

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NIEWENGLOWSKI

**Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination
des surfaces minima de contour donné**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 9 (1880), p. 227-300

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9_227_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9_227_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPOSITION

DE LA

MÉTHODE DE RIEMANN

POUR LA

DÉTERMINATION DES SURFACES MINIMA DE CONTOUR DONNÉ,

PAR M. NIEWENGLOWSKI,
PROFESSEUR AU COLLÈGE ROLLIN.

Je me propose d'élucider, s'il m'est possible, un Mémoire remarquable de Riemann, relatif aux surfaces minima. L'illustre auteur a brièvement indiqué la plupart des résultats qu'il a obtenus; j'espère les avoir établis d'une manière satisfaisante.

Riemann se sert de variables imaginaires que l'on ramène immédiatement aux variables employées avant lui par M. O. Bonnet, dans plusieurs Mémoires importants sur la théorie générale des surfaces. En effet, le logarithme népérien de la variable μ , choisie par Riemann, est égal à $y + x\sqrt{-1}$, et le logarithme de la variable conjuguée μ' est égal, par suite, à $y - x\sqrt{-1}$, x et y étant les variables indépendantes adoptées par M. O. Bonnet. Je pense ne rien exagérer en affirmant que les recherches savantes de M. O. Bonnet ont inspiré celles de Riemann.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

1. Considérons sur une surface donnée un point M ayant pour coordonnées rectangulaires ξ , η , ζ . Par l'origine des axes de coordonnées menons une parallèle à l'une des deux directions, bien déterminée,

de la normale en M à la surface, et soit m le point où cette parallèle rencontre la sphère qui a pour centre l'origine et dont le rayon est égal à l'unité de longueur. La position du point m est déterminée par sa longitude φ et sa colatitude θ . Les cosinus directeurs de la normale sont

$$\cos \alpha = \sin \theta \cos \varphi, \quad \cos \beta = \sin \theta \sin \varphi, \quad \cos \gamma = \cos \theta,$$

et, par suite, l'équation différentielle de la surface est

$$(1) \quad \sin \theta \cos \varphi d\xi + \sin \theta \sin \varphi d\eta + \cos \theta d\zeta = 0.$$

Si l'on pose, comme le fait M. O. Bonnet ⁽¹⁾,

$$(2) \quad e^x = \tan \frac{1}{2} \theta, \quad x = \varphi,$$

on trouve facilement

$$(3) \quad \begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{\cos iy}, & \cos \theta = i \tan iy, \\ \text{puis} \\ \cos \alpha = \frac{\cos x}{\cos iy}, & \cos \beta = \frac{\sin x}{\cos iy}, & \cos \gamma = \frac{i \sin iy}{\cos iy}, \end{cases}$$

de sorte que l'équation différentielle de la surface devient

$$\cos x d\xi + \sin x d\eta + i \sin iy d\zeta = 0,$$

et l'équation du plan tangent à la surface au point M est

$$\xi \cos x + \eta \sin x + \zeta i \sin iy = -z,$$

z étant une fonction des deux variables indépendantes x et y . Ainsi, toute surface sera caractérisée par la forme de la fonction z .

Les coordonnées ξ, η, ζ du point de contact de la surface avec le plan tangent correspondant à des valeurs données de x, y, z sont déter-

⁽¹⁾ Voir les Mémoires de M. O. Bonnet *Sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de Liouville*, t. V, 1850, 1^{re} série; *Journal de l'École Polytechnique*, XLIV^e Cahier).

minées par les équations suivantes :

$$4) \quad \begin{cases} \xi \cos x + \eta \sin x = -z - i \operatorname{tang} i\gamma \cdot q, \\ \xi \sin x - \eta \cos x = p, \\ \zeta = \frac{q}{\cos i\gamma}, \end{cases}$$

p et q représentant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{d\gamma}$ suivant l'usage.

Soient P et P' les points où l'axe $O\xi$ et son prolongement $O\xi'$ percent la sphère de rayon unité; soit encore μ la projection stéréographique du point m , le point de vue étant placé en P' . On a

$$\text{angle } \xi O\mu = x, \quad \text{angle } OP'\mu = \frac{1}{2}\theta \quad \text{et} \quad O\mu = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta = e^x.$$

Si l'on regarde le point μ comme représentant une quantité complexe que l'on désigne par la même lettre μ , on aura

$$(5) \quad \mu = e^{x+ix}.$$

Nous désignerons en outre par μ' la quantité conjuguée

$$(5') \quad \mu' = e^{x-ix}.$$

2. Supposons que l'on rapporte une surface au plan tangent en un point, l'axe des ζ étant la normale et ceux des ξ et η les tangentes aux lignes de courbure. L'équation de la surface sera

$$\zeta = r\xi^2 + t\eta^2 + \dots,$$

p, q, r, \dots désignant les dérivées partielles de ζ .

A partir de l'origine des coordonnées, traçons sur la surface une courbe quelconque. Soit α l'angle que sa projection sur le plan $O\xi\eta$ fait avec $O\xi$. Le point μ décrit une courbe correspondante passant par l'origine; l'angle β que fait à l'origine la tangente à cette courbe avec l'axe $O\xi$ est donné par la formule

$$\operatorname{tang} \beta = \lim \operatorname{tang} x.$$

Mais $\tan x = \frac{q}{p}$; donc on a, en général,

$$\lim \frac{q}{p} = \lim \frac{\frac{dq}{d\xi} + \frac{dq}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{dp}{d\xi} + \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi}},$$

c'est-à-dire

$$\tan \beta = \frac{t}{r} \tan \alpha.$$

En tout point d'une surface développable on aura donc $\beta = 0$ ou $\beta = 90^\circ$, c'est-à-dire que la courbe décrite par le point μ est tangente en ce point à l'une des lignes de courbure; en tout point d'une surface à courbure moyenne nulle on a

$$\tan \beta + \tan \alpha = 0.$$

Supposons que le développement de ζ commence aux termes de degré n en ξ et en η , et cherchons quelle est, dans ce cas, la limite du rapport $\frac{q}{p}$.

Désignons par $q^{(k)}$ et $p^{(k)}$ les valeurs que prennent, à l'origine, les dérivées d'ordre k de p et q par rapport à ξ , regardé comme étant la variable indépendante. On a symboliquement

$$q^{(n-1)} = \left(\left(\frac{dq}{d\xi} + \frac{dq}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} \right) \right)^{n-1},$$

$$p^{(n-1)} = \left(\left(\frac{dp}{d\xi} + \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} \right) \right)^{n-1},$$

un terme de la forme $A \left(\frac{dp}{d\xi} \right)^h \left(\frac{dp}{d\eta} \right)^k \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^k$ devant être remplacé par $A \frac{d^{h+k}p}{d\xi^h d\eta^k} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^k$, où $h+k=n-1$.

En effet, les termes contenant $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, $\frac{d^3\eta}{d\xi^3}$, ... sont multipliés par les dérivées partielles de ζ d'ordre inférieur à n , qui sont toutes nulles à l'origine; donc, à une valeur donnée de $\tan \alpha$ correspond, dans le cas considéré, une seule valeur de $\tan \beta$, mais à une valeur de $\tan \beta$

correspondent $n - 1$ valeurs de $\tan \alpha$, fournies par l'équation

$$(6) \quad \tan \beta \left(\left(\frac{dp}{d\xi} + \tan \alpha \frac{dp}{d\eta} \right) \right)^{n-1} - \left(\left(\frac{dq}{d\xi} + \tan \alpha \frac{dq}{d\eta} \right) \right)^{n-1} = 0.$$

Il résulte de ce qui précède que, si en un point M d'une surface, en choisissant les axes convenablement, on a

$$\zeta = A \xi^n + B \xi^{n-1} \eta + \dots + L \eta^n + M \xi^{n+1} + \dots,$$

alors, en prenant μ pour variable indépendante, la projection d'un point de la surface sur le plan tangent en M définit une variable imaginaire pour laquelle le point M est un point multiple d'ordre $n - 1$.

3. *Formules de transformation des coordonnées x, y, μ .* — Soient M un point pris sur la surface d'une sphère de rayon 1, x et θ sa longitude et sa colatitude, le plan $\xi O \zeta$ étant le plan du méridien origine des longitudes, comptées positivement dans le sens direct. Rapportons maintenant le point M à un autre pôle P_1 , en conservant le même méridien origine ainsi que le sens des longitudes positives, de sorte que la nouvelle longitude soit $\xi P_1 M = x_1$ et la nouvelle colatitude $P_1 O M = \theta_1$. Soit encore θ_0 la colatitude de P_1 .

En posant, pour abréger,

$$\tan \frac{1}{2} \theta = m, \quad \tan \frac{1}{2} \theta_0 = m_0,$$

on trouve facilement

$$\tan \frac{1}{2} \theta_1 e^{i x_1} = \frac{m e^{i x} - m_0}{1 + m e^{i x} m_0}.$$

Supposons maintenant que l'on fasse tourner OP_1 autour de OP d'un angle égal à x_0 et que le méridien origine des x_1 tourne d'un angle égal à α autour de la nouvelle position de OP_1 , les rotations ayant lieu dans le sens direct; on aura, en vertu des raisonnements précédents,

$$\tan \frac{1}{2} \theta_1 e^{i(x_1 + \alpha)} = \frac{m e^{i(x - x_0)} - m_0}{1 + m e^{i x} m_0 e^{-i x_0}},$$

d'où

$$\tan \frac{1}{2} \theta_1 e^{i x_1} = C \frac{m e^{i x} - m_0 e^{i x_0}}{1 + m e^{i x} m_0 e^{-i x_0}}$$

ou bien

$$\mu_1 = C \frac{\mu - \mu_0}{1 + \mu \mu_0'},$$

où

$$C = e^{-i(x_0 + \alpha)}.$$

Si l'on prend $\alpha = -\pi - x_0$, on aura

$$C = -1,$$

et par suite

$$(7) \quad \mu_1 = \frac{\mu_0 - \mu}{1 + \mu \mu_0'}.$$

Cas particuliers. — Prenons $\mu_0 = 1$, $x_0 = 0$, $\alpha = -\pi$; on aura

$$(8) \quad \mu_1 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu};$$

l'axe polaire est alors l'axe $O\xi$.

Pour $\mu_0 = i$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$,

$$(9) \quad \mu_1 = \frac{i - \mu}{1 - i\mu},$$

l'axe polaire étant l'axe $O\eta$.

4. L'axe $O\xi$ ayant pris la position OP_1 , nous supposons qu'on ait fait tourner en même temps le trièdre des axes : 1° d'un angle x_0 autour de $O\xi$; 2° d'un angle θ_0 autour de la seconde position de $O\eta$, et enfin 3° d'un angle α autour de la seconde position de $O\xi$. On trouve alors, en désignant par ξ_1 , η_1 , ζ_1 les nouvelles coordonnées d'un point $M(\xi, \eta, \zeta)$,

$$\zeta = \zeta_1 \cos \theta_0 - \xi_1 \cos \alpha \sin \theta_0 + \eta_1 \sin \alpha \sin \theta_0,$$

$$\begin{aligned} \xi = \zeta_1 \sin \theta_0 \cos x_0 + \xi_1 (\cos \alpha \cos \theta_0 \cos x_0 - \sin \alpha \sin x_0) \\ - \eta_1 (\sin \alpha \cos \theta_0 \cos x_0 + \cos \alpha \sin x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta = \zeta_1 \sin \theta_0 \sin x_0 + \xi_1 (\cos \alpha \cos \theta_0 \sin x_0 + \sin \alpha \cos x_0) \\ - \eta_1 (\sin \alpha \cos \theta_0 \sin x_0 - \cos \alpha \cos x_0). \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma = \xi + \eta i, & \sigma' = \xi - \eta i, \\ \sigma_1 = \xi_1 + \eta_1 i, & \sigma'_1 = \xi_1 - \eta_1 i. \end{cases}$$

En remplaçant les cosinus et les sinus par des exponentielles, on tire des formules précédentes

$$(11) \quad \begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 \cos \theta_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma'_1}{2} \cos \alpha \sin \theta_0 - \frac{\sigma_1 - \sigma'_1}{2} i \sin \alpha \sin \theta_0, \\ \cos \theta_0 \sigma e^{-ix_0} &= \zeta_1 \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \sigma_1 e^{i\alpha} (1 + \cos \theta_0) + \frac{1}{2} \sigma'_1 e^{-i\alpha} (1 - \cos \theta_0), \\ \cos \theta_0 \sigma' e^{ix_0} &= \zeta_1 \sin \theta_0 + \frac{1}{2} \sigma_1 e^{i\alpha} (1 - \cos \theta_0) + \frac{1}{2} \sigma'_1 e^{-i\alpha} (1 + \cos \theta_0). \end{aligned}$$

Remarquant que $\tan^2 \frac{1}{2} \theta_0 = \mu_0 \mu'_0$, et résolvant par rapport à σ_1 et σ'_1 , on a

$$\begin{aligned} \sigma_1 (1 + \mu_0 \mu'_0) e^{i(\alpha+x_0)} &= -2\mu_0 \zeta + \sigma - \mu_0^2 \sigma', \\ \sigma'_1 (1 + \mu_0 \mu'_0) e^{-i(\alpha+x_0)} &= -2\mu'_0 \zeta + \sigma' - \mu_0'^2 \sigma, \end{aligned}$$

d'où, reportant ces valeurs dans la formule (11), on obtient

$$\zeta_1 (1 + \mu_0 \mu'_0) = \zeta (1 - \mu_0 \mu'_0) + \mu'_0 \sigma + \mu_0 \sigma'.$$

On a ainsi obtenu des formules qui permettent de passer des variables $\mu, \zeta, \sigma, \sigma'$ aux variables nouvelles $\mu_1, \zeta_1, \sigma_1, \sigma'_1$ et réciproquement.

Lorsque $\alpha + x_0 = -\pi$, on a le Tableau suivant de formules :

$$(12) \quad \begin{cases} \mu_1 = \frac{\mu_0 - \mu}{1 + \mu \mu'_0}, \\ \zeta_1 (1 + \mu_0 \mu'_0) = \zeta (1 - \mu_0 \mu'_0) + \mu'_0 \sigma + \mu_0 \sigma', \\ \sigma_1 (1 + \mu_0 \mu'_0) = 2\mu_0 \zeta - \sigma + \mu_0^2 \sigma', \\ \sigma'_1 (1 + \mu_0 \mu'_0) = 2\mu'_0 \zeta - \sigma' + \mu_0'^2 \sigma. \end{cases}$$

Si entre la deuxième et la troisième formule on élimine σ' , on trouve

$$(13) \quad \mu_0 (\zeta + \zeta_1) = \sigma + \sigma_1;$$

on trouve de même la relation conjuguée

$$(13)' \quad \mu'_0 (\zeta + \zeta_1) = \sigma' + \sigma'_1.$$

Ces préliminaires posés, nous allons passer à l'exposition de la mé-

thode de Riemann pour déterminer la surface minima de contour donné.

5. Si l'on calcule l'aire déterminée par un contour tracé sur une surface, on obtient l'expression de cette aire par une intégrale double. Si l'on suppose que le contour reste fixe et que la surface se déforme infiniment peu, en écrivant que la variation de l'intégrale est nulle, on obtient des surfaces satisfaisant à cette condition que, en chacun de leurs points, les rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires. Pour savoir s'il y a réellement un minimum, il resterait à étudier la variation seconde. Ainsi posé, le problème est d'une très grande difficulté, et nous n'essayerons pas de l'aborder. Nous appellerons *surface minima* toute surface à courbure moyenne nulle.

