ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUGO GYLDÉN

Sur la sommation des fonctions périodiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 203-238

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__203_0>

SUR LA

SOMMATION DES FONCTIONS PÉRIODIQUES[1],

PAR M. HUGO GYLDÉN,

Astronome de l'Académie royale des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Stockholm.

1. Si l'on donne un nombre fini de valeurs d'une fonction correspondant à des arguments qui croissent d'une quantité constante et finie, l'opération qui a pour but d'exprimer la somme de ces valeurs de la fonction au moyen d'une nouvelle fonction s'appelle *sommation de la fonction donnée*. Le résultat s'obtient par l'intégration d'une équation aux différences finies

$$y_s - y_{s-1} = F(s),$$

où $F(t)$ est la fonction donnée et y_s le résultat cherché; s désigne tou-

(1) C'est par suite de ses recherches sur le calcul des perturbations des comètes que l'habile auteur a été amené à étendre, d'une manière appropriée à l'objet proposé, la formule sommatoire de Maclaurin.

M. Baillaud, dans une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, a, d'autre part, exposé avec talent les principes des nouvelles méthodes de M. Gyldén.

Outre ce qui se rapporte à la sommation des fonctions, il faut signaler, dans le présent Mémoire, de nouveaux développements trigonométriques pour

$$\cos x\vartheta, \quad \sin x\vartheta \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq +\frac{\pi}{2}\right).$$

De tels développements méritent de fixer l'attention des géomètres et surtout des astronomes.

Après quelques notes ajoutées par le traducteur, dans le but de préciser ou d'étendre quelques-uns des points abordés dans le Mémoire, on trouvera deux additions de M. Gyldén; elles ont pour objet de régler la convergence de certains développements trigonométriques.

En remerciant vivement le savant astronome pour ces additions, je dois exprimer toute ma gratitude à M. Hermite, qui m'a donné toute facilité pour prendre connaissance du Mémoire.

Octave CALLANDREAU,
Aide-astronome à l'Observatoire.

jours un nombre entier, les valeurs de t étant choisies de telle sorte que la quantité constante dont croît l'argument soit représentée par 1.

Dans certains cas, par exemple lorsque $F(t)$ désigne une fonction algébrique rationnelle et entière, ou encore une fonction exponentielle ou trigonométrique d'une certaine nature, l'équation précédente peut s'intégrer rigoureusement. Si $F(t)$ est d'une autre nature, on trouve y_s au moyen d'un développement en série, comme celui qui est connu sous le nom de *formule sommatoire de Maclaurin*. Cette formule ne peut cependant être employée d'une manière générale, parce qu'elle appartient aux séries appelées *semi-convergentes*. Pour s'assurer que cette formule donne un résultat précis, il est nécessaire d'étudier ce que l'on appelle le *reste*. Mais veut-on employer ce reste seulement pour un tel critérium, il n'y a pas grand avantage, et, une fois évalué, on ne gagne pas grand'chose avec cette solution du problème sur la sommation directe des fonctions. Si l'on fait subir au reste une transformation qui le rende calculable numériquement, la formule de Maclaurin peut alors être employée en plusieurs circonstances là où, auparavant, elle était négligée et donnait des résultats illusoires. Cette transformation consiste à développer le reste en une série convergente; mais, bien qu'on arrive ainsi à trouver un résultat qui jouisse de toute la précision désirable, le nouveau développement est de telle nature, que son emploi est encore plus pénible.

Dans les recherches sur la théorie des perturbations, dont je me suis occupé depuis quelque temps, le problème ci-dessus paraît avoir un usage important. J'ai donc entrepris de rechercher si la formule de Maclaurin ne pourrait pas être remplacée par une autre plus convenable. Or, il paraît que cette formule est seulement un cas particulier d'un résultat plus général d'où l'on peut déduire plusieurs conséquences utiles dans diverses occasions.

Dans ces recherches, je me suis borné aux fonctions périodiques réelles et à quelques-unes qui s'y rattachent, parce que je les ai vues seulement se présenter dans les applications.

J'admets, comme point de départ, que $F(t)$ ainsi que ses dérivées puissent s'exprimer par des séries de la forme

$$(1) \qquad F(t) = M_0 + M_1 \cos(\psi + \mu t) + M_2 \cos 2(\psi + \mu t) + \ldots,$$

où ψ désigne un angle constant et μ un nombre incommensurable arbitraire. Nous mettons π à la place de l'unité pour l'accroissement de t, et nous avons

$$y_s - y_{s-1} = \mathrm{F}(s\pi),$$

ce qui donne, en posant $y_0 = \mathrm{F}(o)$,

$$y_s = \mathrm{F}(o) + \mathrm{F}(\pi) + \ldots + \mathrm{F}(s\pi). \tag{2}$$

On peut donner au problème une autre forme avantageuse dans les applications. Qu'on pose, en effet,

$$u = \varphi(\mu t),$$

en supposant que u soit une fonction périodique de μt, et

$$\mathrm{F}(t) = f(u),$$

puis

$$\begin{aligned} u_0 &= \varphi(o), \\ u_1 &= \varphi(\mu\pi), \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ u_s &= \varphi(s\mu\pi); \end{aligned}$$

alors

$$y_s = f(u_0) + f(u_1) + \ldots + f(u_s),$$

et notre problème consiste à exprimer y_s en fonction de u_s.

Nous mettons dans l'équation (2) les valeurs de $\mathrm{F}(o)$, $\mathrm{F}(\pi)$, ..., et nous obtenons, en partant de l'équation (1), c'est-à-dire

$$\mathrm{F}(t) = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 \cos(\psi + \mu t) + \mathrm{M}_2 \cos 2(\psi + \mu t) + \ldots,$$

$$\begin{aligned} y_s = (s+1)\mathrm{M}_0 &+ \mathrm{M}_1 \cos\psi(1 + \cos\mu\pi + \cos 2\mu\pi + \ldots + \cos s\mu\pi) \\ &- \mathrm{M}_1 \sin\psi(\sin\mu\pi + \sin 2\mu\pi + \ldots + \sin s\mu\pi) \\ &+ \mathrm{M}_2 \cos 2\psi(1 + \cos 2\mu\pi + \cos 4\mu\pi + \ldots + \cos 2s\mu\pi) \\ &- \mathrm{M}_2 \sin 2\psi(\sin 2\mu\pi + \sin 4\mu\pi + \ldots + \sin 2s\mu\pi) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Avec le secours des relations connues

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \cos n\mu\pi + \cos 2n\mu\pi + \ldots + \cos sn\mu\pi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(s + \frac{1}{2}\right)n\mu\pi}{\sin\frac{1}{2}n\mu\pi}, \\ \sin n\mu\pi + \sin 2n\mu\pi + \ldots + \sin sn\mu\pi &= \frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\left(s + \frac{1}{2}\right)n\mu\pi}{\sin\frac{1}{2}n\mu\pi}, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

on trouve, pour l'équation précédente,

$$(4)\left\{\begin{aligned} y_s = (s+1)\,\mathrm{M}_0 &+ \sum_1^\infty \mathrm{M}_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi\,\sin sn\mu\pi + \frac{1}{2}\cos sn\mu\pi\right)\cos n\psi \\ &- \sum_1^\infty \mathrm{M}_n\left(\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi - \frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi\,\cos sn\mu\pi + \frac{1}{2}\sin sn\mu\pi\right)\sin n\psi.\end{aligned}\right.$$

On pourrait maintenant songer à exprimer $s\mu\pi$ en fonction de u_s et substituer son expression dans l'équation (4), de sorte que le problème serait résolu. Mais, dans le cas où le développement de $\mathrm{F}(t)$ suivant les multiples de μt convergerait lentement, la solution deviendrait comme illusoire, ou du moins elle serait impraticable pour le calcul numérique, car, même si le résultat final ordonné suivant les multiples de u_s comme argument devait converger rapidement, les coefficients du développement seraient formés par des séries infinies dans lesquelles beaucoup de termes resteraient sensibles. Nous devons donc chercher à transformer la formule (4) de la manière la plus convenable pour notre objet, et nous allons représenter y_s avec une intégrale définie. Nous remarquons d'abord qu'une partie des termes de l'expression (4) peut être sommée aussitôt. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(0) &= \mathrm{M}_0 + \sum_1^\infty \mathrm{M}_n \cos n\psi,\\ \mathrm{F}(s\pi) &= \mathrm{M}_0 + \sum_1^\infty \mathrm{M}_n \cos n\psi \cos ns\mu\pi - \sum_1^\infty \mathrm{M}_n \sin n\psi \sin sn\mu\pi.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$z_s = y_s - \frac{1}{2}\mathrm{F}(0) - \frac{1}{2}\mathrm{F}(s\pi),$$

$$z_s = y_s - \frac{1}{2}f(u_0) - \frac{1}{2}f(u_s),$$

il vient

$$z_s = s\mathrm{M}_0 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \mathrm{M}_n \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi\,\sin n(s\mu\pi+\psi) - \sum_1^\infty \mathrm{M}_n \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi\,\sin n\psi;$$

mais, à cause de

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi[\sin n(s\mu\pi+\psi) - \sin n\psi] = s \quad \text{pour } n=0,$$

on peut aussi écrire cette équation

$$z_s = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \mathrm{M}_n \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi \sin n(\psi + s\mu\pi) - \frac{1}{2}\sum_0^\infty \mathrm{M}_n \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi \sin n\psi.$$

Si nous pouvons déterminer une fonction $\chi(t)$ de sorte que la condition

$$(5)\qquad \int_0^{s\pi} \cos n(\psi + \mu t)\,\chi(t)\,dt = \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi[\sin n(\psi + s\mu\pi) - \sin n\psi]$$

soit remplie, nous aurons aussitôt

$$z_s = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \mathrm{M}_n \int_0^{s\pi} \cos n(\psi + \mu t)\,\chi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{s\pi} \chi(t)\,dt \sum_0^\infty \mathrm{M}_n \cos n(\psi + \mu t),$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad z_s = \frac{1}{2}\int_0^{s\pi} \mathrm{F}(t)\,\chi(t)\,dt.$$

La difficulté consiste surtout à déterminer la fonction $\chi(t)$, et elle est résolue de suite si l'on substitue pour $\cot\frac{1}{2}n\mu\pi$, dans l'équation (5), le développement connu

$$\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n\mu} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 2^2} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 4^2} + \ldots\right].$$

On a, en effet, si m désigne un nombre entier,

$$(7)\qquad \int_0^{s\pi} \cos n(\psi + \mu t) \cos 2mt\,dt = \frac{n\mu}{(n\mu)^2 - (2m)^2}[\sin n(\psi + s\mu\pi) - \sin n\psi],$$

d'où il suit que la condition (5) est remplie si

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi}(1 + 2\cos 2t + 2\cos 4t + \ldots),$$

c'est-à-dire

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi}\lim \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t},$$

où lim signifie que le nombre entier k doit croître à l'infini.

