

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. CANO

J.-M. LION

R. MOUSSU

Frontière d'une hypersurface pfaffienne

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 28, n° 5 (1995), p. 591-646

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1995_4_28_5_591_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FRONTIÈRE D'UNE HYPERSURFACE PFAFFIENNE

PAR F. CANO, J.-M. LION ⁽¹⁾ ET R. MOUSSU

ABSTRACT. — **Boundary of a pfaffian hypersurface.** We associate to a singular analytic codimension one foliation $\mathcal{F}$ on a real analytic manifold, a natural class of subsets called $\mathcal{F}$ -sets stable by finite union and containing the non spiraling leaves of $\mathcal{F}$. We prove that this class is stable by topological closure and it is generated by some smooth submanifolds. As a consequence, the “boundary” of a non spiraling leaf of $\mathcal{F}$ is a locally finite union of smooth submanifolds.

RÉSUMÉ. — Nous associons à un feuilletage analytique singulier de codimension un $\mathcal{F}$ sur une variété analytique réelle une classe naturelle de sous-ensembles stable par union finie et contenant les feuilles non spirantes de $\mathcal{F}$. Nous prouvons que cette classe est stable par fermeture topologique et qu'elle est engendrée par certaines sous-variétés lisses. En particulier le “bord” d'une feuille non spirante de $\mathcal{F}$ est une union localement finie de sous-variétés lisses.

Sommaire

Introduction	592
I. Définitions et Résultats.	594
1. Feuilletages singuliers.	594
2. $\mathcal{F}$ -ensembles.	597
II. Stratifications adaptées. Désingularisation. Théorème de finitude.	598
1. Stratification.	598
2. Rectilinéarisation.	601
3. Finitude uniforme.	603
III. Premières propriétés des $\mathcal{F}$-ensembles.	604
1. Conséquences immédiates de la définition des $\mathcal{F}$ -ensembles.	604
2. Caractérisation locale des $\mathcal{F}$ -ensembles.	605
3. Intersection d'un $\mathcal{F}$ -ensemble et d'un sous-analytique.	607
4. Régularité des $\mathcal{F}$ -ensembles.	609
5. Structure des $\mathcal{F}$ -ensembles en dehors du lieu singulier.	612

⁽¹⁾ Chargé de Recherche au C.N.R.S.

IV. Les deux arguments principaux.	613
1. Lemme d'aile pfaffien.	613
2. Équiréduction générique.	615
V. Adhérence d'un $\mathcal{F}$-ensemble.	617
1. Plan de la démonstration.	617
2. Preuve de $H(n)$ implique $T(n)$.	618
3. Preuve de $H(n)^*$ implique $H(n)$.	618
4. Réduction de la preuve de $H(n)^*$.	619
5. Cas de l'aile, étude de $\overline{V} \cap Z$.	620
6. Étude de W_j dans le cas non-dicritique.	621
7. Cas dicritique.	622
8. Étude d'un exemple.	623
Appendice : Équiréduction générique d'un feuilletage singulier de codimension un.	626
1. Structure de la démonstration.	627
2. Semi-continuité des singularités simples.	628
3. La suite d'équiréduction.	631
4. Invariants locaux et centres permis.	633
5. La chaîne des points infiniment voisins.	635
6. Invariants verticaux.	636
7. Contrôle par une section plane.	639
8. Le cas dicritique non résonnant.	641
9. Le cas réel.	644
Bibliographie	645

Introduction

Cet article porte sur la question suivante : comment une feuille V d'un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ d'une variété M adhère à son lieu singulier, $\text{Sing } \mathcal{F}$? Cette question n'est pertinente que si M , $\mathcal{F}$ et V ont des propriétés spécifiques. Nous supposons que M est un ouvert semi-analytique d'une variété analytique N et que $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique singulier qui est localement défini par des équations de Pfaff analytiques sur un voisinage de l'adhérence de M dans N . D'autre part, nous n'étudions que des feuilles V non récurrentes. Plus précisément, nous supposons que toute courbe transverse à $\mathcal{F}$ coupe V en un point au plus. Cette condition élimine tout problème de dynamique et assure que V est une sous-variété de M proprement plongée.