Riemann donne la condition suivante pour que la première variation δS soit nulle :

$$(14) \quad \frac{d}{d\xi} (\sin \theta \cos \varphi) + \frac{d}{d\eta} (\sin \theta \sin \varphi) = 0.$$

Cette équation exprime que

$$- \sin \theta \sin \varphi d\xi + \sin \theta \cos \varphi d\eta$$

est une différentielle exacte, de sorte que l'on a

$$(15) \quad - \sin \theta \sin \varphi d\xi + \sin \theta \cos \varphi d\eta = dC.$$

La condition $\delta S = 0$ peut être mise sous la forme

$$(16) \quad \frac{\partial \sin \theta \cos \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \sin \theta \sin \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \zeta} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(17) \quad \frac{\partial \cos \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \cos \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos \gamma}{\partial \zeta} = 0,$$

et si $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ est l'équation de la surface, en posant

$$n = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2},$$

on peut encore écrire la condition $\delta S = 0$ de cette manière :

$$(18) \quad \frac{\partial \cdot n \frac{\partial F}{\partial \xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \cdot n \frac{\partial F}{\partial \eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \cdot n \frac{\partial F}{\partial \zeta}}{\partial \zeta} = 0.$$

6. Au lieu de rapporter la démonstration de Riemann, je vais prouver que la condition précédente est identique à celle qu'a donnée M. O. Bonnet dans son Mémoire cité plus haut. En posant, avec M. O. Bonnet,

$$(19) \quad \begin{cases} r + qi \operatorname{tang} i\gamma + z = u, \\ s = v, \\ t + qi \operatorname{tang} i\gamma = w, \end{cases}$$

la condition $\delta S = 0$ est la suivante :

$$(20) \quad u + w = 0.$$

Or, comme on a $\varphi = x$, $\sin \theta = \frac{1}{\cos i\gamma}$, la condition (14) revient à celle-ci :

$$\frac{d\left(\frac{\cos x}{\cos i\gamma}\right)}{d\xi} + \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos i\gamma}\right)}{d\eta} = 0.$$

Le premier membre développé devient

$$(21) \quad -\frac{\sin x}{\cos i\gamma} \frac{dx}{d\xi} + \frac{i \sin i\gamma \cos x}{\cos^2 i\gamma} \frac{d\gamma}{d\xi} + \frac{\cos x}{\cos i\gamma} \frac{dx}{d\eta} + \frac{i \sin i\gamma \sin x}{\cos^2 i\gamma} \frac{d\gamma}{d\eta}.$$

Mais, d'après les formules (4) et (19),

$$\begin{aligned} \cos x d\xi + \sin x d\eta &= -i \operatorname{tang} i\gamma (v dx + w d\gamma), \\ \sin x d\xi - \cos x d\eta &= u dx + v d\gamma. \end{aligned}$$

En résolvant par rapport à dx et $d\gamma$, on aura les valeurs des dérivées partielles $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dx}{d\eta}$, $\frac{d\gamma}{d\xi}$, $\frac{d\gamma}{d\eta}$, et, en les substituant dans l'expression (21), on trouve très simplement pour résultat

$$-\frac{u + w}{\cos i\gamma (uw - v^2)};$$

donc on a

$$(22) \quad \frac{\partial \frac{\cos x}{\cos iy}}{\partial \xi} + \frac{\partial \frac{\sin x}{\cos iy}}{\partial \eta} + \frac{\partial i \tan iy}{\partial \zeta} = - \frac{u + w}{\cos iy (uw - v^2)}.$$

La condition $u + w = 0$ entraîne la condition (16) et réciproquement, car on n'a pas $\cos iy = 0$ ni $uw - v^2 = 0$, puisque cette dernière condition n'est jamais remplie pour une surface. On ne peut pas non plus supposer $\cos iy (uw - v^2) = \infty$ pour tous les points de la surface.

7. M. O. Bonnet a fait voir que le ζ de toute surface minima satisfait à l'équation différentielle

$$(23) \quad \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta}{dy^2} = 0.$$

On peut tirer très simplement cette conséquence de la condition (15). En effet,

$$\sin \theta \sin \varphi d\xi - \sin \theta \cos \varphi d\eta = dC;$$

donc

$$\frac{1}{\cos iy} (\sin x d\xi - \cos x d\eta) = dC,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{u dx + v dy}{\cos iy}$$

doit être une différentielle exacte. On doit donc vérifier l'identité

$$\frac{d \frac{v}{\cos iy}}{dx} = \frac{d \frac{u}{\cos iy}}{dy}.$$

Mais $u + w = 0$; donc cette équation équivaut à celle-ci :

$$\frac{d \frac{v}{\cos iy}}{dx} + \frac{d \frac{w}{\cos iy}}{dy} = 0.$$

Or,

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{v}{\cos iy}, \quad \frac{d\zeta}{dy} = \frac{w}{\cos iy};$$

donc on a bien

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0.$$

De cette équation il résulte que

$$(24) \quad \zeta = f(x + iy) + f_1(x - iy)$$

ou encore

$$\zeta = \varphi(\mu) + \varphi_1(\mu').$$

Ensuite

$$\begin{aligned} dC &= \frac{1}{\cos iy} (v dy - w dx) = \frac{d\zeta}{dx} dy - \frac{d\zeta}{dy} dx \\ &= [f'(x + iy) + f'_1(x - iy)] dy - [i f'(x + iy) - i f'_1(x - iy)] dx \\ &= i [f'_1(x - iy) d(x - iy) - f'(x + iy) d(x + iy)], \end{aligned}$$

et par suite

$$dCi = df - df_1$$

ou

$$(25) \quad Ci = f(x + iy) - f_1(x - iy).$$

8. *Usage des variables σ , μ et de leurs conjuguées.* — Nous allons transformer l'équation différentielle de la surface et la condition de minimum, savoir

$$(1) \quad \sin \theta \cos \varphi d\xi + \sin \theta \sin \varphi d\eta + \cos \theta d\zeta = 0,$$

$$(15) \quad \sin \theta \sin \varphi d\xi - \sin \theta \cos \varphi d\eta + dC = 0,$$

en y introduisant les variables σ , σ' , μ , μ' .

On peut mettre la première de ces deux équations successivement sous les formes suivantes :

$$\cos \varphi \frac{d\sigma + d\sigma'}{2} + \sin \varphi \frac{d\sigma - d\sigma'}{2i} + \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\theta}{2 \tan \frac{1}{2}\theta} d\zeta = 0,$$

ou bien

$$d\sigma(\cos \varphi - i \sin \varphi) + d\sigma'(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\theta}{\tan \frac{1}{2}\theta} d\zeta = 0,$$

ou, à cause de la relation $\mu\mu' = \tan^2 \frac{1}{2}\theta$,

$$\frac{\mu' d\sigma}{\tan \frac{1}{2}\theta} + \frac{\mu d\sigma'}{\tan \frac{1}{2}\theta} + \frac{1 - \mu\mu'}{\tan \frac{1}{2}\theta} d\zeta = 0,$$

c'est-à-dire

$$(26) \quad (1 - \mu\mu') d\zeta + \mu' d\sigma + \mu d\sigma' = 0.$$

En transformant de même la condition de minimum, on obtient

$$\sin \varphi \frac{d\sigma + d\sigma'}{2} - \cos \varphi \frac{d\sigma - d\sigma'}{2i} + \frac{dC}{\sin \theta} = 0,$$

ou

$$-d\sigma(\cos \varphi - i \sin \varphi) + d\sigma'(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{2i dC}{2 \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\mu' d\sigma}{\tan \frac{1}{2}\theta} + \frac{\mu d\sigma'}{\tan \frac{1}{2}\theta} + \frac{dCi}{\tan \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta} = 0,$$

ou enfin

$$(27) \quad \mu d\sigma' - \mu' d\sigma + (1 + \mu\mu') dCi = 0.$$

Si maintenant l'on pose

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta + Ci = 2Z, \quad \zeta - Ci = 2Z', \\ \text{d'où} \\ \zeta = Z + Z', \quad Ci = Z - Z', \\ d\zeta = dZ + dZ', \quad dCi = dZ - dZ', \end{array} \right.$$

on tire des équations (26) et (27), par voie d'addition et de soustraction,

$$(29) \quad d\sigma - \mu dZ + \frac{1}{\mu'} dZ' = 0,$$

$$(29)' \quad d\sigma' + \frac{1}{\mu} dZ - \mu' dZ' = 0.$$

9. Les formules précédentes vont nous conduire à une conséquence importante.

Prenons Z et Z' comme variables indépendantes; on a

$$(30) \quad d\sigma = \mu dZ - \frac{1}{\mu'} dZ',$$

$$(30)' \quad d\sigma' = -\frac{1}{\mu} dZ + \mu' dZ',$$

d'où

$$\frac{d\sigma}{dZ} = \mu, \quad \frac{d\sigma}{dZ'} = -\frac{1}{\mu'},$$

$$\frac{d\sigma'}{dZ} = -\frac{1}{\mu}, \quad \frac{d\sigma'}{dZ'} = \mu'.$$

On tire d'abord de ces équations

$$\frac{d\sigma}{d\mu} = \frac{d\sigma}{dZ} \frac{dZ}{d\mu} = \mu \frac{dZ}{d\mu},$$

formule qui nous sera utile plus tard.

Ensuite,

$$\frac{d\mu}{dZ'} = \frac{1}{\mu'^2} \frac{d\mu'}{dZ'},$$

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{dZ'} = \frac{d\mu'}{dZ'}.$$

Le déterminant $\frac{1}{\mu^2 \mu'^2} - 1$ n'est pas nul, car on aurait $\tan^2 \frac{1}{2} \theta = 1$, et θ serait une constante; donc

$$\frac{d\mu}{dZ'} = 0, \quad \frac{d\mu'}{dZ} = 0;$$

donc μ est une fonction de Z et μ' une fonction de Z' ; réciproquement, Z est une fonction de μ et Z' une fonction de μ' . Ce résultat est conforme à celui que nous avons déjà donné.

Par conséquent, on a

$$(31) \quad \sigma = \int \mu dZ - \int \frac{dZ'}{\mu'},$$

$$(31') \quad \sigma' = -\int \frac{dZ}{\mu} + \int \mu' dZ'.$$

Si l'on connaît les relations qui lient μ et Z d'une part, μ' et Z' de

l'autre, on aura σ et σ' en fonction de ζ et Ci . En éliminant Ci , on obtiendra l'équation de la surface. D'ailleurs, quand on aura formé la première équation, on aura la seconde en changeant i en $-i$.

On peut remarquer que si l'on se donne arbitrairement une fonction de Z et une fonction de Z' , et qu'on effectue les intégrations indiquées, on obtiendra une surface minima. En effet, on déduit des équations (31) et (31)' les équations différentielles (30) et (30)', qui sont équivalentes à (29) et (29)', et, en remontant, on arrive aux deux équations (15) et (1), dont l'une est l'équation différentielle de la surface et l'autre la condition de minimum. Pour que la surface soit réelle, il suffit que les fonctions μ et μ' soient imaginaires conjuguées.

10. Nous pouvons, à l'aide des formules précédentes, trouver une infinité de surfaces minima. Voici deux exemples simples.

1° Posons

$$\mu = \cot Z, \quad \mu' = \cot Z';$$

on a

$$\sigma = \int \cot Z dZ - \int \tan Z' dZ',$$

ou

$$\sigma = \log \sin Z + \log \cos Z' - \log H,$$

H étant une constante arbitraire; ou bien

$$\sin Z \cos Z' = H e^{\sigma};$$

on aura aussi

$$\sin Z' \cos Z = H' e^{\sigma'}.$$

Par suite,

$$\sin \zeta + \sin Ci = 2H e^{\sigma},$$

$$\sin \zeta - \sin Ci = 2H' e^{\sigma'},$$

et, par conséquent,

$$\sin \zeta = e^{\xi} (H e^{\eta i} + H' e^{-\eta i}),$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\sin \zeta = P e^{\xi} \sin(\eta + \alpha)$$

ou, par un déplacement d'axes,

$$\sin \zeta = P e^{\xi} \sin \eta;$$

enfin, en remplaçant ξ par $\xi - \log P$,

$$e^{\xi} = \frac{\sin \zeta}{\sin \eta}.$$

Cette surface a été trouvée pour la première fois par Scherk (*Journal de Crelle*, t. 13).

Le plan $\xi = 0$ coupe la surface suivant une infinité de droites données par les équations

$$\zeta - \eta = 2k\pi$$

ou

$$\zeta + \eta = (2h + 1)\pi.$$

Ces droites forment un réseau de carrés dont les diagonales sont égales à 2π . Si un point de la surface a pour coordonnées ξ, η, ζ , le point $(\xi, \eta + 2k\pi, \zeta + 2l\pi)$ appartiendra aussi à la même surface, de sorte que cette dernière est composée d'une infinité de nappes identiques se projetant sur un réseau de carrés. On voit encore que le point $[\xi, \eta + (-1)^n\pi, \zeta + (-1)^n\pi]$ est aussi sur la surface. Enfin, si un point de la surface a pour coordonnées $\xi = a, \eta = b, \zeta = c$, le point $(\xi = -a, \eta = c, \zeta = b)$ appartiendra encore à la même surface. Si l'on considère le carré ayant pour sommets les milieux des côtés d'un carré du réseau, aucun point de la surface n'est projeté à l'intérieur de ce carré.

2° *Exemple.* — Si l'on pose

$$\mu = m + ni, \quad \mu' = m - ni,$$

on trouve, en suivant la même marche,

$$2m\xi + 2n\eta - (m^2 + n^2 - 1)\zeta = 11,$$

c'est-à-dire un plan.

11. Nous avons posé $\zeta = Z + Z'$, Z et Z' étant imaginaires conjugués, et nous avons vu que Z est une fonction de μ et Z' une fonction de μ' ; cela revient à dire que l'on a

$$Z = f(x - iy), \quad Z' = f_1(x + iy),$$

et par suite

$$\zeta = f(x - iy) + f_1(x + iy).$$

Il est facile de voir que ξ et η sont des fonctions de même forme.

En effet, en faisant tourner les axes de coordonnées de manière que $O\xi$ prenne la position de $O\xi$, nous avons vu que μ_1 est une fonction de μ et μ'_1 une fonction de μ' ; or, en appliquant à ξ les raisonnements relatifs à ζ , on voit que

$$\xi = \varphi(\mu_1) + \varphi_1(\mu'_1),$$

c'est-à-dire

$$\xi = \psi(\mu) + \psi_1(\mu'),$$

ou bien encore

$$\xi = \chi(x - iy) + \chi_1(x + iy),$$

et il en est de même de η . En outre,

$$\psi(\mu) - \psi_1(\mu_1) = dA i,$$

dA étant une différentielle analogue à dC .

Nous verrons plus loin que, ayant pris pour la valeur de ζ des fonctions arbitraires de $x + iy$ et de $x - iy$, on en déduit ξ et η par des quadratures. Mais si le contour n'est pas déterminé d'avance, et que l'on se propose seulement de trouver des formules donnant une infinité de surfaces minima et pouvant d'ailleurs les donner toutes, les formules (31) et (31)', n'exigeant que deux quadratures, seront en général les plus commodes à employer.

12. Changement de variables. — Nous avons trouvé la formule de transformation

$$\mu_1 = \frac{\mu_0 - \mu}{1 + \mu_1 \mu'_0}.$$

On en déduit

$$(32) \quad \frac{d\mu_1}{d\mu} = - \frac{1 + \mu_0 \mu'_0}{(1 + \mu_1 \mu'_0)^2}.$$

De la formule (13)

$$\mu_0(\zeta + \zeta_1) = \sigma + \sigma_1,$$

en se rappelant que

$$\frac{d\sigma}{d\mu} = \mu \frac{d\zeta}{d\mu},$$

on tire, par différentiation,

$$\mu_0 \left(\frac{d\zeta}{d\mu} + \frac{d\zeta_1}{d\mu_1} \frac{d\mu_1}{d\mu} \right) = \mu \frac{d\zeta}{d\mu} + \mu_1 \frac{d\zeta_1}{d\mu_1} \frac{d\mu_1}{d\mu},$$

d'où

$$(33) \quad \frac{d\mu_1}{d\mu} \frac{d\zeta_1}{d\mu_1} = - \frac{d\zeta}{d\mu} \frac{(\mu_0 - \mu)(1 + \mu\mu'_0)}{\mu(1 + \mu_0\mu'_0)}.$$

En multipliant membre à membre les équations (32) et (33), il vient

$$\left(\frac{d\mu_1}{d\mu}\right)^2 \frac{d\zeta_1}{d\mu_1} = \frac{\mu_1}{\mu} \frac{d\zeta}{d\mu},$$

ce qui donne

$$\frac{d\mu_1^2}{\mu_1^2} \frac{d\zeta_1}{\left(\frac{d\mu_1}{\mu_1}\right)} = \frac{d\mu^2}{\mu^2} \frac{d\zeta}{\left(\frac{d\mu}{\mu}\right)}$$

ou bien

$$(34) \quad (d \log \mu_1)^2 \frac{d\zeta_1}{d \log \mu_1} = (d \log \mu)^2 \frac{d\zeta}{d \log \mu};$$

par conséquent, l'expression

$$(d \log \mu)^2 \frac{d\zeta}{d \log \mu}$$

reste invariable quand on fait tourner les axes et même quand on les déplace d'une manière quelconque.

On est ainsi conduit à une nouvelle variable auxiliaire U ainsi définie,

$$U = \int \sqrt{\frac{id\zeta}{d \log \mu}} d \log \mu,$$

qui est indépendante de la direction des axes. On considérera en même temps la variable conjuguée

$$U' = \int \sqrt{\frac{-id\zeta}{d \log \mu'}} d \log \mu'.$$

On doit remarquer que la formule

$$d\zeta = -i \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu$$

peut s'écrire

$$dZ = -i \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu.$$

13. *Interprétation géométrique.* — On a posé

$$\mu = e^{y+ix} = e^{iy_1}, \quad y_1 = x - iy, \quad x_1 = x + iy,$$

d'où

$$\log \mu = iy_1, \quad d \log \mu = i dy_1$$

et

$$U = i \int \sqrt{\frac{d\zeta}{dy_1}} dy_1.$$

Ensuite,

$$(d \log \mu)^2 \frac{d\zeta}{d \log \mu} = - dy_1^2 \frac{d\zeta}{i dy_1} = i \frac{d\zeta}{dy_1} dy_1^2.$$

De même,

$$(d \log \mu')^2 \frac{d\zeta}{d \log \mu'} = - i \frac{d\zeta}{dx_1} dx_1^2.$$

Si l'on pose

$$\zeta = f(x_1) + f_1(y_1),$$

il résulte de ce qui précède que

$$f'(x_1) dx_1^2 \quad \text{et} \quad f_1'(y_1) dy_1^2$$

sont invariables quand on transforme les coordonnées en les laissant rectangulaires. Il est facile d'en trouver la raison.