Le résultat cherché, à savoir

$$z_s = \frac{1}{\pi} \lim \int_0^{s\pi} F(t) \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} dt,$$

n'a pas d'utilité immédiate pour notre but et ne donne rien de plus que la formule de Maclaurin.

Si l'on considère la voie qui a fourni ce résultat, on observe que tout dépend du développement employé pour $\cot\frac{1}{2}n\mu\pi$. La difficulté que nous avons à vaincre consiste donc à trouver quelque autre développement plus convergent pour cette fonction. Or on peut très-aisément en obtenir un, et il ne paraît pas qu'il ait été remarqué jusqu'ici.

De la formule connue

$$\cot\tfrac{1}{2}\pi x = \frac{2}{\pi x} \cdot \frac{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6^2}\right)\cdots}$$

résulte aussitôt, en désignant par i un nombre entier,

$$\frac{\cot\frac{1}{2}\pi x}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right]} = \frac{2}{\pi x} \frac{\left[1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(2i+3)^2}\right]\cdots}{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots}.$$

On décompose le second membre en fractions simples de même forme,

$$(8)\quad \frac{\cot\frac{1}{2}\pi x}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^3}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right]} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{X_0^{(i)}}{x} + \frac{2xX_1^{(i)}}{x^2-2^2} + \frac{2xX_2^{(i)}}{x^2-4^2} + \cdots\right],$$

et l'on trouve, pour les coefficients $X_n^{(i)}$, les valeurs suivantes :

$$X_n^{(1)} = -\frac{1^2}{(2n)^2-1^2},$$

$$X_n^{(2)} = \frac{1^2.3^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2]},$$

$$X_n^{(3)} = -\frac{1^2.3^2.5^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2][(2n)^2-5^2]}.$$

Si l'on pose

$$(9)\quad \begin{cases} \chi_i(t) = \dfrac{2}{\pi}[X_0^{(i)} + 2X_1^{(i)}\cos 2t + 2X_2^{(i)}\cos 4t + \ldots], \\ 1 - b_1^{(i)}x^2 + b_2^{(i)}x^4 - \ldots \pm b_i^{(i)}x^{2i} = \left(1 - \dfrac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{x^2}{(2i-1)^2}\right], \end{cases}$$

on a

$$b_1^{(1)} = 1,\quad b_1^{(2)} = \frac{10}{9},\quad b_2^{(2)} = \frac{1}{9},\quad b_1^{(3)} = \frac{259}{225},\quad b_2^{(3)} = \frac{7}{45},\quad b_3^{(3)} = \frac{1}{225},\quad \ldots.$$

Avec le secours des équations (7) et (8), on obtient la relation suivante :

$$\int_0^{s\pi} [\cos n(\psi + \mu t) - b_1^{(i)}(n\mu)^2 \cos n(\psi + \mu t) + \ldots \pm b_i^{(i)}(n\mu)^{2i}\cos n(\psi + \mu t)]\chi_i(t)\,dt$$
$$= \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi[\sin n(\psi + s\mu\pi) - \sin n\psi],$$

d'où résulte aussitôt la formule sommatoire

$$(10)\quad z_s = \frac{1}{2}\int_0^{s\pi}\left[F(t) + b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2} + b_2^{(i)}\frac{d^4F(t)}{dt^4} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right]\chi_i(t)\,dt.$$

2. Le développement de $\cot\frac{1}{2}\pi x$, sur lequel la formule (10) est fondée, peut être obtenu d'une autre manière, mais un peu plus longue. On peut donner à ce sujet de nouvelles expressions pour la fonction désignée par $\chi_i(t)$ dans le numéro précédent et quelques autres fonctions analogues.

Les résultats suivants se rapprochent de ceux que j'ai démontrés dans mon Mémoire : *Relations entre les sinus et cosinus d'angles irrationnels;* Helsingfors, 1867.

Si θ désigne un angle qui peut varier entre les limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, la fonction $\cos^{2i+1}\theta$, où i désigne un entier positif, peut s'exprimer au moyen de la série suivante :

$$C_0^{(i)} - 2C_2^{(i)}\cos 2\theta - 4C_4^{(i)}\cos 4\theta - \ldots.$$

On a

$$C_0^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2i+1}\theta\,d\theta$$

et

$$C_{2n}^{(i)} = -\frac{4}{2\pi}\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2n\theta \cos^{2i+1}\theta\, d\theta,$$

ou bien

$$C_0^{(i)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots 2i}{1.3.5\ldots(2i+1)},$$

$$C_{2n}^{(i)} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n}\sin\frac{2n+1}{2}\pi\,\frac{(-1)^i.1.2.3\ldots 2i(2i+1)}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]}.$$

En comparant ces valeurs avec celles que nous avons obtenues dans le numéro précédent pour les coefficients $X_n^{(i)}$, il vient

(11) $$\frac{C_{2n}^{(i)}}{C_0^{(i)}} = -\frac{1}{n}\sin\frac{2n+1}{2}\pi X_n^{(i+1)}.$$

On a ainsi

(12) $$\frac{1}{C_0^{(i)}}\cos^{2i+1}\theta = 1 - 2X_1^{(i+1)}\cos 2\theta + 2X_2^{(i+1)}\cos 4\theta - \ldots,$$

et, en tenant compte de l'équation (9),

(13) $$\sin^{2i+1} = \theta\frac{\pi}{2}C_0^{(i)}\chi_{i+1}(\theta) = \frac{2.4.6\ldots 2i}{1.3.5\ldots(2i+1)}\chi_{i+1}(\theta),$$

tant que

$$0 \leqq \theta \leqq \pi.$$

Comme l'équation précédente ne change pas si θ augmente d'un multiple de 2π, elle reste vraie pour toutes les valeurs de θ qui satisfont à la condition

$$2m\pi \leqq \theta \leqq (2m+1)\pi.$$

On a de même

(14) $$\sin^{2i+1}\theta = -\frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots(2i+1)}\chi_{i+1}(\theta),$$

tant que

$$(2m-1)\pi \leqq \theta \leqq 2m\pi.$$

Si maintenant on multiplie l'équation (12) par $d\vartheta$, et que l'on intègre, on obtient comme résultat

$$(15) \qquad \theta = \sum_1^\infty \beta_{2n}^{(i)} \sin 2n\theta + \frac{\pi}{2} \sum_0^i \alpha_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\theta,$$

où

$$\beta_{2n}^{(i)} = -\frac{(-1)^n}{n} X_n^{(i+1)} = \frac{C_{2n}^{(i)}}{C_0^{(i)}},$$

$$\alpha_{2n+1}^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2^{2i}} \frac{(2i+1)2i(2i-1)\ldots(i+n+2)}{1.2.3\ldots(i-n)}.$$

De même que l'équation (12), l'équation (15) est établie seulement pour les valeurs de θ qui ne dépassent pas les limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$.

On multiplie ensuite les deux membres de l'équation (15) par $\cos x\theta\, d\theta$, $\sin x\theta\, d\theta$, où x est une quantité arbitraire; on obtient, par l'intégration,

$$\begin{aligned}\int \theta \cos x\theta\, d\theta = C &- \cos x\theta \sum_1^\infty \frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \cos 2n\theta - \frac{\pi}{2} \cos x\theta \sum_0^i \frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \cos(2n+1)\theta \\ &- x \sin x\theta \sum_1^\infty \frac{\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \sin 2n\theta - \frac{\pi}{2} x \sin x\theta \sum_0^i \frac{\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \sin(2n+1)\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \theta \sin x\theta\, d\theta = C_1 &- \sin x\theta \sum_1^\infty \frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \cos 2n\theta - \frac{\pi}{2} \sin x\theta \sum_0^i \frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \cos(2n+1)\theta \\ &+ x \cos x\theta \sum_1^\infty \frac{\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \sin 2n\theta + \frac{\pi}{2} x \cos x\theta \sum_0^i \frac{\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \sin(2n+1)\theta,\end{aligned}$$

où nous désignons par C et C_1 les deux constantes introduites par les intégrations.