Lorsque le triplet $(V, \mathcal{F}, M)$ vérifie les hypothèses précédentes, on sait déjà, [Li]₁ et [Li-Ro], que l'intersection de $\text{Sing } \mathcal{F}$ et de la frontière de V , $\text{Sing } \mathcal{F} \cap \overline{V}$, est localement connexe par arc et que l'on a un "lemme de sélection de courbe" : si a appartient à $\text{Sing } \mathcal{F} \cap \overline{V}$, il existe un chemin de classe C^1 aboutissant en a , $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{V}$, dont la restriction à $]0, 1]$ est un chemin analytique dans V . Dans ce travail, nous étudions la

structure différentiable de la frontière de V dans $\text{Sing } \mathcal{F}$. Nous prouvons essentiellement que $\text{Sing } \mathcal{F} \cap \bar{V}$ est une union localement finie de sous-variétés lisses. Plus précisément, nous étudions la famille des $\mathcal{F}$ -ensembles de N . Ce sont des unions localement finies d'images "propres" par des morphismes analytiques $\pi : N' \rightarrow N$ de feuilles non récurrentes V' de feuilletages images réciproques de $\mathcal{F}$ par ces morphismes. En précisant certains arguments de [Mo-Ro]_{1,2}, [Li]₁, nous prouvons tout d'abord que :

(i) *L'intersection $W \cap X$ d'un $\mathcal{F}$ -ensemble W avec un ensemble sous-analytique X de N est encore un $\mathcal{F}$ -ensemble.*

(ii) *Un $\mathcal{F}$ -ensemble W est une union localement finie de sous-ensembles lisses qui sont encore des $\mathcal{F}$ -ensembles.*

Ensuite, en utilisant des résultats de désingularisation des ensembles sous-analytiques de Hironaka et un théorème d'équiréduction générique de 1-formes analytiques intégrables qui complète un résultat de [Ca-Ma], nous prouvons le théorème suivant :

THÉORÈME. – *L'adhérence $\bar{W}$ d'un $\mathcal{F}$ -ensemble W est encore un $\mathcal{F}$ -ensemble.*

Une feuille non récurrente V de $\mathcal{F}$ étant par définition un $\mathcal{F}$ -ensemble, son adhérence $\bar{V}$ et sa frontière $\bar{V} \setminus V$ sont encore des $\mathcal{F}$ -ensembles. D'après (i), $\text{Sing } \mathcal{F} \cap \bar{V}$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble et d'après (ii) c'est une union localement finie de sous-variétés lisses qui sont des $\mathcal{F}$ -ensembles. La frontière d'une hypersurface pfaffienne de Rolle n'est pas en général un ensemble analytique ou sous-analytique. Ceci a pour origine la dicriticité dans l'équiréduction de la 1-forme associée. Ce phénomène est illustré par un exemple à la fin du chapitre V.

L'étude des propriétés des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis à partir des fonctions analytiques et des *variétés séparantes* solutions d'équations de Pfaff analytiques a été commencée par A. Khovanski dans [Kh]_{1,2} (voir aussi [Ri]). Dans [To]_{1,2} J.-C. Tougeron en développe le point de vue algèbre de fonctions. Cette étude est abordée de façon locale et plus géométrique dans [Li]₁, [Mo-Ro]_{1,2}, [Ro] en utilisant les outils de la géométrie semi-analytique "à la Lojasiewicz". Ici, nous la poursuivons en l'enrichissant avec l'approche "à la Hironaka" de la théorie des sous-analytiques.

Soulignons que ce travail est consacré à l'étude géométrique d'ensembles définis à partir d'équations de Pfaff et de fonctions analytiques et que nous n'avons pas cherché à développer une "théorie" des ensembles pfaffiens ou des $\mathcal{F}$ -ensembles. A notre connaissance, une telle théorie n'existe pas encore. On peut en trouver une ébauche dans [Dr] et [Ch] dans le cas particulier des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis à partir des opérations élémentaires et de l'application exponentielle.