Posons

$$M = \sqrt{\frac{d\zeta}{dx_1}} dx_1, \quad N = \sqrt{\frac{d\zeta}{dy_1}} dy_1$$

Des formules

$$dx_1 = dx + i dy, \quad dy_1 = dx - i dy$$

on conclut

$$\frac{d\zeta}{dx_1} = \frac{1}{2} \frac{d\zeta}{dx} - \frac{i}{2} \frac{d\zeta}{dy},$$

$$\frac{d\zeta}{dy_1} = \frac{1}{2} \frac{d\zeta}{dx} + \frac{i}{2} \frac{d\zeta}{dy};$$

donc

$$\begin{aligned} MN &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2} (dx^2 + dy^2) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(v^2 + w^2)(dx^2 + dy^2)} \frac{1}{\cos iy} \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

ou

$$MN = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{R},$$

R désignant la valeur absolue de chacun des rayons de courbure principaux de la surface au point considéré.

On a ensuite

$$\frac{M}{N} = \frac{\sqrt{\frac{d\zeta}{dx} - i \frac{d\zeta}{dy}}}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dx} + i \frac{d\zeta}{dy}}}$$

ou

$$\frac{M}{N} = \frac{\sqrt{\nu - i\omega} \, dx_1}{\sqrt{\nu + i\omega} \, dy_1}.$$

Supposons que l'on se déplace sur une ligne asymptotique, et employons la caractéristique ∂ ; on aura

$$\frac{\nu}{i\omega} = \frac{\partial x^2 - \partial y^2}{2i \partial x \partial y},$$

d'où

$$\sqrt{\frac{\nu - i\omega}{\nu + i\omega}} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1};$$

donc

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{dx_1}{dy_1}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_1}} = e^{2iV} \quad (1),$$

V désignant l'angle que fait le chemin correspondant à dy et dx avec la ligne asymptotique considérée.

On a donc

$$M = \frac{ds}{\sqrt{2}R} e^{iV}, \quad N = \frac{ds}{\sqrt{2}R} e^{-iV} \quad (\text{en valeur absolue}).$$

Donc M et N sont indépendantes des axes de coordonnées.

On tire des formules précédentes

$$M^2 + N^2 = \frac{ds^2}{R} \cos 2V.$$

On sait que l'équation différentielle des lignes de courbure d'une

(1) Voir le Mémoire de M. O. Bonnet.

surface minima est

$$f'(x_1)dx_1^2 + f'(y_1)dy_1^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$M^2 + N^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ds^2}{R} \cos 2V = 0;$$

donc $V = 45^\circ$, résultat bien connu.

14. *Calcul de ξ , η , ζ .* — Nous avons trouvé

$$\zeta = \int \frac{d\zeta}{d\mu} d\mu + \int \frac{d\zeta}{d\mu'} d\mu',$$

et nous avons posé

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 = \frac{i d\zeta}{d \log \mu}, \quad \left(\frac{dU'}{d \log \mu'} \right)^2 = - \frac{i d\zeta}{d \log \mu'},$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{d\mu} = -i \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 \frac{d \log \mu}{d\mu}, \quad \frac{d\zeta}{d\mu'} = i \left(\frac{dU'}{d \log \mu'} \right)^2 \frac{d \log \mu'}{d\mu'},$$

et par suite

$$(35) \quad \zeta = -i \int \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu + i \int \left(\frac{dU'}{d \log \mu'} \right)^2 d \log \mu'.$$

Il est facile de conclure de cette formule l'expression de ξ et de η . En effet, pour avoir ζ , on choisit sur la sphère un rayon OP et un méridien origine passant par OP, le sens des longitudes étant le sens direct relativement à OP; la distance d'un point M de la surface au plan diamétral qui a pour axe OP est précisément égale à ζ , la direction OP étant celle des ζ positifs.

Pour avoir ξ , il suffit de considérer de même le rayon OP, perçant la sphère au point P₁, pour lequel $\mu = 1$, et de choisir une nouvelle variable μ_1 , définie, comme on l'a vu, par l'équation

$$\mu_1 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu};$$

ξ étant la distance du point M au plan diamétral conjugué à OP₁, on

aura

$$\xi = -i \int \left(\frac{dU_1}{d \log \mu_1} \right)^2 d \log \mu_1 + i \int \left(\frac{dU'_1}{d \log \mu'_1} \right)^2 d \log \mu'_1.$$

Mais on a

$$d \log \mu_1 = \frac{2\mu}{\mu^2 - 1} d \log \mu;$$

ensuite, comme $U_1 = U$,

$$\left(\frac{dU_1}{d \log \mu_1} \right)^2 d \log \mu_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) d \log \mu,$$

et pareillement pour l'expression conjuguée.

Donc

$$(36) \quad \xi = -\frac{i}{2} \int \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) d \log \mu + \frac{i}{2} \int \left(\frac{dU'}{d \log \mu'} \right)^2 \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) d \log \mu'.$$

Pour avoir η , on considérera de même une nouvelle variable μ_2 , dont le pôle origine corresponde à $\mu = i$, et qui, par suite, soit donnée par la formule

$$\mu_2 = \frac{i - \mu}{1 - i\mu},$$

on aura

$$d \log \mu_2 = \frac{2i\mu}{1 + \mu^2} d \log \mu,$$

puis

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu_2} \right)^2 d \log \mu_2 = -\frac{i}{2} \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) d \log \mu,$$

et, par conséquent,

$$(37) \quad \eta = -\frac{i}{2} \int \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) d \log \mu - \frac{i}{2} \int \left(\frac{dU'}{d \log \mu'} \right)^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) d \log \mu'.$$

On peut donner à ces équations d'autres formes.

Posons

$$-i \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu = F(\mu) d\mu,$$

$$i \left(\frac{dU'}{d \log \mu'} \right)^2 d \log \mu' = F_1(\mu') d\mu';$$

alors on aura

$$\begin{aligned}\zeta &= \int F(\mu) d\mu + \int F_1(\mu') d\mu', \\ \xi &= \frac{1}{2} \int F(\mu) \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) d\mu + \frac{1}{2} \int F_1(\mu') \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) d\mu', \\ \eta &= -\frac{i}{2} \int F(\mu) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) d\mu + \frac{i}{2} \int F_1(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) d\mu',\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\sigma = \int F(\mu) \mu d\mu - \int F_1(\mu') \frac{1}{\mu'} d\mu'.$$

En tenant compte des formules

$$\frac{dU}{d \log \mu} = \sqrt{\frac{d\zeta}{dy_1}}, \quad \frac{dU'}{d \log \mu'} = \sqrt{\frac{d\zeta}{dx_1}},$$

on trouve, par une substitution facile,

$$(38) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \int f'_1(y_1) (e^{iy_1} - e^{-iy_1}) dy_1 + \frac{1}{2} \int f'(x_1) (e^{-ix_1} - e^{ix_1}) dx_1, \\ \eta = -\frac{i}{2} \int f'_1(y_1) (e^{iy_1} + e^{-iy_1}) dy_1 + \frac{i}{2} \int f'(x_1) (e^{-ix_1} + e^{ix_1}) dx_1, \\ \zeta = f(x_1) + f_1(y_1). \end{cases}$$

Ces dernières formules nous semblent compléter la solution de M. O. Bonnet pour trouver autant que l'on veut de surfaces minima à contour indéterminé. Il est bon de les démontrer directement, sans passer par les fonctions U et U'.

15. Nous avons vu que les fonctions $dx_1 \sqrt{f'(x_1)}$ et $dy_1 \sqrt{f'_1(y_1)}$ restent invariables quand on remplace le système de coordonnées employé par un autre également trirectangle. L'expression de ζ peut se mettre sous la forme

$$\zeta = \int \frac{f'(x_1) dx_1^2}{dx_1} + \int \frac{f'_1(y_1) dy_1^2}{dy_1}.$$

D'après toutes les explications qui précèdent, on a donc

$$\xi = \int \frac{f'(x_1) dx_1^2}{dx_1} + \int \frac{f'_1(y_1) dy_1^2}{dy_1},$$

où x'_1 et y'_1 sont définis par les équations

$$\mu_1 = e^{y' + i x'}, \quad x'_1 = x' + i y', \quad y'_1 = x' - i y'.$$

Mais l'équation

$$\mu_1 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$$

équivalent à celle-ci

$$e^{i y'_1} = \frac{1 - e^{i y_1}}{1 + e^{i y_1}},$$

qui donne, par la différentiation,

$$d y'_1 = \frac{2 d y_1}{e^{i y_1} - e^{-i y_1}}.$$

On trouve de même

$$d x'_1 = - \frac{2 d x_1}{e^{i x_1} - e^{-i x_1}},$$

et l'on en déduit l'expression de ξ déjà trouvée. On procéderait de même à l'égard de η .

16. On peut donner encore, pour l'une quelconque des coordonnées, une autre formule. On a en effet, à cause des valeurs de M et N trouvées plus haut,

$$\zeta = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2iV}}{R} \frac{ds}{dx_1} ds + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-2iV}}{R} \frac{ds}{dy_1} ds = \int \frac{1}{2R} \left(e^{2iV} \frac{ds}{dx_1} + e^{-2iV} \frac{ds}{dy_1} \right) ds.$$

Si l'on revient aux variables x, y , les relations

$$\frac{ds}{dx_1} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dx} - \frac{i}{2} \frac{ds}{dy},$$

$$\frac{ds}{dy_1} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dx} + \frac{i}{2} \frac{ds}{dy}$$

donnent, par un calcul facile,

$$\zeta = \frac{1}{2} \int \frac{1}{R} \left(\cos 2V \frac{ds}{dx} + \sin 2V \frac{ds}{dy} \right) ds;$$

ζ désigne la distance du point M à un plan quelconque, pourvu que

les variables x, y soient rapportées à un axe perpendiculaire à ce plan.

Si l'on passe d'un point M pour lequel $x = x_0, y = y_0$ à un point M' pour lequel $x = x_1, y = y_1$, l'intégrale

$$\int \frac{1}{R} \left(\cos 2V \frac{ds}{dx} + \sin 2V \frac{ds}{dy} \right) ds,$$

prise entre les limites correspondant à x_0, y_0 et x_1, y_1 , aura toujours la même valeur, quel que soit le chemin suivi sur la surface pour passer de M à M', et cette valeur est égale à la différence des distances de ces deux points à un plan perpendiculaire à la droite qui sert à déterminer les colatitudes.

17. *Exemple.* — Prenons

$$\zeta = \frac{1}{2}(a - bi)x + \frac{1}{2}(a + bi)y;$$

on aura, d'après les formules (38),

$$\xi = b \cos x \cos iy + a \sin xi \sin iy,$$

$$\eta = b \sin x \cos iy + a \cos xi \sin iy,$$

$$\zeta = ax + by.$$

Cas particuliers. — 1° Supposons $a = 0$. Les formules précédentes deviennent

$$\xi = b \cos x \cos iy,$$

$$\eta = b \sin x \cos iy,$$

$$\zeta = by,$$

d'où

$$\xi^2 + \eta^2 = b^2 \cos^2 iy = b^2 \left(\frac{e^{\frac{\zeta}{b}} + e^{-\frac{\zeta}{b}}}{2} \right)^2.$$

Cette équation représente une surface de révolution ayant pour méridienne une chaînette dont l'équation est la suivante :

$$\zeta = \frac{b}{2} \left(e^{\frac{\zeta}{b}} + e^{-\frac{\zeta}{b}} \right).$$

2° Supposons $b = 0$; on obtient alors

$$\begin{aligned}\xi &= a \sin x i \sin iy, \\ \eta &= a \cos x i \sin iy, \\ \zeta &= ax,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{\xi}{\eta} = a \operatorname{tang} \frac{\zeta}{a},$$

équation d'une surface hélicoïde à plan directeur.

18. *Étude d'une surface minima autour d'un de ses points.* — Prenons pour origine des coordonnées un point d'une surface minima, l'axe des ζ étant la normale à la surface, et les axes $O\xi$, $O\eta$ tangents aux lignes de courbure passant par le point considéré. On aura alors, en général,

$$\zeta = r(\xi^2 - \eta^2) + a\xi^3 + b\xi^2\eta + \dots;$$

mais, en certains points, les rayons de courbure principaux seront infinis, et le développement de ζ commencera aux termes de degré $n > 2$. D'après ce qui a été dit au § 2, quand le point μ décrit une courbe partant de l'origine, le point σ décrit un arc appartenant à une courbe qui possède à l'origine un point multiple d'ordre $n-1$. A chacune de ces branches correspond une valeur de ζ qui varie d'une manière continue. Il en est de même pour Z et Z' . Nous poserons

$$\begin{aligned}Z &= a\mu^\alpha + b\mu^\beta + \dots, \\ Z' &= a'\mu'^\alpha + b'\mu'^\beta + \dots,\end{aligned}$$

les exposants positifs α, β, \dots étant entiers ou fractionnaires et rangés par ordre de grandeur croissante.

La formule

$$\sigma = \int \mu dZ - \int \frac{1}{\mu'} dZ'$$

donne immédiatement

$$\sigma = \frac{a\alpha}{\alpha+1} \mu^{\alpha+1} + \frac{b\beta}{\beta+1} \mu^{\beta+1} + \dots - \frac{a'\alpha}{\alpha-1} \mu'^{\alpha-1} - \frac{b'\beta}{\beta-1} \mu'^{\beta-1} - \dots$$

On ne peut avoir $\alpha = 1$, car σ contiendrait le terme $-a' \log \mu' = a'(ix - y)$,

et, en augmentant l'argument x de 2π , σ augmenterait de $2\alpha'\pi i$, ce qui est contraire à la continuité de la surface. De plus, si $\mu = 0$, on a $\zeta = 0$; par conséquent, α ne peut être nul, car on devrait avoir $\alpha + \alpha' = 0$, et par suite $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$. On a donc

$$\sigma = \mu'^{\alpha-1}(\Lambda + \alpha),$$

Λ étant une constante et α ayant pour limite zéro.

Supposons $\alpha = 2$; alors

$$\sigma = \mu'(\Lambda + \alpha).$$

On voit aisément que la constante Λ doit être réelle; il résulte de l'équation précédente que les tangentes aux courbes décrites par les points μ et σ sont, à l'origine, également inclinées sur les lignes de courbure. Dans ce cas, le développement de ζ commence au second degré (§ 2).

D'une manière générale, on a

$$\mu' = \sigma^{\frac{1}{\alpha-1}}(\mathbf{B} + \beta).$$

Or, si l'argument de σ a à l'origine une limite donnée, celui de μ' tend vers une valeur unique (§ 2); donc $\frac{1}{\alpha-1}$ est un nombre entier. Posons $\frac{1}{\alpha-1} = n-1$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{n}{n-1}$; alors

$$\sigma = \mu'^{\frac{1}{n-1}}(\Lambda + \alpha),$$

et, par suite, la courbe (σ) a à l'origine un point multiple d'ordre $n-1$. Le développement de ζ commence alors aux termes de degré n .

Si l'on pose $\mu' = \mu'_1{}^{n-1}$, $\sigma = \lambda\mu'_1$, on a

$$\mu'^{\frac{1}{n-1}} = \mu'_1 \left(\cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \right)$$

et

$$\lambda = \cos \left(\frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \right) (\Lambda + \alpha).$$

Si donc l'argument de μ' est égal à θ , à l'origine, celui de σ sera

$$\frac{\theta}{n-1} + \frac{2k\pi}{n-1},$$

où $k = 0, 1, 2, \dots, (n-2)$.

On a ensuite

$$Z = \mu^{\frac{n}{n-1}} (C + \gamma),$$

la fonction γ étant nulle à l'origine.

19. Cela posé, la formule

$$\frac{dX}{dZ} = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2\mu}$$

donne

$$\frac{dX}{d\mu} = \left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2\mu} \right) \frac{dZ}{d\mu}.$$

Or

$$\frac{dZ}{d\mu} = \frac{n}{n-1} \mu^{\frac{n}{n-1}-1} (C + \gamma');$$

donc, dans l'expression de $\frac{dX}{d\mu}$, le terme de degré inférieur en μ contiendra $\mu^{\frac{n}{n-1}-2} = \mu^{\frac{2-n}{n-1}}$ en facteur. On a donc

$$\frac{dX}{d\mu} = \mu^{\frac{2-n}{n-1}} (\mathbf{H} + \varepsilon$$

et, par suite,

$$X = \mu^{\frac{1}{n-1}} (\mathbf{H} + \varepsilon')$$

ou

$$\mu = X^{n-1} (K + \eta).$$

On peut donc écrire

$$(39) \quad \log \mu = (n-1) \log X + f.c.,$$

la notation $f.c$ désignant une fonction continue dans les environs du point considéré.

On a encore, en vertu de ce qui précède,

$$\frac{d\mu}{dX} = X^{n-2}(L + \lambda),$$

λ étant nul à l'origine.

20. Il s'agit maintenant d'examiner la fonction U.

On a

$$\left(\frac{dU}{dX}\right)^2 = \left(\frac{dU}{d\log\mu}\right)^2 \left(\frac{d\log\mu}{dX}\right)^2.$$

Or

$$\frac{dX}{d\log\mu} = -\frac{i}{2} \left(\frac{dU}{d\log\mu}\right)^2 \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right);$$

par suite,

$$\left(\frac{dU}{dX}\right)^2 = -\frac{2i}{1-\mu^2} \frac{d\mu}{dX},$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{dU}{dX}\right)^2 = -\frac{2i}{1-\mu^2} X^{n-2}(L + \lambda),$$

d'où l'on déduit

$$(40) \quad \log \frac{dU}{dX} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log X + f.c.$$

SURFACES MINIMA CONTENANT DES DROITES.

