXIX}\ldots\ x = \frac{(64t^3-96t^2+30t+1)^2}{-108t(1-t)}, \quad x = \frac{(t^3+30t^2-96t+64)^2}{108t^4(1-t)}, \quad x = \frac{(t^3-33t^2-33t+1)^2}{108t(1-t)^4}$$

$$A + B = 0, \quad C = 0, \quad l = \tfrac{2}{3}, \quad m = \tfrac{1}{2}, \qquad \lambda = \pm\tfrac{1}{3}, \quad \mu = \pm\tfrac{1}{2}.$$

$$\text{XXX}\ldots\ \left\{\begin{array}{lll} x = \dfrac{(3t-4)^3}{-27t^2(1-t)}, & x = \dfrac{(3t+1)^3}{27t(1-t)^2}, & x = \dfrac{(3-4t)^3}{27(1-t)}, \\[2ex] x = \dfrac{(4t-1)^3}{27t}, & x = \dfrac{(4-t)^3}{27t^2}, & x = \dfrac{(t+3)^3}{27(1-t)^2}, \end{array}\right.$$

$$\text{XXXI}\ldots\ \left\{\begin{array}{lll} x = \dfrac{(8t-9)^3}{-64t^3(1-t)}, & x = \dfrac{(8t+1)^3}{64t(1-t)^3}, & x = \dfrac{(8-9t)^3 t}{64(1-t)}, \\[2ex] x = \dfrac{(9t-1)^3(1-t)}{64t}, & x = \dfrac{(t-9)^3(1-t)}{64t^3}, & x = \dfrac{(8+t)^3 t}{-64(1-t)^3}, \end{array}\right.$$

$$\text{XXXII}\ldots\ x = \frac{4(t^2-t+1)^3}{27t^2(1-t)^2},$$

$$\text{XXXIII}\ldots\ x = \frac{(16t^2-16t+1)^3}{108t(1-t)}, \quad x = \frac{(t^2-16t+16)^3}{-108t^4(1-t)}, \quad x = \frac{(1+14t+t^2)^3}{-108t(1-t)^4}.$$

$$A = 0, \quad C = 0, \quad l = \tfrac{1}{2}, \quad m = \tfrac{5}{6}, \qquad \lambda = \pm\tfrac{1}{2}, \quad \nu = \pm\tfrac{1}{3}.$$

$$\text{XXXIV}\ldots\ \left\{\begin{array}{lll} x = \dfrac{(9t-8)^2}{-(3t-4)^3}, & x = \dfrac{(1-9t)^2}{(3t+1)^3}, & x = \dfrac{(9-8t)^2 t}{(4t-3)^3}, \\[2ex] x = \dfrac{(t-9)^2 t}{(t+3)^3}, & x = \dfrac{(t+8)^2(1-t)}{(4-t)^3}, & x = \dfrac{(1+8t)^2(1-t)}{(1-4t)^3}, \end{array}\right.$$

XXXV. . $\begin{cases} x=\dfrac{(8t^2-36t+27)^2}{(9-8t)^3}, & x=\dfrac{(8t^2+20t-1)^2}{(8t+1)^3}, & x=\dfrac{(8-36t+27t^2)^2}{(9t-8)^3 t}, \\ x=\dfrac{(27t^2-18t-1)^2}{(1-9t)^3(1-t)}, & x=\dfrac{(t^2+18t-27)^2}{(9-t)^3(1-t)}, & x=\dfrac{(t^2-20t-8)^2}{t(8+t)^3}, \end{cases}$

XXXVI . . $x=\dfrac{(2t^3-3t^2-3t+2)^2}{4(t^2-t+1)^3},$

XXXVII. $x=\dfrac{(64t^3-96t^2+30t+1)^2}{(16t^2-16t+1)^3},\quad x=\dfrac{(t^3+30t^2-96t+64)^2}{(t^2-16t+16)^3},\quad x=\dfrac{(t^3-33t^2-33t+1)^2}{(1+14t+t^2)^3}.$

$$A=0,\quad C=0,\quad l=\tfrac{2}{3},\quad m=\tfrac{5}{6},\qquad \lambda=\pm\tfrac{1}{3},\quad \nu=\pm\tfrac{1}{2}.$$

XXXVIII. $\begin{cases} x=\dfrac{-(3t-4)^3}{(9t-8)^2}, & x=\dfrac{(3t+1)^3}{(1-9t)^2}, & x=\dfrac{(4t-3)^3}{(9-8t)^2 t}, \\ x=\dfrac{(t+3)^3}{(t-9)^2 t}, & x=\dfrac{(4-t)^3}{(t+8)^2(1-t)}, & x=\dfrac{(1-4t)^3}{(1+8t)^2(1-t)}, \end{cases}$

XXXIX . . $\begin{cases} x=\dfrac{(9-8t)^3}{(8t^2-36t+27)^2}, & x=\dfrac{(8t+1)^3}{(8t^2+20t-1)^2}, & x=\dfrac{(9t-8)^2 t}{(8-36t+27t^2)^2}, \\ x=\dfrac{(1-9t)^3(1-t)}{(27t^2-18t-1)^2}, & x=\dfrac{(9-t)^3(1-t)}{(t^2+18t-27)^2}, & x=\dfrac{(8+t)^3 t}{(t^2-20t-8)^2}, \end{cases}$

XL . . . . . . $x=\dfrac{4(t^2-t+1)^3}{(2t^3-3t^2-3t+2)^2},$

XLI. . . . . . $x=\dfrac{(16t^2-16t+1)^3}{(64t^3-96t^2+30t+1)^2},\quad x=\dfrac{(t^2-16t+16)^3}{(t^3+30t^2-96t+64)^2},\quad x=\dfrac{(1+14t+t^2)^3}{(t^3-33t^2-33t+1)^2}.$

$$A=0,\quad B+C=0,\quad l=\tfrac{5}{6},\quad m=\tfrac{1}{2},\qquad \mu=\pm\tfrac{1}{2},\quad \nu=\pm\tfrac{1}{3},$$

XLII . . . . . $\begin{cases} x=\dfrac{-27t^2(1-t)}{(3t-4)^3}, & x=\dfrac{27t(1-t)}{(3t+1)^3}, & x=\dfrac{27(1-t)}{(3-4t)^3}, \\ x=\dfrac{27t}{(4t-1)^3}, & x=\dfrac{27t^2}{(4-t)^3}, & x=\dfrac{27(1-t)^2}{(t+3)^3}, \end{cases}$

XLIII . . . . $\begin{cases} x=\dfrac{64t^3(1-t)}{(9-8t)^3}, & x=\dfrac{64t(1-t)^3}{(8t+1)^3}, & x=\dfrac{64(1-t)}{(8-9t)^3 t}, \\ x=\dfrac{64t}{(9t-1)^3(1-t)}, & x=\dfrac{64t^3}{(t-9)^3(1-t)}, & x=\dfrac{-64(1-t)^3}{(8+t)^3 t}, \end{cases}$

XLIV . . . . $x=\dfrac{27t^2(1-t)^2}{4(t^2-t+1)^3},$

XLV . . . . . $x=\dfrac{108t(1-t)}{(16t^2-16t+1)^3},\quad x=\dfrac{-108t^4(1-t)}{(t^2-16t+16)^3},\quad x=\dfrac{-108t(1-t)^4}{(1+14t+t^2)^3}.$

$$A=0,\quad B+C=0,\quad l=\tfrac{5}{6},\quad m=\tfrac{2}{3},\qquad \mu=\pm\tfrac{1}{3},\quad \nu=\pm\tfrac{1}{2},$$

$$\text{XLVI}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{lll} x=\dfrac{-27t^2(1-t)}{(9t-8)^2}, & x=\dfrac{-27t(1-t)^2}{(1-9t)^2}, & x=\dfrac{27(1-t)}{(9-8t)^2t}, \\[2ex] x=\dfrac{27t}{(1+8t)^2(1-t)}, & x=\dfrac{27(1-t)^2}{(t-9)^2t}, & x=\dfrac{-27t^2}{(t+8)^2(1-t)}, \end{array}\right.$$

$$\text{XLVII}\ldots\left\{\begin{array}{lll} x=\dfrac{-64t^3(1-t)}{(8t^2-36t+27)^2}, & x=\dfrac{-64t(1-t)^3}{(8t^2+20t-1)^2}, & x=\dfrac{64(1-t)}{(8-36t+27t^2)^2}, \\[2ex] x=\dfrac{64t}{(27t^2-18t-1)^2}, & x=\dfrac{64t^3}{(t^2+18t-27)^2}, & x=\dfrac{64(1-t)^3}{(t^2-20t-8)^2}, \end{array}\right.$$

$$\text{XLVIII}\ldots\quad x=\frac{-27t^2(1-t)^2}{(2t^3-3t^2-3t+2)^2},$$

$$\text{XLIX}\ldots\ldots\quad x=\frac{-108t(1-t)}{(64t^3-96t^2+30t+1)^2},\quad x=\frac{108t^4(1-t)}{(t^3+30t^2-96t+64)^2},\quad x=\frac{108t(1-t)^4}{(t^3-33t^2-33t+1)^2}.$$

Transformations inverses.

$$\text{L}\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} A=0,\ 4B+3C=0, \\ l=\tfrac{2}{3},\ m=\tfrac{5}{6}, \\ \overline{} \\ \nu=\pm\tfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\lambda}{2}=\pm\mu. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(9x-8)^2}{-27x^2(1-x)}=t, & \dfrac{(3x-4)^3}{-27x^2(1-x)}=t, & \dfrac{(9x-8)^2}{(4-3x)^3}=t, \\[2ex] \dfrac{(4-3x)^3}{(9x-8)^2}=t, & \dfrac{-27x^2(1-x)}{(3x-4)^3}=t, & \dfrac{-27x^2(1-x)}{(9x-8)^2}=t, \end{array}\right.$$

$$\text{LI}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} A=0,\ B=3C, \\ l=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{2}{3}, \\ \overline{} \\ \nu=\pm\tfrac{1}{2}, \\ \lambda=\pm\dfrac{\mu}{2}. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(1-9x)^2}{-27x(1-x)^2}=t, & \dfrac{(3x+1)^3}{27x(1-x)^2}=t, & \dfrac{(1-9x)^2}{(3x+1)^3}=t, \\[2ex] \dfrac{(3x+1)^3}{(1-9x)^2}=t, & \dfrac{27x(1-x)^2}{(3x+1)^3}=t, & \dfrac{-27x(1-x)^2}{(1-9x)^2}=t, \end{array}\right.$$

$$\text{LII}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} C=0,\ 4B+3A=0, \\ l=\tfrac{1}{2},\ m=\tfrac{5}{6}, \\ \overline{} \\ \lambda=\pm\tfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\nu}{2}=\pm\mu. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(9-8x)^2x}{27(1-x)}=t, & \dfrac{(3-4x)^3}{27(1-x)}=t, & \dfrac{(9-8x)^2x}{(4x-3)^3}=t, \\[2ex] \dfrac{(4x-3)^3}{(9-8x)^2x}=t, & \dfrac{27(1-x)}{(3-4x)^3}=t, & \dfrac{27(1-x)}{(9-8x)^2x}=t, \end{array}\right.$$

$C=0,\ B=3A,$ $l=\frac{1}{2},\ m=\frac{2}{3},$	$\dfrac{(x-9)^2x}{-27(1-x)^2}=t,$	$\dfrac{(x+3)^3}{27(1-x)^2}=t,$	$\dfrac{(x-9)^2x}{(x+3)^3}=t,$
$\lambda=\pm\frac{1}{2},$ $\nu=\pm\dfrac{\mu}{2}.$	$\dfrac{(x+3)^3}{(x-9)^2x}=t,$	$\dfrac{27(1-x)^2}{(x+3)^3}=t,$	$\dfrac{-27(1-x)^2}{(x-9)^2x}=t,$
$C=4A,\ B+5A=0,$ $l=\frac{2}{3},\ m=\frac{1}{2},$	$\dfrac{(x+8)^2(1-x)}{-27x^2}=t,$	$\dfrac{(4-x)^3}{27x^2}=t,$	$\dfrac{(x+8)^2(1-x)}{(4-x)^3}=t,$
$\mu=\pm\frac{1}{2},$ $\dfrac{\lambda}{2}=\pm\nu.$	$\dfrac{(4-x)^3}{(x+8)^2(1-x)}=t,$	$\dfrac{27x^2}{(4-x)^3}=t,$	$\dfrac{-27x^2}{(x+8)^2(1-x)}=t,$
$A=4C,\ B+5C=0,$ $l=\frac{5}{6},\ m=\frac{1}{2},$	$\dfrac{(1+8x)^2(1-x)}{27x}=t,$	$\dfrac{(4x-1)^3}{27x}=t,$	$\dfrac{(1+8x)^2(1-x)}{(1-4x)^3}=t,$
$\mu=\pm\frac{1}{2},$ $\lambda=\pm\dfrac{\nu}{2}.$	$\dfrac{(1-4x)^3}{(1+8x)^2(1-x)}=t,$	$\dfrac{27x}{(4x-1)^3}=t,$	$\dfrac{27x}{(1+8x)^2(1-x)}=t,$
$A=0,\ 9B+8C=0,$ $l=\frac{1}{2},\ m=\frac{5}{6},$	$\dfrac{(8x^2-36x+27)^2}{-64x^3(1-x)}=t,$	$\dfrac{(8x-9)^3}{-64x^3(1-x)}=t,$	$\dfrac{(8x^2-36x+27)^2}{(9-8x)^3}=t,$
$\nu=\pm\frac{1}{3},$ $\dfrac{\lambda}{3}=\pm\mu.$	$\dfrac{(9-8x)^3}{(8x^2-36x+27)^2}=t,$	$\dfrac{-64x^3(1-x)}{(8x-9)^3}=t,$	$\dfrac{-64x^3(1-x)}{(8x^2-36x+27)^2}=t,$
$A=0,\ B=8C,$ $l=\frac{5}{6},\ m=\frac{1}{2},$	$\dfrac{(8x^2+20x-1)^2}{-64x(1-x)^3}=t,$	$\dfrac{(8x+1)^3}{64x(1-x)^3}=t,$	$\dfrac{(8x^2+20x-1)^2}{(8x+1)^3}=t,$
$\nu=\pm\frac{1}{3},$ $\lambda=\pm\dfrac{\mu}{3}.$	$\dfrac{(8x+1)^3}{(8x^2+20x-1)^2}=t,$	$\dfrac{64x(1-x)^3}{(8x+1)^3}=t,$	$\dfrac{-64x(1-x)^3}{(8x^2+20x-1)^2}=t,$
$C=0,\ 9B+8A=0,$ $l=\frac{2}{3},\ m=\frac{5}{6},$	$\dfrac{(8-36x+27x^2)^2}{64(1-x)}=t,$	$\dfrac{(8-9x)^3x}{64(1-x)}=t,$	$\dfrac{(8-36x+27x^2)^2}{(9x-8)^3x}=t,$
$\lambda=\pm\frac{1}{3},$ $\dfrac{\nu}{3}=\pm\mu.$	$\dfrac{(9x-8)^3x}{(8-36x+27x^2)^2}=t,$	$\dfrac{64(1-x)}{(8-9x)^3x}=t,$	$\dfrac{64(1-x)}{(8-36x+27x^2)^2}=t,$
$C=0,\ B=8A,$ $l=\frac{2}{3},\ m=\frac{1}{2},$	$\dfrac{(8+20x-x^2)^2}{64(1-x)^3}=t,$	$\dfrac{-(8+x)^3x}{64(1-x)^3}=t,$	$\dfrac{(8+20x-x^2)^2}{(8+x)^3x}=t,$
$\lambda=\pm\frac{1}{3},$ $\nu=\pm\dfrac{\mu}{2}.$	$\dfrac{(8+x)^3x}{(8+20x-x^2)^2}=t,$	$\dfrac{64(1-x)^3}{-(8+x)^3x}=t,$	$\dfrac{64(1-x)^3}{(8+20x-x^2)^2}=t,$

