

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

V. HIOUX

Racines communes à deux équations algébriques entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 10 (1881), p. 383-390

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1881_2_10__383_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RACINES COMMUNES

A DEUX ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ENTIÈRES,

PAR M. V. HIOUX,
PROFESSEUR AU LYCÉE DE RENNES.



I. Soient les deux équations algébriques entières

$$A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$B = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0,$$

dépourvues l'une et l'autre de racines infinies ou nulles.

Avec les deux groupes de fonctions

$$x^{m-1} B, x^{m-2} B, x^{m-3} B, \dots, x B, B,$$

$$x^{n-1} A, x^{n-2} A, x^{n-3} A, \dots, x A, A,$$

formons le Tableau de la page 384, renfermant $(m + n)$ identités.

Le déterminant formé avec les coefficients des diverses puissances de x , y compris x^0 ou 1, est le résultant de M. Sylvester. La première identité doit se lire

$$b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \dots = x^{m-1} B.$$

Chacune des autres se lit d'une façon analogue.

Supprimons les $(n - i)$ premières identités de chaque groupe. Il en reste i dans le second et $m - n + i$ ou $k + i$ dans le premier. Dans le Tableau ainsi modifié les $(k + 2i)$ premières colonnes à gauche forment un déterminant d'ordre $(k + 2i)$ dont la dernière colonne est

celle des coefficients de x^{n-i} et la première celle des coefficients de x^{m+i-1} . On voit en effet que pour $i = n$ on retrouve le Tableau primitif.

Désignons les déterminants d'ordre $(k + 2i)$ par $\Delta_{k+2i,0}$, ou plus simplement par $N_{i,0}$.

x^{m+n-1}	x^{m+n-2}	x^n	x^2	x	1	
b_0	b_1	b_n	0	0	0	$= x^{m-1} B,$
0	b_0	b_n	0	0	0	$= x^{m-2} B,$
0	0	b_0	b_n	0		$= x B,$
0	0	b_0	b_n			$= B,$
a_0	a_1	a_m	0	0		$= x^{n-1} \Lambda,$
0	a_0	a_m	0	0		$= x^{n-2} \Lambda,$
0	0	a_0	a_m	0		$= x \Lambda,$
0	0	a_0	a_m	a_m	a_m	$= \Lambda.$

Désignons de même par

$$N_{i,1}, N_{i,2}, \dots, N_{i,n-i};$$

les déterminants que l'on obtient en remplaçant dans $N_{i,0}$ la dernière colonne de coefficients, successivement par chacune des $(n - i)$ suivantes.

Enfin, posons

$$T_i = N_{i,0} x^{n-i} + N_{i,1} x^{n-i-1} + \dots + N_{i,n-i}.$$

II. *Formation de T_i .* — Pour former le polynôme T_i , ordonnons le déterminant $N_{i,0}$ par rapport aux éléments de la dernière colonne. Nous aurons deux groupes de coefficients qui seront désignés : le premier par

$$\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,k+i-1};$$

le second par

$$\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,i-1}.$$

Multiplions chacune des identités conservées par le coefficient correspondant et ajoutons-les ensuite membre à membre.

Les puissances de x supérieures à x^{n-i} ont des coefficients nuls; elles se trouvent par conséquent éliminées et on a l'identité

$$(I) \quad T_i = BA_i + AB_i,$$

dans laquelle on a posé

$$A_i = \beta_{i,0} x^{k+i-1} + \beta_{i,1} x^{k+i-2} + \dots + \beta_{i,k+i-1},$$

$$B_i = \alpha_{i,0} x^{i-1} + \alpha_{i,1} x^{i-2} + \dots + \alpha_{i,i-1}.$$

En donnant à i les n valeurs 1, 2, ..., n , on obtient les n identités

$$(II) \quad \begin{cases} T_1 = BA_1 + AB_1, \\ T_2 = BA_2 + AB_2, \\ \dots, \\ T_i = BA_i + AB_i, \\ T_{i+1} = BA_{i+1} + AB_{i+1}, \\ \dots, \\ T_n = BA_n + AB_n. \end{cases}$$

Remarque I. — La formation d'un polynôme T_i exige que l'un au moins des multiplicateurs employés soit différent de zéro.

Si l'on considère le premier de chaque groupe, on constate que l'on a, au signe près,

$$\beta_{i,0} = a_0 N_{i-1,0} \quad \text{et} \quad \alpha_{i,0} = b_0 N_{i-1,0}.$$

Ces relations s'aperçoivent immédiatement en supposant $i = n$.

Remarque II. — Éliminons A entre deux identités consécutives de rang i et $i + 1$, nous aurons l'identité

$$B_{i+1}T_i - B_iT_{i+1} = B(B_{i+1}A_i - B_iA_{i+1}).$$

Les polynômes B_{i+1} et T_i sont respectivement de degrés i et $n - i$; les deux polynômes B_i et T_{i+1} sont de degrés $i - 1$ et $n - i - 1$. Le premier membre de l'identité est par suite de degré n . Il en est donc de même du second. Mais le facteur B est du degré n : donc l'autre facteur est du degré zéro.

Observons maintenant que dans B_{i+1} et T_i les premiers coefficients sont respectivement

$$\alpha_{i+1,0} = \pm b_0 N_{i,0} \quad \text{et} \quad N_{i,0}.$$

On a donc l'identité

$$\pm b_0 (N_{i,0})^2 x^n + \dots = b_0 (B_{i+1}A_i - B_iA_{i+1})x^n + \dots$$

L'identification des coefficients de x^n donne la relation

$$B_{i+1}A_i - B_iA_{i+1} = \pm (N_{i,0})^2.$$

Cette relation nous montre que :

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes A_{i-1} et B_{i+1} soient premiers entre eux, c'est que l'on ait

$$N_{i,0} \geq 0.$$

Si l'on change i en $i - 1$, la condition devient

$$N_{i-1,0} \geq 0$$

et s'applique aux deux polynômes A_i et B_i .