La définition précise des $\mathcal{F}$ -ensembles est l'objet du chapitre I. Dans le chapitre II, après avoir présenté des résultats classiques sur les stratifications et la désingularisation des ensembles sous-analytiques, nous rappelons quelques résultats de [Mo-Ro]₁ et [Li]₁ essentiels pour la suite. La preuve des assertions (i), (ii) et de quelques autres propriétés des $\mathcal{F}$ -ensembles est l'objet du chapitre III. Dans le chapitre IV, nous prouvons un "lemme d'aile" pour les feuilles non récurrentes et nous énonçons le théorème d'équiréduction générique des 1-formes intégrables qui est prouvé dans un appendice. Le chapitre V est consacré à la preuve du théorème : l'adhérence d'un $\mathcal{F}$ -ensemble est un $\mathcal{F}$ -ensemble. Cet article doit beaucoup aux critiques constructives de C. Roche.

I. Définitions et Résultats

Dans toute la suite N désigne un K -espace analytique non singulier de dimension n avec $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, O_N le faisceau des germes de fonctions analytiques sur N , Ω_N le faisceau des germes de 1-formes analytiques sur N , O_a et Ω_a leur fibre respective en un point a de N . Si U est un ouvert de N , on note O_U , Ω_U les restrictions respectives de O_N , Ω_N à U et $O(U)$, $\Omega(U)$ l'ensemble des sections globales respectives de O_U , Ω_U . Enfin, si $\mathcal{F}$ est un sous O_N -module de Ω_N on écrit $\mathcal{F}_a$ sa fibre en a , $\mathcal{F}_U$ sa restriction à U et $\mathcal{F}(U)$ une section globale de $\mathcal{F}_U$.

1. Feuilletages singuliers

1.1. CHAMPS D'HYPERPLANS SINGULIERS. – Un *champ d'hyperplans singulier* $\mathcal{F}$ sur N est un sous O_N -module de Ω_N localement libre de rang inférieur ou égal à 1. Cette définition se traduit de la façon suivante en termes locaux : il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de N et pour chaque $i \in I$ un élément ω_i de $\Omega(U_i)$ tel que $\mathcal{F}_{U_i}$ soit engendré par les germes de ω_i aux points de U_i . Ce que nous écrivons

$$\mathcal{F}_{U_i} = O_{U_i} \cdot \omega_i \subset \Omega_{U_i}.$$

Ainsi, pour tout couple d'indices $i, j \in I$ il existe une fonction analytique $u_{i,j}$ sans zéro sur $U_i \cap U_j$ tel que :

$$\omega_i(a) = u_{i,j}(a) \omega_j(a) \quad \text{si } a \in U_i \cap U_j.$$

Réciproquement soit $\{(U_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ une famille où les U_i forment un recouvrement ouvert de N et où les ω_i sont des éléments de $\Omega(U_i)$ tels que la condition de cocycle ci-dessus soit vérifiée pour tout couple de $i, j \in I$. L'ensemble des germes des ω_i engendrent un sous O_N -module de Ω_N qui est un champ d'hyperplans singulier $\mathcal{F}$ que nous notons $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i)\}_{i \in I}$. On peut toujours supposer que les U_i sont des ouverts de coordonnées dans lesquels les ω_i s'écrivent

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n b_j dx_j, \quad b_j \in O_{U_i}.$$

Le *lieu singulier* $\text{Sing } \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ est le sous-ensemble de N localement défini par

$$\text{Sing } \mathcal{F} \cap U_i = \{a \in U_i / \omega_i(a) = 0\} = \{a \in U_i / b_1(a) = \dots = b_n(a) = 0\}.$$

C'est un sous-ensemble analytique fermé de N . Plus précisément, si $\mathcal{J}$ est le faisceau d'idéaux engendré par les b_j , le couple $(\text{Sing } \mathcal{F}, O_N/\mathcal{J})$ est un sous-espace analytique fermé de N . Évidemment lorsque $\mathcal{F}$ est le faisceau nul, $\mathcal{F} \equiv 0$, on a $\text{Sing } \mathcal{F} = N$.

1.2. CHAMP D'HYPERPLANS SINGULIERS SATURÉ. – On dit qu'un champ d'hyperplans singulier $\mathcal{F}$ sur N est *saturé* si pour tout point a de N le O_a -module quotient $\Omega_a/\mathcal{F}_a$ est sans torsion. Si a appartient à U_i avec $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i)\}$ la condition précédente s'énonce : tout diviseur commun u des germes en a des coefficients b_j est une unité de O_a , c'est-à-dire $u(a) \neq 0$.