..

$$\left\{\begin{array}{c} A=9C,\ B+10C=0, \\ l=\frac{5}{6},\ m=\frac{2}{3}, \\ - \\ \mu=\pm\frac{1}{3}, \\ \lambda=\pm\frac{\nu}{3}. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(27x^2-18x-1)^2}{64x}=t, & \dfrac{(9x-1)^3(1-x)}{64x}=t, & \dfrac{(27x^2-18x-1)^2}{(1-9x)^3(1-x)}=t, \\ \dfrac{(1-9x)^3(1-x)}{(27x^2-18x-1)^2}=t, & \dfrac{64x}{(9x-1)^3(1-x)}=t, & \dfrac{64x}{(27x^2-18x-1)^2}=t, \end{array}\right.$$

..

$$\left\{\begin{array}{c} C=9A,\ B+10A=0, \\ l=\frac{1}{2},\ m=\frac{2}{3}, \\ - \\ \mu=\pm\frac{1}{3}, \\ \frac{\lambda}{3}=\pm\nu. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(x^2+18x-27)^2}{64x^3}=t, & \dfrac{(x-9)^3(1-x)}{64x^3}=t, & \dfrac{(x^2+18x-27)^2}{(9-x)^3(1-x)}=t, \\ \dfrac{(9-x)^3(1-x)}{(x^2+18x-27)^2}=t, & \dfrac{64x^3}{(x-9)^3(1-x)}=t, & \dfrac{64x^3}{(x^2+18x-27)^2}=t, \end{array}\right.$$

..

$$\left\{\begin{array}{c} A=C=-B, \\ l=m=\frac{2}{3}, \\ - \\ \lambda=\pm\mu=\pm\nu. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}{-27x^2(1-x)^2}=t, & \dfrac{4(x^2-x+1)^3}{27x^2(1-x)^2}=t, & \dfrac{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}{4(x^2-x+1)^3}=t, \\ \dfrac{4(x^2-x+1)^3}{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}=t, & \dfrac{27x^2(1-x)^2}{4(x^2-x+1)^3}=t, & \dfrac{-27x^2(1-x)^2}{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}=t, \end{array}\right.$$

I.

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=0,\ A=16C, \\ l=m=\frac{5}{6}, \\ - \\ \lambda=\pm\mu=\pm\frac{\nu}{4}. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}{-108x(1-x)}=t, & \dfrac{(16x^2-16x+1)^3}{108x(1-x)}=t, \\ \dfrac{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}{(16x^2-16x+1)^3}=t, & \dfrac{(16x^2-16x+1)^3}{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}=t, \\ \dfrac{108x(1-x)}{(16x^2-16x+1)^3}=t, & \dfrac{-108x(1-x)}{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}=t, \end{array}\right.$$

V.

$$\left\{\begin{array}{c} B+C=0,\ C=16A, \\ l=\frac{1}{3},\ m=\frac{5}{6}, \\ - \\ \frac{\lambda}{4}=\pm\mu=\pm\nu. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{(x^3+30x^2-96x+64)^2}{108x^4(1-x)}=t, & \dfrac{(x^2-16x+16)^3}{-108x^4(1-x)}=t, \\ \dfrac{(x^3+30x^2-96x+64)^2}{(x^2-16x+16)^3}=t, & \dfrac{(x^2-16x+16)^3}{(x^3+30x-96x+64)^2}=t, \\ \dfrac{-108x^4(1-x)}{(x^2-16x+16)^3}=t, & \dfrac{108x^4(1-x)}{(x^3+30x^2-96x+64)^2}=t, \end{array}\right.$$

..

$$\left\{\begin{array}{c} A=C,\ B=14C, \\ l=\frac{5}{6},\ m=\frac{1}{3}, \\ - \\ \lambda=\pm\frac{\mu}{4}=\pm\nu. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{(x^3-33x^2-33x+1)^2}{108x(1-x)^4}=t, & \dfrac{(1+14x+x^2)^3}{-108x(1-x)^4}=t, \\ \dfrac{(x^3-33x^2-33x+1)^2}{(1+14x+x^2)^3}=t, & \dfrac{(1+14x+x^2)^3}{(x^3-33x^2-33x+1)^2}=t, \\ \dfrac{-108x(1-x)^4}{(1+14x+x^2)^3}=t, & \dfrac{108x(1-x)^4}{(x^3-33x^2-33x+1)^2}=t. \end{array}\right.$$

14. On a encore à examiner l'hypothèse de $n=3$, $n'=4$. On démontre sans peine que, sous les restrictions énoncées, il est impossible d'avoir une identité telle que

$$R^3 - S^4 = H\,t^r(1-t)^s;$$

il n'existe donc pas d'autres transformations rationnelles que celles qui viennent d'être déterminées.

15. En combinant entre elles les transformations rationnelles que l'on peut effectuer pour les mêmes valeurs de A, B, C, l, m, on obtient de nouvelles transformations algébriques, mais non rationnelles; il reste à démontrer qu'on les obtient toutes de cette manière.

A cet effet, je reprends les deux équations différentielles (5) et (7), que doit vérifier la fonction x de t,

$$\text{(5)}\qquad \frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x(1-x)}\,dx = \frac{\sqrt{A't^2+B't+C'}}{t(1-t)}\,dt,$$

$$\text{(7)}\qquad \frac{dx}{x^l(1-x)^m} = \frac{K\,dt}{t^{l'}(1-t)^{m'}},$$

et la relation que l'on en déduit,

$$\text{(8)}\qquad \frac{[\varphi(x)]^2}{(Ax^2+Bx+C)^3} = \frac{[\varphi_1(t)]^2}{(A't^2+B't+C')^3},$$

où l'on a

$$\varphi(x) = x(x-1)(2Ax+B) + 2(Ax^2+Bx+C)[(l-1)(x-1)+(m-1)x],$$
$$\varphi_1(t) = t(t-1)(2A't+B') + 2(A't^2+B't+C')[(l'-1)(t-1)+(m'-1)t].$$

Dérivons les deux membres de l'équation (8); en tenant compte de l'équation (5), on obtient une nouvelle relation

$$\text{(9)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x(x-1)[2\varphi'(x)(Ax^2+Bx+C) - 3\varphi(x)(2Ax+B)]}{(Ax^2+Bx+C)^3}\\ &\quad = \frac{t(t-1)[2\varphi_1'(t)(A't^2+B't+C') - 3\varphi_1(t)(2A't+B')]}{(A't^2+B't+C')^3}.\end{aligned}\right.$$

Toute intégrale commune aux deux équations (5) et (7) vérifie les relations (8) et (9). Inversement, toute fonction algébrique qui vérifie à la fois les relations (8) et (9) est une intégrale commune aux deux équations (5) et (7). En effet, toute fonction qui satisfait à l'équation (8) satisfait aussi à l'équation

$$\frac{2\varphi'(x)(Ax^2+Bx+C)-3\varphi(x)(2Ax+B)}{(Ax^2+Bx+C)^3}\sqrt{Ax^2+Bx+C}\,dx$$
$$=\frac{2\varphi_1'(t)(A't^2+B't+C')-3\varphi_1(t)(2A't+B')}{(A't^2+B't+C')^3}\sqrt{A't^2+B't+C'}\,dt,$$

ou, en tenant compte de la relation (9), à l'équation (5). En ayant égard à cette dernière, la relation (8) peut s'écrire

$$d.\mathrm{L}\left[\sqrt{Ax^2+Bx+C}.x^{l-1}(1-x)^{m-1}\right]=d.\mathrm{L}\left[\sqrt{A't^2+B't+C'}.t^{l'-1}(1-t)^{m'-1}\right].$$

On aura donc

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C}.x^{l-1}(1-x)^{m-1}=\mathrm{K}\sqrt{A't^2+B't+C'}.t^{l'-1}(1-t)^{m'-1},$$

et par suite, toujours en tenant compte de l'équation (5),

$$\frac{dx}{x^l(1-x)^m}=\frac{\mathrm{K}\,dt}{t^{l'}(1-t)^{m'}}.$$

Tout revient donc à trouver les conditions pour que les équations (8) et (9) aient une ou plusieurs racines communes.

16. A cet égard, nous allons démontrer le théorème suivant :

Toutes les fois que les équations (8) *et* (9) *admettent un facteur commun d'un degré supérieur au second par rapport à l'une des variables, elles sont identiques.*

Supposons, par exemple, qu'elles aient un facteur commun de degré n par rapport à x $(n \geqq 3)$; soient x et x_1 deux valeurs répondant à la même valeur de t. Il y aura entre x et x_1 une relation symétrique de degré n, au moins, qui devra être contenue dans chacune des deux suivantes :

$$(10)\qquad \frac{[\varphi(x)]^2}{(Ax^2+Bx+C)^3}=\frac{[\varphi(x_1)]^2}{(Ax_1^2+Bx_1+C)^3},$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{x(x-1)[2\varphi'(x)(Ax^2+Bx+C)-3\varphi(x)(2Ax+B)]}{(Ax^2+Bx+C)^3}\\&=\frac{x_1(x_1-1)[2\varphi'(x_1)(Ax_1^2+Bx_1+C)-3\varphi(x_1)(2Ax_1+B)]}{(Ax_1^2+Bx_1+C)^3}.\end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres de la première par 3 et ajoutons; on obtient la nouvelle relation

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{6\varphi(x)[(l-1)(x-1)+(m-1)x]+2x(x-1)\varphi'(x)}{(Ax^2+Bx+C)^2}\\ &\quad=\frac{6\varphi(x_1)[(l-1)(x_1-1)+(m-1)x_1]+2x_1(x_1-1)\varphi'(x_1)}{(Ax_1^2+Bx_1+C)^2},\end{aligned}\right.$$

et l'on peut remplacer le système des équations (10) et (11) par le système des équations (10) et (12).

Nous poserons, pour abréger,

$$\psi(x)=6\varphi(x)[(l-1)(x-1)+(m-1)x]+2x(x-1)\varphi'(x).$$

Si n est égal à 5 ou à 6, la relation (12), qui est au plus du quatrième degré, devra se réduire à une identité et, par suite, les équations (10) et (11) reviendront l'une à l'autre.

Voyons ce qui arrive quand n est égal à 4; si la relation (12) ne se réduit pas à une identité, elle devra être du quatrième degré, ce qui exige que l'on ait

$$A \gtrless 0, \quad A+B+C \gtrless 0, \quad C \gtrless 0.$$

Toutes les racines de l'équation (12) devront appartenir à l'équation (10); il faut pour cela que Ax^2+Bx+C soit un carré parfait. En effet, soit $x=\alpha$ une racine simple de l'équation $Ax^2+Bx+C=0$; considérons les deux équations (10) et (12).

Pour $x_1=\alpha$, deux valeurs de x deviennent égales à α dans l'équation (12), et, d'après la forme de cette équation, on a pour ces valeurs

$$\lim\left(\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha}\right)^2=1.$$

Il suffit, pour le prouver, de poser

$$x=\alpha+z, \quad x_1=\alpha+z_1;$$

alors l'équation (12) peut s'écrire

$$\frac{1+\varepsilon}{z^2}=\frac{1+\varepsilon_1}{z_1^2},$$

ε, ε_1 désignant des quantités infiniment petites en même temps que z

et z_1; d'où l'on tire évidemment

$$\lim \left(\frac{z}{z_1}\right)^2 = 1.$$

De même, dans l'équation (10), pour $x_1 = \alpha$, trois valeurs de x deviennent égales à α et l'on a, pour ces valeurs,

$$\lim \left(\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha}\right)^3 = 1.$$

Les deux valeurs de x qui satisfont à la première condition ne peuvent évidemment satisfaire à la seconde. Il faut donc que l'on ait

$$Ax^2 + Bx + C = A(x-\alpha)^2;$$

on aura alors

$$\varphi(x) = 2A(x-\alpha)\{x(x-1) + (x-\alpha)[(l-1)(x-1) + (m-1)x]\}.$$

La relation (10) se réduit au quatrième degré :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{4A\{x(x-1) + (x-\alpha)[(l-1)(x-1) + (m-1)x]\}^2}{A^2(x-\alpha)^4} \\ &\quad = \frac{4A\{x_1(x_1-1) + (x_1-\alpha)[(l-1)(x_1-1) + (m-1)x_1]\}}{A^2(x_1-\alpha)^4}. \end{aligned}\right.$$

La relation (12) pourra de même s'écrire

$$(12)\quad \frac{4Ax^2(x-1)^2 + (x-\alpha)f_1(x)}{A^2(x-\alpha)^4} = \frac{4Ax_1^2(x_1-1)^2 + (x_1-\alpha)f_1(x_1)}{A^2(x_1-\alpha)^4}.$$

Les relations (10) et (12) doivent revenir l'une à l'autre. Retranchons-les membre à membre, on obtient une nouvelle relation

$$(13)\quad \frac{f_2(x)}{A^2(x-\alpha)^3} = \frac{f_2(x_1)}{A^2(x_1-\alpha)^3},$$

qui devra se réduire à une identité, car elle est au plus du troisième degré.

Supposons $n = 3$; si la relation (12) n'est pas une identité, elle devra être au moins du troisième degré; deux des trois quantités A, A+B+C, C ne pourront être nulles en même temps. Soit

$$A \gtrless 0, \quad A + B + C \gtrless 0.$$

Plusieurs cas sont à examiner :

Premier cas. — $Ax^2 + Bx + C = 0$ admet deux racines simples $x = \alpha$, $x = \beta$, différentes de zéro ; $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \gtrless 0$.