Nous multiplions la première de ces équations par $\cos x\theta$, la seconde par $\sin x\theta$, nous ajoutons les produits en ayant égard à la relation

$$\cos x\theta \int \theta \cos x\theta\, d\theta + \sin x\theta \int \theta \sin x\theta\, d\theta = \frac{1}{x^2},$$

il vient

$$(a) \qquad C \cos x\theta + C_1 \sin x\theta = \frac{1}{x^2} + \sum_1^\infty \frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2} \cos 2n\theta + \frac{\pi}{2} \sum_0^i \frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2} \cos(2n+1)\theta,$$

et, en différentiant par rapport à θ,

$$(b)\quad -x\mathrm{C}\sin x\theta + x\mathrm{C}_1\cos x\theta = -\sum_1^\infty \frac{(2n)^2\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2-x^2}\sin 2n\theta - \frac{\pi}{2}\sum_0^i \frac{(2n+1)^2\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2-x^2}\sin(2n+1)\theta.$$

En faisant $\theta = 0$ dans l'équation (b), on trouve

$$\mathrm{C}_1 = 0.$$

On donne ensuite à θ la valeur $\frac{\pi}{2}$, et l'on pose

$$\sum_0^i \frac{\alpha_{2n+1}^{(i)}}{1-\dfrac{x^2}{(2n+1)^2}}\sin\frac{2n+1}{2}\pi = \frac{1}{\varkappa\left(2i+1, x\dfrac{\pi}{2}\right)};$$

alors la même équation donne

$$\mathrm{C} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x\sin x\dfrac{\pi}{2}\,\varkappa\left(2i+1, x\dfrac{\pi}{2}\right)}.$$

Avec ces valeurs de C et C_1 on trouve finalement, pour l'équation (a),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \cos x\theta = x\frac{2}{\pi}\sin x\frac{\pi}{2}\,\varkappa\left(2i+1,\ x\frac{\pi}{2}\right)\Bigg[\frac{1}{x^2} + \sum_1^\infty \frac{2n\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2-x^2}\cos 2n\theta \\ + \frac{\pi}{2}\sum_0^i \frac{(2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2-x^2}\cos(2n+1)\theta\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

On trouve de même, pour l'équation (b) [on peut aussi différentier l'équation (16) par rapport à θ],

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \sin x\theta = \frac{2}{\pi}\sin x\frac{\pi}{2}\,\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\Bigg[\sum_1^\infty \frac{(2n)^2\beta_{2n}^{(i)}}{(2n)^2-x^2}\sin 2n\theta \\ + \frac{\pi}{2}\sum_0^i \frac{(2n+1)^2\alpha_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2-x^2}\sin(2n+1)\theta\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Les équations (16) et (17) correspondent aux équations (26) et (27) de mon travail : *Relations*, etc.

Ces dernières, écrites avec les notations adoptées, sont :

$$(18)\quad \cos x\theta = \cos x\frac{\pi}{2}\,\varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right)\left[1 + x^2\sum_0^\infty \frac{(2n+1)\,\beta_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2}\cos(2n+1)\theta - \sum_1^i \frac{2n\,\alpha_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2}\cos 2n\theta\right],$$

$$(19)\quad \sin x\theta = x\cos x\frac{\pi}{2}\,\varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right)\left[\sum_0^\infty \frac{(2n+1)^2\beta_{2n+1}^{(i)}}{(2n+1)^2 - x^2}\sin(2n+1)\theta - \sum_1^i \frac{(2n)^2\,\alpha_{2n}^{(i)}}{(2n)^2 - x^2}\sin 2n\theta\right].$$

Ces équations peuvent résulter de l'équation

$$\theta = \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(i)}\sin(2n+1)\theta - \sum_1^i \alpha_{2n}^{(i)}\sin 2n\theta,$$

absolument comme (16) et (17) résultent de l'équation (15). Une tout autre voie a été suivie dans le travail mentionné.

Si l'on compare les expressions de $\beta_{2n}^{(i)}$, $\beta_{2n+1}^{(i)}$, à savoir

$$\beta_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n}\cos n\pi\,\frac{(-1)^i.1^2.3^2\ldots(2i+1)^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]},$$

$$\beta_{2n+1}^{(i)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{2}\pi\,\frac{(-1)^i.2^2.4^2\ldots(2i)^2}{[(2n)^2-1^2][(2n)^2-3^2]\ldots[(2n)^2-(2i+1)^2]}\,[2n-(2i+1)],$$

on trouve la relation suivante :

$$\frac{\beta_{2n+1}^{(i)}}{\beta_{2n}^{(i)}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2n}{2n+1}\,[2n-(2i+1)]\,\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2i)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(2i+1)^2}.$$

On a de même les expressions

$$\alpha_{2n}^{(i)} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{2^{2i}}\,\frac{2i(2i-1)\ldots(i+n+1)}{1.2.3\ldots(i-n)}\,\frac{2.4.6\ldots2i}{1.3.5\ldots(2i-1)},$$

$$\alpha_{2n+1}^{(i)} = \frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{2^{2i}}\,\frac{(2i+1)\,2i\ldots(i+n+2)}{1.2.3\ldots(i-n)}\,\frac{1.3.5\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots2i},$$

d'où résulte l'expression simple

$$\frac{\alpha_{2n}^{(i)}}{\alpha_{2n+1}^{(i)}} = \frac{2n+1}{2n}\,(2n+2i+2)\,\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2i)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(2i+1)^2}.$$

La fonction que nous avons désignée par $\varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right)$ a enfin la définition suivante :

$$\varkappa\left(2i,\ x\frac{\pi}{2}\right)=\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i)^2}\right].$$

Si l'on pose $\theta=\frac{\pi}{2}$ dans l'équation (16), on obtient, en tenant compte des relations entre $\beta_{2n+1}^{(i)}$ et $X_n^{(i+1)}$,

$$\frac{\cot x\frac{\pi}{2}}{\varkappa\left(2i+1,x\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{x}+\frac{2x\,X_1^{(i+1)}}{x^2-2^2}+\frac{2x\,X_2^{(i+1)}}{x^2-4^2}+\ldots\right].$$

Ce développement doit être identique avec celui de l'équation (8), d'où

$$\varkappa\left(2i+1,x\frac{\pi}{2}\right)=\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right];$$

nous avons d'un autre côté

$$\varkappa\left(2i+1,x\frac{\pi}{2}\right)=\cfrac{1}{\cfrac{\alpha_1^{(i)}}{1-\cfrac{x^2}{1^2}}-\cfrac{\alpha_3^{(i)}}{1-\cfrac{x^2}{3^2}}+\ldots+\cfrac{\alpha_{(i)}^{2i+1}}{1-\cfrac{x^2}{(2i+1)^2}}}.$$

Comme manifestement $\varkappa\left(2i+1,x\frac{\pi}{2}\right)$ doit être une fonction synectique qui ne peut devenir infinie pour des valeurs finies de x, il est nécessaire, pour que l'identité en question soit vérifiée : 1° que les deux expressions indiquées pour $\varkappa\left(2i+1,x\frac{\pi}{2}\right)$ s'évanouissent en même temps; 2° que ces expressions ne soient pas différentes pour une valeur déterminée de x.

Si la fonction

$$\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}\right]$$

s'évanouit de la même manière que

$$\cfrac{1}{\cfrac{\alpha_1^{(i)}}{1-\cfrac{x^2}{1^2}}-\cfrac{\alpha_3^{(i)}}{1-\cfrac{x^2}{3^2}}+\ldots\pm\cfrac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{1-\cfrac{x^2}{(2i+1)^2}}},$$

on peut dire, d'une autre manière, que la fonction

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x}{(2i+1)^2}\right]}$$

et

$$\frac{\alpha_1^{(i)}}{1-\frac{x^2}{1^2}}-\frac{\alpha_3^{(i)}}{1-\frac{x^2}{3^2}}+\ldots\pm\frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}}$$

se comportent semblablement pour les valeurs infiniment grandes, et la réciproque est vraie.

Cette seconde forme nous permet de conclure aussitôt que les deux expressions de $\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)$ sont identiques, ou du moins ne peuvent différer que par un facteur constant. Ce facteur peut être déterminé en faisant $x=0$, et l'on voit qu'il ne peut être autre que 1, puisque l'équation (15) donne

$$1=\alpha_1^{(i)}-\alpha_3^{(i)}+\ldots\pm\alpha_{2i+1}^{(i)}.$$

Comme conséquence de l'identité démontrée, nous avons les expressions suivantes des coefficients $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_3^{(i)}$, $\alpha_5^{(i)}$, ... :

$$\alpha_1^{(i)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left[1-\frac{1}{(2i+1)^2}\right]},$$

$$\alpha_3^{(i)}=-\frac{1}{\left(1-\frac{3^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{3^2}{5^2}\right)\cdots\left[1-\frac{3^2}{(2i+1)^2}\right]},$$

$$\alpha_5^{(i)}=\frac{1}{\left(1-\frac{5^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{5^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{5^2}{7^2}\right)\cdots\left[1-\frac{5^2}{(2i+1)^2}\right]}.$$

3. La formule (10) peut subir une transformation très-importante dont nous allons parler.

Si nous rappelons le développement en série donné pour $\chi_i(t)$ et que nous posions, pour abréger,

$$T_s^{(i)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left[F(t)+b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2}+\ldots+b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right]\left(X_1^{(i)}\cos 2t+X_2^{(i)}\cos 4t+\ldots\right)dt,$$

il vient

$$z_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{s\pi}\left[F(t) + b_1^{(i)}\frac{d^2F(t)}{dt^2} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right]dt + T_s^{(i)}.$$

Notre transformation concerne seulement le terme $T_s^{(i)}$, pour lequel nous obtenons, à l'aide de l'intégration par partie,

$$\begin{aligned}T_s^{(i)} = \frac{2}{\pi}&\left\{\left[F(t) + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i}F(t)}{dt^{2i}}\right]\left(\frac{1}{2}X_1^{(i)}\sin 2t + \frac{1}{4}X_2^{(i)}\sin 4t + \ldots\right)\right\}_0^{s\pi}\\ &- \frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left[\frac{dF(t)}{dt} + b_1^{(i)}\frac{d^3F(t)}{dt^3} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+1}F(t)}{dt^{2i+1}}\right]\left(\frac{1}{2}X_1^{(i)}\sin 2t + \frac{1}{4}X_2^{(i)}\sin 4t + \ldots\right)dt.\end{aligned}$$