21. Considérons d'abord le cas où, par un point M pris sur une surface minima, passe une droite AB contenue dans la surface, et une seule.

Si l'on pose

$$\zeta = \frac{1}{2}[\varphi(\gamma + ix) + \varphi(\gamma - ix)] + \frac{i}{2}[\varphi_1(\gamma + ix) - \varphi_1(\gamma - ix)],$$

et que l'on prenne le point M pour origine, la droite AB pour axe des η , il faudra que pour $x=0$ on ait $\zeta=0$, quelle que soit la valeur de γ . Or la substitution $x=0$ réduit le second membre de l'équation précédente à $\varphi(\gamma)$; on a donc $\varphi(\gamma)=0$ quel que soit γ ; par suite,

$$\zeta = \frac{i}{2}\varphi_1(\gamma + ix) - \frac{i}{2}\varphi_1(\gamma - ix)$$

on a donc

$$Z = \frac{i}{2} \varphi_1(y + ix), \quad Z' = -\frac{i}{2} \varphi_1(y - ix),$$

et l'on voit bien qu'il n'y a aucune nouvelle condition à imposer à la fonction Z ; donc tous les raisonnements du paragraphe précédent subsistent, et l'on a, d'une manière générale,

$$(40) \quad \log \frac{dU}{dX} = \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \log X + f.c. \quad (X = 0).$$

22. *Surface minima contenant deux droites non situées dans un même plan.* — Prenons l'une de ces droites pour axe des η , l'axe des ζ étant la perpendiculaire commune aux deux droites. Désignons par A leur plus courte distance et par $\alpha\pi$ leur angle, de sorte que les équations de ces droites soient respectivement

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0; \quad \eta = -\xi \cot \alpha\pi, \quad \zeta = h.$$

Nous exprimerons, comme précédemment, que la droite $O\eta$ est sur la surface, en posant

$$\zeta = \frac{i}{2} [\varphi_1(y + ix) - \varphi_1(y - ix)].$$

Posons

$$\varphi_1(y) = my + \varphi_2(y);$$

l'équation précédente devient

$$\zeta = \frac{i}{2} [2mix + \varphi_2(y + ix) - \varphi_2(y - ix)].$$

Pour $x = \alpha\pi$, on doit avoir $\zeta = A$; donc

$$A + m\alpha\pi = \frac{i}{2} [\varphi_2(y + \alpha\pi i) - \varphi_2(y - \alpha\pi i)].$$

Si l'on fait

$$A + m\alpha\pi = H,$$

on aura

$$\varphi_2(y + \alpha\pi i) = \varphi_2(y - \alpha\pi i) - 2Hi,$$

d'où l'on tire

$$\varphi_2(y + 2\alpha\pi i) = \varphi_2(y) - 2Hi.$$

Posons maintenant

$$\varphi_2(y) = -\frac{H}{\alpha\pi}y + \varphi_3(y);$$

on aura, en remplaçant y par $y + 2\alpha\pi i$,

$$\varphi_2(y + 2\alpha\pi i) = -\frac{H}{\alpha\pi}y + \varphi_3(y - 2\alpha\pi i) - 2Hi,$$

et, pour remplir la condition trouvée, il suffit de faire

$$\varphi_3(y + 2\alpha\pi i) = \varphi_3(y);$$

donc il faut et il suffit que $\varphi_3(y)$ soit une fonction périodique ayant pour période $2\alpha\pi i$.

En remplaçant m par $\frac{H-A}{\alpha\pi}$ et $\varphi_2(y+ix)$, $\varphi_2(y-ix)$ par leurs valeurs, on obtient

$$\zeta = \frac{i}{2} \left[-\frac{2A}{\alpha\pi}ix + \varphi_3(y+ix) - \varphi_3(y-ix) \right],$$

φ_3 étant une fonction périodique dont la période est $2\alpha\pi i$. Or on connaît la formule générale d'une pareille fonction, et l'on a

$$\varphi_3(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n e^{\frac{ny}{\alpha}},$$

et, par suite,

$$\varphi_3(y+ix) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n e^{\frac{ny}{\alpha}} \left(\cos \frac{nx}{\alpha} + i \sin \frac{nx}{\alpha} \right),$$

$$\varphi_3(y-ix) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n e^{\frac{ny}{\alpha}} \left(\cos \frac{nx}{\alpha} - i \sin \frac{nx}{\alpha} \right),$$

et l'on a enfin

$$\zeta = \frac{A}{\alpha\pi}x - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n e^{\frac{ny}{\alpha}} \sin \frac{nx}{\alpha}.$$

Il restera à déterminer les constantes de manière que l'axe des ζ soit bien la perpendiculaire commune aux deux droites.

Si la droite située dans le plan $\xi O \eta$ n'est pas confondue avec l'axe $O \eta$, mais fait avec cet axe un angle égal à $\beta\pi$, il suffira de remplacer, dans la formule précédente, x par $x + \beta\pi$, de sorte que

$$\zeta = \frac{\Lambda}{2\alpha\pi} (x + \beta\pi) - \sum u_n e^{\frac{n\gamma}{\alpha}} \sin \frac{n(x + \beta\pi)}{\alpha}.$$

23. *Expression de ζ en fonction de μ et μ' .* — Nous avons trouvé (en supposant $\beta = 0$)

$$(41) \quad \zeta = -\frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} (\gamma + ix) + \frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} (\gamma - ix) + i \sum u_n \left(e^{\frac{n}{\alpha}(\gamma + ix)} - e^{\frac{n}{\alpha}(\gamma - ix)} \right);$$

cela revient à écrire

$$(42) \quad \zeta = -\frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \log \mu + \frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \log \mu' + i \sum u_n \left(\mu^{\frac{n}{\alpha}} - \mu'^{\frac{n}{\alpha}} \right).$$

Nous avons donc

$$Z = -\frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \log \mu + i \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n \mu^{\frac{n}{\alpha}}.$$

L'expression de ζ n'est continue pour $\mu = \mu' = 0$ que si le signe Σ ne comprend que des valeurs positives de n ; nous donnerons donc à n toutes les valeurs entières depuis $n = 0$ jusqu'à n infini.

Ainsi, nous écrivons

$$(43) \quad \begin{cases} Z = -\frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \log \mu + i \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n \mu^{\frac{n}{\alpha}}, \\ Z' = -\frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \log \mu' + i \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n \mu'^{\frac{n}{\alpha}}. \end{cases}$$

On a ensuite

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 = i \frac{dZ}{d \log \mu} = \frac{\Lambda}{2\alpha\pi} - \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{n}{\alpha} u_n \mu^{\frac{n}{\alpha}}.$$

Le terme constant du second membre est $\frac{\Lambda}{2\alpha\pi}$; on a, par conséquent,

$$(44) \quad \frac{dU}{d \log \mu} = \sqrt{\frac{\Lambda}{2\alpha\pi}} \quad \text{pour } \mu = 0.$$

Remarque. — Si, dans les formules précédentes, on suppose $\alpha = 1$, on aura exprimé que la surface renferme deux droites parallèles à distance A .

24. Supposons maintenant que les deux droites se coupent à l'origine et fassent entre elles un angle égal à $\alpha\pi$; en prenant pour axe des ζ la perpendiculaire menée à leur plan par leur point d'intersection, les calculs précédents subsistent; il suffit seulement d'y faire $A = 0$, et l'on a

$$Z = \Sigma u_n \mu^{\frac{n}{\alpha}},$$

$$Z' = \Sigma u_n \mu'^{\frac{n}{\alpha}}.$$

On a ensuite

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 = \frac{i}{\alpha} \left(u_1 \mu^{\frac{1}{\alpha}} + 2 u_2 \mu^{\frac{2}{\alpha}} + \dots \right)$$

ou simplement

$$\frac{dU}{d \log \mu} = \mu^{\frac{1}{2\alpha}} (H + \varepsilon),$$

H étant une constante et ε une quantité qui s'annule avec μ .

Plus généralement, il peut arriver que le développement de Z commence au terme contenant $\mu^{\frac{m}{\alpha}}$. Alors

$$Z = u_m \mu^{\frac{m}{\alpha}} + u_{m+1} \mu^{\frac{m+1}{\alpha}} + \dots$$

et

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 = \frac{i}{\alpha} \left[m u_m \mu^{\frac{m}{\alpha}} + (m+1) u_{m+1} \mu^{\frac{m+1}{\alpha}} + \dots \right]$$

ou

$$(45) \quad \frac{dU}{d \log \mu} = \mu^{\frac{m}{2\alpha}} (H + \varepsilon).$$

25. *Remarque.* — Si l'on place dans un système de coordonnées l'axe des ζ_1 sur une droite du contour, l'axe des ζ_2 d'un second système sur la droite suivante, etc., sur la première droite $\log \mu_1$, sur la seconde $\log \mu_2$ seront imaginaires en général, car $\log \mu = y + ix$; il en résulte que les quantités $i \frac{d\zeta_1}{d \log \mu_1}$ et $i \frac{d\zeta_2}{d \log \mu_2}$ seront réelles, puisque $d \log \mu_1 = i dx_1$, y_1

étant invariable, et, par conséquent, on a

$$i \frac{d\zeta_1}{d \log \mu_1} = \frac{d\zeta_1}{dx_1}.$$

Or, si l'on fait un changement de coordonnées, on a vu que l'expression $i \frac{d\zeta_1}{d \log \mu_1}$ est invariable : donc elle restera réelle; mais la différentielle dU ,

$$dU = \sqrt{i \frac{d\zeta_1}{d \log \mu_1}} d \log \mu_1 = \sqrt{\frac{d\zeta_1}{dx_1}} i dx_1,$$

pourra être réelle ou imaginaire sur les droites du contour; quant au carré de dU , il est réel sur tout le contour.

26. Une surface minima est déterminée quand on a exprimé U en fonction de μ , car alors on aura X, Y, Z par des quadratures, et X', Y', Z' s'en déduisent immédiatement en changeant i en $-i$. Riemann emploie, pour trouver U en fonction de μ , une nouvelle variable indépendante t , de sorte que l'on puisse poser $U = f(t)$, et, ensuite, il cherche à exprimer μ en fonction de t . La variable t est assujettie à la condition que son argument reste compris entre 0 et π .

Nous supposons que le contour donné se compose de lignes droites; ces droites sont représentées sur la sphère par des arcs de grand cercle; on admet en outre qu'on passe d'un arc à un autre directement, c'est-à-dire par un de leurs points d'intersection; alors on a en général un polygone sphérique fermé. On s'arrange de manière que t prenne des valeurs réelles pour tous les points du contour donné, et, de plus, que t soit infini en un point déterminé de ce contour, pour lequel U a une valeur finie. On peut évidemment poser, à cet effet,

$$t = \frac{C}{U - a} + f.c \quad \text{pour } U = a.$$

On peut déterminer les constantes de manière que, pour les points du contour, l'argument de t soit 0 ou π , et que pour tous les points pris à l'intérieur cet argument soit compris entre 0 et π .

Quand un point se déplace sur le contour, t prend donc des valeurs réelles, et, si t_0 est une valeur de t correspondant à un sommet du poly-

gone, on passe d'une droite du contour à une autre; si les deux côtés du polygone qui se coupent au sommet considéré correspondent à deux droites non situées dans un même plan, la valeur t_0 correspondra à un secteur infini de la surface minima.

27. Nous avons trouvé que, si la surface contient deux droites non situées dans un même plan, en prenant pour axe des ζ la perpendiculaire commune à ces deux droites, on a

$$\frac{dU}{d \log \mu} = \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}} \quad \text{pour } \mu = 0.$$

Nous regardons maintenant U et μ comme des fonctions de la variable t , qui reste réelle quand on se déplace sur le contour et qui prend la valeur $t = e$ quand on passe de l'une des droites à l'autre. La perpendiculaire commune aux deux droites perce la sphère en un point μ_0 , et, si l'on prend ce point pour pôle, on a une nouvelle variable μ_1 déterminée par la formule de transformation

$$\mu_1 = \frac{\mu_0 - \mu}{1 + \mu'_0 \mu}.$$

Or, nous supposons que les deux droites soient des droites *consécutives* du contour; nous entendons par là que, quand t passe par la valeur e , le point μ passe de l'arc de grand cercle qui représente la première droite à l'arc de grand cercle qui représente la seconde par un de leurs points communs, celui qui correspond à μ_0 , de sorte que pour $t = e$ on ait $\mu = \mu_0$. Les droites faisant un angle $\alpha\pi$, on a

$$\mu - \mu_0 = (t - e)^\alpha (\mathbf{H} + \varepsilon),$$

puisque l'argument de t varie de π en passant par la valeur $t = e$.

Or, pour $\mu_1 = 0$,

$$\frac{dU}{d \log \mu_1} = \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}};$$

mais

$$d \log \mu_1 = d \log (\mu - \mu_0) - d \log (1 + \mu'_0 \mu),$$

puis

$$\frac{d \log(\mu - \mu_0)}{d \log(t - e)} = \alpha \quad \text{pour } t = e,$$

$$d \log(1 + \mu \mu'_0) = \frac{\mu'_0}{1 + \mu \mu'_0} d\mu.$$

Lorsque $\mu = \mu'_0$,

$$\frac{\mu'_0}{1 + \mu \mu'_0} = \frac{\mu'_0}{1 + \mu_0 \mu'_0},$$

le dénominateur $1 + \mu_0 \mu'_0$ est positif; ensuite

$$\frac{d\mu}{d \log(t - e)} = \frac{d\mu}{dt} (t - e) = \alpha(N + \varepsilon')(t - e)^2;$$

donc, pour $t = e$,

$$\frac{d \log(1 + \mu \mu'_0)}{d \log(t - e)} = 0,$$

et par suite

$$\frac{d \log \mu_1}{d \log(t - e)} = \alpha \quad \text{pour } t = e;$$

donc enfin on a, à cause de l'identité,

$$(46) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{d \log(t - e)} &= \frac{dU}{d \log \mu_1} \frac{d \log \mu_1}{d \log(t - e)}, \\ \frac{dU}{d \log(t - e)} &= \alpha \sqrt{\frac{\Lambda}{2\alpha\pi}} = \sqrt{\frac{\Lambda\alpha}{2\pi}} \quad \text{pour } t = e. \end{aligned}$$

28. Considérons maintenant un point par lequel passent deux droites faisant un angle égal à $\alpha\pi$. En raisonnant comme plus haut, on a, en prenant pour pôle de la variable μ_1 le point de la sphère situé sur le rayon parallèle à la normale au sommet de l'angle considéré,

$$\frac{dU}{d \log \mu_1} = \mu_1^{\frac{m}{2\alpha}} (\mathbf{H} + \varepsilon).$$

Or, quand t passe par la valeur $t = c$, on a, puisque l'argument de μ varie de $\alpha\pi$,

$$\mu - \mu_0 = (t - c)^\alpha (\mathbf{K} + \eta);$$

par conséquent, on a encore, comme plus haut,

$$d \log \mu_1 = \alpha d \log (t - c).$$

Mais

$$\mu_1^{\frac{m}{2\alpha}} = (\mu - \mu_0)^{\frac{m}{2\alpha}} (\mathbf{H}' + \varepsilon') = (t - c)^{\frac{m}{2}} (\mathbf{K}' + \eta');$$

par suite,

$$\frac{dU}{d \log \mu_1} = \frac{dU}{\alpha dt} (t - c) = (t - c)^{\frac{m}{2}} (\mathbf{H}_1 + \varepsilon_1);$$

donc enfin

$$(47) \quad \log \frac{dU}{dt} = \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \log (t - c) + \text{fonct. cont.} \quad (\text{pour } t = c).$$

29. Considérons maintenant un point de la surface par lequel ne passe aucune droite, ou tout au plus une seule droite; nous avons trouvé que, si les axes sont convenablement choisis, on a

$$\log \frac{dU}{dX} = \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \log X + \text{fonct. cont.} \quad (X = 0),$$

Or, d'après ce que l'on a vu plus haut, si au point considéré $\mu = \mu_0$, comme ce point correspond à un point multiple d'ordre $n - 1$ sur le plan des μ_1 , puisque

$$\mu_1 = X^{n-1} (\mathbf{H} + \varepsilon),$$

on aura, en reprenant les raisonnements du paragraphe précédent,

$$\frac{dU}{d \log \mu_1} = \mu_1^{\frac{n}{2(n-1)}} (\mathbf{H} + \varepsilon)$$

et

$$\mu - \mu_0 = (t - a)^{n-1} (\mathbf{K} + \eta);$$

donc

$$\frac{dU}{dt} = (t - a)^{\frac{n}{2}-1} (\mathbf{H}' + \varepsilon'),$$

et, par suite,

$$(48) \quad \log \frac{dU}{dt} = \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \log (t - a) + \text{fonct. cont.}$$

Cette formule s'applique aussi bien au cas où le point correspondant à $t = a$ est sur une droite contenue tout entière dans la surface.