On ne pourra avoir à la fois $\psi(\alpha) = 0$, $\psi(\beta) = 0$, car la relation (12) serait d'un degré inférieur au troisième. Supposons $\psi(\alpha)\,\psi(\beta) \gtrless 0$; pour $x_1 = \alpha$, deux valeurs de x deviennent égales à α et deux à β, d'après l'équation (12); admettons que les deux valeurs de x qui deviennent égales à α appartiennent à l'équation (10). D'après l'équation (12), on aurait

$$\lim\left(\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha}\right)^2 = 1,$$

et d'après l'équation (10),

$$\lim\left(\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha}\right)^3 = 1,$$

conditions incompatibles.

On raisonnerait de la même façon si l'on avait $\psi(\beta) = 0$. Cette hypothèse est donc à rejeter.

Deuxième cas. — $Ax^2 + Bx + C = 0$ admet la racine simple $x = 0$ et une racine $x = \alpha$ différente de l'unité. Les équations (10) et (12) deviennent

$$\frac{[\varphi_2(x)]^2}{x(x-\alpha)^3} = \frac{[\varphi_2(x_1)]^2}{x_1(x_1-\alpha)^3}, \tag{10}$$

$$\frac{\psi(x)}{x(x-\alpha)^2} = \frac{\psi(x_1)}{x_1(x_1-\alpha)^2}; \tag{12}$$

$\psi(x)$ est du troisième degré, et l'on devrait avoir $\psi(\alpha) \gtrless 0$, $\varphi_2(\alpha) \gtrless 0$.

En raisonnant comme tout à l'heure, on verra que cette hypothèse est encore à rejeter.

Troisième cas. — $Ax^2 + Bx + C = A(x-\alpha)^2$. On remplacera le système des équations (10) et (12) par le système des équations (12) et (13). Cette dernière équation devra être une identité, sans quoi elle serait du troisième degré, et l'on en tirerait

$$\lim\left(\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha}\right)^3 = 1,$$

tandis que l'équation (12) donne

$$\lim\left(\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha}\right)^{1} = 1.$$

En résumé, lorsque n est égal ou supérieur à 3, l'une des deux équations (12) ou (13) doit se réduire à une identité, ce qui exige que l'une des fractions rationnelles

$$\frac{\psi(x)}{(Ax^2+Bx+C)^2}, \quad \frac{f_2(x)}{A^2(x-\alpha)^3}$$

se réduise à zéro ou à une quantité constante.

Il est aisé de s'assurer directement que les numérateurs $\psi(x)$, $f_2(x)$ ne peuvent être nuls tant que la relation (8) n'est pas une identité. L'une des deux expressions devra donc avoir une valeur constante différente de zéro.

17. Il suit de là que, si $\frac{\psi(x)}{(Ax^2+Bx+C)^2}$ se réduit à une constante, on pourra faire toutes les transformations

$$\frac{[\varphi(x)]^2}{(Ax^2+Bx+C)^3} = \frac{[\varphi_1(t)]^2}{(A't^2+B't+C')^3},$$

où A', B', C', l', m' ont des valeurs telles que le quotient $\frac{\psi_1(t)}{(A't^2+B't+C')^2}$ soit égal à la même quantité constante. Or, parmi ces transformations, on peut en trouver une qui est du premier degré par rapport à t; il suffit de prendre

$$A'+B'=0, \quad C'=0, \quad l'=\tfrac{1}{2}, \quad m'=\tfrac{2}{3};$$

alors

$$\varphi_1(t) = \frac{A'}{3}\,t^2(t-1),$$

$$\psi_1(t) = -\frac{A't^2(1-t)^2}{3},$$

$$\frac{\psi_1(t)}{(A't^2+B't+C')^2} = -\frac{1}{3A'}.$$

Si l'on prend pour A' une valeur convenable, on pourra faire la transformation

$$\frac{[\varphi(x)]^2}{(Ax^2+Bx+C)^2} = \frac{t}{9A'(t-1)},$$

qui est du premier degré par rapport à t.

Il est clair que toute transformation que l'on peut faire dans le même cas pourra se ramener à la précédente, suivie d'une nouvelle transformation, également du premier degré par rapport à t.

Si le rapport $\frac{f_2(x)}{A^2(x-\alpha)^3}$ a une valeur constante, on prendra de même

$$A'+B'=0, \quad C'=0, \quad l'=\tfrac{1}{2}, \quad m'=\tfrac{3}{4},$$

$$\varphi_1(t) = -\frac{A'}{2}t^2(t-1), \quad \varphi_1'(t) = -\frac{A't}{2}(3t-2).$$

On aura alors

$$\frac{[\varphi_1(t)]^2}{(A't^2+B't+C')^3} = \frac{t}{4A'(t-1)},$$

$$\frac{\psi_1(t)}{(A't^2+B't+C')^2} = \frac{3t-2}{4A'(t-1)}.$$

La différence est égale à $\frac{-1}{2A'}$; si l'on prend pour A' une valeur convenable, on pourra effectuer la transformation

$$\frac{[\varphi(x)]^2}{(Ax^2+Bx+C)^3} = \frac{t}{4A'(t-1)},$$

d'où la même conclusion que tout à l'heure.

Pour obtenir les nouvelles transformations, *il suffira donc de combiner les transformations rationnelles que l'on peut effectuer pour les deux systèmes de valeurs des constantes* A, B, C, l, m,

$$(C=0, \quad A+B=0, \quad l=\tfrac{1}{2}, \quad m=\tfrac{2}{3}), \quad (C=0, \quad A+B=0, \quad l=\tfrac{1}{2}, \quad m=\tfrac{3}{4}).$$

18. Il reste à examiner le cas où il existe une transformation du deuxième degré par rapport aux deux variables.

Soient x_0 une valeur de x, t_0 et t_1 les valeurs de t correspondantes; à la valeur t_0 correspondent pour x les valeurs x_0 et x_1; à la valeur t_1 correspondent pour x les valeurs x_0 et x_2.

Si $x_1 \gtrless x_2$, la relation $F(x_0, x_1) = 0$ entre deux valeurs de x qui répondent à la même valeur de t sera du troisième degré, et l'on retombe sur l'hypothèse précédente.

Si $x_1 = x_2$, la relation $F(x_0, x_1) = 0$ s'abaisse au deuxième degré; elle se dédouble en deux relations du premier degré,

$$x_1 = x_0, \quad x_1 = \frac{a x_0 + b}{c x_0 + d}.$$

D'après ce que l'on a vu plus haut, cette dernière relation devra être l'une des suivantes :

$$x_1 = 1 - x_0, \quad x_1 = \frac{1}{x_0}, \quad x_1 = \frac{x_0}{x_0 - 1}.$$

Soit, par exemple, $x_1 = 1 - x_0$. La relation entre x et t sera alors

$$(2x - 1)^2 = f_2(t),$$

$f_2(t)$ étant une fonction rationnelle de t du deuxième degré. Les deux équations différentielles

$$\frac{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}{x(1-x)}\,dx = \frac{\sqrt{Ax_1^2 + Bx_1 + C}}{x_1(1-x_1)}\,dx_1,$$
$$\frac{dx}{x^l(1-x)^m} = \frac{K\,dx_1}{x_1^l(1-x_1)^m}$$

devront admettre comme intégrale $x = 1 - x_1$; il faut pour cela que l'on ait $l = m$, $A + B = 0$, mais alors on pourra faire la transformation

$$(2x - 1)^2 = u,$$

et la transformation proposée est une combinaison des deux suivantes :

$$(2x - 1)^2 = u, \quad u = f_2(t).$$

C'est une des transformations indiquées plus haut (VIII, X, XII).

19. Pour abréger, je désignerai respectivement par U, V, W l'une

quelconque des expressions contenues dans les trois Tableaux suivants :

$$\text{U}\ldots\quad (2t-1)^2,\quad \left(\frac{2-t}{t}\right)^2,\quad \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2,\quad \frac{(2t-1)^2}{4t(t-1)},\quad \frac{(2-t)^2}{4(1-t)},\quad \frac{(1+t)^2}{4t},$$

$$\text{V}\ldots\quad \frac{(t^2-6t+1)^2}{-16t(1-t)^2},\quad \frac{(t^2+4t-4)^2}{-16t^2(1-t)},\quad \frac{(1+4t-4t^2)^2}{16t(1-t)},$$

$$\text{W}\ldots\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{(9t-8)^2}{-27t^2(1-t)},\quad \dfrac{(1-9t)^2}{-27t(1-t)^2},\quad \dfrac{(9-8t)^2t}{27(1-t)},\quad \dfrac{(1+8t)^2(1-t)}{27t},\quad \dfrac{(t-9)^2t}{-27(1-t)^2},\\[2ex]
\dfrac{(t+8)^2(1-t)}{-27t^2},\quad \dfrac{(8t^2-36t+27)^2}{-64t^3(1-t)},\quad \dfrac{(8t^2+20t-1)^2}{-64t(1-t)^3},\quad \dfrac{(8-36t+27t^2)^2}{64(1-t)},\\[2ex]
\dfrac{(27t^2-18t-1)^2}{64t},\quad \dfrac{(t^2+18t-27)^2}{64t^3},\quad \dfrac{(t^2-20t-8)^2}{64(1-t)^3},\quad \dfrac{(2t^3-3t^2-3t+2)^2}{-27t^2(1-t)^2},\\[2ex]
\dfrac{(64t^3-96t^2+30t+1)^2}{-108t(1-t)},\quad \dfrac{(t^3+30t^2-96t+64)^2}{108t^4(1-t)},\quad \dfrac{(t^3-33t^2-33t+1)^2}{108t(1-t)^4}.
\end{array}\right.$$

Moyennant ces conventions, toutes les nouvelles transformations seront contenues dans le Tableau ci-après :

$$\text{LXVI}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} A+B=0,\ C=0,\\ l=m=\frac{3}{4},\\ \lambda=\pm\mu=\pm\frac{1}{4}.\end{array}\right\}\ (2x-1)^2=\text{V},$$

$$\text{LXVII}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} A=0,\ C=0,\\ l=\frac{3}{4},\ m=\frac{1}{2},\\ \lambda=\pm\nu=\pm\frac{1}{4}.\end{array}\right\}\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=\text{V},$$

$$\text{LXVIII}\ldots\left\{\begin{array}{c} A=0,\ B+C=0,\\ l=\frac{1}{2},\ m=\frac{3}{4},\\ \mu=\pm\nu=\pm\frac{1}{4}.\end{array}\right\}\ \left(\frac{2-x}{x}\right)^2=\text{V},$$

$$\text{LXIX}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} A+B=0,\ C=0,\\ l=m=\frac{2}{3},\\ \lambda=\pm\mu=\pm\frac{1}{3}.\end{array}\right\}\ (2x-1)^2=\text{W},$$

$$\text{LXX}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} A=0,\ C=0,\\ l=m=\frac{2}{3},\\ \lambda=\pm\nu=\pm\frac{1}{3}.\end{array}\right\}\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=\text{W},$$

$$\text{LXXXVII..}\left\{\begin{array}{c} C=0,\ B=8A,\\ l=\tfrac{2}{3},\ m=\tfrac{1}{2},\\ \lambda=\pm\tfrac{1}{3},\ \dfrac{\mu}{3}=\pm\nu. \end{array}\right\}\quad \frac{(8+20x-x^2)^2}{64(1-x)^3}=U,\qquad \frac{(8+20x-x^2)^2}{64(1-x)^3}=W,$$

$$\text{LXXXVIII.}\left\{\begin{array}{c} A=9C,\ B+10C=0,\\ l=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{2}{3},\\ \mu=\pm\tfrac{1}{3},\ \lambda=\pm\dfrac{\nu}{3}. \end{array}\right\}\quad \frac{(27x^2-18x-1)^2}{64x}=U,\qquad \frac{(27x^2-18x-1)^2}{64x}=W,$$

$$\text{LXXXIX..}\left\{\begin{array}{c} C=9A,\ B+10A=0,\\ l=\tfrac{1}{2},\ m=\tfrac{2}{3},\\ \mu=\pm\tfrac{1}{3},\ \dfrac{\lambda}{3}=\pm\nu. \end{array}\right\}\quad \frac{(x^2+18x-27)^2}{64x^3}=U,\qquad \frac{(x^2+18x-27)^2}{64x^3}=W,$$

$$\text{XC.......}\left\{\begin{array}{c} A=C,\ B+C=0,\\ l=m=\tfrac{2}{3},\\ \lambda=\pm\mu=\pm\nu. \end{array}\right\}\quad \frac{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}{-27x^2(1-x)^2}=U,\qquad \frac{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}{-27x^2(1-x)^2}=W,$$

$$\text{XCI.......}\left\{\begin{array}{c} A+B=0,\ A=16C,\\ l=m=\tfrac{5}{6},\\ \lambda=\pm\mu=\pm\dfrac{\nu}{4}. \end{array}\right\}\quad \frac{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}{-108x(1-x)}=U,\qquad \frac{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}{-108x(1-x)}=W,$$

$$\text{XCII......}\left\{\begin{array}{c} B+C=0,\ C=16A,\\ l=\tfrac{1}{3},\ m=\tfrac{5}{6},\\ \dfrac{\lambda}{4}=\pm\mu=\pm\nu. \end{array}\right\}\quad \frac{(x^3+30x^2-96x+64)^2}{108x^4(1-x)}=U,\qquad \frac{(x^3+30x^2-96x+1)^2}{108x^4(1-x)}=W,$$

$$\text{XCIII.....}\left\{\begin{array}{c} A=C,\ B=14C,\\ l=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{1}{3},\\ \lambda=\pm\dfrac{\mu}{4}=\pm\nu. \end{array}\right\}\quad \frac{(x^3-33x^2-33x+1)^2}{108x(1-x)^4}=U,\qquad \frac{(x^3-33x^2-33x+1)^2}{108x(1-x)^4}=W.$$

LXXIX....
$$\left\{\begin{array}{c} A=0,\ B=3C, \\ l=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{2}{3}, \\ - \\ \nu=\pm\tfrac{1}{2},\ \lambda=\pm\dfrac{\mu}{2}. \end{array}\right\} \qquad \frac{(1-9x)^2}{-27x(1-x)^2}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(1-9x)^2}{-27x(1-x)^2}=\mathrm{W},$$