Nous répétons cette opération, en observant que $\sin 2t$, $\sin 4t$, ... s'évanouissent pour o et $s\pi$, et que $\cos 2t$, $\cos 4t$, ... prennent pour ces mêmes limites une seule et même valeur, l'unité; nous trouvons

$$\begin{aligned}T_s^{(i)} = \frac{2}{\pi}&\left(\frac{1}{2^2}X_1^{(i)} + \frac{1}{4^2}X_2^{(i)} + \ldots\right)\left[\frac{dF(t)}{dt} + b_i^{(i)}\frac{d^3F(t)}{dt^3} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+1}F(t)}{dt^{2i+1}}\right]_0^{s\pi}\\ &- \frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left[\frac{d^2F(t)}{dt^2} + b_1^{(i)}\frac{d^4F(t)}{dt^4} + \ldots + b_1^{(i)}\frac{d^{2i+2}F(t)}{dt^{2i+2}}\right]\left(\frac{1}{2^2}X_1^{(i)}\cos 2t + \frac{1}{4^2}X_2^{(i)}\cos 4t + \ldots\right)dt.\end{aligned}$$

En continuant, on obtient, en désignant par ν un nombre entier,

$$\left\{\begin{aligned}T_s^{(i)} &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2^2}X_1^{(i)} + \frac{1}{4^2}X_2^{(i)} + \ldots\right)\left[\frac{dF(t)}{dt} + b_1^{(i)}\frac{d^3F(t)}{dt^3} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+1}F(t)}{dt^{2i+1}}\right]_0^{s\pi}\\ &- \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2^4}X_1^{(i)} + \frac{1}{4^4}X_2^{(i)} + \ldots\right)\left[\frac{d^3F(t)}{dt^3} + b_1^{(i)}\frac{d^5F(t)}{dt^5} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+3}F(t)}{dt^{2i+3}}\right]_0^{s\pi}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\pm \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2^{2\nu}}X_1^{(i)} + \frac{1}{4^{2\nu}}X_2^{(i)} + \ldots\right)\left[\frac{d^{2\nu-1}F(t)}{dt^{2\nu-1}} + b_1^{(i)}\frac{d^{2\nu+1}F(t)}{dt^{2\nu+1}} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+2\nu-1}F(t)}{dt^{2i+2\nu-1}}\right]_0^{s\pi}\\ &\mp \frac{2}{\pi}\int_0^{s\pi}\left[\frac{d^{2\nu}F(t)}{dt^{2\nu}} + b_1^{(i)}\frac{d^{2\nu+2}F(t)}{dt^{2\nu+2}} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i+2\nu}F(t)}{dt^{2i+2\nu}}\right]\left(\frac{1}{2^{2\nu}}X_1^{(i)}\cos 2t + \frac{1}{4^{2\nu}}X_2^{(i)}\cos 4t + \ldots\right)dt.\end{aligned}\right.$$

4. Pour employer la formule (20), il nous reste à déterminer les facteurs constants dans les termes libres d'intégrales. Ils se présentent d'abord sous la forme de séries infinies; mais, avec le secours des résultats obtenus dans le n° **2**, il est aisé de trouver leurs valeurs sous forme finie.

Nous avons d'abord, eu égard à l'équation (13),

$$\frac{1.3.5\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i}\sin^{2i+1}\theta - \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\left(X_1^{(i+1)}\cos 2\theta + X_2^{(i+1)}\cos 4\theta + \ldots\right);$$

nous multiplions cette équation par $d\theta$ et nous intégrons; alors il vient, en désignant la constante d'intégration par $C_1^{(i)}$,

$$(21)\quad C_1^{(i)} + \frac{1.3.5\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i}\int \sin^{2i+1}\theta\, d\theta - \frac{2}{\pi}\theta = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}X_1^{(i+1)}\sin 2\theta + \frac{1}{4}X_2^{(i+1)}\sin 4\theta + \ldots\right.$$

Or on a, avec nos notations,

$$-\frac{1.3.5\ldots(2i+1)}{2.4.6\ldots 2i}\int \sin^{2i+1}\theta\, d\theta = \alpha_1^{(i)}\cos\theta - \alpha_3^{(i)}\cos 3\theta + \ldots \pm \alpha_{2i+1}^{(i)}\cos(2i+1)\theta.$$

En mettant cette valeur dans l'équation (21), on obtient

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} C_1^{(i)} - \frac{2}{\pi}\theta &= \alpha_1^{(i)}\cos\theta - \alpha_3^{(i)}\cos 3\theta + \ldots \pm \alpha_{2i+1}^{(i)}\cos(2i+1)\theta \\ &\quad + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}X_1^{(i+1)}\sin 2\theta + \frac{1}{4}X_2^{(i+1)}\sin 4\theta + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

On donne à θ la valeur particulière zéro :

$$\begin{aligned} C_1^{(i)} &= \alpha_1^{(i)} - \alpha_3^{(i)} + \ldots \pm \alpha_{2i+1}^{(i)}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Après cela, l'équation (22) donne, par la multiplication avec $d\theta$ et l'intégration,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} C_2^{(i)} + C_1^{(i)}\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)\theta^2 &= \frac{\alpha_1^{(i)}}{1}\sin\theta - \frac{\alpha_3^{(i)}}{3}\sin 3\theta + \ldots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{2i+1}\sin(2i+1)\theta \\ &\quad - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^2}X_1^{(i+1)}\cos 2\theta + \frac{1}{4^2}X_2^{(i+1)}\cos 4\theta + \ldots\right), \end{aligned}\right.$$

d'où il suit

$$C_2^{(i)} = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^2}X_1^{(i+1)} + \frac{1}{4^2}X_2^{(i+1)} + \ldots\right).$$

L'équation (23) nous donne, de plus,

$$C_3^{(i)} + C_2^{(i)}\theta + \frac{1}{2}C_1^{(i)}\theta^2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{2}{\pi}\right)\theta^3 = -\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^2}\cos\theta + \frac{\alpha_3^{(i)}}{3^2}\cos3\theta - \ldots \mp \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^2}\cos(2i+1)\theta$$
$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^3}X_1^{(i+1)}\sin2\theta + \frac{1}{4^3}X_2^{(i+1)}\sin4\theta + \ldots\right),$$

d'où l'on obtient, en faisant $\theta = 0$,

$$C_3^{(i)} = -\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^2} + \frac{\alpha^{(i)}}{3^2} - \ldots \mp \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^2}.$$

Si l'on pose $\theta = \frac{\pi}{2}$, la plupart des termes de l'équation précédente disparaissent, et l'on obtient

$$C_2^{(i)}\frac{\pi}{2} = -C_3^{(i)} - \frac{1}{2}C_1^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

En appliquant successivement ce procédé, on obtient d'une manière générale

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}&C_{2\nu}^{(i)} + C_{2\nu-1}^{(i)}\theta + \frac{1}{2}C_{2\nu-2}^{(i)}\theta^2 + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(2\nu-1)}C_1^{(i)}\theta^{2\nu-1} - \frac{1}{1.2.3\ldots2\nu}\frac{\pi}{2}\theta^{2\nu}\\&= (-1)^{\nu-1}\left[\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^{2\nu-1}}\sin\theta - \frac{\alpha_3^{(i)}}{3^{2\nu-1}}\sin3\theta + \ldots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^{2\nu-1}}\sin(2i+1)\theta\right]\\&\quad + (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^{2\nu}}X_1^{(i+1)}\cos2\theta + \frac{1}{4^{2\nu}}X_2^{(i+1)}\cos4\theta + \ldots\right)\end{aligned}\right.$$

et

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}&C_{2\nu+1}^{(i)} + C_{2\nu}^{(i)}\theta + \frac{1}{1.2}C_{2\nu-1}^{(i)}\theta^2 + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots2\nu}C_1^{(i)}\theta^{2\nu} - \frac{1}{1.2.3\ldots(2\nu+1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)\theta^{2\nu+1}\\&= (-1)^{\nu}\left[\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^{2\nu}}\cos\theta - \frac{\alpha_3^{(i)}}{3^{2\nu}}\cos3\theta + \ldots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^{2\nu}}\cos(2i+1)\theta\right]\\&\quad + (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^{2\nu+1}}X_1^{(i+1)}\sin2\theta + \frac{1}{4^{2\nu+1}}X_2^{(i+1)}\sin4\theta + \ldots\right).\end{aligned}\right.$$

L'équation (24) nous donne

$$(26) \qquad \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2^{2\nu}}X_1^{(i+1)} + \frac{1}{4^{2\nu}}X_2^{(i+1)} + \ldots\right) = \frac{1}{2}(-1)^\nu C_{2\nu}^{(i)};$$

avec l'équation (25), on trouve ensuite

$$(27) \left\{ \begin{aligned} C_{2\nu+1}^{(i)} &= (-1)^\nu \left[\frac{\alpha_1^{(i)}}{1^{2\nu}} - \frac{\alpha_3^{(i)}}{3^{2\nu}} + \ldots \pm \frac{\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^{2\nu}}\right], \\ \frac{1}{2}(-1)^\nu C_{2\nu}^{(i)} &= -\frac{1}{\pi}(-1)^\nu \left[C_{2\nu+1}^{(i)} + \frac{1}{1.2} C_{2\nu-1}^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3} C_{2\nu-2}^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{1.2.3\ldots 2\nu} C_1^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu} - \frac{1}{1.2.3\ldots(2\nu+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu}\right]. \end{aligned} \right.$$

Au moyen des équations (26) et (27) on peut avoir, sous forme finie, les coefficients constants qui figurent dans l'équation (20). Si l'on donne à i dans cette équation la valeur zéro, les formules données en dernier lieu s'appliquent encore. Dans la même hypothèse, les sommes des séries précédentes peuvent être trouvées, puisque

$$X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = \ldots = 1,$$

et

$$\frac{1}{2^{2\nu}} + \frac{1}{4^{2\nu}} + \ldots = \tfrac{1}{2} B_{2\nu-1} \frac{\pi^{2\nu}}{1.2.3\ldots 2\nu},$$

où les B désignent les nombres de Bernoulli

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = \frac{1}{30}, \quad \ldots.$$

5. Les résultats dont on a fait usage dans le travail précédent dépendent de la possibilité de pouvoir développer les cotangentes des angles en série convergente. Nous avons déjà vu comment ce développement permettait d'avoir une convergence suffisante pour les sommations numériques. Je vais maintenant, bien que ces propriétés ne se rapportent pas au sujet actuel, indiquer des développements analogues pour les tangentes, sécantes et cosécantes.