III. Les identités (II) conduisent aux deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Si l'on pose $n - i = p - 1$, les conditions nécessaires*

et suffisantes pour que les équations $A = 0$ et $B = 0$ aient exactement p racines communes sont

$$N_{i,0} = 0, \quad N_{i,1} = 0, \quad \dots, \quad N_{i,n-i} = 0 \quad \text{et} \quad N_{i-1,0} \leq 0.$$

En d'autres termes : le polynôme T_i doit être identiquement nul et le polynôme T_{i-1} doit être effectivement de degré p .

Démonstration. — 1° Les conditions sont nécessaires.

En effet, l'identité

$$T_i = BA_i + AB_i$$

montre que toute valeur de x , qui donne à la fois

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0,$$

donne également $T_i = 0$.

Pour que les deux équations aient p racines communes, il faut que T_i s'annule pour p valeurs de x ; mais ce polynôme est du degré $p - 1$: donc il doit être identiquement nul, ce qui entraîne les p premières conditions.

On a ainsi l'identité

$$BA_i + AB_i = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{B} = -\frac{A_i}{B_i}.$$

Pour que le nombre des racines communes ne dépasse pas p , il faut en outre que A_i et B_i soient premiers entre eux, ce qui entraîne la dernière condition

$$N_{i-1,0} \geq 0.$$

Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

2° Les conditions sont suffisantes.

En effet, si les p premières sont remplies, on a l'identité

$$BA_i + AB_i = 0,$$

dans laquelle A_i est un polynôme de degré $k + i - 1$ ou $m - p$, et B_i un polynôme du degré $n - p$.

Le produit AB_i s'annule pour toute valeur de x égale à l'une des m racines de $A = 0$; il en est donc de même du produit BA_i . Mais A_i , polynôme du degré $m - p$, ne peut s'annuler pour plus de $(m - p)$ valeurs de x : donc p au moins des racines de $A = 0$ conviennent à l'équation $B = 0$.

Les deux équations ont donc *au moins* p racines communes. Pour que ce nombre ne dépasse pas p , il suffit que A_i et B_i soient premiers entre eux, c'est-à-dire que la dernière condition

$$N_{i-1,0} \geq 0$$

se trouve également satisfaite.

Donc les conditions énoncées sont suffisantes.

Équation aux racines communes. — Considérons l'identité

$$T_{i-1} = BA_{i-1} + AB_{i-1}.$$

Pour toute valeur de x égale à l'une des p racines communes à $A = 0$ et $B = 0$, le second membre est nul; il en est par suite de même du premier membre, polynôme entier en x du degré p . L'équation aux racines communes est donc

$$T_{i-1} = 0.$$

Le polynôme T_{i-1} , de degré p , est donc, à un facteur près, *indépendant de* x , le plus grand commun diviseur des polynômes A et B .

THÉORÈME II. — *Si l'on pose $n - i = p - 1$, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations $A = 0$ et $B = 0$ aient exactement p racines communes sont, en remontant,*

$$T_n \text{ ou } N_{n,0} = 0, \quad N_{n-1,0} = 0, \quad \dots, \quad N_{i,0} = 0, \quad \text{et } N_{i-1,0} \geq 0.$$

En d'autres termes : *chacun des p derniers polynômes T_i a son premier coefficient nul et le précédent a , au contraire, son premier coefficient différent de zéro.*

Démonstration. — Si l'on suppose $p = 1$, le théorème II ne diffère pas du théorème I : donc il est vrai pour $p = 1$.

Supposons, par conséquent, qu'il soit vrai pour le cas de p racines communes et démontrons qu'il l'est pour une de plus.

Dans cette hypothèse, il est clair que :

Les conditions nécessaires pour qu'il y ait au moins $(p + 1)$ racines communes sont

$$N_{n,0} = 0, \quad N_{n-1,0} = 0, \quad \dots, \quad N_{i,0} = 0 \quad \text{et} \quad N_{i-1,0} = 0.$$

Je dis que ces conditions sont *suffisantes*.

En effet, le nombre des racines communes ne peut évidemment tomber au-dessous de p . Mais dans l'identité

$$T_{i-1} = BA_{i-1} + AB_{i-1},$$

le polynôme T_{i-1} perd son premier terme, puisque $N_{i-1,0} = 0$; il est donc au plus du degré $(p - 1)$.

Mais le second membre s'annule pour les p valeurs de x , qui donnent simultanément $A = 0$ et $B = 0$; il en est donc de même du premier, lequel est par suite identiquement nul.

Dès lors, en vertu du théorème I, les deux équations ont *au moins* $(p + 1)$ racines communes.

Pour qu'il n'y en ait pas une de plus, il faut et il suffit que l'on ait

$$N_{i-2,0} \geq 0.$$

Donc, si le théorème II est vrai pour p racines communes, il l'est pour une de plus. Or il est vrai pour une racine, donc il est général.

Remarque. — La condition initiale est $\Delta = 0$; le déterminant Δ est de l'ordre $(K + 2n)$. C'est une fonction entière des coefficients des deux équations, du degré m par rapport à ceux de la seconde et du degré n par rapport à ceux de la première.

Les autres conditions sont des déterminants dont chacun se déduit du précédent en supprimant la première ligne de chaque groupe, ce qui

fait disparaître la première colonne, puis en négligeant la dernière colonne.

Chaque déterminant est d'un ordre inférieur de deux unités à celui du précédent.

On voit que le théorème II est l'analogue du théorème de Lagrange sur le même sujet.