LXXX....
$$\left\{\begin{array}{c} C=0,\ 4B+3A=0, \\ l=\tfrac{1}{2},\ m=\tfrac{5}{6}, \\ - \\ \lambda=\pm\tfrac{1}{2},\ \mu=\pm\dfrac{\nu}{2}. \end{array}\right\} \qquad \frac{(9-8x)^2x}{27(1-x)}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(9-8x)^2x}{27(1-x)}=\mathrm{W},$$

LXXXI....
$$\left\{\begin{array}{c} C=0,\ B=3A, \\ l=\tfrac{1}{2},\ m=\tfrac{2}{3}, \\ - \\ \lambda=\pm\tfrac{1}{2},\ \dfrac{\mu}{2}=\pm\nu. \end{array}\right\} \qquad \frac{(x-9)^2x}{-27(1-x)^2}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(x-9)^2x}{-27(1-x)^2}=\mathrm{W},$$

LXXXII...
$$\left\{\begin{array}{c} C=4A,\ B+5A=0, \\ l=\tfrac{2}{3},\ m=\tfrac{1}{2}, \\ - \\ \mu=\pm\tfrac{1}{2},\ \dfrac{\lambda}{2}=\pm\nu. \end{array}\right\} \qquad \frac{(x+8)^2(1-x)}{-27x^2}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(x+8)^2(1-x)}{-27x^2}=\mathrm{W},$$

LXXXIII..
$$\left\{\begin{array}{c} A=4C,\ B+5C=0, \\ l=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{1}{2}, \\ - \\ \mu=\pm\tfrac{1}{2},\ \lambda=\pm\dfrac{\nu}{2}. \end{array}\right\} \qquad \frac{(1+8x)^2(1-x)}{27x}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(1+8x)^2(1-x)}{27x}=\mathrm{W},$$

LXXXIV..
$$\left\{\begin{array}{c} A=0,\ 9B+8C=0, \\ l=\tfrac{1}{2},\ m=\tfrac{5}{6}, \\ - \\ \nu=\pm\tfrac{1}{3},\ \dfrac{\lambda}{3}=\pm\mu. \end{array}\right\} \qquad \frac{(8x^2-36x+27)^2}{-64x^3(1-x)}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(8x^2-36x+27)^2}{-64x^3(1-x)}=\mathrm{W},$$

LXXXV...
$$\left\{\begin{array}{c} A=0,\ B=8C, \\ l=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{1}{2}, \\ - \\ \nu=\pm\tfrac{1}{3},\ \lambda=\pm\dfrac{\mu}{3}. \end{array}\right\} \qquad \frac{(8x^2+20x-1)^2}{-64x(1-x)^3}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(8x^2+20x-1)^2}{-64x(1-x)^3}=\mathrm{W},$$

LXXXVI..
$$\left\{\begin{array}{c} C=0,\ 9B+8A=0, \\ l=\tfrac{2}{3},\ m=\tfrac{5}{6}, \\ - \\ \lambda=\pm\tfrac{1}{3},\ \mu=\pm\dfrac{\nu}{3}. \end{array}\right\} \qquad \frac{(8-36x+27x^2)^2}{64(1-x)}=\mathrm{U}, \qquad \frac{(8-36x+27x^2)^2}{64(1-x)}=\mathrm{W},$$

LXXXVII.. $$\left\{\begin{array}{c} C=0,\ B=8A, \\ l=\frac{2}{3},\ m=\frac{1}{2}, \\ \overline{} \\ \lambda=\pm\frac{1}{3},\ \frac{\mu}{3}=\pm\nu. \end{array}\right\}\qquad \frac{(8+20x-x^2)^2}{64(1-x)^3}=\mathrm{U},\qquad \frac{(8+20x-x^2)^2}{64(1-x)^3}=\mathrm{W},$$

LXXXVIII. $$\left\{\begin{array}{c} A=9C,\ B+10C=0, \\ l=\frac{5}{6},\ m=\frac{2}{3}, \\ \overline{} \\ \mu=\pm\frac{1}{3},\ \lambda=\pm\frac{\nu}{3}. \end{array}\right\}\qquad \frac{(27x^2-18x-1)^2}{64x}=\mathrm{U},\qquad \frac{(27x^2-18x-1)^2}{64x}=\mathrm{W},$$

LXXXIX.. $$\left\{\begin{array}{c} C=9A,\ B+10A=0, \\ l=\frac{1}{2},\ m=\frac{2}{3}, \\ \overline{} \\ \mu=\pm\frac{1}{3},\ \frac{\lambda}{3}=\pm\nu. \end{array}\right\}\qquad \frac{(x^2+18x-27)^2}{64x^3}=\mathrm{U},\qquad \frac{(x^2+18x-27)^2}{64x^3}=\mathrm{W},$$

XC........ $$\left\{\begin{array}{c} A=C,\ B+C=0, \\ l=m=\frac{2}{3}, \\ \overline{} \\ \lambda=\pm\mu=\pm\nu. \end{array}\right\}\qquad \frac{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}{-27x^2(1-x)^2}=\mathrm{U},\qquad \frac{(2x^3-3x^2-3x+2)^2}{-27x^2(1-x)^2}=\mathrm{W},$$

XCI....... $$\left\{\begin{array}{c} A+B=0,\ A=16C, \\ l=m=\frac{5}{6}, \\ \overline{} \\ \lambda=\pm\mu=\pm\frac{\nu}{4}. \end{array}\right\}\qquad \frac{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}{-108x(1-x)}=\mathrm{U},\qquad \frac{(64x^3-96x^2+30x+1)^2}{-108x(1-x)}=\mathrm{W},$$

XCII...... $$\left\{\begin{array}{c} B+C=0,\ C=16A, \\ l=\frac{1}{3},\ m=\frac{5}{6}, \\ \overline{} \\ \frac{\lambda}{4}=\pm\mu=\pm\nu. \end{array}\right\}\qquad \frac{(x^3+30x^2-96x+64)^2}{108x^4(1-x)}=\mathrm{U},\qquad \frac{(x^3+30x^2-96x+1)^2}{108x^4(1-x)}=\mathrm{W},$$

XCIII..... $$\left\{\begin{array}{c} A=C,\ B=14C, \\ l=\frac{5}{6},\ m=\frac{1}{3}, \\ \overline{} \\ \lambda=\pm\frac{\mu}{4}=\pm\nu. \end{array}\right\}\qquad \frac{(x^3-33x^2-33x+1)^2}{108x(1-x)^4}=\mathrm{U},\qquad \frac{(x^3-33x^2-33x+1)^2}{108x(1-x)^4}=\mathrm{W}.$$

Les transformations ainsi obtenues ne sont pas toutes irréductibles. Ainsi, il est clair que la relation

$$\frac{(9x-8)^2}{-27x^2(1-x)} = \frac{(9t-8)^2}{-27t^2(1-t)}$$

équivaut à deux relations distinctes, dont l'une est $x=t$, l'autre étant du deuxième degré par rapport à chacune des variables. De même la transformation

$$(2x-1)^2 = \frac{(2t^3-3t^2-3t+2)^2}{-27t^2(1-t)^2}$$

se dédouble en deux transformations rationnelles déjà trouvées directement :

$$2x-1 = \pm\frac{2t^3-3t^2-3t+2}{3i\sqrt{3}t(1-t)}.$$

Je n'insisterai pas davantage sur ces simplifications, qu'il est facile d'apercevoir dans chaque cas particulier.

20. Supposons que pour des valeurs convenables de A, B, C, l, m on puisse effectuer la transformation $x=\varphi(t)$ et passer ainsi de l'équation (2) à l'équation (4). Si pour $x=0$ plusieurs valeurs de t deviennent égales à un nombre t_1, différent de zéro et de l'unité, ces valeurs, comme on l'a vu plus haut, seront au nombre de deux, de trois ou de quatre. Admettons d'abord qu'il y en ait deux, que nous désignerons par t' et t''; admettons en outre que l'on a

$$\operatorname{mod} t_1 < 1.$$

L'équation (4) et, par suite, l'équation (2) admettront l'intégrale

$$t'^{p'}(1-t')^{q'}\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t') + t''^{p'}(1-t'')^{q'}\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t'').$$

Cette fonction est évidemment holomorphe dans le voisinage du point $x=0$, car, si l'on fait décrire à la variable x un lacet autour de ce point, les racines t' et t'' ne font que s'échanger. L'équation (2) devra donc admettre une intégrale uniforme dans le voisinage de l'origine; cette intégrale sera de la forme

$$(1-x)^{-q}\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,x),$$

et l'on aura, en désignant par A une constante convenable,

$$A(1-x)^{-q}F(\alpha,\beta,\gamma,x)=t'^{p'}(1-t')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t')+t''^{p'}(1-t'')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t'').$$

L'équation (2) admet de même l'intégrale

$$t'^{p'}(1-t')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t')-t''^{p'}(1-t'')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t''),$$

qui se reproduit, au signe près, quand la variable x décrit un lacet autour de l'origine. Cette intégrale sera de la forme

$$x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-q_1}F(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,x),$$

et l'on aura, en désignant par B une nouvelle constante,

$$\begin{aligned}&Bx^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-q_1}F(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,x)\\&\quad=t'^{p'}(1-t')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t')-t''^{p'}(1-t'')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t'').\end{aligned}$$

Si les valeurs de t qui deviennent égales à t_1 pour $x=0$ sont en nombre supérieur à 2, il est aussi facile de former des intégrales de l'équation (2), qui se reproduisent, multipliées par une constante, quand on fait décrire à la variable x un lacet autour du point $x=0$. Supposons, par exemple, que trois valeurs de t deviennent égales à t_1 pour $x=0$, et soient t', t'', t''' ces trois racines, rangées dans l'ordre dans lequel on les rencontre quand la variable décrit plusieurs lacets successifs dans le sens direct autour de l'origine. L'intégrale

$$\begin{aligned}&t'^{p'}(1-t')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t')\\&\quad+t''^{p'}(1-t'')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t'')+t'''^{p'}(1-t''')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t''')\end{aligned}$$

est évidemment uniforme dans le voisinage de l'origine, tandis que l'intégrale

$$\begin{aligned}&t'^{p'}(1-t')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t')\\&\quad+j^2t''^{p'}(1-t'')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t'')+jt'''^{p'}(1-t''')^{q'}F(\alpha',\beta',\gamma',t''')\end{aligned}$$

se reproduit, multipliée par j, quand x décrit un lacet dans le sens direct autour de l'origine. On en déduit des relations analogues aux précédentes.

Une ou plusieurs valeurs de t peuvent être nulles en même temps que x. Si la valeur de t qui est nulle pour $x=0$ est unique, l'intégrale $t^{p'}(1-t)^{q'}\,\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t)$ se reproduit, à un facteur constant près, quand x décrit un chemin fermé entourant l'origine; elle doit donc être égale à une intégrale de la forme

$$\mathrm{C}x^{-p}(1-x)^{-q}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

Le cas où plusieurs valeurs de t sont nulles en même temps que x demande un peu plus d'explications. Je suppose d'abord que l'on ait

$$x=\varphi(t),$$

φ désignant une fraction rationnelle. L'équation (2) admet une intégrale de la forme

$$x^{-p}(1-x)^{-q}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,x);$$

il en est de même de l'équation (4). Si l'on considère t comme la variable indépendante, quand on fait décrire à cette variable un lacet autour du point $t=0$, x revient à sa valeur initiale après avoir décrit plusieurs lacets autour du point $x=0$ et l'intégrale précédente se reproduit, multipliée par un facteur constant. On a donc

$$x^{-p}(1-x)^{-q}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,x)=\mathrm{C}'t'^{p'}(1-t')^{q'}\,\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t'),$$

t' désignant l'une des racines de l'équation $x=\varphi(t)$ qui sont nulles pour $x=0$. Toute transformation se ramenant à une combinaison de transformations rationnelles, la conclusion précédente subsiste dans le cas où x n'est plus une fonction rationnelle de t.

Le calcul des constantes qui entrent dans nos formules s'effectue sans difficulté, lorsque pour $x=0$ on a en même temps $t=0$; il suffit de chercher la limite du rapport $\dfrac{t'^{p'}}{x^{-p}}$ pour $x=0$. Prenons le cas où, pour $x=0$, t prend une valeur finie t_1, différente de zéro et de l'unité; dans les formules écrites ci-dessus, faisons $x=0$, $t=t_1$; on en déduit

$$\mathrm{A}=2\,t_1^{p'}(1-t_1)^{q'}\,\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t_1),$$

$$\mathrm{B}=\lim\frac{t'^{p'}(1-t')^{q'}\,\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t')-t''^{p'}(1-t'')^{q'}\,\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t'')}{x^{\frac{1}{2}}}\quad\text{pour}\quad x=0,\quad t=t_1,$$

$$\mathrm{B}=2\left(\frac{dt'}{d.x^{\frac{1}{2}}}\right)_{x=0}\frac{d}{dt}\left[t'^{p'}(1-t')^{q'}\,\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',t')\right]_{t=t_1}.$$

Les exemples suivants montrent bien la méthode à suivre dans chaque cas.