Ces développements résultent aisément des équations (16), (17), (18), (19), lorsqu'on donne à θ des valeurs particulières convenables.

On obtient ainsi

$$\operatorname{tang} x\frac{\pi}{2} = x\varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1^2\beta_1^{(i)}}{1^2-x^2} - \frac{3^2\beta_3^{(i)}}{3^2-x^2} - \frac{5^2\beta_5^{(i)}}{5^2-x^2} - \ldots\right],$$

$$\cot x\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1}{x} - \frac{2x\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} + \frac{4x\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} - \ldots\right],$$

$$\begin{aligned}\operatorname{séc} x\frac{\pi}{2} = \varkappa\left(2i, x\frac{\pi}{2}\right)\Bigg[1 &+ \frac{x^2\beta_1^{(i)}}{1^2-x^2} + \frac{3x^2\beta_3^{(i)}}{3^2-x^2} + \ldots \\ &- \frac{2\alpha_2^{(i)}}{2^2-x^2} - \frac{4\alpha_4^{(i)}}{4^2-x^2} - \ldots - \frac{(2i)\alpha_{2i+2}^{(i)}}{(2i)^2-x^2}\Bigg],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{coséc} x\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\Bigg[\frac{1}{x} &+ \frac{2x\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} + \frac{4x\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} + \ldots \\ &+ \frac{\pi}{2}\frac{x\alpha_1^{(i)}}{1^2-x^2} + \frac{\pi}{2}\frac{3x\alpha_3^{(i)}}{3^2-x^2} + \ldots + \frac{\pi}{2}\frac{(2i+1)x\alpha_{2i+1}^{(i)}}{(2i+1)^2-x^2}\Bigg].\end{aligned}$$

Je termine ces recherches en indiquant les conséquences nombreuses qu'on peut tirer des relations précédentes. En différentiant, par exemple, la seconde de ces équations par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x\frac{\pi}{2}} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1}{x^2} + \frac{2.2x^2\beta_2^{(i)}}{(2^2-x^2)^2} - \frac{2.4x^2\beta_4^{(i)}}{(4^2-x^2)^2} + \ldots\right] \\ &+ \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} - \frac{4\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} + \ldots\right) \\ &- \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{d\varkappa\left(2i+1, x\frac{\pi}{2}\right)}{dx}\left(\frac{1}{x} - \frac{2x\beta_2^{(i)}}{2^2-x^2} + \frac{4x\beta_4^{(i)}}{4^2-x^2} - \ldots\right).\end{aligned}$$

Si l'on considère μ comme une variable dans les équations (3), et si l'on différentie par rapport à cette quantité, on trouve

$$\begin{aligned}&\sin n\mu\pi + 2\sin 2n\mu\pi + \ldots + s\sin sn\mu\pi \\ &\qquad = \frac{1}{4}\frac{\sin sn\mu\pi}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi} - \frac{1}{2}s\frac{\cos(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\sin\frac{1}{2}n\mu\pi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&1 + \cos n\mu\pi + 2\cos 2n\mu\pi + \ldots + s\cos sn\mu\pi \\ &\qquad = 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi} + \frac{1}{4}\frac{\cos sn\mu\pi}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi} + \frac{1}{2}s\frac{\sin(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\sin\frac{1}{2}n\mu\pi}.\end{aligned}$$

Au moyen de ces formules on obtient le résultat de la sommation pour les fonctions

$$t[M_0 + M_1 \cos(\psi + \mu t) + \ldots]$$

tout à fait comme pour la série (1).

Sur la formule

$$z_s = \frac{1}{\pi} \lim \int_0^{s\pi} F(t) \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} dt \quad \text{pour } k = \infty.$$

On peut désirer une démonstration directe de cette formule. Or, il n'y a pas de différence essentielle entre l'étude de cette limite et de celle que l'on considère pour la formule de représentation de Fourier.

On partage l'intervalle $s\pi$ en portions contenant chacune une valeur qui rende discontinue la fonction placée sous le signe $\int$, et à l'égard de laquelle on fait les seules hypothèses qu'elle soit finie entre les limites o, $s\pi$, et ne possède qu'un nombre limité de discontinuités ou de maxima et minima.

Dans chacune de ces portions, on considère plus spécialement les valeurs o, π, ..., $s\pi$ de la variable et les valeurs voisines. On peut supposer qu'elles diffèrent assez peu des premières pour que la fonction n'offre pas de discontinuités dans les environs de o, π, ..., $s\pi$.

Toutes les autres portions d'intégrales n'ont pas d'influence sur le résultat.

Cela posé, le fait essentiel consiste en ce que les limites des deux intégrales

$$\int_0^{\varepsilon} F(t+a) \frac{\sin ht}{\sin t} dt, \quad \int_{-\varepsilon}^{0} F(t+a) \frac{\sin ht}{\sin t} dt,$$

pour $h = \infty$, sont

$$\frac{\pi}{2} F(a), \quad \frac{\pi}{2} F(a).$$

Il résulte de là que la limite de l'expression considérée sera

$$\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad + \frac{\pi}{2}F(\pi) + \ldots + \frac{\pi}{2}F[(s-1)\pi] + \frac{\pi}{2}F(s\pi) \\ \frac{\pi}{2}F(0) + \frac{\pi}{2}F(\pi) + \ldots + \frac{\pi}{2}F[(s-1)\pi] \end{array}\right\},$$

c'est-à-dire z_s.

En partant de

$$z_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{s\pi} F(t)(1 + 2\cos 2t + 2\cos 4t + \ldots + 2\cos 2ht)\,dt,$$

intégrant par parties, comme on le fait pour avoir la formule (20), et passant à la limite, on obtient la formule sommatoire de Maclaurin.

Sur le développement

$$\frac{\cot\frac{1}{2}\pi x}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right]} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{X_0^{(i)}}{x} + \frac{2xX_1^{(i)}}{x^2-2^2} + \frac{2xX_2^{(i)}}{x^2-4^2} + \ldots\right],$$

qui sert à établir la nouvelle formule sommatoire.

On fait usage des formules qui donnent la décomposition de $\sin x \cos x$ en un nombre arbitraire mais limité de facteurs. (*Voir* la *Trigonométrie* de Serret, n° **187**.)

On en déduit

$$\frac{\cot\frac{1}{2}\pi x}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i-1)^2}\right]}$$
$$= \frac{2}{\pi x}\,\frac{\left[1-\frac{x^2}{(2i+1)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(2i+3)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2i+2m-1)^2}\right]}{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{(2m)^2}\right]}\left(1+\frac{\varepsilon}{m}\right),$$

ε étant un nombre fini et m un entier qu'on peut supposer aussi grand que l'on veut.

Cela posé, il s'agit de démontrer que la somme des fractions partielles dans lesquelles peut se décomposer la fraction rationnelle du second membre tend vers une limite déterminée, à savoir :

$$\frac{X_0^{(i)}}{x} + \frac{2xX_1^{(i)}}{x^2 - 2^2} + \ldots + \frac{2xX_n^{(i)}}{x^2 - (2n)^2} + \ldots.$$

Il est bon d'observer, avant d'aller plus loin, que la somme des termes de cette suite converge en effet vers une limite. C'est ce qui résulte clairement de la nature des coefficients $X_n^{(i)}$, qui ne dépassent pas une limite finie, et de la formule ordinaire de la cotangente

$$\cot\tfrac{1}{2}\pi x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 2^2} + \ldots\right).$$

On considère la fraction simple dont le dénominateur est $x^2 - (2n)^2$; en désignant par $Y_n^{(i)}$ le coefficient du terme simple $\frac{2x}{x^2 - (2n)^2}$, on obtient

$$2Y_n^{(i)} = -\frac{\left[1 - \left(\frac{2n}{2i+1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{2n}{2i+3}\right)^2\right]\cdots\left[1 - \left(\frac{2n}{2i+2m-1}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{2n}{2}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{2n}{4}\right)^2\right]\cdots\left[1 - \left(\frac{2n}{2m}\right)^2\right]}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\right).$$

Multipliant haut et bas par

$$\left[1 - \left(\frac{2n}{1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{2n}{3}\right)^2\right]\cdots\left[1 - \left(\frac{2n}{2i-1}\right)^2\right],$$

observant que le nouveau numérateur diffère infiniment peu de $\cos n\pi$, que l'ancien dénominateur diffère infiniment peu de $-\frac{\cos n\pi}{2}$ (cela résulte du n° **187** cité), on conclut

$$Y_n^{(i)} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{m}}{\left[1 - \left(\frac{2n}{1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{2n}{3}\right)^2\right]\cdots\left[1 - \left(\frac{2n}{2i-1}\right)^2\right]}.$$

Quand, n étant donné, m augmente indéfiniment, on a, à la limite, $X_n^{(i)}$. Dès lors, le raisonnement qui sert à démontrer la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ est ici applicable.