Soit $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i)\}$ un champ d'hyperplans singulier. Le O_N -module de torsion $\tau(\Omega_N/\mathcal{F})$ du quotient $\Omega_N/\mathcal{F}$ est le noyau du morphisme canonique de $\Omega_N/\mathcal{F}$ dans son bidual. C'est un faisceau cohérent. Le noyau $\mathcal{D}$ du morphisme canonique

$$O_N \rightarrow \text{Hom}_{O_N}(\tau(\Omega_N/\mathcal{F}), \tau(\Omega_N/\mathcal{F}))$$

est un idéal principal de O_N dont la fibre $\mathcal{D}_a$ est engendrée par le plus grand commun diviseur d_a des b_j . Il existe un unique champ d'hyperplans singulier, noté $\text{Sat } \mathcal{F}$ et appelé le saturé de $\mathcal{F}$ tel que

$$\mathcal{F} = \mathcal{D} \cdot \text{Sat } \mathcal{F}.$$

Supposons, pour éviter des cas particuliers inintéressants que N soit connexe. Notons $\omega_{i,a}$ le germe de ω_i en a et $\tilde{\omega}_{i,a}$ l'unique élément de Ω_a tel que $\omega_{i,a} = d_a \tilde{\omega}_{i,a}$. La fibre de $\text{Sat } \mathcal{F}$ en a est le O_a -module engendré par $\tilde{\omega}_{i,a}$. On peut écrire

$$\text{Sat } \mathcal{F} = \{(\tilde{U}_\ell, \tilde{\omega}_\ell)\}_{\ell \in L}$$

où les $\tilde{\omega}_\ell$ sont des représentants de certains $\tilde{\omega}_{i,a}$ sur des voisinages assez petits. On aurait pu définir $\text{Sat } \mathcal{F}$ par de telles données locales et montrer directement qu'il est cohérent. Enfin, N étant toujours supposé connexe, un champ d'hyperplans singulier $\mathcal{F}$ sur N possède clairement les propriétés suivantes :

- $\mathcal{F}$ est saturé si et seulement si $\text{Sat } \mathcal{F} = \mathcal{F}$ (ceci est encore vrai pour $\mathcal{F} \equiv 0$).
- Si $\mathcal{F}'$ est un champ d'hyperplans singulier qui contient $\mathcal{F} \neq 0$, alors $\text{Sat } \mathcal{F} = \text{Sat } \mathcal{F}'$.
- $\text{Sat } \mathcal{F} = \text{Sat } \mathcal{F}'$ si et seulement s'il existe un ouvert $U \neq \emptyset$ tel que $\mathcal{F}_U = \mathcal{F}'_U$.
- Si $\mathcal{F} \neq 0$ est saturé, son lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$ est un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 . La réciproque est vraie dans le cadre complexe mais elle est clairement fausse pour $K = \mathbf{R}$.

1.3. TRANSFORMÉ STRICT. – Soit $f : N' \rightarrow N$ un morphisme entre deux espaces analytiques non singuliers et soit $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i)\}_{i \in I}$ un champ d'hyperplans singulier sur N . L'image réciproque de $\mathcal{F}$ par f est le champ d'hyperplans singulier

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{(f^{-1}(U_i), f^*(\omega_i))\}_{i \in I}.$$

Le transformé strict de $\mathcal{F}$ par f est par définition le saturé de $f^{-1}(\mathcal{F})$, il est noté $f^*(\mathcal{F})$. Si $g : N'' \rightarrow N'$ est un deuxième morphisme on a clairement :

$$(f \circ g)^{-1}(\mathcal{F}) = g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{F})).$$

Lorsque N est connexe et que $(f \circ g)^*(\mathcal{F})$ n'est pas le faisceau nul on a aussi :

$$(f \circ g)^*(\mathcal{F}) = g^*(f^*(\mathcal{F})).$$

Cette égalité est fausse en général comme le prouve l'exemple suivant. Soient $f : N' \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'éclatement de l'origine, $g : E \hookrightarrow N'$ l'immersion du diviseur exceptionnel $E = f^{-1}(0)$ de f et soit $\mathcal{F} = \{(\mathbf{R}^2, \omega)\}$ avec $\omega = xdy - ydx$. Alors

$$(f \circ g)^*(\mathcal{F}) \equiv 0 \quad \text{et} \quad g^*(f^*(\mathcal{F})) \neq 0.$$