21. Considérons l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\tfrac{1}{2}-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0.$$

Par le changement de variable $x=(2t-1)^2$, elle devient

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+[\alpha+\beta+\tfrac{1}{2}-(2\alpha+2\beta+1)t]\frac{dy}{dt}-4\alpha\beta y=0.$$

Pour $x=0$, les deux valeurs de t sont égales à $\frac{1}{2}$. On aura donc

$$a\,F(\alpha,\beta,\tfrac{1}{2},x)=F\left(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)+F\left(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right),$$

$$b\sqrt{x}\,F(\alpha+\tfrac{1}{2},\beta+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},x)$$
$$=F\left(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)-F\left(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right).$$

Pour $x=1$, une des valeurs de t est égale à 0; donc

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},1-x)=F\left(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right).$$

Cette dernière formule va nous permettre de calculer a et b. On a, en effet,

$$a=2F(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$

ou, d'après la formule précédente,

$$a=2F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},1)=\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}.$$

On a de même

$$b=\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}F(2\alpha+1,2\beta+1,\alpha+\beta+\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}).$$

Dans la valeur de a changeons α en $\alpha+\frac{1}{2}$, β en $\beta+\frac{1}{2}$; on trouve

$$b=\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}=\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

22. Considérons encore l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{5x}{4}\right)\frac{dy}{dx}-\alpha\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)y=0.$$

Faisons le changement de variable $x=\dfrac{(t^2-6t+1)^2}{-16t(1-t)^2}$ et posons en même temps $y=t^\alpha(1-t)^{2\alpha}z$; on obtient la nouvelle équation différentielle

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2}+\left[2\alpha+\tfrac{3}{4}-\left(6\alpha+\tfrac{5}{4}\right)t\right]\frac{dz}{dt}-4\alpha\left(2\alpha+\tfrac{1}{4}\right)z=0.$$

Pour $x=0$, deux valeurs de t deviennent égales à $3-2\sqrt{2}$. Soient t' et t'' ces deux valeurs; dans le voisinage du point $x=0$, elles sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de $x^{\frac{1}{2}}$. Soient

$$t'=3-2\sqrt{2}+\sqrt{-1}\,(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$
$$t''=3-2\sqrt{2}-\sqrt{-1}\,(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}}+\ldots.$$

L'intégrale

$$t'^\alpha(1-t')^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t'\right)+t''^\alpha(1-t'')^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t''\right)$$

est uniforme dans le voisinage de l'origine. On a donc, A étant une constante,

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}\,F\left(\alpha,\tfrac{1}{4}-\alpha,\tfrac{1}{2},x\right)\\&\quad=t'^\alpha(1-t')^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t'\right)+t''^\alpha(1-t'')^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t''\right).\end{aligned}$$

On aura de même, en désignant par B une nouvelle constante,

$$\begin{aligned}\mathrm{B}x^{\frac{1}{2}}F\left(\alpha+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}-\alpha,\tfrac{3}{2},x\right)&=t'^\alpha(1-t')^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t'\right)\\&\quad-t''^\alpha(1-t'')^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t''\right).\end{aligned}$$

Faisons $x=0$; il vient

$$\mathrm{A}=2(3-2\sqrt{2})^\alpha(2\sqrt{2}-2)^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},3-2\sqrt{2}\right),$$

$$\mathrm{B}=2\sqrt{-1}\,(3\sqrt{2}-4)\frac{d}{dt}\left[t^\alpha(1-t)^{2\alpha}F\left(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t\right)\right]\ \text{pour}\ t=3-2\sqrt{2}.$$

Remarquons maintenant que, pour $x=\infty$, une des valeurs de t devient nulle. L'équation différentielle proposée admet les deux intégrales

$$t^\alpha(1-t)^{2\alpha}\,F(4\alpha,\,2\alpha+\tfrac{1}{4},\,2\alpha+\tfrac{3}{4},\,t),$$

$$x^{-\alpha}\,F\left(\alpha,\,\alpha+\tfrac{1}{2},\,2\alpha+\tfrac{3}{4},\,\frac{1}{x}\right),$$

qui appartiennent au même exposant dans le domaine du point $x=\infty$. Elles doivent donc être identiques à une constante près; on en déduit la relation

$$F(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t)=(t^2-6t+1)^{-2\alpha}\,F\left[\alpha,\alpha+\tfrac{1}{2},2\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{-16t(1-t)^2}{(t^2-6t+1)^2}\right],$$

que l'on peut aussi écrire

$$F(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t)=(1+t)^{-4\alpha}\,F\left[\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16t(1-t)^2}{(1+t)^4}\right].$$

Dans cette dernière formule faisons $t=3-2\sqrt{2}$; on en tire

$$F(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},3-2\sqrt{2})=(4-2\sqrt{2})^{-4\alpha}\,F(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},1).$$

Donc

$$A=\left[\frac{(3-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-2)^2}{(4-2\sqrt{2})^4}\right]^\alpha\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\frac{3}{4})}=\left(\frac{1}{16}\right)^\alpha\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\frac{3}{4})}.$$

On aura de même

$$\begin{aligned}
&t^\alpha(1-t)^{2\alpha}\,F(4\alpha,2\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},t)\\
&=\left[\frac{t(1-t)^2}{(1+t)^4}\right]^\alpha F\left[\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16t(1-t)^2}{(1+t)^4}\right]\\
&=\left[\frac{t(1-t)^2}{(1+t)^4}\right]^\alpha\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\frac{3}{4})}F\left[\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\frac{(t^2-6t+1)^2}{(1+t)^4}\right]\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{4})}\,\frac{t^2-6t+1}{(1+t)^2}\,F\left[\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{2},\frac{(t^2-6t+1)^2}{(1+t)^4}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Prenons la dérivée du second membre en négligeant tous les termes qui sont nuls pour $t=3-2\sqrt{2}$; nous trouvons

$$B=2\sqrt{-1}\left[\frac{(3-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-2)^2}{(4-2\sqrt{2})^4}\right]^\alpha\frac{(3\sqrt{2}-4)(-4\sqrt{2})}{(4-2\sqrt{2})^2}\,\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{4})}$$

ou, en réduisant,

$$B = \sqrt{-1}\left(\frac{1}{16}\right)^{\alpha} \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{4})}.$$

23. Les formules que l'on trouvera ci-après ont été obtenues d'une manière analogue :

$$(25)\quad \begin{cases} a\,F(\alpha,\beta,\frac{1}{2},x) = F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{x}}{2}\right) \\ \qquad\qquad + F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \dfrac{1-\sqrt{x}}{2}\right), \end{cases}$$

$$a = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})},$$

$$(26)\quad \begin{cases} c\,F(\alpha,\beta,\frac{1}{2},x) = (1-x)^{-\alpha}\,F\left(2\alpha, 1-2\beta, \alpha+1-\beta, \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x-1}}\right) \\ \qquad\qquad + (1-x)^{-\alpha}\,F\left(2\alpha, 1-2\beta, \alpha+1-\beta, \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x-1}}\right), \end{cases}$$

$$c = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-\beta)},$$

$$(27)\quad \begin{cases} b\sqrt{x}\,F(\alpha,\beta,\frac{3}{2},x) = F\left(2\alpha-1, 2\beta-1, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{x}}{2}\right) \\ \qquad\qquad - F\left(2\alpha-1, 2\beta-1, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, \dfrac{1-\sqrt{x}}{2}\right), \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} d\sqrt{x}\,F(\alpha,\beta,\frac{3}{2},x) = (1-x)^{-\alpha}\,F\left(2\alpha-1, 2-2\beta, \alpha+1-\beta, \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x-1}}\right) \\ \qquad\qquad - (1-x)^{-\alpha}\,F\left(2\alpha-1, 2-2\beta, \alpha+1-\beta, \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x-1}}\right), \end{cases}$$

$$b = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta-\frac{1}{2})}, \qquad d = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})\,\Gamma(1-\beta)},$$

$$(29)\quad F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2},x) = F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right),$$

$$(30)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, x) \\ \quad = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(2\alpha, \alpha-\beta+\frac{1}{2}, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right); \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, x) \\ \quad = (\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})^{-2\alpha} F\left(2\alpha, \alpha+\beta, 2\alpha+2\beta, \dfrac{2\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{-x}}\right); \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, x) \\ \quad = (1-x)^{-\frac{1}{2}} F\left(2\alpha-1, 2\beta-1, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right), \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, x) \\ \quad = (1-x)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{1-2\alpha} F\left(2\alpha-1, \alpha-\beta+\frac{1}{2}, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right), \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, x) \\ \quad = (1-x)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})^{1-2\alpha} F\left(2\alpha-1, \alpha+\beta-1, 2\alpha+2\beta-2, \dfrac{2\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{-x}}\right), \end{cases}$$

$$(35)\quad F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \gamma, x) = \left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(2\alpha, 2\alpha+1-\gamma, \gamma, \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right),$$

$$(36)\quad F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(2\alpha, 2\gamma-2\alpha-1, \gamma, \frac{\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}\right),$$

$$(37)\quad F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \gamma, x) = (1+\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(2\alpha, \gamma-\tfrac{1}{2}, 2\gamma-1, \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right),$$

$$(38)\quad \begin{cases} F\left(\alpha, \beta, \dfrac{\alpha+\beta+1}{2}, x\right) = F\left[\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}, \dfrac{\alpha+\beta+1}{2}, 4x(1-x)\right] \\ \qquad\qquad = (1-2x)\, F\left[\dfrac{\alpha+1}{2}, \dfrac{\beta+1}{2}, \dfrac{\alpha+\beta+1}{2}, 4x(1-x)\right], \end{cases}$$

$$(39)\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, x\right) = (1-2x)^{-\alpha} F\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}\right],$$

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} & F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, x\right) \\ & \quad = (\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})^{-2\alpha}\, F\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta, \frac{4\sqrt{x(x-1)}}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, 1-\alpha, \gamma, x) &= (1-x)^{\gamma-1}\, F\left[\frac{\gamma-\alpha}{2}, \frac{\gamma+\alpha-1}{2}, \gamma, 4x(1-x)\right] \\ &= (1-x)^{\gamma-1}(1-2x)\, F\left[\frac{\gamma+\alpha}{2}, \frac{\gamma+1-\alpha}{2}, \gamma, 4x(1-x)\right], \end{aligned}\right.$$

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} & F(\alpha, 1-\alpha, \gamma, x) \\ & \quad = (1-x)^{\gamma-1}(1-2x)^{\alpha-\gamma}\, F\left[\frac{\gamma-\alpha}{2}, \frac{\gamma+1-\alpha}{2}, \gamma, \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} & F(\alpha, 1-\alpha, \gamma, x) \\ & \quad = (1-x)^{\gamma-1}(\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})^{2-2\alpha-2\gamma}\, F\left[\gamma+\alpha-1, \gamma-\tfrac{1}{2}, 2\gamma-1, \frac{4\sqrt{x(x-1)}}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{-x})^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, \beta, 2\beta, x) &= (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}}\, F\left[\frac{\alpha}{2}, \beta-\frac{\alpha}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{x^2}{4(x-1)}\right] \\ &= \left(1-\frac{x}{2}\right)(1-x)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\, F\left[\beta+\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{x^2}{4(x-1)}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, \beta, 2\beta, x) &= \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} F\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \left(\frac{x}{2-x}\right)^2\right] \\ &= (1-x)^{\beta-\alpha}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\alpha-2\beta} F\left[\beta-\frac{\alpha}{2}, \beta+\frac{1-\alpha}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \left(\frac{x}{2-x}\right)^2\right], \end{aligned}\right.$$

$$(46)\quad F(\alpha, \beta, 2\beta, x) = (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}}\, F\left[\alpha, 2\beta-\alpha, \beta+\frac{1}{2}, \frac{(1-\sqrt{1-x})^2}{-4\sqrt{1-x}}\right],$$

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} & F(\alpha, \beta, 2\beta, x) \\ & \quad = \left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha-\beta+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2\right], \end{aligned}\right.$$

$$(48)\quad F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x) = (1-x)^{-\alpha}\, F\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1-2\beta}{2}, \alpha-\beta+1, \frac{-4x}{(1-x)^2}\right],$$

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} & F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x) \\ & \quad = (1+x)(1-x)^{-\alpha-1}\, F\left[\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha}{2}+1-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{-4x}{(1-x)^2}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(50)\quad F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x) = (1+x)^{-\alpha} F\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \alpha-\beta-1, \frac{4x}{(1+x)^2}\right],$$

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x)\\ &= (1-x)^{1-2\beta}(1+x)^{2\beta-\alpha-1} F\left[\frac{\alpha+1-2\beta}{2}, \frac{\alpha-2\beta+2}{2}, \alpha+1-\beta, \frac{4x}{(1+x)^2}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x)\\ &= (1+\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha-\beta+\tfrac{1}{2}, 2\alpha-2\beta+1, \frac{4\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Formules données par les transformations rationnelles du quatrième degré.

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &A\,F(\alpha, \tfrac{1}{4}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x)\\ &= A(1-x)^{\frac{1}{4}} F(\tfrac{1}{2}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, x)\\ &= t'^{\alpha}(1-t')^{2\alpha} F(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t') + t''^{\alpha}(1-t'')^{2\alpha} F(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t''),\end{aligned}\right.$$

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &B x^{\frac{1}{2}} F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}-\alpha, \tfrac{3}{2}, x)\\ &= B x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{4}} F(1-\alpha, \alpha+\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}, x)\\ &= t'^{\alpha}(1-t')^{2\alpha} F(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t') - t''^{\alpha}(1-t'')^{2\alpha} F(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t'');\end{aligned}\right.$$

t', t'' désignent les deux racines de l'équation

$$(t^2-6t+1)^2 + 16t(1-t)^2 x = 0,$$

qui sont égales à $3-2\sqrt{2}$ pour $x=0$:

$$t' = 3-2\sqrt{2} + \sqrt{-1}\,(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$
$$t'' = 3-2\sqrt{2} - \sqrt{-1}\,(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$A = (\tfrac{1}{16})^{\alpha} \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{3}{4})}, \quad B = \sqrt{-1}\,(\tfrac{1}{16})^{\alpha} \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{4})}.$$

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} &A\,F(\alpha, \tfrac{1}{4}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x)\\ &= A(1-x)^{\frac{1}{4}} F(\tfrac{1}{2}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, x)\\ &= (-t')^{\alpha}(1-t')^{\alpha} F(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t') + (-t'')^{\alpha}(1-t'')^{\alpha} F(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t''),\end{aligned}\right.$$

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{B}x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{F}(\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}-\alpha, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = \mathrm{B}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{F}(1-\alpha, \alpha+\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = (-t')^{\alpha}(1-t')^{\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t') - (-t'')^{\alpha}(1-t'')^{\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t''); \end{aligned}\right.$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(1+4t-4t^2)^2-16t(1-t)x=0,$$

qui sont égales à $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ pour $x=0$.

$$t' = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{C}\,\mathrm{F}(\alpha, \tfrac{1}{4}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x) \\ & = \mathrm{C}(1-x)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{F}(\tfrac{1}{2}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, x) \\ & = t'^{2\alpha}(1-t')^{\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 4\alpha+\tfrac{1}{2}, t') + t''^{2\alpha}(1-t'')^{\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 4\alpha+\tfrac{1}{2}, t''), \end{aligned}\right.$$

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{D}x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{F}(\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}-\alpha, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = \mathrm{D}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{F}(1-\alpha, \alpha+\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = t'^{2\alpha}(1-t')^{\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 4\alpha+\tfrac{1}{2}, t') - t''^{2\alpha}(1-t'')^{\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 4\alpha+\tfrac{1}{2}, t''); \end{aligned}\right.$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(t^2+4t-4)^2+16t^2(1-t)x=0,$$

qui sont égales à $2\sqrt{2}-2$ pour $x=0$.

$$t' = 2\sqrt{2}-2+\sqrt{-1}\,(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

$$t'' = 2\sqrt{2}-2-\sqrt{-1}\,(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

$$\mathrm{C} = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\frac{3}{4})}, \quad \mathrm{D} = \sqrt{-1}\,\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{4})}.$$

$$(59)\quad \begin{cases} \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\alpha, \alpha+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, x) \\ \quad = (1+t')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t') + (1+t'')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t''), \end{cases}$$

$$(60)\quad \begin{cases} \mathrm{G}\,x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{F}(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, x) \\ \quad = (1+t')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t') - (1+t'')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t''); \end{cases}$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(t^2 - 6t + 1)^2 - (1+t)^4 x = 0,$$

qui sont égales à $3 - 2\sqrt{2}$ pour $x = 0$.