Sur la démonstration des deux formules conjuguées (n° 2)

$$\theta = \sum_1^\infty \beta_{2n}^{(i)} \sin 2n\theta + \frac{\pi}{2} \sum_0^i \alpha_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\theta,$$

$$\theta = \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\theta - \sum_1^i \alpha_{2n}^{(i)} \sin 2n\theta.$$

On obtient ces deux résultats en développant les deux fonctions $\cos^{2i+1}\theta$ et $\cos^{2i}\theta$ en séries trigonométriques. Ils mettent en évidence ce fait que la représentation d'une fonction entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ par une série trigonométrique n'est pas *absolument* déterminée, et des conséquences importantes résultent de là.

Supposant les développements possibles, on aura

$$\begin{aligned} \cos^{2i+1}\theta &= C_0 + C_1\cos\theta + C_2\cos 2\theta + \ldots + C_n\cos n\theta + \ldots, \\ \cos^{2i}\theta &= D_0 + D_1\cos\theta + D_2\cos 2\theta + \ldots + D_n\cos n\theta + \ldots; \end{aligned}$$

on détermine leurs coefficients par l'intégration entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, après avoir multiplié $\cos^{2i+1}\theta$ ou $\cos^{2i}\theta$ par le cosinus qui multiplie le coefficient cherché.

Soit à calculer l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos^p\theta \cos n\theta \, d\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^p\theta \cos n\theta \, d\theta.$$

L'application de la formule d'intégration par parties donnera, en posant $V = \cos n\theta$, $U = \cos^p\theta$,

$$-n^2 \int \cos^p\theta \cos n\theta \, d\theta = \int UV'' d\theta = UV' - U'V + \int VU'' d\theta;$$

de plus,

$$\begin{aligned} U' &= -p\cos^{p-1}\theta \sin\theta, \\ U'' &= +p(p-1)\cos^{p-2}\theta(1-\cos^2\theta) - p\cos^p\theta, \\ &= \quad p(p-1)\cos^{p-2}\theta - p^2\cos^p\theta. \end{aligned}$$

Les termes dégagés d'intégrales étant nuls pour les limites considérées, on obtient une relation récurrente

$$o = p(p-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-2}\theta \cos n\theta \, d\theta + (n^2 - p^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^p\theta \cos n\theta \, d\theta,$$

qui donne aisément la valeur des coefficients cherchés.

Il n'entre dans le développement de $\cos^{2i+1}\theta$ que des multiples pairs de θ, que des multiples impairs dans le cas de $\cos^{2i}\theta$.

On peut observer que, si dans les deux formules on remplace θ successivement par $\frac{\pi}{2} - r$, $\frac{\pi}{2} + r$, on obtient des résultats contradictoires, ce qui montre que les formules ne sont pas légitimes pour $\theta > \frac{\pi}{2}$ si elles le sont pour $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Il est, d'ailleurs, facile de démontrer la légitimité des développements pour θ compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$; l'analyse qui démontre la formule de Fourier n'a besoin d'aucun changement.

Sur la sommation des fonctions de la forme

$$F(t) = t\,[M_0 + M_1 \cos(\psi + \mu t) + \ldots].$$

On a successivement, en suivant la marche indiquée par l'auteur,

$$\begin{aligned}
y_s &= F(o) + F(\pi) + \ldots + F(s\pi) = (1 + 2 + \ldots + s)\,M_0\pi \\
&\quad + \pi \sum_1^\infty M_n \cos n\psi \left[-\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi} + \frac{1}{4}\frac{\cos sn\mu\pi}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi} + \frac{1}{2}s\frac{\sin(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\sin\frac{1}{2}n\mu\pi} \right] \\
&\quad - \pi \sum_1^\infty M_n \sin n\psi \left[\frac{1}{4}\frac{\sin sn\mu\pi}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi} - \frac{1}{2}s\frac{\cos(s+\frac{1}{2})n\mu\pi}{\sin\frac{1}{2}n\mu\pi} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_s &= y_s - \frac{1}{2}F(o) - \frac{1}{2}F(s\pi) = \frac{1}{2}s^2 M_0\pi + \frac{\pi}{4}\sum_1^\infty \frac{M_n}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi}[\cos n(\psi + s\mu\pi) - \cos n\psi] \\
&\quad + \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty M_n s \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi \sin n(\psi + s\mu\pi).
\end{aligned}$$

En prenant les valeurs des deux Σ entre o et ∞, il faudrait ajouter $\frac{1}{2}s^2 M_0 \pi$; c'est précisément le premier terme. Donc

$$z_s = \frac{\pi}{4}\sum_0^\infty \frac{M_n}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi}[\cos n(\psi + s\mu\pi) - \cos n\psi]$$
$$+ \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty M_n s \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi \sin n(\psi + s\mu\pi).$$

Cela posé, on est amené à déterminer une fonction $\chi(t)$ par la condition suivante :

$$\int_0^{s\pi} t\cos n(\psi + \mu t)\chi(t)\,dt = \pi s \cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi \sin n(\psi + s\mu\pi)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\pi\frac{1}{\sin^2 n\mu\pi}[\cos n(\psi + s\mu\pi) - \cos n\psi].$$

Or, si l'on substitue à $\cot\frac{1}{2}n\mu\pi$ et à $\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi}$ leurs développements connus,

$$\cot\tfrac{1}{2}n\mu\pi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n\mu} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 2^2} + \frac{2n\mu}{(n\mu)^2 - 4^2} + \ldots\right],$$
$$\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}n\mu\pi} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left[\frac{1}{(n\mu)^2} + \frac{2(n^2\mu^2 + 2^2)}{(n^2\mu^2 - 2^2)^2} + \frac{2(n^2\mu^2 + 4^2)}{(n^2\mu^2 - 4^2)^2} + \ldots\right],$$

en tenant compte de

$$\int_0^{s\pi} t\cos n(\psi + \mu t)\cos 2mt\,dt = \pi s\,\frac{2n\mu\sin n(\psi + s\mu\pi)}{(n\mu)^2 - (2m)^2}$$
$$+ \frac{[n^2\mu^2 + (2m)^2]}{[n^2\mu^2 - (2m)^2]^2}[\cos n(\psi + s\mu\pi) - \cos n\psi],$$

on voit que la condition ci-dessus est satisfaite en prenant

$$\chi(t) = \frac{2}{\pi}[1 + 2\cos 2t + 2\cos 4t + \ldots],$$

de sorte que la formule cherchée est précisément

$$z_s = \frac{1}{2}\int_0^{s\pi} F(t)\chi(t)\,dt.$$

Enfin, on vérifie que la formule (10) est applicable.

Sur l'extension de la nouvelle formule sommatoire aux fonctions en général.

On peut penser que la formule de M. Gyldén ne s'applique pas seulement à certaines classes de fonctions. En suivant la voie indiquée par Abel (*Œuvres*, t. II, Mémoire VII), il est possible, en effet, d'établir d'une manière simple et générale le résultat en question.

La quantité constante dont croît l'argument est supposée égale à π, ce qui est permis. Partant de la définition de la fonction sous la forme employée par Abel,

$$\varphi(x) = \int e^{vx} f(v)\, dv,$$

les limites de l'intégrale étant quelconques, mais indépendantes de x, on en tire, en prenant les intégrales finies des deux membres,

$$\Sigma \varphi(x) = \int e^{vx} \frac{f(v)}{e^{\pi v} - 1}\, dv,$$

et une constante arbitraire doit être ajoutée.

On a maintenant

$$\begin{aligned} z_s = y_s - \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2}\varphi(s\pi) &= \int e^{v\pi} \frac{f(v)}{e^{\pi v} - 1}\, dv - \int \frac{f(v)}{e^{\pi v} - 1}\, dv + \frac{1}{2}\int (e^{vs\pi} - 1) f(v)\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int (e^{vs\pi} - 1) \frac{e^{\pi v} + 1}{e^{\pi v} - 1} f(v)\, dv. \end{aligned}$$

Cela posé, on a égard au développement suivant :

$$\frac{e^{\pi v} + 1}{e^{\pi v} - 1} = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{v^2}{1^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{3^2}\right)\cdots\left[1 + \frac{v^2}{(2i-1)^2}\right]\left(\frac{X_0^{(i)}}{v} + \frac{2v X_1^{(i)}}{v^2 + 2^2} + \frac{2v X_2^{(i)}}{v^2 + 4^2} + \cdots\right),$$

qui ne diffère pas, dans le fond, du développement de la cotangente, et à l'égalité suivante :

$$\int_0^{s\pi} e^{vx} \cos 2mx\, dx = \frac{v}{v^2 + (2m)^2}(e^{vs\pi} - 1);$$

on trouve

$$z_s = \frac{1}{2}\int_0^{s\pi}\left[\varphi(x) + b_1^{(i)}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \ldots + b_i^{(i)}\frac{d^{2i}\varphi(x)}{dx^{2i}}\right]\chi_i(x)\,dx,$$

$\chi_i(x)$ et les b étant définis ainsi qu'il suit :

$$\chi_i(x) = \frac{2}{\pi}(X_0^{(i)} + 2X_1^{(i)}\cos 2x + 2X_2^{(i)}\cos 4x + \ldots),$$

$$1 + b_1^{(i)}v^2 + b_2^{(i)}v^4 + \ldots + b_i^{(i)}v^{2i} = \left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{3^2}\right)\cdots\left[1+\frac{v^2}{(2i-1)^2}\right].$$

Sur la représentation des fonctions par des séries de sinus et de cosinus entre des limites données de la variable. Calcul des coefficients des développements par interpolation.

On sait le rôle considérable que jouent, dans l'Astronomie en particulier, les développements trigonométriques.

Le calcul des coefficients des sinus et cosinus se présente donc comme une recherche de la plus grande utilité. A la vérité, on peut donner de ces coefficients différentes expressions analytiques; mais, dans les applications, on préfère les calculer au moyen de valeurs particulières de la fonction qui doit être développée en une telle série de sinus et de cosinus.