30. Cela posé, désignons par a_1, a_2, \dots les valeurs de t qui correspondent aux points multiples relatifs à la variable μ situés à l'intérieur du contour, par b_1, b_2, \dots celles qui correspondent aux points multiples non anguleux du contour, par c_1, c_2, \dots celles qui sont relatives aux points anguleux du contour, et enfin par e_1, e_2, \dots les valeurs de t qui correspondent aux secteurs infinis. D'après ce qui précède, pour les points multiples, on suppose $n \geq 3$; nous prendrons $n = 3$. Pour les points anguleux, le cas le plus simple est celui de $m = 1$. Tout le long du contour, $\left(\frac{dU}{dt}\right)^2$ sera réelle en même temps que t . Nous introduirons en même temps que les constantes a_1, a_2, \dots leurs conjuguées a'_1, a'_2, \dots , de sorte que, pour des valeurs imaginaires conjuguées de t , $\frac{dU}{dt}$ prendra des valeurs conjuguées. Il résulte de là que le changement de variable peut être représenté par l'équation

$$(49) \quad \frac{dU}{dt} = \sqrt{\frac{\Pi(t-a)\Pi(t-a')\Pi(t-b)}{\Pi(t-c)}} \frac{H}{\Pi(t-e)},$$

le signe Π indiquant un produit. Les constantes a, a', b, c, \dots sont en outre assujetties à des équations de condition exprimant que, pour $t = e$, on a

$$U = \sqrt{\frac{\Lambda\alpha}{2\pi}} \log(t-e) + \text{fonct. cont.}$$

Remarquons maintenant que, si pour $t = a$, par exemple, on a $n > 3$, par exemple $n = 4$, au lieu du facteur $(t - a_1)^{\frac{1}{2}}$ on devrait avoir $(t - a_1)^{\frac{1}{2}-1} = t - a_1$; il suffit pour cela de supposer $a_1 = a_2$. Si $n = 5$, l'hypothèse $a_1 = a_2 = a_3$ donnerait le facteur $(t - a_1)^{\frac{3}{2}}$, etc. Si $m > 1$, pour $m = 2$ par exemple, $\frac{dU}{dt}$ doit se réduire à une constante pour $t = c_1$. Il suffit de supposer que c_1 devienne égal à b_1 . Si $m = 3$, on doit avoir

$$\log \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \log(t-c) + \text{fonct. cont.}$$

On pourra supposer $b_1 = b_2 = c_1 = \dots$. De cette façon, on ne diminue pas la généralité en supposant $n = 3, m = 1$.

31. Examinons ce que devient $\frac{dU}{dt}$ pour t infini.

Posons pour cela $t = \frac{1}{t'}$,

$$\varphi(t) = \Pi(t-a) \Pi(t-a') \Pi(t-b),$$

$$\chi(t) = \Pi(t-c) \Pi(t-e)^2.$$

Si μ et ν sont les degrés de ces deux polynômes, on a

$$\varphi\left(\frac{1}{t'}\right) = \frac{1+\varepsilon}{t'^\mu}, \quad \chi\left(\frac{1}{t'}\right) = \frac{1+\varepsilon_1}{t'^\nu}$$

d'où

$$\frac{\varphi(t)}{\chi(t)} = (1+\eta) t'^{\nu-\mu},$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \eta$ s'annulant avec t' . Il vient ainsi

$$dU = dt' H \sqrt{1+\eta} t'^{\frac{\nu-\mu}{2}-2}.$$

Si l'on veut que $t'=0$ soit un point ordinaire de la fonction U , il faudra supposer $\mu = \nu - 4$. Dans cette hypothèse, la fonction U restera finie et continue en tous les points du plan des t , sauf aux points a, a', b, c, e, \dots , qui seront ses seuls points de ramification.

32. *Détermination de μ .* — Il est en général très difficile d'obtenir directement l'expression de μ en fonction de t . Riemann emploie l'artifice suivant.

Dans les formules (35), (36), (37), μ entre directement et par l'expression $\frac{dU}{d \log \mu}$. Il suffit évidemment de trouver l'expression de $\frac{dU}{d \log \mu}$ en fonction de t , puisque l'on connaît déjà $\frac{dU}{dt}$. Pour cela, soit V une

fonction indéterminée de z ; on a identiquement

$$\frac{dU}{d \log \mu} = \frac{dU}{dV} \mu \frac{dV}{d\mu} = \frac{dU}{dV} k_1 k_2,$$

en posant

$$k_1 = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}}, \quad k_2 = \mu \sqrt{\frac{dV}{d\mu}} = \mu k_1.$$

Or, de la relation

$$k_2 = \mu k_1$$

on tire

$$\frac{dk_2}{dV} = \mu \frac{dk_1}{dV} + k_1 \frac{d\mu}{dV} = \frac{k_2}{k_1} \frac{dk_1}{dV} + \frac{1}{k_1},$$

et par suite

$$(50) \quad k_1 \frac{dk_2}{dV} - k_2 \frac{dk_1}{dV} = 1.$$

En prenant de nouveau les dérivées par rapport à V , il vient

$$k_1 \frac{d^2 k_2}{dV^2} - k_2 \frac{d^2 k_1}{dV^2} = 0$$

ou

$$\frac{1}{k_1} \frac{d^2 k_1}{dV^2} = \frac{1}{k_2} \frac{d^2 k_2}{dV^2}.$$

Désignons par k l'une ou l'autre des quantités k_1 , k_2 ; on a, d'une manière générale,

$$\frac{d^2 k}{dV^2} = \frac{d \frac{dk}{dV}}{dV} = \frac{d \frac{dk}{dV}}{dt} \frac{dt}{dV} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dk}{dV}}{\frac{dV}{dt}} \right) \frac{1}{\left(\frac{dV}{dt} \right)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 k}{dV^2} = \frac{\frac{dV}{dt} \frac{d^2 k}{dt^2} - \frac{dk}{dt} \frac{d^2 V}{dt^2}}{\left(\frac{dV}{dt} \right)^3}.$$

Supposons que l'on réussisse à calculer $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$ en fonction de z ; soit, par exemple,

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2} = F(z);$$

on aura

$$(51) \quad \frac{d^2 k}{dt^2} \frac{dV}{dt} - \frac{dk}{dt} \frac{d^2 V}{dt^2} - k F(t) \left(\frac{dV}{dt} \right)^3 = 0.$$

On a ainsi obtenu une équation différentielle du second ordre dont k_1 et k_2 sont des intégrales particulières liées entre elles par la relation

$$k_1 \frac{dk_2}{dV} - k_2 \frac{dk_1}{dV} = 1.$$

Si h_1 et h_2 sont deux intégrales particulières de l'équation précédente (51), on aura

$$\frac{1}{h_1} \frac{d^2 h_1}{dV^2} = \frac{1}{h_2} \frac{d^2 h_2}{dV^2},$$

et par suite

$$h_1 \frac{dh_2}{dV} - h_2 \frac{dh_1}{dV} = C.$$

On aura aussi

$$\frac{1}{h_1} \frac{d^2 h_1}{dV^2} = \frac{1}{k_1} \frac{d^2 k_1}{dV^2}.$$

Supposons que l'on fasse une transformation de coordonnées en posant $\mu_1 = \frac{\mu_0 - \mu}{1 + \mu'_0 \mu}$; on en tire

$$\sqrt{\frac{d\mu}{d\mu_1}} = \frac{1 + \mu \mu'_0}{\sqrt{-(1 + \mu_0 \mu'_0)}};$$

par suite, en posant $K_1 = \sqrt{\frac{dV}{d\mu_1}}$, on a

$$K_1 = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}} \frac{1 + \mu \mu'_0}{\sqrt{-(1 + \mu_0 \mu'_0)}} = \alpha k_1 + \beta k_2,$$

α et β étant des constantes. Donc K_1 est une solution de l'équation (51), et l'on a

$$\frac{1}{K_1} \frac{d^2 K_1}{dV^2} = F(t).$$

33. La formule

$$dZ = -i \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu$$

peut être transformée au moyen des variables k_1, k_2 . On a, en effet,

$$\mu = \frac{k_2}{k_1},$$

$$d \log \mu = d \log k_2 - d \log k_1 = \frac{k_1 dk_2 - k_2 dk_1}{k_1 k_2} = \frac{dV}{k_1 k_2};$$

donc

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu = k_1 k_2 \left(\frac{dU}{dV} \right)^2 dV,$$

et par suite

$$(52) \quad dZ = -i k_1 k_2 \left(\frac{dU}{dV} \right)^2 dV.$$

On a ensuite

$$dX = \frac{1}{2} dZ \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{2} dZ \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2};$$

donc

$$(53) \quad dX = -\frac{i}{2} (k_2^2 - k_1^2) \left(\frac{dU}{dV} \right)^2 dV.$$

Enfin

$$i dY = \frac{1}{2} dZ \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right);$$

donc

$$(54) \quad i dY = -\frac{i}{2} (k_2^2 + k_1^2) \left(\frac{dU}{dV} \right)^2 dV.$$

On voit donc que l'on pourra calculer ξ, η, ζ en fonction de t quand on aura trouvé k_1 et k_2 .

34. *Choix de la fonction V.* — On fera en sorte que les discontinuités de $F(t)$ ou $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$ se trouvent parmi les points a, b, c .

Posons

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\chi(t)}}.$$

Cherchons la valeur de $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$ dans le voisinage du point c .

$\frac{dV}{dt}$ est un infiniment grand d'ordre $\frac{1}{2}$, puisque $\chi(t)$ renferme $t - c$ en facteur. Ensuite, si l'on développe μ suivant les puissances de $t - c$,

on aura, en nommant μ_c la valeur de μ pour $t = c$,

$$\mu - \mu_c = (t - c)^\lambda (\Lambda + \varepsilon),$$

ε s'annulant avec $t - c$. Or, quand t passe de la valeur $c - h$ à $c + h$, l'argument de $t - c$ varie de π . Si $\gamma\pi$ désigne l'angle des tangentes au point anguleux $t = c$, l'argument de μ doit varier de $\gamma\pi$; donc $\lambda = \gamma$. Comme on a par suite

$$\frac{\mu - \mu_c}{t - c} = (t - c)^{\gamma-1} (\Lambda + \varepsilon),$$

on voit que $\frac{d\mu}{dt}$ est pour $t = c$ un infiniment grand d'ordre $1 - \gamma$. Donc

$\frac{dV}{d\mu}$ est d'ordre $\gamma - \frac{1}{2}$, et par suite $k = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}}$ est d'ordre $\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4}$.

Ensuite

$$\frac{dk}{dV} = \frac{\frac{dk}{dt}}{\frac{dV}{dt}}$$

est d'ordre $\frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}$, et

$$\frac{d^2k}{dV^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dk}{dV} \right)}{\frac{dV}{dt}}$$

d'ordre $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{4}$.

Donc enfin $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dV^2}$ est d'ordre $\frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{4} \right)$, c'est-à-dire 1.

Ainsi, pour $t = c$, $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dV^2}$ est infini du premier ordre.

Nous allons calculer le coefficient de $\frac{1}{t - c}$.

En ne conservant que la partie principale dans chaque expression, quand $t - c$ est infiniment petit, on a

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\varphi(c)}{\sqrt{\chi'(c)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t - c}}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= C(t - c)^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dV}{d\mu} = C(t-c)^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

et, par suite,

$$k = C(t-c)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma};$$

donc

$$\frac{dk}{dt} = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) (t-c)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\gamma},$$

et, par conséquent,

$$\frac{dk}{dV} = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) (t-c)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma} \frac{\sqrt{\chi'(c)}}{\varphi(c)},$$

puis

$$\frac{d^2 k}{dV^2} = \frac{\left(\frac{d}{dt} \frac{dk}{dV} \right)}{\left(\frac{dV}{dt} \right)} = \frac{C}{4} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) (t-c)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\gamma} \frac{\chi'(c)}{\varphi(c)^2}.$$

Donc enfin

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2} = \frac{1}{4} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\chi'(c)}{\varphi(c)^2} \frac{1}{t-c} + \dots$$

Ainsi, le coefficient de $\frac{1}{t-c}$ est

$$\frac{1}{4} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\chi'(c)}{\varphi(c)^2}.$$

Considérons maintenant un point $t=a$ ou $t=b$.

Pour $t=a$, $\frac{dV}{dt}$ est un infiniment petit du premier ordre; mais on a

$$\mu - \mu_a = (t-a)^2 (A + \varepsilon);$$

donc $\frac{d\mu}{dt}$ est aussi du premier ordre; par suite, $\frac{dV}{d\mu}$ est fini, et l'on en déduit que, pour $t=a$, $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$ est fini. Il en est encore de même pour un point pour lequel t est fini et différent de a , b ou c .

Cherchons maintenant ce que devient la fonction $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$ quand $t = \infty$.
On a d'abord

$$\frac{dU}{dt} = \sqrt{\frac{t^{\nu-4} + \dots}{t^{\nu} + \dots}} = \frac{1 + \varepsilon}{t^2}.$$

Il faut se rappeler que t devient infini pour une valeur finie de U , $U = \beta$. Or, le point correspondant à $U = \beta$ est un point ordinaire; par conséquent on a, dans ce cas (§ 19 et § 20),

$$\frac{dX}{d\mu} = H + \varepsilon, \quad \frac{dU}{dX} = A + \alpha;$$

donc $\frac{d\mu}{dU}$ est une constante finie et différente de zéro. Un changement de variables n'altère pas ce résultat. On voit donc que $\frac{d\mu}{dt}$ est aussi un infiniment petit du second ordre. En ne prenant que les termes principaux, quand t devient infini, on a

$$\frac{d\mu}{dt} = C t^{-2}, \quad \frac{dV}{dt} = t^{\frac{\nu}{2}-4} + \dots;$$

donc

$$k_1 = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}} = C t^{\frac{\nu}{4}-1}.$$

On voit que, si $\nu = 4$, k_1 et $\frac{1}{k_1} \frac{d^2 k_1}{dV^2}$ sont des constantes finies pour $t = \infty$.
Supposons $\nu > 4$. On a alors

$$\frac{dk_1}{dV} = C \left(\frac{\nu}{4} - 1 \right) t^{\frac{\nu}{4}-2} t^{-\frac{\nu}{2}+4} = C \left(\frac{\nu}{4} - 1 \right) t^{-\frac{\nu}{4}+2};$$

de même

$$\frac{d^2 k_1}{dV^2} = C \left(\frac{\nu}{4} - 1 \right) \left(-\frac{\nu}{4} + 2 \right) t^{-\frac{3}{4}\nu+6},$$

d'où

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2} = \left(\frac{\nu}{4} - 1 \right) \left(-\frac{\nu}{4} + 2 \right) t^{-\nu+6}.$$

Il résulte de ces calculs que $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$ est une fonction méromorphe sur

toute la sphère; c'est donc une fraction rationnelle, et elle a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } \nu = 4 \dots \quad \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dV^2} &= \frac{1}{4} \sum \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) \chi'(c)}{(t-c) \varphi(c)^2} + h, \\
 \nu = 5 \dots \quad \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dV^2} &= \frac{1}{4} \sum \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) \chi'(c)}{(t-c) \varphi(c)^2} + \frac{3}{16} t + h, \\
 \nu = 6 \dots \quad \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dV^2} &= \frac{1}{4} \sum \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) \chi'(c)}{(t-c) \varphi(c)^2} + \frac{1}{4}, \\
 \nu = 7 \dots \quad \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dV^2} &= \frac{1}{4} \sum \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) \chi'(c)}{(t-c) \varphi(c)^2} + \frac{3}{16} \frac{1}{t} + h, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

h étant une constante.

Si ν est plus grand que 6, on aura en dénominateur $t^{\nu-6}$ et il faudra que $t=0$ soit racine d'ordre $\nu-6$ de $\chi(t)=0$ si l'on veut que $t=0$ ne soit pas une nouvelle discontinuité, ce qui introduit $\nu-6$ équations de condition.

35. *Autre détermination de la fonction V.* — Posons

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)\chi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}.$$

Calculons $\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dV^2}$ pour des valeurs infiniment petites de $t-c$; pour cela, nous procéderons comme dans le cas précédent.

Si l'on prend la partie principale de $\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$, on a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(t-c)f'(c)}}.$$

D'ailleurs on a, comme plus haut,

$$\frac{d\mu}{dt} = C(t-c)^{\nu-1};$$

donc

$$\frac{dV}{d\mu} = C(t-c)^{\frac{1}{2}-\gamma}$$

et

$$k_1 = C(t-c)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma}.$$

Ensuite,

$$\frac{dk_1}{dV} = C \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) (t-c)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\gamma} (t-c)^{\frac{1}{2}} \sqrt{f'(c)}$$

ou

$$\frac{dk_1}{dV} = C \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) (t-c)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma} \sqrt{f'(c)},$$

puis

$$\frac{d^2k_1}{dV^2} = C \frac{1}{4} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) (t-c)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma-1} (t-c)^{\frac{1}{2}} f'(c)$$

ou

$$\frac{d^2k_1}{dV^2} = C \frac{1}{4} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) (t-c)^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\gamma} f'(c),$$

et enfin

$$\frac{1}{k_1} \frac{d^2k_1}{dV^2} = \frac{1}{4} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) (t-c)^{-1} f'(c).$$

Telle est la partie principale de la fonction $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dV^2}$ quand $t-c$ est un infiniment petit.

On aura la même expression pour un point $t = a, a', b, \dots$; seulement l'angle $\gamma\pi$ doit être remplacé par 2π , c'est-à-dire γ par 2. Pour les autres valeurs finies de t , $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dV^2}$ est finie.

Cherchons maintenant ce que devient cette fonction quand t devient infini.