$$t' = 3 - 2\sqrt{2} + (3\sqrt{2} - 4)x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = 3 - 2\sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 4)x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$\mathrm{E} = 2\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\frac{3}{4})}, \qquad \mathrm{G} = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{4})}.$$

$$(61)\quad \begin{cases} \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\alpha, \alpha+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, x) \\ \quad = (1-2t')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t') + (1-2t'')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t''). \end{cases}$$

$$(62)\quad \begin{cases} \mathrm{G}\,x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{F}(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, x) \\ \quad = (1-2t')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t') - (1-2t'')^{4\alpha}\,\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t''); \end{cases}$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(1 + 4t - 4t^2)^2 - (2t-1)^4 x = 0,$$

qui sont égales à $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ pour $x = 0$.

$$t' = \frac{1-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

$$(63)\quad \begin{cases} \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\alpha, \alpha+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, x) \\ = \left(\frac{2-t'}{2}\right)^{4\alpha} \mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 4\alpha+\frac{1}{2}, t') + \left(\frac{2-t''}{2}\right)^{4\alpha} \mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 4\alpha+\frac{1}{2}, t''), \end{cases}$$

$$(64)\quad \begin{cases} \mathrm{G}\,x^{\frac{1}{2}}\mathrm{F}(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, x) \\ = \left(\frac{2-t'}{2}\right)^{4\alpha} \mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 4\alpha+\frac{1}{2}, t') \\ \quad - \left(\frac{2-t''}{2}\right)^{4\alpha} \mathrm{F}(4\alpha, 2\alpha+\frac{1}{4}, 4\alpha+\frac{1}{2}, t''); \end{cases}$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(t^2+4t-4)^2-(2-t)^4 x = 0,$$

qui sont égales à $2\sqrt{2}-2$ pour $x=0$.

$$t' = 2\sqrt{2}-2+(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

$$t'' = 2\sqrt{2}-2-(3\sqrt{2}-4)x^{\frac{1}{2}}+\ldots.$$

$$(65)\quad \begin{cases} \mathrm{H}\,\mathrm{F}(\alpha, \frac{1}{4}-\alpha, \frac{3}{4}, x) \\ = \mathrm{H}(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{F}(\frac{3}{4}-\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, x) \\ = t'^{\alpha}(1-t')^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t') + t''^{\alpha}(1-t'')^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t'') \\ + t'''^{\alpha}(1-t''')^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t''') + t^{\mathrm{iv}\alpha}(1-t^{\mathrm{iv}})^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t^{\mathrm{iv}}), \end{cases}$$

$$(66)\quad \begin{cases} \mathrm{K}\,x^{\frac{1}{4}}\mathrm{F}(\alpha+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}-\alpha, \frac{5}{4}, x) \\ = \mathrm{K}\,x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{F}(1-\alpha, \alpha+\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, x) \\ = t'^{\alpha}(1-t')^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t') - \sqrt{-1}\, t''^{\alpha}(1-t'')^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t'') \\ - t'''^{\alpha}(1-t''')^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t''') + \sqrt{-1}\, t^{\mathrm{iv}\alpha}(1-t^{\mathrm{iv}})^{\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{3}{4}, t^{\mathrm{iv}}); \end{cases}$$

t', t'', t''', t^{iv} sont les quatre racines de l'équation

$$(2t-1)^4+16t(1-t)x = 0,$$

rangées dans l'ordre dans lequel on les rencontre quand on fait décrire à la variable x plusieurs lacets successifs dans le sens direct autour de l'origine :

$$t' = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right)x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{4}\right)x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$t''' = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{4}\right)x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$t^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{7\pi}{4}\right)x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$\mathrm{H} = \left(\tfrac{1}{16}\right)^{\alpha}\frac{4\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{4})\Gamma(\alpha+\frac{3}{4})},$$

$$\mathrm{K} = \left(\tfrac{1}{16}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{16\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(2\alpha+\frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}.$$

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H}\,\mathrm{F}(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, x) = {} & \left(\frac{1+4t'-4t'^2}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t') \\ & + \left(\frac{1+4t''-4t''^2}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t'') \\ & + \left(\frac{1+4t'''-4t'''^2}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t''') \\ & + \left(\frac{1+4t^{\text{IV}}-4t^{\text{IV}2}}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t^{\text{IV}}), \end{aligned}\right.$$

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L}x^{\frac{1}{4}}\mathrm{F}(\alpha+\tfrac{1}{4}, \alpha+\tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, x) = {} & \left(\frac{1+4t'-4t'^2}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t') \\ & - \sqrt{-1}\left(\frac{1+4t''-4t''^2}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t'') \\ & - \left(\frac{1+4t'''-4t'''^2}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t''') \\ & + \sqrt{-1}\left(\frac{1+4t^{\text{IV}}-4t^{\text{IV}2}}{4}\right)^{2\alpha}\mathrm{F}(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t^{\text{IV}}); \end{aligned}\right.$$

$t', t'', t''', t^{\text{IV}}$ sont les quatre racines de l'équation

$$(2t-1)^4 - x(1+4t-4t^2)^2 = 0.$$

Ainsi

$$t' = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\, x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$t''' = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$t^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\, x^{\frac{1}{4}} + \ldots,$$

$$L = \left(\tfrac{1}{16}\right)^{\alpha} \frac{16\Gamma(\frac{3}{4})\,\Gamma(2\alpha + \frac{3}{4})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}.$$

$$(69)\quad \begin{cases} F(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha + \frac{3}{4}, x) = (1-x)^{\frac{1}{4}} F(\alpha + \frac{1}{4}, \alpha + \frac{3}{4}, 2\alpha + \frac{3}{4}, x) \\ \quad = \left(\dfrac{t'^2 + 4t' - 4}{4}\right)^{2\alpha} F(4\alpha, 2\alpha + \frac{1}{4}, 4\alpha + \frac{1}{2}, t'); \end{cases}$$

t' étant une des deux racines de l'équation

$$16t^2(1-t) + x(t^2 + 4t - 4)^2 = 0,$$

qui sont nulles pour $x = 0$.

$$(70)\quad \begin{cases} F(\alpha, \alpha + \frac{1}{4}, 2\alpha + \frac{3}{4}, x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} F(\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \frac{3}{4}, 2\alpha + \frac{3}{4}, x) \\ \quad = \left(\dfrac{2 - t'}{2}\right)^{2\alpha} F(4\alpha, 2\alpha + \frac{1}{4}, 4\alpha + \frac{1}{2}, t'); \end{cases}$$

t' est une des deux racines de l'équation

$$16t^2(1-t) - x(2-t)^4 = 0,$$

qui sont nulles pour $x = 0$.

$$(71)\quad \begin{cases} F(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, 2\alpha + \frac{3}{4}, x) = (1-x)^{\frac{1}{4}} F(\alpha + \frac{1}{4}, \alpha + \frac{3}{4}, 2\alpha + \frac{3}{4}, x) \\ \quad = (t^2 - 6t + 1)^{2\alpha} F(4\alpha, 2\alpha + \frac{1}{4}, 2\alpha + \frac{3}{4}, t); \end{cases}$$

t désigne la racine de l'équation

$$16t(1-t)^2 + x(t^2 - 6t + 1)^2 = 0,$$

qui est nulle pour $x = 0$.

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{4}} F(\alpha+\tfrac{1}{4}, \alpha+\tfrac{3}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) \\ &= (1+4t-4t^2)^{2\alpha} F(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t); \end{aligned}\right.$$

t désigne la racine de l'équation

$$16t(1-t)-(1+4t-4t^2)^2 x = 0,$$

qui est nulle pour $x=0$.

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{2}} F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \alpha+\tfrac{3}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) \\ &= (1+t)^{4\alpha} F(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t); \end{aligned}\right.$$

t désigne la racine de l'équation

$$16t(1-t)^2 - x(1+t)^4 = 0,$$

qui est nulle pour $x=0$.

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{2}} F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \alpha+\tfrac{3}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) \\ &= (1-2t)^{4\alpha} F(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, t); \end{aligned}\right.$$

t désigne la racine de l'équation

$$16t(1-t)+x(2t-1)^4 = 0,$$

qui est nulle pour $x=0$.

Formules données par les transformations inverses.

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &F(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) \\ &\quad = (1-x)^{\frac{1}{2}-4\alpha} F(\tfrac{3}{4}-2\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x) \\ &\quad = \left\{\begin{aligned} &(x^2-6x+1)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, \frac{-16x(1-x)^2}{(1-6x+x^2)^2}\right], \\ &(1+x)^{-4\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, \frac{16x(1-x)^2}{(1+x)^4}\right]; \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

$$
(76)\quad \left\{\begin{aligned}
&F(4\alpha, 2\alpha+\tfrac{1}{4}, 4\alpha+\tfrac{1}{2}, x)\\
&\quad = (1-x)^{\frac{1}{4}-2\alpha} F(2\alpha+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{1}{2}, x)\\
&\quad = \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{4-4x-x^2}{4}\right)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, \frac{-16x^2(1-x)}{(x^2+4x-4)^2}\right],\\
&\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-4\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, \frac{16x^2(1-x)}{(2-x)^4}\right];
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(77)\quad \left\{\begin{aligned}
&F(4\alpha, \tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x)\\
&\quad = (1-x)^{\frac{1}{4}-2\alpha} F(2\alpha+\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}-2\alpha, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, x)\\
&\quad = \left\{\begin{aligned}
&(1+4x-4x^2)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, \frac{16x(1-x)}{(1+4x-4x^2)^2}\right],\\
&(1-2x)^{-4\alpha} F\left[\alpha; \alpha+\tfrac{1}{4}, 2\alpha+\tfrac{3}{4}, \frac{-16x(1-x)}{(1-2x)^4}\right].
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

Formules données par les transformations rationnelles du troisième degré.

$$
(78)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_1 F(\alpha, \tfrac{1}{6}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x)\\
&\quad = A_1(1-x)^{\frac{1}{3}} F(\tfrac{1}{2}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x)\\
&\quad = t'^{2\alpha}(1-t')^{\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t') + t''^{2\alpha}(1-t'')^{\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t''),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(79)\quad \left\{\begin{aligned}
&B_1 x^{\frac{1}{2}} F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}-\alpha, \tfrac{3}{2}, x)\\
&\quad = B_1(1-x)^{\frac{1}{3}} F(1-\alpha, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x)\\
&\quad = t'^{2\alpha}(1-t')^{\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t') - t''^{2\alpha}(1-t'')^{\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t'');
\end{aligned}\right.
$$

t', t'' désignent les deux racines de l'équation

$$(9t-8)^2 + 27t^2(1-t)x = 0,$$

qui sont égales à $\frac{8}{9}$ pour $x = 0$:

$$t' = \tfrac{8}{9} + \sqrt{-1}\,\frac{8\sqrt{3}}{81}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{8}{9} - \sqrt{-1}\,\frac{8\sqrt{3}}{81}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$A_1 = (\tfrac{1}{27})^{\alpha}\,\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{5}{6})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\frac{5}{6})}, \qquad B_1 = \sqrt{-1}\,(\tfrac{1}{27})^{\alpha}\,\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+\frac{5}{6})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{3})}.$$

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} & A_1\, F(\alpha, \tfrac{1}{6} - \alpha, \tfrac{1}{2}, x) \\ & = A_1\, (1-x)^{\frac{1}{3}}\, F(\tfrac{1}{2} - \alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) \\ & = t'^{\alpha}(1-t')^{2\alpha}\, F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') + t''^{\alpha}(1-t'')^{2\alpha}\, F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''), \end{aligned}\right.$$

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} & B_1\, x^{\frac{1}{2}}\, F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3} - \alpha, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = B_1\, x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\, F(1 - \alpha, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = t'^{\alpha}(1-t')^{2\alpha}\, F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') - t''^{\alpha}(1-t'')^{2\alpha}\, F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''); \end{aligned}\right.$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(1 - 9t)^2 + 27t(1-t)^2 x = 0,$$

qui sont égales à $\frac{1}{9}$ pour $x = 0$.

$$t' = \tfrac{1}{9} + \sqrt{-1}\,\frac{8\sqrt{3}}{81}\, x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{1}{9} - \sqrt{-1}\,\frac{8\sqrt{3}}{81}\, x^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} & A_1\, F(\alpha, \tfrac{1}{6} - \alpha, \tfrac{1}{2}, x) \\ & = A_1\, (1-x)^{\frac{1}{3}}\, F(\tfrac{1}{2} - \alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) \\ & = (-t')^{\alpha}\, F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') + (-t'')^{\alpha}\, F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''), \end{aligned}\right.$$

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} & B_1\, x^{\frac{1}{2}}\, F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3} - \alpha, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = B_1\, x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\, F(1 - \alpha, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = (-t')^{\alpha}\, F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') - (-t'')^{\alpha}\, F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''); \end{aligned}\right.$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(1 + 8t)^2 (1 - t) - 27tx = 0,$$

qui sont égales à $-\frac{1}{8}$ pour $x = 0$.

$$t' = -\tfrac{1}{8} - \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{8}\, x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = -\tfrac{1}{8} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{8}\, x^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

$$(84)\quad F(\alpha, \tfrac{1}{6}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x) = (1-x)^{\frac{1}{3}} F(\tfrac{1}{2}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) = (1-t)^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, t).$$

$$(85)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}-\alpha, \tfrac{3}{2}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{3}} F(1-\alpha, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) \\ &= (1-t)^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{9}{9-8t} F(3\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{6}-\alpha, \tfrac{3}{2}, t); \end{aligned} \right.$$

t étant la racine de l'équation

$$(9-8t)^2 t - 27(1-t)x = 0,$$

qui est nulle pour $x = 0$.

$$(86)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \tfrac{1}{6}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{3}} F(\tfrac{1}{2}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) \\ &= (1-t)^{2\alpha} F(3\alpha, \alpha+\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{2}, t), \end{aligned} \right.$$

$$(87)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}-\alpha, \tfrac{3}{2}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{3}} F(1-\alpha, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) \\ &= (1-t)^{2\alpha+1} \frac{9}{9-t} F(3\alpha+\tfrac{1}{2}, \alpha+\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, t); \end{aligned} \right.$$

t étant la racine de l'équation

$$(t-9)^2 t + 27(1-t)^2 x = 0,$$

qui est nulle pour $x = 0$.