La considération des limites entre lesquelles on peut représenter une fonction par une série trigonométrique n'est pas moins utile dans les applications que dans l'analyse, et l'on peut trouver beaucoup d'avantage à prendre, au lieu des limites ordinaires $-\pi$ et $+\pi$, les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. L'exemple suivant mettra cela en évidence.

Que l'on se propose d'intégrer par rapport à l'une d'elles une fonction de sinus et cosinus de deux variables, l'une de ces variables pouvant être exprimée par une série trigonométrique dont l'autre variable est l'argument assujetti à rester compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

C'est le cas de la fonction perturbatrice lorsqu'on suppose que l'orbite de l'une des planètes a une faible excentricité : alors, en effet, l'anomalie moyenne de cette planète peut, entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, s'exprimer par une série de sinus dépendant des multiples de l'anomalie excentrique de la planète troublée.

Donc, entre les limites considérées, on peut développer la fonction perturbatrice en une série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus d'*un seul* argument, et l'intégration est dès lors facile.

C'est là l'origine d'une méthode donnée par M. Gyldén (*Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft,* 1875, p. 25 et suiv.).

Gauss, dans son Mémoire *Theoria interpolationis nova methodo tractata,* après avoir établi parallèlement ce qui se rapporte à l'interpolation des fonctions entières de sinus et de cosinus et des polynômes entiers, Gauss, dis-je, s'étend sur les méthodes appelées depuis *quadratures mécaniques,* dans lesquelles les arguments correspondent aux points de division de la circonférence en parties égales.

Les résultats généraux de Gauss ont été établis simplement par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse.*

Hansen, dans ses divers travaux (*Perturbations absolues des comètes. Perturbations des petites planètes*), a toujours fait usage de la méthode des quadratures mécaniques.

En 1841, Le Verrier eut l'idée de substituer aux quadratures mécaniques un procédé ingénieux qui, dans la suite, a été heureusement perfectionné par M. Hoüel (*Annales de l'Observatoire de Paris,* t. VIII : *Sur le développement de la fonction perturbatrice,* 1875). Caractériser de la manière la plus simple ces différentes méthodes, en ayant surtout égard aux exigences des applications astronomiques, tel est le but de cette Note.

Après avoir considéré le cas où les limites sont 0 et 2π, je prendrai celui où elles sont $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$.

Arrêtant le développement

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + \ldots + A_k \cos kx + \ldots + B_1 \sin x + \ldots + B_k \sin kx + \ldots$$

aux termes $A_k \cos kx$, $B_k \sin kx$, et supposant pour un instant les autres négligeables, toute la question est de savoir quels arguments il faut choisir pour le calcul des $2k+1$ valeurs particulières qui formeront les termes tout connus de $2k+1$ équations linéaires.

Les coefficients cherchés s'expriment par des fonctions linéaires des valeurs particulières multipliées par des quantités qui ne dépendent que des arguments arbitraires. Peut-on déterminer ces arguments pour amener une simplification et pour affaiblir l'erreur commise en négligeant, comme on a vu, tous les termes du développement à partir de termes d'arguments déterminés?

Avant d'aller plus loin, je vais montrer comment la supposition la plus simple, celle qui consiste à prendre des arguments correspondant aux points de division d'une circonférence en parties égales, donne satisfaction à ces deux exigences.

Il suffira de considérer la détermination des coefficients des cosinus. Les valeurs des arguments étant égales à

$$0,\ \frac{2\pi}{n},\ 2\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ (n-1)\frac{2\pi}{n},$$

on observe que la somme des cosinus d'un arc mx est nulle si m n'est pas un multiple de n et, dans le cas contraire, est égale à $\frac{1}{2}n$. Supposant

$$F(x) = A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots + A_k\cos kx + \ldots,$$

on aura, pour un coefficient A_k,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}n\,A_k = F(0) + F(1)\cos k\frac{2\pi}{n} + F(2)\cos 2k\frac{2\pi}{n} + \ldots + F(n-1)\cos(n-1)k\frac{2\pi}{n}\\ + \tfrac{1}{2}n\,(A_{n+k} + A_{2n+k} + \ldots + A_{n-k} + A_{2n-k} + \ldots).\end{aligned}$$

En négligeant la parenthèse, on commet sur A_k une erreur insignifiante si k est petit et n assez grand. Cette erreur augmente en même temps que k et devient comparable, pour le dernier des coefficients que l'on considère, au coefficient suivant.

La formule précédente montre de plus que, abstraction faite de la parenthèse, le coefficient A_k sera obtenu avec la même précision que les valeurs particulières.

Le second résultat pourra sans doute être obtenu avec les autres méthodes; mais l'importance du premier et la simplicité du procédé de calcul donnent une place à part à la méthode des quadratures mécaniques.

Revenant au cas général, j'observe que l'interpolation des fonctions entières de cosinus et de sinus dépend de deux formules qui sont à rapprocher du résultat bien connu concernant les fonctions entières et rationnelles d'une variable.

Soient, en effet, $n+1$ arguments

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ k,\ l;$$

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx,$$
$$\varphi(x) = \qquad B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx;$$

les deux formules suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)}{(\cos x - \cos a)(\cos x - \cos b)\ldots(\cos x - \cos l)}\\
&= \frac{f(a)}{\cos x - \cos a}\,\frac{1}{(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)\ldots(\cos a - \cos l)}\\
&+ \frac{f(b)}{\cos x - \cos b}\,\frac{1}{(\cos b - \cos a)(\cos b - \cos c)\ldots(\cos b - \cos l)}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{f(l)}{\cos x - \cos l}\,\frac{1}{(\cos l - \cos a)(\cos l - \cos b)\ldots(\cos l - \cos k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi(x)}{\sin x(\cos x - \cos b)(\cos x - \cos c)\ldots(\cos x - \cos l)}\\
&= \frac{\varphi(b)}{\sin b(\cos x - \cos b)}\,\frac{1}{(\cos b - \cos c)(\cos b - \cos d)\ldots(\cos b - \cos l)}\\
&+ \frac{\varphi(c)}{\sin c(\cos x - \cos c)}\,\frac{1}{(\cos c - \cos b)(\cos c - \cos d)\ldots(\cos c - \cos l)}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \frac{\varphi(l)}{\sin l(\cos x - \cos l)}\,\frac{1}{(\cos l - \cos b)(\cos l - \cos c)\ldots(\cos l - \cos k)}.
\end{aligned}$$

Il est clair que, si l'on se donne les valeurs des arguments $a, b, c, \ldots, l$, il est possible de calculer les coefficients A et B ; ils résultent des valeurs particulières des fonctions $f(x)$ ou $\varphi(x)$ multipliées par des nombres auxiliaires dépendant des arguments choisis.

Au moyen d'une Table de nombres auxiliaires construite une fois pour toutes et des valeurs particulières d'une fonction arbitraire répondant aux arguments

$$\begin{array}{cccccc} a, & b, & c, & \ldots, & k, & l, \\ & -b, & -c, & \ldots, & -k, & -l, \end{array}$$

on pourra donc effectuer, au moins avec une certaine approximation, le développement d'une fonction arbitraire en série trigonométrique de sinus et cosinus, et, en prenant un nombre suffisant d'arguments, on augmentera la précision à volonté.

Il est possible, avec quelques tâtonnements, de distribuer à peu près uniformément sur la circonférence les arguments, et cela pour les différentes valeurs de $2n+1$. Un tel résultat importe à la bonne détermination de la fonction.

Le Verrier, dans la méthode imaginée par lui en 1841, fait $a=0$ et prend pour arguments $b, c, \ldots$ les multiples successifs d'un angle α. C'est en prenant $\alpha = 141^\circ 1'$ que M. Hoüel a construit une Table de nombres auxiliaires pour l'usage de la méthode de Le Verrier.

Si pour un instant on s'arrête à ce point de vue, l'unique objet qu'on se propose étant de choisir les arguments $a, b, c, \ldots$ de manière que le calcul des nombres auxiliaires soit facilité le plus possible, les formules établies précédemment montrent qu'on obtient un tel résultat en se donnant *a priori* $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, ... avec trois décimales (par exemple, on prendra les trois premières décimales de $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, ...). La Table de multiplication de Crelle permet alors de faire commodément le calcul.

Mais on peut rechercher un résultat plus important et se proposer de souder l'une à l'autre la méthode de Le Verrier et celle des quadratures mécaniques. Par là, on donne satisfaction à ces deux exigences : obtenir dans certains cas difficiles une approximation très-grande, et, dans tous les cas, rendre le calcul le plus facile et le plus sûr.

A cette fin, ayant divisé la circonférence en un nombre de parties assez grand pour que la quadrature mécanique atteigne les cas les plus difficiles, je prendrai un multiple de cette partie aliquote premier avec le nombre de divisions de la circonférence; et ainsi, d'une part, pour les petites valeurs de $2n+1$ on a la méthode de Le Verrier, et d'autre part, pour la totalité des valeurs ou le maximum de $2n+1$, une quadrature mécanique.

Pour le moment, il est inutile de donner d'autres détails à ce sujet et au sujet des quadratures mécaniques. J'ai dit, en commençant, que l'illustre Gauss avait abordé ces dernières méthodes dans son Mémoire

Interpolationis..., et là, comme dans ses autres recherches, il semble n'avoir rien laissé à désirer.

Je termine en disant quelques mots des nouveaux développements de M. Gyldén, dans lesquels l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; il en a été parlé en commençant.

Il semble tout d'abord que les valeurs des arguments des valeurs particulières doivent être comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; mais, si l'on observe que les développements en question, en dehors des limites mentionnées, ne cessent pas d'être convergents, bien qu'ils ne représentent plus la fonction, de sorte que l'on peut assigner la valeur des développements en série figurant dans les membres de droite, il n'y a aucune difficulté dans l'application de la méthode des quadratures mécaniques au calcul des coefficients. Calculés par la méthode des quadratures mécaniques ou toute autre, les développements obtenus subsistent entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, comme les formules (16), (17), (18), (19) du Mémoire d'où la transformation proposée de la fonction perturbatrice a été tirée.