On a, pour t infini,

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{H}{t^2}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t^{2\gamma-1} + \dots}} = \frac{t^{2-\gamma}}{\sqrt{1 + \frac{A}{t} + \dots}},$$

c'est-à-dire, en ne prenant toujours que les termes principaux,

$$\frac{dV}{dt} = t^{2-\gamma}.$$

On a ensuite

$$k_1 = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}} = C t^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dk_1}{dV} = C \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) t^{1-\frac{\nu}{2}} t^{\nu-2} = C \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) t^{\frac{\nu}{2}-1},$$

puis

$$\frac{d^2 k_1}{dV^2} = C \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) t^{\frac{\nu}{2}-2} t^{\nu-2} = C \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) t^{\frac{3\nu}{2}-4},$$

d'où

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2} = \left(-\frac{\nu}{2} + 2\right) \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) t^{2\nu-6}.$$

Donc la fonction $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$ est encore une fonction rationnelle, et elle a la forme

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) f'(\gamma)}{t - g} + P(t),$$

le signe Σ s'étendant à tous les points $a, a', \dots, b, \dots, c$. Seulement, pour chaque point différent d'un point c , on a $\gamma = 2$. $P(t)$ est un polynôme entier en t , du degré $2\nu - 6$.

36. *Calcul des deux premiers coefficients de $P(t)$.* — Posons

$$dV = \frac{t^{-\nu+m}}{\sqrt{f(t)} t^{-2\nu+2m}} dt = \alpha dV_1,$$

où

$$\alpha = t^{-\nu+m} \quad \text{et} \quad \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{f(t)} t^{-2\nu+2m}}.$$

On a identiquement

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{d\mu}{dV} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{d}{dV} \left[\left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{d}{dV_1} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\alpha^{\frac{1}{2}}}{dV},$$

et, en différentiant une seconde fois,

$$\frac{d^2}{dV^2} \left(\frac{d\mu}{dV} \right)^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2}{dV_1^2} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 \alpha^{\frac{1}{2}}}{dV^2};$$

car les deux termes

$$\frac{d}{dV_1} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\alpha^{-\frac{1}{2}}}{dV} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dV_1} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-1} \frac{d\alpha^{\frac{1}{2}}}{dV}$$

se détruisent, puisque

$$\alpha^{-1} \frac{d\alpha^{\frac{1}{2}}}{dV} + \frac{d\alpha^{-\frac{1}{2}}}{dV} = 0.$$

En multipliant les deux membres de l'identité précédente par

$$\left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}},$$

on obtient

$$\left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dV^2} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{-2} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dV^2} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} + \alpha^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 \alpha^{\frac{1}{2}}}{dV^2},$$

d'où

$$\left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dV_1^2} \left(\frac{d\mu}{dV_1} \right)^{-\frac{1}{2}} = \alpha^2 \frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2} - \alpha^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 \alpha^{\frac{1}{2}}}{dV^2}.$$

Or le premier membre est une fonction analogue à $\frac{1}{k} \frac{d^2 k}{dV^2}$, mais relative à la fonction V_1 ; cherchons sa valeur pour $t = \infty$. On a

$$\frac{dV_1}{dt} = t^{2-\gamma+\gamma-m} = t^{2-m}, \quad \frac{d\mu}{dt} = 4t^{-2},$$

d'où

$$\frac{dV_1}{d\mu} = 4t^{4-m}.$$

En prenant $m=4$, on aura une constante, et, par suite, le premier membre de l'égalité écrite plus haut sera constant pour $t = \infty$. Le second membre peut s'écrire

$$t^{-2\gamma+8} \sum \frac{1}{4} \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) f''(g)}{t-g} + t^{-2\gamma+8} F(t) - \alpha^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 \alpha^{\frac{1}{2}}}{dV^2}.$$

Or, pour $t = \infty$, les termes compris sous le signe Σ sont finis; $t^{-2\nu+8} F(t)$ contient deux termes à exposants entiers par rapport à t , puisque

$$P(t) = A t^{2\nu-6} + B t^{2\nu-7} + C t^{2\nu-8} + D t^{2\nu-9} + \dots,$$

ce qui donne

$$t^{-2\nu+8} F(t) = A t^2 + B t + C + \frac{D}{t} + \dots$$

On a ensuite

$$\alpha^{\frac{3}{2}} = t^{6-\frac{3}{2}\nu}, \quad \alpha^{\frac{1}{2}} = t^{2-\frac{\nu}{2}},$$

$$\frac{dt^{2-\frac{\nu}{2}}}{dV} = \frac{dt^{2-\frac{\nu}{2}}}{dt} \sqrt{f(t)} = \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) t^{1-\frac{\nu}{2}} \sqrt{f(t)},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t^{2-\frac{\nu}{2}}}{dV^2} &= \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{d}{dt} \left[t^{1-\frac{\nu}{2}} \sqrt{f(t)} \right] \sqrt{f(t)} \\ &= \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \left[\frac{1}{2} t^{1-\frac{\nu}{2}} f'(t) + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) t^{-\frac{\nu}{2}} f(t) \right] \end{aligned}$$

et enfin

$$\frac{\alpha^{\frac{3}{2}} d^2 \alpha^{\frac{1}{2}}}{dV^2} = \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) \left[\frac{1}{2} t^{7-2\nu} f'(t) + \frac{1}{2} (2 - \nu) t^{6-2\nu} f(t) \right],$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{\alpha^{\frac{3}{2}} d^2 \alpha^{\frac{1}{2}}}{dV^2} = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\nu}{2}\right) t^{5-\nu} \frac{d}{dt} [t^{2-\nu} f(t)].$$

Or $f(t)$ est de degré $2\nu - 4$; posons

$$f(t) = t^{2\nu-4} + \alpha t^{2\nu-5} + \beta t^{2\nu-6} + \dots;$$

on aura

$$\begin{aligned} t^{-\nu+5} \frac{d}{dt} [t^{2-\nu} (t^{2\nu-4} + \alpha t^{2\nu-5} + \beta t^{2\nu-6} + \dots)] &= t^{-\nu+5} \frac{d}{dt} (t^{\nu-2} + \alpha t^{\nu-3} + \dots) \\ &= (\nu - 2) t^2 + (\nu - 3) \alpha t + \dots, \end{aligned}$$

de sorte que

$$A = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\nu}{2} \right) (\nu - 2), \quad B = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\nu}{2} \right) (\nu - 3) \alpha,$$

où

$$-\alpha = \Sigma(a + a') + \Sigma b + \Sigma c + 2\Sigma e;$$

on voit que les coefficients A et B sont réels. En s'appuyant sur ce qui a été dit à la fin du § 32, on vérifie que tous les coefficients de P(t) doivent être réels.

37. *Modification à apporter dans le cas où quelque constante a, a', b, ... est infinie.* — Supposons par exemple qu'une des quantités e soit infinie, et soit

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\chi(t)}};$$

on veut exprimer, par exemple, que, pour $t = \infty$,

$$\frac{dU}{d \log t} = \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}}.$$

On posera $t = \frac{1}{t'}$; on transformera ainsi le second membre, qui deviendra, en observant que $\chi(t)$ est du degré ν , φ du degré $\nu - 4$,

$$\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\chi(t)}} = \frac{\sqrt{t'^{4-\nu} \varphi_1(t')}}{\sqrt{t'^{4-\nu} \chi_1(t')}} = - \frac{t'^2 dU}{dt'}.$$

Ensuite

$$\frac{dU}{d \log t'} = t' \frac{dU}{dt'};$$

done

$$t' \frac{dU}{dt'} = - t'^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\varphi_1(t')}}{\sqrt{\chi_1(t')}},$$

et l'on fera $t' = 0$. Pour que le second membre puisse être fini, il sera nécessaire, dans ce cas, que $\sqrt{\chi_1(t')}$ contienne t' en facteur.

On opérerait d'une manière analogue si quelque autre constante était infinie.

APPLICATIONS.

I. — Surface minima contenant deux droites non situées dans le même plan.

38. On sait depuis longtemps que l'hélicoïde gauche à plan directeur remplit les conditions demandées. Riemann, dans son Mémoire, indique cette seule solution. M. Serret a prouvé qu'on pouvait trouver d'autres solutions de la question. Nous avons trouvé plus haut que, si l'on choisit convenablement les axes, on a

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \log \mu + i \sum u_n \mu^{\frac{n}{\alpha}}, \\ Z' &= \frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \log \mu' - i \sum u_n \mu'^{\frac{n}{\alpha}}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\sigma = \int \mu dZ - \int \frac{1}{\mu'} dZ'$$

et l'équation conjuguée.

Remplaçant dZ et dZ' par leurs valeurs tirées des équations précédentes, on obtient

$$\sigma = \xi + \eta i = -\frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \mu + i \sum u_n \frac{n}{n+\alpha} \mu^{\frac{n}{\alpha}+1} + \frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \frac{1}{\mu'} + i \sum u_n \frac{n}{n-\alpha} \mu'^{\frac{n}{\alpha}-1},$$

et par suite

$$\xi - \eta i = \frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \mu' - i \sum u_n \frac{n}{n+\alpha} \mu'^{\frac{n}{\alpha}+1} - \frac{\Lambda i}{2\alpha\pi} \frac{1}{\mu} - i \sum u_n \frac{n}{n-\alpha} \mu^{\frac{n}{\alpha}-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{\Lambda i}{4\alpha\pi} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\Lambda i}{4\alpha\pi} \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) + \frac{i}{2} \sum u_n \frac{n}{n+\alpha} \left(\mu^{\frac{n}{\alpha}+1} - \mu'^{\frac{n}{\alpha}+1} \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum u_n \frac{n}{n-\alpha} \left(\mu'^{\frac{n}{\alpha}-1} - \mu^{\frac{n}{\alpha}-1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\Lambda}{4\alpha\pi} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) - \frac{\Lambda}{4\alpha\pi} \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) + \frac{1}{2} \sum u_n \frac{n}{n+\alpha} \left(\mu^{\frac{n}{\alpha}+1} + \mu'^{\frac{n}{\alpha}+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum u_n \frac{n}{n-\alpha} \left(\mu'^{\frac{n}{\alpha}-1} + \mu^{\frac{n}{\alpha}-1} \right), \end{aligned}$$

avec

$$\zeta = -\frac{Ai}{2\alpha\pi} \log \frac{\mu'}{\mu} + i \sum u_n \left(\mu^{\frac{n}{2}} - \mu'^{\frac{n}{2}} \right).$$

Telle est la solution la plus générale.

Si l'on suppose $u_n = 0$ quelle que soit la valeur de n , on a

$$\zeta = \frac{Ai}{2\alpha\pi} \log \frac{\mu'}{\mu} = \frac{Ax}{2\alpha\pi},$$

$$\xi = -\frac{Ai}{4\alpha\pi} (\mu - \mu') \left(1 - \frac{1}{\mu\mu'} \right),$$

$$\eta = -\frac{Ai}{4\alpha\pi} (\mu + \mu') \left(1 - \frac{1}{\mu\mu'} \right),$$

d'où

$$\frac{\eta}{\xi} = \tan x,$$

et par suite

$$\frac{\eta}{\xi} = \tan \frac{2\alpha\pi}{A} \zeta,$$

équation de l'hélicoïde gauche à plan directeur.

II. — Surface minima contenant trois droites non parallèles.

39. Soient A, B, C les plus courtes distances respectives de ces droites, et $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ les angles qu'elles font entre elles deux à deux.

Nous choisirons pour les valeurs de t correspondant aux secteurs infinis $0, \infty, 1$, et nous poserons

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{t(t-1)}.$$

Le polynôme $t(t-1)$ sera regardé comme un polynôme du troisième degré ayant une racine infinie; on a donc $\nu = 6$, et, par suite, $\varphi(t)$ doit être du degré $\nu - 4 = 2$.

Les coefficients de $\varphi(t)$ doivent être déterminés de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \text{Pour } t=0 \dots \dots \frac{dU}{d \log t} &= \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}, \\ \text{» } t=\infty \dots \dots \frac{dU}{d \log t} &= \sqrt{\frac{B\beta}{2\pi}}, \\ \text{» } t=1 \dots \dots \frac{dU}{d \log(t-1)} &= \sqrt{\frac{C\gamma}{2\pi}}. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(t) = Lt^2 + Mt + N;$$

on aura

$$\frac{dU}{d \log t} = \frac{t\sqrt{Lt^2 + Mt + N}}{t(t-1)}.$$

Pour $t=0$, cette expression se réduit à \sqrt{N} . Donc on doit avoir

$$N = \frac{A\alpha}{2\pi}.$$

Pour $t=1$,

$$\frac{dU}{d \log(t-1)} = \sqrt{L+M+N};$$

on posera

$$\sqrt{L+M+N} = \frac{C\gamma}{2\pi}.$$

Enfin, pour $t=\infty$,

$$\frac{dU}{d \log t} = \sqrt{L};$$

donc

$$L = \frac{B\beta}{2\pi},$$

de sorte que

$$(55) \quad \varphi(t) = \frac{A\alpha}{2\pi}(1-t) + \frac{B\beta}{2\pi}t(t-1) + \frac{C\gamma}{2\pi}t.$$

Il s'agit maintenant de trouver une fonction V telle que $\frac{1}{k_1} \frac{d^2 k_1}{dv^2}$ n'admette pas de discontinuité autrement que pour $t=0, \infty, 1$. On

peut prendre la fonction V déterminée par l'équation

$$\frac{dV}{dt} = \varphi(t).$$

Calculons les valeurs de k_1 pour $t = 0, \infty, 1$.

On a

$$k = \sqrt{\frac{dV}{d\mu}} = \sqrt{\frac{dV}{dt}} \sqrt{\frac{dt}{d\mu}}.$$

Pour $t = 0$ et $t = 1$, la quantité $\sqrt{\frac{dV}{dt}}$ est finie et différente de 0; il n'y a à considérer que $\sqrt{\frac{dt}{d\mu}}$. Or le point $t = 0$ est un point anguleux du contour; les tangentes y font un angle égal à $\alpha\pi$; donc, dans le voisinage de ce point, on a

$$\mu - \mu_0 = t^\alpha (A + \varepsilon),$$

ε s'annulant avec t . La dérivée $\frac{d\mu}{dt}$ contient $t^{\alpha-1}$ en facteur, et, par suite, $\sqrt{\frac{d\mu}{dt}} t^{-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}}$ est fini pour $t = 0$, ce qui revient à dire que le produit

$$\sqrt{\frac{dt}{d\mu}} t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}}$$
 est fini et différent de zéro pour $t = 0$;

donc

$$t^{-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}} k_1 \text{ est fini et différent de zéro pour } t = 0;$$

de même,

$$(1-t)^{-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}} k_1 \text{ est fini et différent de zéro pour } t = 1.$$

Considérons maintenant le point $t = \infty$. Il faut remarquer que, pour $t = \infty$, $\sqrt{\frac{dV}{dt}}$ est infini d'ordre $\frac{1}{2}$. Le raisonnement est le même que le précédent, et, en tenant compte du facteur $\sqrt{\frac{dV}{dt}}$, on voit que

$$t^{-\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}} k_1 \text{ est fini et différent de zéro pour } t = \infty.$$

On voit en outre que k_2 étant égal à μk_1 , comme μ est un infiniment

petit d'ordre α pour $t = 0$,

$t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}k_2$ est fini et différent de zéro pour $t = 0$,

et, de même,

$(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}k_2$ est fini et différent de zéro pour $t = 1$,

$t^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2}}k_2$ » » » » $t = \infty$.

Cela posé, k_1 et k_2 sont deux intégrales particulières de l'équation différentielle linéaire du second ordre (51) que nous savons former. L'intégrale générale est de la forme $c_1k_1 + c_2k_2$; mais k_1 et k_2 ont trois points singuliers $t = 0, \infty, 1$; il en est de même de l'intégrale générale, et, d'après ce qui précède, en se conformant aux notations employées dans le Mémoire de Riemann sur les fonctions P ⁽¹⁾, on voit que l'intégrale générale k de l'équation du second ordre peut être représentée par la formule

$$(56) \quad k = Q \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, & -\frac{3}{2} - \frac{\beta}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}, & -\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2}, & \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \end{matrix} t \right).$$

La somme

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{\beta}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = -1,$$

tandis que, dans une fonction P, cette somme d'exposants est égale à $+1$. En outre, les différences α, β, γ sont toutes inférieures à 1 et, par suite, ne peuvent être des nombres entiers; il en est de même pour les fonctions P.

k_1 correspond aux exposants de la ligne supérieure, k_2 à ceux de l'autre ligne.

(1) Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen.

On peut mettre k sous la forme suivante :

$$(57) \quad k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} Q \left(\begin{matrix} 0, & -\frac{\alpha-\beta-\gamma-1}{2}, & 0 \\ \alpha, & -\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{2}, & \gamma \end{matrix} \middle| t \right).$$

Considérons la fonction P correspondante, savoir

$$\sigma = P \left(\begin{matrix} 0, & -\frac{\alpha-\beta-\gamma+1}{2}, & 0 \\ \alpha, & -\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}, & \gamma \end{matrix} \middle| t \right).$$

On peut exprimer Q en fonction de σ et de $\frac{d\sigma}{dt}$. Pour cela, on pose

$$(58) \quad k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} \left[(a+bt)\sigma + ct(1-t) \frac{d\sigma}{dt} \right],$$

a, b, c étant des coefficients indéterminés.