$$(88)\quad \left\{ \begin{aligned} & C_1 F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) \\ & = \left(\frac{4-3t'}{4}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t') + \left(\frac{4-3t''}{4}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t''), \end{aligned} \right.$$

$$(89)\quad \left\{ \begin{aligned} & D_1 x^{\frac{1}{2}} F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) \\ & = \left(\frac{4-3t'}{4}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t') - \left(\frac{4-3t''}{4}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t''); \end{aligned} \right.$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(9t-8)^2 + (3t-4)^3 x = 0,$$

qui sont égales à $\frac{8}{9}$ pour $x = 0$.

$$t' = \tfrac{8}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{81} x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{8}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{81} x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$C_1 = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha + \frac{5}{6})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})\Gamma(\alpha + \frac{5}{6})}, \quad D_1 = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha + \frac{5}{6})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \frac{1}{3})}.$$

$$(90)\quad \left\{ \begin{aligned} & C_1\, F(\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) \\ & \quad = (1 + 3t')^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') + (1 + 3t'')^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''). \end{aligned} \right.$$

$$(91)\quad \left\{ \begin{aligned} & D_1 x^{\frac{1}{2}} F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) \\ & \quad = (1 + 3t')^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') - (1 + 3t'')^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''); \end{aligned} \right.$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(1 - 9t)^2 - x(3t + 1)^3 = 0,$$

qui sont égales à $\frac{1}{9}$ pour $x = 0$.

$$t' = \tfrac{1}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{81} x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{1}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{81} x^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

$$(92)\quad \left\{ \begin{aligned} C_1 F(\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) = {} & (1 - 4t')^{3\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') \\ & + (1 - 4t'')^{3\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''), \end{aligned} \right.$$

$$(93)\quad \left\{ \begin{aligned} D_1 x^{\frac{1}{2}} F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) = {} & (1 - 4t')^{3\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t') \\ & - (1 - 4t'')^{3\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, t''); \end{aligned} \right.$$

t', t'' sont les deux racines de l'équation

$$(1 + 8t)^2(1 - t) - (1 - 4t)^3 x = 0,$$

qui sont égales à $(-\frac{1}{8})$ pour $x = 0$.

$$t' = -\tfrac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} x^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$t'' = -\tfrac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} x^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

$$(94) \qquad F(\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) = \left(1 - \frac{4t}{3}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, \tfrac{1}{2}, t),$$

$$(95) \quad F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) = \left(1 - \frac{4t}{3}\right)^{3\alpha + \frac{3}{2}} \frac{9}{9 - 8t} F(3\alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{6} - \alpha, \tfrac{3}{2}, t);$$

t désignant la racine de l'équation

$$(9 - 8t)^2 t + (3 - 4t)^3 x = 0,$$

qui est nulle pour $x = 0$.

$$(96) \qquad F(\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, x) = \left(1 + \frac{t}{3}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, \alpha + \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{2}, t),$$

$$(97) \quad F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, x) = \left(1 + \frac{t}{3}\right)^{3\alpha + \frac{3}{2}} \frac{9}{9 - t} F(3\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha + \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, t);$$

t étant la racine de l'équation

$$(t - 9)^2 t - (t + 3)^3 x = 0,$$

qui est nulle pour $x = 0$.

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 F(\alpha, \tfrac{1}{6} - \alpha, \tfrac{2}{3}, x) &= E_1 (1 - x)^{\frac{1}{2}} F(\tfrac{2}{3} - \alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, x) \\ &= (1 - t')^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, \tfrac{1}{2}, t') \\ &\quad + (1 - t'')^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, \tfrac{1}{2}, t'') \\ &\quad + (1 - t''')^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, \tfrac{1}{2}, t'''), \end{aligned} \right.$$

$$(99) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1 x^{\frac{1}{3}} F(\alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2} - \alpha, \tfrac{4}{3}, x) &= G_1 x^{\frac{1}{3}} (1 - x)^{\frac{1}{2}} F(1 - \alpha, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, x) \\ &= \quad (1 - t')^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, \tfrac{1}{2}, t') \\ &\quad + j^2 (1 - t'')^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, \tfrac{1}{2}, t'') \\ &\quad + j\, (1 - t''')^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3} - \alpha, \tfrac{1}{2}, t'''); \end{aligned} \right.$$

t', t'', t''' sont les trois racines de l'équation

$$(3-4t)^3 - 27(1-t)x = 0,$$

rangées dans l'ordre dans lequel on les rencontre quand on fait décrire à la variable x plusieurs lacets successifs dans le sens direct autour de l'origine :

$$t' = \tfrac{3}{4} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots, \qquad j = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$t'' = \tfrac{3}{4} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} j\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots, \qquad j^2 = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$t''' = \tfrac{3}{4} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} j^2 x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$E_1 = \frac{3\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{3})}, \qquad G_1 = \frac{-9\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{6}-\alpha)}.$$

$$(100)\quad \left\{\begin{aligned} H_1 F(\alpha, \tfrac{1}{6}-\alpha, \tfrac{2}{3}, x) = H_1(1-x)^{\frac{1}{2}} F(\tfrac{2}{3}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, x) \\ = t'^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t') \\ + t''^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'') \\ + t'''^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'''), \end{aligned}\right.$$

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned} K_1 x^{\frac{1}{3}} F(\alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}-\alpha, \tfrac{4}{3}, x) = K_1 x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{2}} F(1-\alpha, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, x) \\ = t'^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t') \\ + j^2 t''^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'') \\ + j\, t'''^{\alpha} F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'''); \end{aligned}\right.$$

t', t'', t''' sont les trois racines de l'équation

$$(1-4t)^3 + 27tx = 0 :$$

$$t' = \tfrac{1}{4} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{1}{4} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} j\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$t''' = \tfrac{1}{4} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} j^2 x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$
\mathrm{H}_1 = \left(\frac{1}{27}\right)^{\alpha} \frac{3\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{5}{6}\right)}, \qquad \mathrm{K}_1 = -\left(\frac{1}{27}\right)^{\alpha} \frac{9\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}.
$$

$$
(102)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{H}_1 \mathrm{F}\left(\alpha, \tfrac{1}{6}-\alpha, \tfrac{2}{3}, x\right) &= \mathrm{H}_1 (1-x)^{\frac{1}{2}} \mathrm{F}\left(\tfrac{2}{3}-\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, x\right) \\
&= (-t')^{\alpha}(1-t')^{2\alpha}\mathrm{F}\left(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'\right) \\
&+ (-t'')^{\alpha}(1-t'')^{2\alpha}\mathrm{F}\left(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t''\right) \\
&+ (-t''')^{\alpha}(1-t''')^{2\alpha}\mathrm{F}\left(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'''\right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(103)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{K}_1 x^{\frac{1}{2}} \mathrm{F}\left(\alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}-\alpha, \tfrac{4}{3}, x\right) &= \mathrm{K}_1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \mathrm{F}\left(1-\alpha, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, x\right) \\
&= (-t')^{\alpha}(1-t')^{2\alpha}\mathrm{F}\left(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'\right) \\
&+ j^2(-t'')^{\alpha}(1-t'')^{2\alpha}\mathrm{F}\left(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t''\right) \\
&+ j(-t''')^{\alpha}(1-t''')^{2\alpha}\mathrm{F}\left(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'''\right);
\end{aligned}
\right.
$$

t', t'', t''' sont les trois racines de l'équation

$$
(3t+1)^3 - 27t(1-t)^2 x = 0:
$$

$$
\begin{aligned}
t' &= -\tfrac{1}{3} - \frac{2\sqrt[3]{2}}{3} \; x^{\frac{1}{3}} + \ldots, \\
t'' &= -\tfrac{1}{3} - \frac{2\sqrt[3]{2}}{3} j \; x^{\frac{1}{3}} + \ldots, \\
t''' &= -\tfrac{1}{3} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{3} j^2 x^{\frac{1}{3}} + \ldots.
\end{aligned}
$$

$$
(104)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{L}_1 \mathrm{F}\left(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, x\right) &= (9-8t')^{2\alpha} t'^{\alpha} \mathrm{F}\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, t'\right) \\
&+ (9-8t'')^{2\alpha} t''^{\alpha} \mathrm{F}\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, t''\right) \\
&+ (9-8t''')^{2\alpha} t'''^{\alpha} \mathrm{F}\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, t'''\right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(105)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{M}_1 x^{\frac{1}{3}} \mathrm{F}\left(\alpha+\tfrac{1}{3}, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, x\right) &= (9-8t')^{2\alpha} t'^{\alpha} \mathrm{F}\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, t'\right) \\
&+ j^2(9-8t'')^{2\alpha} t''^{\alpha} \mathrm{F}\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, t''\right) \\
&+ j(9-8t''')^{2\alpha} t'''^{\alpha} \mathrm{F}\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, t'''\right);
\end{aligned}
\right.
$$

t', t'', t''' sont les trois racines de l'équation

$$
(4t-3)^3 - (9-8t)^2 t x = 0:
$$

$$t' = \tfrac{3}{4} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{3}{4} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, j\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$t''' = \tfrac{3}{4} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, j^2 x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$L_1 = (27)^\alpha \frac{3\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{3})}, \quad M_1 = (27)^\alpha \frac{9\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{6}-\alpha)}.$$

$$(106)\left\{\begin{aligned} P\,F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, x) = {} & (1+8t')^{2\alpha}(1-t')^\alpha F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t') \\ & + (1+8t'')^{2\alpha}(1-t'')^\alpha F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'') \\ & + (1+8t''')^{2\alpha}(1-t''')^\alpha F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'''), \end{aligned}\right.$$

$$(107)\left\{\begin{aligned} Q x^{\frac{1}{3}} F(\alpha+\tfrac{1}{3}, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, x) = {} & (1+8t')^{2\alpha}(1-t')^\alpha F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t') \\ & + j^2(1+8t'')^{2\alpha}(1-t'')^\alpha F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'') \\ & + j\,(1+8t''')^{2\alpha}(1-t''')^\alpha F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'''); \end{aligned}\right.$$

t', t'', t''' sont les trois racines de l'équation

$$(1-4t)^3 - (1+8t)^2(1-t)x = 0.$$

$$t' = \quad - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$t'' = \tfrac{1}{4} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, j\, x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$t''' = \tfrac{1}{4} - \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}\, j^2 x^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$P = \frac{3\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(2\alpha+\frac{5}{6})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{3})\,\Gamma(\alpha+\frac{5}{6})}, \quad Q = -\frac{9\Gamma(\frac{2}{3})\,\Gamma(2\alpha+\frac{5}{6})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}.$$

$$(108)\left\{\begin{aligned} P\,F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, x) = {} & (1-9t')^{2\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t') \\ & + (1-9t'')^{2\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'') \\ & + (1-9t''')^{2\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'''), \end{aligned}\right.$$

$$(109)\left\{\begin{aligned} Qx^{\frac{1}{3}}F(\alpha+\tfrac{1}{3}, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, x) = {}&(1-9t')^{2\alpha}F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t')\\ &+j^2(1-9t'')^{2\alpha}F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t'')\\ &+j(1-9t''')^{2\alpha}F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t''');\end{aligned}\right.$$

t', t'', t''' sont les trois racines de l'équation

$$(3t+1)^3-(1-9t)^2x=0:$$

$$t' = -\tfrac{1}{3}+\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\,x^{\frac{1}{3}}+\ldots,$$

$$t'' = -\tfrac{1}{3}+\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\,j\,x^{\frac{1}{3}}+\ldots,$$

$$t''' = -\tfrac{1}{3}+\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\,j^2x^{\frac{1}{3}}+\ldots.$$

$$(110)\left\{\begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{3}}F(\alpha+\tfrac{1}{3}, \alpha+\tfrac{5}{6}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x)\\ &= \left(1-\frac{9t'}{8}\right)^{2\alpha}F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t');\end{aligned}\right.$$

t' est une des deux racines de l'équation

$$27t^2(1-t)+(9t-8)^2x=0,$$

qui sont nulles pour $x=0$.

$$(111)\left\{\begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{3}}F(\alpha+\tfrac{1}{3}, \alpha+\tfrac{5}{6}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x)\\ &= \left(1+\frac{t'}{8}\right)^{2\alpha}(1-t')^{\alpha}F(3\alpha, \alpha+\tfrac{1}{6}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t');\end{aligned}\right.$$

t' est une des deux racines de l'équation

$$27t^2+(t+8)^2(1-t)x=0,$$

qui sont nulles pour $x=0$.

$$(112)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{3}}\, F(\alpha+\tfrac{1}{3}, \alpha+\tfrac{5}{6}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) \\ &= (1-9t)^{2\alpha}\, F(3\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t), \end{aligned} \right.$$

t étant la racine de l'équation

$$27t(1-t)^2 + (1-9t)^2 x = 0,$$

qui est nulle pour $x=0$.

$$(113)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{3}}\, F(\alpha+\tfrac{1}{3}, \alpha+\tfrac{5}{6}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) \\ &= (1+8t)^{2\alpha}(1-t)^{\alpha}\, F(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, t); \end{aligned} \right.$$

t étant la racine de l'équation

$$27t - (1+8t)^2(1-t)x = 0,$$

qui est nulle pour $x=0$.

$$(114)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{2}}\, F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \alpha+\tfrac{5}{6}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) \\ &= \left(1-\frac{3t'}{4}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, 3\alpha+{}^{1}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t'); \end{aligned} \right.$$

t' est une des deux racines de l'équation

$$27t^2(1-t) - (4-3t)^3 x = 0,$$

qui sont nulles pour $x=0$.

$$(115)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) &= (1-x)^{\frac{1}{2}}\, F(\alpha+\tfrac{1}{2}, \alpha+\tfrac{5}{6}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x) \\ &= \left(1-\frac{t'}{4}\right)^{3\alpha} F(3\alpha, \alpha+\tfrac{1}{6}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, t'); \end{aligned} \right.$$

t' est une des deux racines de l'équation

$$27t^2 - (4-t)^3 x = 0,$$

qui sont nulles pour $x=0$.

$$(116)\quad \begin{cases} F(\alpha, \alpha+\frac{1}{3}, 2\alpha+\frac{5}{6}, x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}\, F(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{5}{6}, 2\alpha+\frac{5}{6}, x) \\ \qquad = (1+3t)^{3\alpha}\, F(3\alpha, 3\alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{5}{6}, t); \end{cases}$$

t étant la racine de l'équation

$$27t(1-t)^2 - (3t+1)^3 x = 0,$$

qui est nulle pour $x=0$.

$$(117)\quad \begin{cases} F(\alpha, \alpha+\frac{1}{3}, 2\alpha+\frac{5}{6}, x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}\, F(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{5}{6}, 2\alpha+\frac{5}{6}, x) \\ \qquad = (1-4t)^{3\alpha}\, F(3\alpha, \frac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\frac{5}{6}, t); \end{cases}$$

t étant la racine de l'équation

$$27t + (1-4t)^3 x = 0,$$

qui est nulle pour $x=0$.