Ainsi, la construction d'une Table de nombres auxiliaires servira en plusieurs circonstances aussi bien pour les perturbations relatives que pour les perturbations absolues des planètes et des comètes.

Note de M. Gyldén sur quelques développements trigonométriques dont la valeur est indépendante de la variable entre des limites déterminées.

En partant des équations

$$\vartheta = \sum_1^\infty \beta_{2n}^{(i)} \sin 2n\vartheta + \frac{\pi}{2}\sum_0^i \alpha_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\vartheta$$

et

$$\vartheta = \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\vartheta - \sum_1^i \alpha_{2n}^{(i)} \sin 2n\vartheta,$$

on déduit aisément des résultats qui pourraient être employés dans certains calculs numériques.

Les résultats dont il s'agit consistent en développements trigonométriques qui jouissent de la propriété de conserver la même valeur numérique pour toute valeur de la variable entre des limites déterminées.

En effet, il résulte, par différentiation, des équations ci-dessus,

$$1 = \sum_1^\infty 2n\beta_{2n}^{(i)} \cos 2n\vartheta + \frac{\pi}{2}\sum_0^i (2n+1)\alpha_{2n+1}^{(i)} \cos(2n+1)\vartheta,$$

$$1 = \sum_0^\infty (2n+1)\beta_{2n+1}^{(i)} \cos(2n+1)\vartheta - \sum_1^i 2n\alpha_{2n}^{(i)} \cos 2n\vartheta$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq +\frac{\pi}{2}\right).$$

Maintenant, si l'on suppose, par exemple, $i = 4$, on obtient les expressions numériques :

$$(\mathrm{A})\ \left\{\begin{aligned} 1 = &+0{,}4744078\ (^1) \\ &+1{,}0000000 \cos \vartheta \\ &-0{,}8600600 \cos 2\vartheta \\ &+0{,}6666665 \cos 3\vartheta \\ &-0{,}4631090 \cos 4\vartheta \\ &+0{,}2857142 \cos 5\vartheta \\ &-0{,}1543697 \cos 6\vartheta \\ &+0{,}0714285 \cos 7\vartheta \\ &-0{,}0272417 \cos 8\vartheta \\ &+0{,}0079365 \cos 9\vartheta \\ &-0{,}0014338 \cos 10\vartheta \\ &+0{,}0000683 \cos 12\vartheta \\ &-0{,}0000089 \cos 14\vartheta \\ &+0{,}0000018 \cos 16\vartheta \\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{B})\ \left\{\begin{aligned} 1 = &+0{,}4714947\ (^1) \\ &+1{,}0000000 \cos \vartheta \\ &-0{,}8456069 \cos 2\vartheta \\ &+0{,}6363637 \cos 3\vartheta \\ &-0{,}4228034 \cos 4\vartheta \\ &+0{,}2447553 \cos 5\vartheta \\ &-0{,}1208011 \cos 6\vartheta \\ &+0{,}0489510 \cos 7\vartheta \\ &-0{,}0151001 \cos 8\vartheta \\ &+0{,}0028795 \cos 9\vartheta \\ &-0{,}0001516 \cos 11\vartheta \\ &+0{,}0000216 \cos 13\vartheta \\ &-0{,}0000047 \cos 15\vartheta \\ &+0{,}0000013 \cos 17\vartheta \\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Par des procédés très-simples on peut déduire une infinité d'expressions de la même espèce que la précédente. En intégrant, par exemple,

(¹) On a divisé toute l'expression par le coefficient de $\cos\vartheta$, après quoi on a ajouté aux deux membres respectivement 0,4744078 et 0,4714947.

l'équation (A), après l'avoir multipliée par $\sin\vartheta\, d\vartheta$, on obtient

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} o = \text{const.} &- 0{,}0955622 \cos \vartheta \\ &+ 0{,}0833333 \cos 2\vartheta \\ &- 0{,}0661585 \cos 3\vartheta \\ &+ 0{,}0476191 \cos 4\vartheta \\ &- 0{,}0308739 \cos 5\vartheta \\ &+ 0{,}0178571 \cos 6\vartheta \\ &- 0{,}0090806 \cos 7\vartheta \\ &+ 0{,}0039682 \cos 8\vartheta \\ &- 0{,}0014338 \cos 9\vartheta \\ &+ 0{,}0003968 \cos 10\vartheta \\ &- 0{,}0000683 \cos 11\vartheta \\ &+ 0{,}0000030 \cos 13\vartheta \\ &- 0{,}0000004 \cos 15\vartheta \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$\text{const.} = +0{,}0500002.$$

Pour $\vartheta = \pi$, on déduit de l'équation (B) la valeur

$$-2{,}8656329,$$

tandis que l'équation (C) nous donne

$$+0{,}4063494;$$

en multipliant la dernière équation par

$$\frac{2{,}8656329}{0{,}4063494},$$

il résulte une expression dont la valeur numérique reste constamment zéro autant que la variable ne sort pas des limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, mais qui reçoit une valeur opposée à celle de l'expression (B) pour $\vartheta = \pi$. Par conséquent, la somme de ces deux expressions, que nous désignons par σ, conserve la valeur numérique 1 pour toute valeur de ϑ ne sortant pas des limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, mais, de plus, elle s'évanouit pour $\vartheta = \pi$.

La fonction σ est donnée par le développement suivant :

$$
\begin{aligned}
\sigma = & + 0,8241021 \\
& + 0,3260823 \cos \vartheta \\
& - 0,2579289 \cos 2\vartheta \\
& + 0,1698050 \cos 3\vartheta \\
& - 0,0869874 \cos 4\vartheta \\
& + 0,0270281 \cos 5\vartheta \\
& + 0,0051299 \cos 6\vartheta \\
& - 0,0150864 \cos 7\vartheta \\
& + 0,0128845 \cos 8\vartheta \\
& - 0,0072316 \cos 9\vartheta \\
& + 0,0027986 \cos 10\vartheta \\
& - 0,0006329 \cos 11\vartheta \\
& + 0,0000425 \cos 13\vartheta \\
& - 0,0000074 \cos 15\vartheta \\
& + 0,0000017 \cos 17\vartheta \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

On a appelé la fonction σ *un facteur de séparation*, parce qu'on peut, en plusieurs cas, en multipliant par un tel facteur, régler la convergence d'une fonction de ϑ entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Sur l'utilité du facteur de séparation σ dans le calcul des perturbations relatives. Extrait d'une Lettre de M. Gyldén à M. O. Callandreau.

.... Il s'agit d'un artifice de calcul pour rendre les séries suivant l'anomalie excentrique (ε) plus convergentes, en employant, sans altération, le procédé reproduit dans le *Vierteljahrsschrift*. Pour être plus clair, je vais expliquer mon idée sur un exemple.

J'emprunte donc des calculs de M. Backlund sur les perturbations relatives de la planète (112) les nombres suivants.

Pour les seize valeurs de ε, calculées d'après la formule

$$\varepsilon = \sum_0^\infty \beta_{2n+1}^{(i)} \sin(2n+1)\varepsilon - \sum_1^i \alpha_{2n}^{(i)} \sin 2n\varepsilon$$

(dans le second membre, on emploie toujours pour ε des valeurs équidistantes), M. Backlund a obtenu les valeurs suivantes de la fonction $\frac{1}{8}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$:

ε	$\frac{1}{8}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$	$\frac{\sigma}{8}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$
0.......	+ 0",949	+ 0",949
1.......	+ 0,060	+ 0,060
2.......	— 0,790	— 0,790
3.......	— 1,027	— 1,027
4.......	— 1,968	— 1,968
5.......	— 2,222	— 2,218
6.......	— 1,921	— 1,629
7.......	+ 4,593	+ 1,191
8.......	+ 5,225	0,000
9.......	— 5,697	— 1,478
10.......	— 2,291	— 1,943
11.......	+ 0,243	+ 0,243
12.......	+ 1,311	+ 1,311
13.......	+ 1,998	+ 1,998
14.......	+ 2,640	+ 2,640
15.......	+ 1,670	+ 1,670

La méthode des quadratures mécaniques, appliquée aux nombres de la deuxième colonne, a donné ensuite :

	$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ cos	$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ sin
0.......	+ 1",387	
1.......	+ 3,758	— 7",193
2.......	+ 7,987	—12,611
3.......	—10,204	+11,235
4.......	+ 7,879	—11,340
5.......	— 6,922	+ 9,005
6.......	+ 5,675	— 5,011
7.......	— 3,736	+ 3,693
8.......	+ 1,769	

On voit aisément que ce sont surtout les nombres entre (5) et (10) qui rendent la convergence faible.

Or, l'emploi du facteur σ permet d'éviter cet inconvénient. En multipliant, en effet, $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ par σ, on obtiendra un résultat plus convergent, et néanmoins, entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on obtient précisément les mêmes valeurs numériques pour la fonction $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$.

En appliquant la méthode des quadratures mécaniques aux nombres de la troisième colonne, on trouve

	$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ cos	$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ sin
0........	$-0'',495$	
1........	$+7,773$	$-10'',147$
2........	$+2,925$	$-7,519$
3........	$-4,235$	$+4,154$
4........	$+2,014$	$-3,715$
5........	$-0,935$	$+2,004$
6........	$+0,227$	$-0,031$
7........	$+1,793$	$-0,819$
8........	$-0,935$	

Vous voyez, monsieur, que le résultat obtenu à l'aide de la multiplication par σ est bien préférable au résultat donné dans la première application de la méthode proposée....