On sait que

$$k_1 \frac{dk_2}{dV} - k_2 \frac{dk_1}{dV} = 1,$$

c'est-à-dire

$$k_1 \frac{dk_2}{dt} - k_2 \frac{dk_1}{dt} = \frac{dV}{dt} = \varphi(t).$$

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} = (u, v),$$

de sorte que

$$(k_1, k_2) = \varphi(t).$$

Nous désignerons encore par σ_1 et σ_2 les valeurs de σ qui correspondent aux valeurs particulières k_1, k_2 de l'intégrale générale.

Cela posé, la fonction

$$z = P \left(\begin{matrix} \alpha, & \beta, & 0 \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{matrix} \middle| t \right)$$

satisfait à l'équation

$$(1-t) \frac{d^2 z}{(d \log t)^2} - [\alpha + \alpha' + t(\beta + \beta')] \frac{dz}{d \log t} + (\alpha \alpha' - \beta \beta' t) z = 0.$$

Or,

$$\frac{dz}{d \log t} = t \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d^2 z}{(d \log t)^2} = t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + t \frac{dz}{dt};$$

en substituant dans l'équation précédente, elle devient

$$t^2(1-t) \frac{d^2 z}{dt^2} - [\alpha + \alpha' - 1 + t(\beta + \beta' + 1)] t \frac{dz}{dt} + (\alpha \alpha' - \beta \beta' t) z = 0.$$

Pour appliquer ce résultat à la fonction

$$\sigma = P \left(\begin{matrix} 0, & -\frac{\alpha - \beta - \gamma + 1}{2}, & 0 \\ \alpha, & -\frac{\alpha + \beta - \gamma + 1}{2}, & \gamma \end{matrix} \right),$$

il suffit de remplacer $\alpha + \alpha'$ par α , $\alpha \alpha'$ par 0, $\beta + \beta'$ par $1 - \alpha - \gamma$ et $\beta \beta'$ par $\frac{(1 - \alpha - \gamma)^2 - \beta^2}{4}$; alors t est en facteur, et, après l'avoir supprimé, on trouve

$$t(1-t) \frac{d^2 \sigma}{dt^2} - [\alpha + t(1 - \alpha - \gamma) - (1-t)] \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\beta^2 - (1 - \alpha - \gamma)^2}{4} \sigma = 0.$$

On voit ainsi que $t(1-t) \frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ s'exprime linéairement en fonction de $\frac{d\sigma}{dt}$ et de σ .

Pour simplifier les calculs, faisons

$$u = t^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}} (t - 1)^{\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}},$$

de sorte que

$$k_1 = u(a + bt) \sigma_1 + u.ct(1-t) \frac{d\sigma_1}{dt}.$$

En prenant la dérivée par rapport à t , en ayant soin de remplacer $t(1-t) \frac{d^2 \sigma}{dt^2}$ par son expression en σ et $\frac{d\sigma}{dt}$, et en faisant le même cal-

cul pour k_2 , on pourra former $(k_1, k_2) = \varphi(t)$; on trouve ainsi

$$\varphi(t) = u^2(\sigma_1, \sigma_2) F(t),$$

où

$$F(t) = t(1-t) \left\{ -bc + \frac{c^2}{4} [\beta^2 - (1-\alpha-\gamma)^2] \right\} \\ + (a+bt)^2 + (a+bt)c[\alpha(1-t) - \gamma t],$$

ou bien, par une transformation facile,

$$F(t) = a(a+c\alpha)(1-t) + (a+b)(a+b-c\gamma)t \\ - t(1-t) \left(b - \frac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2} c \right) \left(b - \frac{\alpha-\beta+\gamma-1}{2} c \right).$$

Or on sait (*voir* le Mémoire sur les fonctions P) que l'expression

$$t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma} \left(\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dt} \right)$$

est une constante différente de zéro; on peut évidemment s'arranger de manière qu'elle soit égale à 1; alors on aura

$$\varphi(t) = F(t).$$

En identifiant $\varphi(t)$ et $F(t)$, on a, pour déterminer a, b, c , les conditions suivantes :

$$a(a+c\alpha) = \frac{A\alpha}{2\pi}, \\ (a+b)(a+b-c\gamma) = \frac{C\gamma}{2\pi}, \\ \left(b - \frac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2} c \right) \left(b - \frac{\alpha-\beta+\gamma-1}{2} c \right) = \frac{B\beta}{2\pi}.$$

Le premier membre de chacune de ces équations est un produit de deux facteurs, les différences de ces facteurs étant respectivement $c\alpha, c\gamma, c\beta$; prenons leurs demi-sommes pour inconnues auxiliaires et posons

$$a + \frac{c}{2}\alpha = p,$$

$$b - (\alpha + \gamma - 1) \frac{c}{2} = q,$$

$$a + b - \gamma \frac{c}{2} = -r,$$

d'où

$$p + q + r = \frac{c}{2}.$$

Les équations de condition précédentes prennent alors une forme très symétrique :

$$(59) \quad \begin{cases} p^2 - \alpha^2(p + q + r)^2 = \frac{A\alpha}{2\pi}, \\ q^2 - \beta^2(p + q + r)^2 = \frac{B\beta}{2\pi}, \\ r^2 - \gamma^2(p + q + r)^2 = \frac{C\gamma}{2\pi}. \end{cases}$$

Si l'on prend $\frac{c}{2}$ pour inconnue auxiliaire s , on peut écrire

$$\frac{p^2 - \frac{A\alpha}{2\pi}}{\alpha^2} = \frac{q^2 - \frac{B\beta}{2\pi}}{\beta^2} = \frac{r^2 - \frac{C\gamma}{2\pi}}{\gamma^2} = s^2,$$

d'où

$$p = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi} + \alpha^2 s^2}, \quad q = \sqrt{\frac{B\beta}{2\pi} + \beta^2 s^2}, \quad r = \sqrt{\frac{C\gamma}{2\pi} + \gamma^2 s^2},$$

et s satisfait à l'équation

$$\sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi} + \alpha^2 s^2} + \sqrt{\frac{B\beta}{2\pi} + \beta^2 s^2} + \sqrt{\frac{C\gamma}{2\pi} + \gamma^2 s^2} = s.$$

40. On peut exprimer plus simplement l'intégrale générale k à l'aide de la fonction

$$\lambda = P\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} t\right).$$

La formule

$$t^2(1-t)^2 P\left(\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'} t\right) = P\left(\frac{\alpha + \delta}{\alpha' + \delta}, \frac{\beta - \delta - \varepsilon}{\beta' - \delta - \varepsilon}, \frac{\gamma + \varepsilon}{\gamma' + \varepsilon} t\right)$$

donne, en supposant les constantes convenablement choisies,

$$\sigma = \lambda t^{\frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} t^{\frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}} + \lambda \left[\frac{\alpha}{2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-t)^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}} - \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right) t^{\frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{\gamma}{2}-\frac{3}{2}} \right];$$

on en tire

$$k = t^{\frac{1}{2}} \left\{ \lambda \left[a + bt + \frac{c\alpha}{2} (1-t) + \frac{c}{2} (\gamma-1)t \right] + ct(1-t) \frac{d\lambda}{dt} \right\}.$$

Le coefficient de λ peut se mettre sous la forme

$$a + \frac{c\alpha}{2} + \left[b - \frac{c(\alpha + \gamma - 1)}{2} \right] t = p + qt,$$

de sorte que l'on a

$$(60) \quad k = t^{\frac{1}{2}} \left[(p + qt) \lambda + ct(1-t) \frac{d\lambda}{dt} \right].$$

Les valeurs des constantes qui entrent dans l'expression de λ doivent être choisies de telle sorte que l'on ait

$$t^{1-\alpha} (1-t)^{1-\gamma} (\sigma_1, \sigma_2) = 1.$$

Or,

$$(\sigma_1, \sigma_2) = t^\alpha (1-t)^{\gamma-1} (\lambda_1, \lambda_2);$$

par suite, on doit avoir

$$t(\lambda_1, \lambda_2) = 1,$$

c'est-à-dire

$$(61) \quad \lambda_1 \frac{d\lambda_2}{d \log t} - \lambda_2 \frac{d\lambda_1}{d \log t} = 1.$$

41. Application. — Supposons les droites données parallèles aux axes de coordonnées; elles font alors entre elles des angles égaux à 90° , et, par suite, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$.

Cherchons, dans cette hypothèse, la valeur de λ_1 .

On a, dans ce cas,

$$\lambda = P \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{3}{4} \end{pmatrix} t = \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} P \begin{pmatrix} 0, & -\frac{1}{4}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix} t,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \sigma.$$

La fonction

$$\sigma = P \begin{pmatrix} 0, & -\frac{1}{4}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix} t$$

satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$t(1-t) \frac{d^2 \sigma}{dt^2} - \frac{2t-1}{2} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{16} = 0.$$

Cherchons une solution particulière qui, pour $t = \infty$, soit infinie d'ordre $\frac{1}{4}$ et reste finie pour $t = 0$, $t = 1$, qui sont des points de ramification. La fonction

$$\sigma_1 = H \sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}},$$

où H est une constante, satisfait à ces conditions, car on a

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dt} &= \frac{\sigma_1}{4} (t^2 - t)^{-\frac{1}{2}} H, \\ \frac{d^2 \sigma_1}{dt^2} &= -\frac{\sigma_1}{8} (t^2 - t)^{-\frac{3}{2}} H + \frac{\sigma_1}{16} (t^2 - t)^{-\frac{1}{2}} H, \end{aligned}$$

de sorte qu'elle vérifie l'équation différentielle.

On a donc

$$\lambda_1 = \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}} H = H \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \sigma_1;$$

on en tire

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = H \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sigma_1}{4} t^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} + H \sigma_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

On voit ensuite que la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 + (t-1)^2}} = \sqrt{t^2 - (t-1)^2}^{\frac{1}{2}}$$

satisfait aussi à l'équation différentielle en σ ; or, en posant

$$\mu = K \sqrt{t^2 - (t-1)^2}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} = K \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sigma_1},$$

on peut déterminer K et H de manière à satisfaire à l'équation

$$t \left(\lambda_1 \frac{d\mu}{dt} - \mu \frac{d\lambda_1}{dt} \right) = 1.$$

En effet, on trouve

$$\frac{d\mu}{dt} = -K \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4\sigma_1} t^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{-\frac{1}{2}} + K \frac{1}{\sigma_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Donc on a identiquement

$$t \left(\lambda_1 \frac{d\mu}{d \log t} - \mu \frac{d\lambda_1}{d \log t} \right) = -\frac{HK}{2}.$$

Si donc on fait $-\frac{HK}{2} = 1$ ou $H = \sqrt{2}$, $K = -\sqrt{2}$, on peut poser

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^2 + (t-1)^2}^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{2} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^2 - (t-1)^2}^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$(62) \quad \begin{cases} k_1 = \sqrt{2} t^{\frac{1}{4}} (t-1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^2 + (t-1)^2}^{\frac{1}{2}} \left[p + qt - \frac{c}{4} - \frac{c}{4} \sqrt{t(t-1)} \right], \\ k_2 = -\sqrt{2} t^{\frac{1}{4}} (t-1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^2 - (t-1)^2}^{\frac{1}{2}} \left[p + qt - \frac{c}{4} + \frac{c}{4} \sqrt{t(t-1)} \right]. \end{cases}$$

Cela fait, on a trouvé (33)

$$dZ = -ik_1 k_2 \left(\frac{dU}{dV} \right)^2 dV.$$

Or

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{t(t-1)}, \quad \frac{dV}{dt} = \varphi(t);$$

donc

$$dZ = -ik_1 k_2 \frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

et ensuite

$$\begin{aligned} dX &= -\frac{i}{2} (k_2^2 - k_1^2) \frac{dt}{t^2(1-t)^2}, \\ i dY &= -\frac{i}{2} (k_2^2 + k_1^2) \frac{dt}{t^2(1-t)^2}. \end{aligned}$$

Calcul de Z. — On a

$$k_1 k_2 = -2t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\frac{1}{2}} \left[\left(p + qt - \frac{c}{4} \right)^2 - \frac{c^2}{16} t(t-1) \right],$$

par suite

$$i dZ = -\frac{2dt}{t^{\frac{3}{2}}(t-1)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(p - \frac{c}{4} + qt \right)^2 - \frac{c^2}{16} t(t-1) \right].$$

On trouve sans difficulté

$$\begin{aligned} iZ &= \left[4 \left(p - \frac{c}{4} \right)^2 + 8q \left(p - \frac{c}{4} \right) + 4q^2 \right] \sqrt{\frac{t}{t-1}} \\ &\quad + 4 \left(p - \frac{c}{4} \right)^2 \sqrt{\frac{t-1}{t}} + \left(\frac{c^2}{8} - 2q^2 \right) \log \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}}. \end{aligned}$$

Mais, à cause de la relation $\frac{c}{2} = p + q + r$, on peut mettre l'expression précédente sous la forme

$$(63) \quad \begin{cases} iZ = (p + q - r)^2 \sqrt{\frac{t}{t-1}} + (-p + q + r)^2 \sqrt{\frac{t-1}{t}} \\ \quad + \frac{1}{2} (p + 3q + r) (p - q + r) \log \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}}. \end{cases}$$

Calcul de X. — On trouve

$$h_2^2 - h_1^2 = 4t(t-1) \frac{c}{2} \left(p - \frac{c}{4} + qt \right) - 4t^{\frac{1}{2}}(t-1) \left[\left(p - \frac{c}{4} + qt \right)^2 + \frac{c^2}{16} t(t-1) \right],$$

et, en substituant dans l'expression de dX ,

$$\begin{aligned} i dX = & \left(p - \frac{c}{4} \right) (c - 4q) \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} + q(c - 2q) \frac{\sqrt{t} dt}{t-1} \\ & - 2 \left(p - \frac{c}{4} \right)^2 \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}(t-1)} - \frac{c^2}{32} \frac{dt}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$(64) \quad \begin{cases} iX = -(p-q+r)^2 \sqrt{t} - (-p+q+r)^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \\ \quad - \frac{1}{2} (p+q-r)(p+q+3r) \log \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}. \end{cases}$$

Calcul de Y. — On a

$$\begin{aligned} \frac{h_2^2 + h_1^2}{2} = & 2t(t-1)^{\frac{1}{2}} \left(p - \frac{c}{4} + qt \right)^2 + \frac{c^2}{8} t^2 (t-1)^{\frac{3}{2}} \\ & - ct(t-1)^{\frac{3}{2}} - ct(t-1)^{\frac{3}{2}} \left(p - \frac{c}{4} + qt \right), \end{aligned}$$

d'où, substituant et intégrant,

$$(65) \quad \begin{cases} iY = (p-q+r)^2 \sqrt{1-t} + (p+q-r)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t}} \\ \quad + \frac{1}{2} (-p+q+r)(3p+q+r) \log \frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}. \end{cases}$$

III. — Surface minima passant par trois droites dont deux se coupent, la troisième étant parallèle au plan des deux premières.

42. Prenons le plan des droites concourantes pour plan des $\xi\eta$, l'axe des ζ étant dirigé suivant le rayon passant par le point $\mu = \infty$. Les trois droites sont représentées par des arcs de grand cercle dont les plans se coupent suivant l'axe des ζ . Désignons par $\alpha\pi$ l'angle des deux grands cercles qui représentent les droites concourantes et par $-\beta\pi$, $\gamma\pi$ les angles que fait le troisième avec les deux premiers, de telle sorte que $\beta + \gamma = \alpha$. Il s'agit de choisir une variable indépendante t qui prenne des valeurs réelles quand on se déplace sur le contour. Si l'on désigne par b et c deux nombres réels, b étant par exemple plus petit que c , on peut s'arranger de manière qu'à toutes les valeurs réelles de t inférieures à b correspondent des points de la première droite, que pour $t = b$ on passe sur la troisième, c'est-à-dire celle qui est parallèle au plan des deux autres, et que de $t = b$ à $t = c$ on se déplace sur cette droite, enfin que de $t = c$ à $t = +\infty$ on se trouve sur la deuxième. Il suffit de poser

$$\mu = (t - b)^\beta (t - c)^\gamma;$$

μ sera infini pour t infini. Soient $t - b = \rho e^{\pi i}$, $t - c = \rho' e^{\pi i}$; on aura

$$\mu = \rho^\beta \rho'^\gamma e^{\pi i \alpha},$$

de sorte qu'à toutes les valeurs de t inférieures à b correspondent des points μ situés sur la droite $\eta = \xi \tan \alpha\pi$. Soient maintenant $t - b = \rho$, $t - c = \rho' e^{\pi i}$; on aura

$$\mu = \rho^\beta \rho'^\gamma e^{\pi i \gamma},$$

et le point μ décrira la droite $\eta = \xi \tan \gamma\pi$; enfin, si $t - b = \rho$, $t - c = \rho'$, le point μ décrira la droite $\eta = 0$; il suffit donc d'ajouter aux conditions précédemment imposées aux axes de coordonnées que l'axe des ξ correspond à l'une des droites et que l'autre fait avec $O\xi$ un angle égal à $\alpha\pi$.