Formules fournies par les transformations inverses.

$$(118)\quad \begin{cases} F(3\alpha, 3\alpha+\frac{1}{2}, 4\alpha+\frac{2}{3}, x) \\ \quad = (1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha}\, F(\alpha+\frac{1}{6}, \alpha+\frac{2}{3}, 4\alpha+\frac{2}{3}, x) \\ \quad = \begin{cases} \left(1-\dfrac{9x}{8}\right)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{5}{6}, \dfrac{-27x^2(1-x)}{(9x-8)^2}\right], \\ \left(1-\dfrac{3x}{4}\right)^{-3\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{3}, 2\alpha+\frac{5}{6}, \dfrac{-27x^2(1-x)}{(3x-4)^3}\right], \end{cases} \end{cases}$$

$$(119)\quad \begin{cases} F(3\alpha, 3\alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{5}{6}, x) \\ \quad = (1-x)^{\frac{1}{3}-4\alpha}\, F(\frac{1}{3}-\alpha, \frac{5}{6}-\alpha, 2\alpha+\frac{5}{6}, x) \\ \quad = \begin{cases} (1-9x)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+\frac{5}{6}, \dfrac{-27x(1-x)^2}{(1-9x)^2}\right], \\ (1+3x)^{-3\alpha} F\left[\alpha, \alpha+\frac{1}{3}, 2\alpha+\frac{5}{6}, \dfrac{27x(1-x)^2}{(1+3x)^3}\right], \end{cases} \end{cases}$$

$$
(120)\quad\left\{\begin{aligned}
&F\left(3\alpha, \alpha+\tfrac{1}{6}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{2}}\,F\left(\alpha+\tfrac{2}{3}, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 4\alpha+\tfrac{2}{3}, x\right)\\
&\quad=\begin{cases}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{-2\alpha}(1-x)^{-\alpha}\,F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, \dfrac{-27x^2}{(x+8)^2(1-x)}\right],\\[2ex]
\left(1-\dfrac{x}{4}\right)^{-3\alpha}F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, \dfrac{-27x^2}{(x-4)^3}\right],\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(121)\quad\left\{\begin{aligned}
&F\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{2}}\,F\left(\tfrac{5}{6}-\alpha, 3\alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, x\right)\\
&\quad=\begin{cases}(1+8x)^{-2\alpha}(1-x)^{-\alpha}\,F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{2}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, \dfrac{27x}{(1+8x)^2(1-x)}\right],\\[2ex]
(1-4x)^{-3\alpha}\,F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, 2\alpha+\tfrac{5}{6}, \dfrac{27x}{(4x-1)^3}\right],\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(122)\quad\left\{\begin{aligned}
&F\left(3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha}\,F\left(\tfrac{1}{2}-3\alpha, \tfrac{1}{6}+\alpha, \tfrac{1}{2}, x\right)\\
&\quad=\begin{cases}(1-x)^{-\alpha}\,F\left[\alpha, \tfrac{1}{6}-\alpha, \tfrac{1}{2}, \dfrac{(9-8x)^2x}{27(1-x)}\right],\\[2ex]
\left(1+\dfrac{4x}{3}\right)^{-3\alpha}F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \dfrac{(9-8x)^2x}{(4x-3)^3}\right],\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(123)\quad\left\{\begin{aligned}
&F\left(3\alpha, \alpha+\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{2}, x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{3}-4\alpha}\,F\left(\tfrac{1}{2}-3\alpha, \tfrac{1}{3}-\alpha, \tfrac{1}{2}, x\right)\\
&\quad=\begin{cases}(1-x)^{-2\alpha}\,F\left[\alpha, \tfrac{1}{6}-\alpha, \tfrac{1}{2}, \dfrac{(x-9)^2x}{-27(1-x)^2}\right],\\[2ex]
\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{-3\alpha}F\left[\alpha, \alpha+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \dfrac{(x-9)^2x}{(x+3)^3}\right],\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(124)\quad\left\{\begin{aligned}
&F\left(3\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{6}-\alpha, \tfrac{3}{2}, x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha}\,F\left(\tfrac{1}{2}-3\alpha, \alpha+\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, x\right)\\
&\quad=\begin{cases}\left(1-\dfrac{8x}{9}\right)(1-x)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\,F\left[\alpha+\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}-\alpha, \tfrac{3}{2}, \dfrac{(9-8x)^2x}{27(1-x)}\right],\\[2ex]
\left(1-\dfrac{8x}{9}\right)\left(1-\dfrac{4x}{3}\right)^{-3\alpha-\frac{3}{2}}F\left[\alpha+\tfrac{1}{2}, \alpha+\tfrac{5}{6}, \tfrac{3}{2}, \dfrac{(9-8x)^2x}{(4x-3)^3}\right],\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(125)\quad \left\{\begin{aligned}
&F\left(3\alpha+\tfrac{1}{2},\ \alpha+\tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{3}-4\alpha}\,F\left(1-3\alpha,\ \tfrac{5}{6}-\alpha,\ \tfrac{3}{2},\ x\right)\\
&\quad=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{9}\right)(1-x)^{-2\alpha-1}\,F\left[\alpha+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3}-\alpha,\ \tfrac{3}{2},\ \dfrac{(x-9)^2x}{-27(1-x)^2}\right],\\ \left(1-\dfrac{x}{9}\right)\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{-3\alpha-\frac{3}{2}}F\left[\alpha+\tfrac{1}{2},\ \alpha+\tfrac{5}{6},\ \tfrac{3}{2},\ \dfrac{(x-9)^2x}{(x+3)^3}\right].\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

Formules fournies par les transformations inverses des autres transformations rationnelles.

$$
(126)\quad \left\{\begin{aligned}
&F\left(4\alpha,\ 4\alpha+\tfrac{1}{3},\ 6\alpha+\tfrac{1}{2},\ x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha}\,F\left(2\alpha+\tfrac{1}{6},\ 2\alpha+\tfrac{1}{2},\ 6\alpha+\tfrac{1}{2},\ x\right)\\
&\quad=\begin{cases}\left(\dfrac{27-36x+8x^2}{27}\right)^{-2\alpha}F\left[\alpha,\ \alpha+\tfrac{1}{2},\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ \dfrac{-64x^3(1-x)}{(8x^2-36x+27)^2}\right],\\ \left(1-\dfrac{8x}{9}\right)^{-3\alpha}F\left[\alpha,\ \alpha+\tfrac{1}{3},\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ \dfrac{64x^3(1-x)}{(9-8x)^3}\right];\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(127)\quad \left\{\begin{aligned}
&F\left(4\alpha,\ 4\alpha+\tfrac{1}{3},\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{2}-6\alpha}\,F\left(\tfrac{1}{2}-2\alpha,\ \tfrac{5}{6}-2\alpha,\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ x\right)\\
&\quad=\begin{cases}(1-20x-8x^2)^{-2\alpha}\,F\left[\alpha,\ \alpha+\tfrac{1}{2},\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ \dfrac{-64x(1-x)^3}{(1-20x-8x^2)^2}\right],\\ (1+8x)^{-3\alpha}\,F\left[\alpha,\ \alpha+\tfrac{1}{3},\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ \dfrac{64x(1-x)^3}{(1+8x)^3}\right];\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(128)\quad \left\{\begin{aligned}
&F\left(4\alpha,\ 2\alpha+\tfrac{1}{6},\ 6\alpha+\tfrac{1}{2},\ x\right)\\
&\quad=(1-x)^{\frac{1}{3}}\,F\left(4\alpha+\tfrac{1}{3},\ 2\alpha+\tfrac{1}{2},\ 6\alpha+\tfrac{1}{2},\ x\right)\\
&\quad=\begin{cases}\left(\dfrac{27-18x-x^2}{27}\right)^{-2\alpha}F\left[\alpha,\ \alpha+\tfrac{1}{2},\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ \dfrac{64x^3}{(x^2+18x-27)^2}\right],\\ \left(1-\dfrac{x}{9}\right)^{-3\alpha}(1-x)^{-\alpha}\,F\left[\alpha,\ \alpha+\tfrac{1}{3},\ 2\alpha+\tfrac{5}{6},\ \dfrac{64x^3}{(x-9)^3(1-x)}\right];\end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$(129)\quad \begin{cases} F(4\alpha, \tfrac{1}{2} - 2\alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, x) \\ \quad = (1-x)^{\frac{1}{3}} F(4\alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{6} - 2\alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, x) \\ \quad = \begin{cases} (1 + 18x - 27x^2)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \dfrac{64x}{(1 + 18x - 27x^2)^2}\right], \\ (1 - 9x)^{-3\alpha}(1-x)^{-\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \dfrac{64x}{(9x-1)^3(1-x)}\right]; \end{cases} \end{cases}$$

$$(130)\quad \begin{cases} F(4\alpha, \tfrac{1}{2} - 2\alpha, \tfrac{2}{3}, x) \\ \quad = \begin{cases} (1-x)^{-\alpha} F\left[\alpha, \tfrac{1}{6} - \alpha, \tfrac{2}{3}, \dfrac{(8-9x)^3 x}{64(1-x)}\right], \\ \left(\dfrac{8 - 36x + 27x^2}{8}\right)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \dfrac{-(8-9x)^3 x}{(8 - 36x + 27x^2)^2}\right]; \end{cases} \end{cases}$$

$$(131)\quad \begin{cases} F(4\alpha, 2\alpha + \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}, x) \\ \quad = \begin{cases} (1-x)^{-3\alpha} F\left[\alpha, \tfrac{1}{6} - \alpha, \tfrac{2}{3}, \dfrac{-(x+8)^3 x}{64(1-x)^3}\right], \\ \left(\dfrac{8 - 20x - x^2}{8}\right)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \dfrac{(x+8)^3 x}{(x^2 - 20x - 8)^2}\right], \end{cases} \end{cases}$$

$$(132)\quad \begin{cases} F(4\alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{6} - 2\alpha, \tfrac{4}{3}, x) \\ \quad = \begin{cases} (1-x)^{-\alpha-\frac{1}{3}}\left(1 - \dfrac{9x}{8}\right) F\left[\alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2} - \alpha, \tfrac{4}{3}, \dfrac{(8-9x)^3 x}{64(1-x)}\right], \\ \left(\dfrac{8 - 36x + 27x^2}{8}\right)^{-2\alpha-\frac{2}{3}}\left(1 - \dfrac{9x}{8}\right) F\left[\alpha + \tfrac{1}{3}, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, \dfrac{-(8-9x)^3 x}{(8 - 36x + 27x^2)^2}\right], \end{cases} \end{cases}$$

$$(133)\quad \begin{cases} F(4\alpha + \tfrac{1}{3}, 2\alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{3}, x) \\ \quad = \begin{cases} (1-x)^{-3\alpha-1}\left(1 + \dfrac{x}{8}\right) F\left[\alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2} - \alpha, \tfrac{4}{3}, \dfrac{-(x+8)^3 x}{64(1-x)^3}\right], \\ \left(\dfrac{8 - 20x - x^2}{8}\right)^{-2\alpha-\frac{2}{3}}\left(1 + \dfrac{x}{8}\right) F\left[\alpha + \tfrac{1}{3}, \alpha + \tfrac{5}{6}, \tfrac{4}{3}, \dfrac{(x+8)^3 x}{(x^2 - 20x - 8)^2}\right]; \end{cases} \end{cases}$$

$$(134)\quad \begin{cases} F(6\alpha, 2\alpha + \tfrac{1}{3}, 4\alpha + \tfrac{2}{3}, x) \\ \quad = (1-x)^{\frac{1}{3}-4\alpha} F(2\alpha + \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} - 2\alpha, 4\alpha + \tfrac{2}{3}, x) \\ \quad = \begin{cases} \left(\dfrac{2 - 3x - 3x^2 + 2x^3}{2}\right)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \dfrac{-27x^2(1-x)^2}{(2x^3 - 3x^2 - 3x + 2)^2}\right], \\ (1 - x + x^2)^{-3\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \dfrac{27x^2(1-x)^2}{4(x^2 - x + 1)^3}\right], \end{cases} \end{cases}$$

$$
(135)\left\{\begin{aligned}
&F\left(6\alpha, \tfrac{2}{3} - 2\alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, x\right) \\
&\quad = (1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha} F\left(4\alpha + \tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6} - 4\alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, x\right) \\
&\quad = \left\{\begin{aligned}
&(1 + 30x - 96x^2 + 64x^3)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \frac{-108x(1-x)}{(64x^3 - 96x^2 + 30x + 1)^2}\right], \\
&(1 - 16x + 16x^2)^{-3\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \frac{108x(1-x)}{(1 - 16x + 16x^2)^3}\right];
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(136)\left\{\begin{aligned}
&F\left(6\alpha, 4\alpha + \tfrac{1}{6}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, x\right) \\
&\quad = (1-x)^{\frac{2}{3}-8\alpha} F\left(\tfrac{5}{6} - 4\alpha, \tfrac{2}{3} - 2\alpha, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, x\right) \\
&\quad = \left\{\begin{aligned}
&(1 - 33x - 33x^2 + x^3)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \frac{108x(1-x)^4}{(x^3 - 33x^2 - 33x + 1)^2}\right], \\
&(1 + 14x + x^2)^{-3\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \frac{-108x(1-x)^4}{(x^2 + 14x + 1)^3}\right];
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(137)\left\{\begin{aligned}
&F\left(6\alpha, 4\alpha + \tfrac{1}{6}, 8\alpha + \tfrac{1}{3}, x\right) \\
&\quad = (1-x)^{\frac{1}{6}-2\alpha} F\left(2\alpha + \tfrac{1}{3}, 4\alpha + \tfrac{1}{6}, 8\alpha + \tfrac{1}{3}, x\right) \\
&\quad = \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{64 - 96x + 30x^2 + x^3}{64}\right)^{-2\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{2}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \frac{108x^4(1-x)}{(64 - 96x + 30x^2 + x^3)^2}\right], \\
&\left(\frac{16 - 16x + x^2}{16}\right)^{-3\alpha} F\left[\alpha, \alpha + \tfrac{1}{3}, 2\alpha + \tfrac{5}{6}, \frac{-108x^4(1-x)}{(16 - 16x + x^2)^3}\right].
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

Les transformations que l'on peut effectuer lorsque deux des trois éléments α, β, γ sont arbitraires ont été données complètement par Kummer. Dans le cas où un seul élément est arbitraire, il a indiqué quelques cas particuliers de la transformation rationnelle du quatrième degré et un certain nombre de transformations irrationnelles.

Les autres transformations rationnelles et la plupart des transformations irrationnelles me paraissent absolument nouvelles.