On a ensuite

$$\frac{d\mu}{dt} = [\beta(t - c) + \gamma(t - b)] (t - b)^{\beta-1} (t - c)^{\gamma-1};$$

on voit que $\frac{d\mu}{dt}$ s'annule pour la valeur de t donnée par l'équation

$$t = \frac{c\beta + b\gamma}{\beta + \gamma} = a.$$

Or cette valeur de t est comprise entre b et c , et par conséquent correspond à un point de la troisième droite. Le point $t = a$ est, pour la variable μ , un point de rebroussement. Il résulte de là (30) que

$$\frac{dU}{dt} = \frac{C\sqrt{t-a}}{(t-b)(t-c)}.$$

Or, pour $t = b$ et $t = c$, $\frac{dU}{d \log(t-b)}$ et $\frac{dU}{d \log(t-c)}$ doivent prendre respectivement les valeurs $\sqrt{\frac{-A\beta}{2\pi}}$, $\sqrt{\frac{A\gamma}{2\pi}}$, A étant la plus courte distance de la troisième droite à chacune des deux premières. Par suite, on doit avoir

$$\frac{C\sqrt{b-a}}{b-c} = \sqrt{\frac{-A\beta}{2\pi}}, \quad \frac{C\sqrt{c-a}}{c-b} = \sqrt{\frac{A\gamma}{2\pi}},$$

ce qui donne

$$C = \frac{b-c}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\frac{-A\beta}{2\pi}}, \quad C = \frac{c-b}{\sqrt{c-a}} \sqrt{\frac{A\gamma}{2\pi}}.$$

Or

$$b-a = \frac{(b-c)\beta}{\beta+\gamma}, \quad c-a = \frac{(c-b)\gamma}{\beta+\gamma};$$

donc ces deux équations s'accordent à donner

$$C = \sqrt{\frac{(c-b)A(\beta+\gamma)}{2\pi}}$$

et, en prenant $c-b = \frac{2\pi}{A}$,

$$C = \sqrt{\beta+\gamma}.$$

On a ainsi

$$\frac{dU}{dt} = \sqrt{\beta+\gamma} \frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}}{(t-b)(t-c)},$$

$$\frac{d \log \mu}{dt} = \frac{(\beta+\gamma)(t-a)}{(t-b)(t-c)},$$

par suite

$$\frac{dU}{d \log \mu} = \frac{1}{\sqrt{(\beta + \gamma)(t - a)}}$$

et

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu = \frac{dt}{(t - b)(t - c)}$$

Par conséquent, on trouve immédiatement

$$\begin{aligned} \zeta &= -i \int \frac{dt}{(t - b)(t - c)} + i \int \frac{dt'}{(t' - b)(t' - c)}, \\ \xi &= -\frac{i}{2} \int \frac{(t - b)^\beta (t - c)^\gamma - (t - b)^{-\beta} (t - c)^{-\gamma}}{(t - b)(t - c)} dt + \frac{i}{2} \int \frac{(t' - b)^\beta (t' - c)^\gamma - (t' - b)^{-\beta} (t' - c)^{-\gamma}}{(t' - b)(t' - c)} dt', \\ \eta &= -\frac{i}{2} \int \frac{(t - b)^\beta (t - c)^\gamma + (t - b)^{-\beta} (t - c)^{-\gamma}}{(t - b)(t - c)} dt - \frac{i}{2} \int \frac{(t' - b)^\beta (t' - c)^\gamma + (t' - b)^{-\beta} (t' - c)^{-\gamma}}{(t' - b)(t' - c)} dt'. \end{aligned}$$

IV. — Surface minima passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

43. Le contour sphérique est un quadrilatère dont les angles sont $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$. En supposant que les sommets correspondent aux valeurs a , b , c , d de la variable t , on aura, d'après la théorie générale,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dt}{\sqrt{\Delta(t)}},$$

où

$$\Delta(t) = (t - a)(t - b)(t - c)(t - d).$$

Pour appliquer la méthode exposée au n° 34, il suffit de faire $\varphi(t) = 1$ et $\chi(t) = \Delta(t)$; on trouve alors que l'équation du second ordre en k est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{4}{k} \left[\Delta(t) \frac{d^2 k}{dt^2} + \frac{1}{2} \Delta'(t) \frac{dk}{dt} \right] \\ = \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\Delta'(a)}{t - a} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\Delta'(b)}{t - b} + \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\Delta'(c)}{t - c} + \left(\delta^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\Delta'(d)}{t - d} + h. \end{aligned}$$

Considérons, avec Riemann, le cas particulier où les côtés du quadrilatère gauche sont quatre arêtes d'un tétraèdre régulier; le quadrila-

tère sphérique correspondant est alors régulier et ses angles sont égaux à $\frac{2}{3}\pi$, de sorte qu'on doit faire $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{2}{3}$. Mais cette hypothèse ne simplifie pas beaucoup l'équation précédente, et, dans ce cas particulier, Riemann arrive à la solution par une autre voie.

Plaçons le pôle $\mu = 0$ au centre du quadrilatère sphérique et faisons passer le méridien origine par le milieu de l'un des côtés; on peut calculer la valeur de μ en chacun des quatre sommets. D'abord les arguments sont $\pm \frac{\pi}{4}$ et $\pm \frac{3\pi}{4}$, et les modules sont égaux; il suffit donc de considérer un de ces sommets, par exemple celui dont l'argument est égal à $\frac{\pi}{4}$. Mais l'arc qui va de l'origine au sommet est un côté d'un triangle rectangle isocèle dont les angles à la base sont égaux à $\frac{\pi}{3}$; donc, en désignant par c la longueur de cet arc, on a

$$\begin{aligned} \tan \frac{c}{2} &= \sqrt{\tan \left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ \right) \tan \left(\frac{C-B}{2} + 45^\circ \right)} \\ &= \sqrt{\tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{\tan \frac{\pi}{12}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Les valeurs de μ aux quatre sommets sont donc

$$\mu = \tan \frac{c}{2} e^{\pm \frac{\pi i}{4}} \quad \text{et} \quad \mu = \tan \frac{c}{2} e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}.$$

Les carrés de ces valeurs sont donnés par les formules

$$\mu^2 = \tan^2 \frac{c}{2} e^{\pm \frac{\pi i}{2}}, \quad \mu^2 = \tan^2 \frac{c}{2} e^{\pm \frac{3\pi i}{2}},$$

qui ne fournissent que deux valeurs distinctes :

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= -(2 - \sqrt{3})i, \\ \mu_2^2 &= +(2 - \sqrt{3})i. \end{aligned}$$

Si l'on calcule les inverses de ces valeurs, on trouve

$$\begin{aligned} \mu_1^{-2} &= (2 + \sqrt{3})i, \\ \mu_2^{-2} &= -(2 + \sqrt{3})i, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mu_1^2 + \mu_1^{-2} - 2i\sqrt{3} = 0,$$

$$\mu_2^2 + \mu_2^{-2} + 2i\sqrt{3} = 0.$$

Remarquons maintenant que, quand on tourne autour du point μ_1 , l'argument de $\mu - \mu_1$ éprouve une variation égale à $\frac{2}{3}\pi$; il en est de même de l'argument de $\mu - \mu_2$ quand on tourne autour de μ_2 . Pour cette raison, Riemann pose

$$\left(\frac{\mu^2 + \mu^{-2} - 2i\sqrt{3}}{\mu^2 + \mu^{-2} + 2i\sqrt{3}} \right)^3 = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right)^2,$$

et il en résultera que pour $\mu = \pm \mu_1$ on aura $t^2 = 1$, pour $\mu = \pm \mu_2$ on aura $t^2 = -1$, de sorte que les valeurs $1, -1, i, -i$ de t correspondent aux sommets.

Posons

$$\mu^2 + \mu^{-2} = 2\lambda, \quad \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = \omega \quad \text{et} \quad \omega^{\frac{2}{3}} = m;$$

on a

$$\frac{\lambda - i\sqrt{3}}{\lambda + i\sqrt{3}} = m,$$

d'où

$$\lambda = i\sqrt{3}(1 + 2m + 2m^2 + \dots),$$

et, par suite,

$$\mu^2 + \mu^{-2} = 2i\sqrt{3}(1 + 2m + 2m^2 + \dots).$$

Mais

$$\mu_1^2 + \mu_1^{-2} = 2i\sqrt{3};$$

donc

$$\mu^2 - \mu_1^2 + \mu^{-2} - \mu_1^{-2} = 4i\sqrt{3}(m + m^2 + \dots),$$

Or le premier membre peut s'écrire

$$(\mu^2 - \mu_1^2) \left(1 - \frac{1}{\mu_1^2 \mu^2} \right) = (\mu - \mu_1) \left(2\mu_1 - \frac{2}{\mu_1^3} + \varepsilon \right),$$

ε étant un infiniment petit, de sorte que, dans le voisinage μ_1 on a

$$\mu - \mu_1 = \Lambda m(1 + n),$$

Λ étant une constante et η un infiniment petit. Supposons que $t = 1$ corresponde à μ_1 ; alors on peut écrire

$$\mu - \mu_1 = \mathbf{H}(t-1)^{\frac{2}{3}}(1+\eta),$$

et, par suite, l'argument de $t-1$ éprouve une variation égale à $\pm\pi$ si l'on tourne autour de μ_1 .

On ferait un raisonnement analogue pour les autres sommets du quadrilatère. Pour les sommets correspondant à $t = \pm i$, on posera

$$\omega^{-\frac{2}{3}} = n,$$

et l'on partira de

$$\frac{\lambda + i\sqrt{3}}{\lambda - i\sqrt{3}} = n,$$

d'où

$$\lambda = -i\sqrt{3} \frac{1+n}{1-n} = -i\sqrt{3}(1+2n+2n^2+\dots),$$

et, comme $\mu_2^2 + \mu_2^{-2} = -2i\sqrt{3}$, la conclusion sera encore la même.

Il résulte de là que l'on aura, pour l'expression de $\frac{dU}{dt}$ en fonction de t ,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{C}{\sqrt{(t^2-1)(t^2+1)}}.$$

Il suffit, pour s'en assurer, de se rappeler le raisonnement fait au n° 30.

On peut de là tirer l'expression de $\left(\frac{dU}{d\log\mu}\right)^2$.

On a, en effet,

$$\left(\frac{dU}{d\log\mu}\right)^2 = \left(\frac{dU}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{d\lambda}{d\log\mu}\right)^2.$$

Mais

$$\frac{d\lambda}{d\log\mu} = 2\sqrt{\lambda^2-1};$$

donc

$$\left(\frac{dU}{d\log\mu}\right)^2 = 4(\lambda^2-1) \frac{C}{(t^2-1)(t^2+1)} \left(\frac{dt}{d\omega}\right) \left(\frac{d\omega}{d\lambda}\right)^2.$$

Or l'équation

$$\omega = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

donne

$$\left(\frac{dt}{d\omega}\right)^2 = \frac{(t^2 + 1)^4}{16t^2} = \frac{1}{(1 - \omega^2)(1 - \omega)^2};$$

on a ensuite

$$\omega^{\frac{2}{3}} = \frac{\lambda - \sqrt{-3}}{\lambda + \sqrt{-3}},$$

d'où

$$\left(\frac{d\omega}{d\lambda}\right)^2 = \frac{-27\omega^{\frac{2}{3}}}{(\lambda + \sqrt{-3})^4} = \frac{-3\omega^{\frac{2}{3}}(1 - \omega^{\frac{2}{3}})^4}{16},$$

puis

$$\lambda^2 - 1 = -\frac{3\left(1 + \omega^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(1 - \omega^{\frac{2}{3}}\right)^2}{\left(1 - \omega^{\frac{2}{3}}\right)^2} = -\frac{4\left(1 + \omega^{\frac{2}{3}} + \omega^{\frac{4}{3}}\right)}{\left(1 - \omega^{\frac{2}{3}}\right)^2} = -\frac{4(1 - \omega^2)}{\left(1 - \omega^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

En substituant et réduisant, il vient

$$\left(\frac{dU}{d\log\mu}\right)^2 = 3\left(\omega^{-\frac{1}{3}} - \omega^{\frac{1}{3}}\right).$$

Or

$$\lambda^2 + 3 = \frac{-12\omega^{\frac{2}{3}}}{\left(1 - \omega^{\frac{2}{3}}\right)^2},$$

de sorte que

$$\omega^{-\frac{1}{3}} - \omega^{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\sqrt{\lambda^2 + 3}} = \frac{C}{\sqrt{4\lambda^2 + 12}}.$$

Or, de $\mu^2 + \mu^{-2} = 2\lambda$ on tire

$$4\lambda^2 + 12 = \mu^4 + \mu^{-4} + 14,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{dU}{d\log\mu}\right)^2 = \frac{C}{\sqrt{\mu^4 + \mu^{-4} + 14}},$$

formule donnée par Riemann.

On peut exprimer les coordonnées ξ , η , ζ en fonction de la variable ω ; il suffit pour cela de chercher X , Y , Z .

Or on a

$$dZ = -i \left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 d \log \mu.$$

Mais

$$\left(\frac{dU}{d \log \mu} \right)^2 = \frac{C}{\sqrt{\lambda^2 + 3}},$$

$$d \log \mu = \frac{d\lambda}{2 \sqrt{\lambda^2 - 1}};$$

par suite,

$$dZ = C \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + 3)(\lambda^2 - 1)}}.$$

En prenant m pour variable indépendante, on trouve immédiatement

$$Z = C \int \frac{dm}{\sqrt{m(1+m+m^2)}}$$

ou, en désignant par α une des racines cubiques imaginaires de l'unité,

$$Z = C \int \frac{dm}{\sqrt{m(1-\alpha m)(1-\alpha^2 m)}}.$$

On a

$$\left(\mu - \frac{1}{\mu} \right)^2 = 2(\lambda - 1) = 4\alpha \frac{1 - \alpha m}{1 - m};$$

par conséquent,

$$X = C \alpha^2 \int \frac{dm}{\sqrt{m(1-m)(1-\alpha^2 m)}}.$$

On a encore

$$\left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)^2 = 2(\lambda + 1) = 4i^2 \alpha^2 \frac{1 - m \alpha^2}{1 - m},$$

et, par suite,

$$Y = C \alpha \int \frac{dm}{\sqrt{m(1-m)(1-\alpha m)}}.$$

La question est donc entièrement résolue, car on a, pour ξ, η, ζ ,

$$\begin{aligned}\zeta &= C \int \frac{dm}{\sqrt{m(1-\alpha m)(1-\alpha^2 m)}} + C' \int \frac{dm'}{\sqrt{m'(1-\alpha m')(1-\alpha^2 m')}}, \\ \xi &= C\alpha^2 \int \frac{dm}{\sqrt{m(1-m)(1-\alpha^2 m)}} + C'\alpha \int \frac{dm'}{\sqrt{m'(1-m')(1-\alpha m')}}, \\ \eta &= C\alpha \int \frac{dm}{\sqrt{m(1-m)(1-\alpha m)}} + C'\alpha^2 \int \frac{dm'}{\sqrt{m'(1-m')(1-\alpha^2 m')}},\end{aligned}$$

44. A la fin de son Mémoire, Riemann étudie la surface minima engendrée par un cercle mobile dont le plan reste toujours parallèle à un plan donné. J'ai repris cette question et j'indiquerai seulement les résultats auxquels je suis parvenu, en suivant la marche indiquée par M. O. Bonnet.

On trouve d'abord que le centre du cercle générateur doit décrire une courbe plane; en prenant le plan de cette courbe pour plan des $\xi\eta$, on a, pour déterminer les coordonnées d'un point de la surface, les équations

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{a} \left[H\zeta - \frac{\theta'(\zeta)}{\theta(\zeta)} \right] + h\mu(\zeta) \cos t, \\ \eta &= h\mu(\zeta) \sin t, \quad H = \frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)}.\end{aligned}$$

L'équation de la surface est la suivante :

$$\left[\xi - \frac{H}{a} \zeta + \frac{1}{a} \frac{\theta'(\zeta)}{\theta(\zeta)} \right]^2 + \eta^2 = h^2 \mu^2(\zeta),$$

a et h étant deux constantes. (Les notations sont celles de la *Théorie des fonctions elliptiques*, de MM. Briot et Bouquet, 2^e éd.)

En employant les variables x, y et en posant

$$x + iy = x_1, \quad x - iy = y_1,$$

on trouve

$$\xi = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sin x_1 dx_1}{\sqrt{C + ai \sin x_1}} + \frac{i}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sin y_1 dy_1}{\sqrt{C - ai \sin y_1}},$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx_1}{\sqrt{C + ai \sin x_1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dy_1}{\sqrt{C - ai \sin y_1}},$$

$$\eta = \frac{1}{a\sqrt{2}} (\sqrt{C + ai \sin x_1} + \sqrt{C - ai \sin y_1}).$$

En posant

$$\sin x_1 = \frac{m + \lambda}{1 + m\lambda}, \quad m = i \frac{C + \sqrt{a^2 + C^2}}{a} \quad \text{et} \quad \sin y_1 = \frac{-m + \mu}{1 - m\mu},$$

puis

$$\sqrt{\Lambda} = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - m^2\lambda^2)}, \quad \sqrt{M} = \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - m^2\mu^2)},$$

on trouve

$$4ahi\zeta = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\Lambda}} + \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{M}}.$$

On a sur chaque ligne de niveau

$$\frac{\lambda\sqrt{M} + \mu\sqrt{\Lambda}}{1 - m^2\lambda^2\mu^2} = \text{const.}$$

L'équation différentielle des lignes de courbure de la surface est la suivante :

$$\frac{dx_1}{\sqrt{C + ai \sin x_1}} = \pm \frac{idy_1}{\sqrt{C - ai \sin y_1}}.$$