1.4. MORPHISME ADMISSIBLE. – Un *morphisme admissible* sur N , $\Delta = (\delta, \alpha)$ est la donnée d'un morphisme d'espaces analytiques $\delta : N' \rightarrow N$ muni d'une factorisation

$$\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^k, \quad \delta = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_k.$$

telle que chaque morphisme $\alpha_i : N_i \rightarrow N_{i-1}$ (avec $N_0 = N$, $N_k = N'$) soit d'un des deux types suivants :

(i) α_i est un *éclatement local à centre lisse* ; c'est-à-dire le composé d'une restriction à un ouvert et d'un éclatement global à centre lisse.

(ii) α_i est un plongement propre de N_i dans N_{i-1} .

Les éclatements locaux sont les morphismes élémentaires utilisés par Hironaka dans la "voute étoilée" [Hi]₂. Dans ce travail nous n'utiliserons que des éclatements locaux à centres lisses, ce qui nous permet en même temps de garder un espace ambiant non-singulier et de faire appel aux résultats de désingularisation de Hironaka [Hi]_{1, ..., 4}.

Si $\Delta' = (\delta', \alpha')$ est un morphisme admissible sur N' , la composition $\Delta \circ \Delta'$ est un morphisme admissible sur N défini de façon évidente. Si $U \subset N$ est un ouvert, on a un morphisme admissible $\Delta|_U$, en considérant l'image inverse de U par chaque α_i . Si $\mathcal{F}$ est un champ d'hyperplans singulier sur N l'image réciproque $\Delta^*(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ par Δ est définie par :

$$\Delta^*(\mathcal{F}) = \alpha_k^* (\alpha_{k-1}^* (\dots \alpha_1^* (\mathcal{F}) \dots)).$$

C'est un champ d'hyperplans singulier sur N' . On a clairement les propriétés fonctorielles :

$$(\Delta \circ \Delta')^*(\mathcal{F}) = \Delta'^*(\Delta^*(\mathcal{F}))$$

$$(\Delta|_U)^*(\mathcal{F}) = \Delta^*(\mathcal{F})_{\delta^{-1}(U)}.$$

Il se peut que $\Delta^*(\mathcal{F})$ contienne $\delta^*(\mathcal{F})$ d'après l'exemple de 1.3. Cependant on a l'égalité $\Delta^*(\mathcal{F}) = \delta^*(\mathcal{F})$ lorsque α ne contient que des éclatements ou encore lorsque $\delta^*(\mathcal{F})$ est non dégénéré. Enfin l'image réciproque du champ nul $\mathcal{F} \equiv 0$ de N , par un morphisme admissible Δ est clairement le champ nul de N' .

1.5. FEUILLETAGE SINGULIER. – Soit $\mathcal{F}$ un champ d'hyperplans singulier sur N . On dit que $\mathcal{F}$ est *intégrable* si pour tout $a \in N$ tout germe de 1-forme ω appartenant à $\mathcal{F}_a$ est intégrable, c'est-à-dire $\omega \wedge d\omega \equiv 0$. Il est clair que si $\mathcal{F}$ est intégrable, son saturé, son image réciproque ou son transformé strict par un morphisme analytique sont encore intégrables.

DÉFINITION. – Un *feuilletage singulier* $\mathcal{F}$ sur N est un champ d'hyperplans singulier qui est saturé et intégrable. On dit qu'il est non dégénéré s'il est localement libre de rang un.

Il est clair qu'un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ est dégénéré si et seulement si sa restriction à une composante connexe non vide de N est le faisceau nul. Il est non dégénéré si et seulement si son lieu singulier est de codimension ≥ 2 . Les considérations suivantes justifient la terminologie de feuilletage singulier.

Si a est un point de N et ω un élément de Ω_a nous considérons $\omega(a)$, la valeur de ω en a , comme un élément du K -dual de $T_a N$. Lorsque $\mathcal{F}$ est un champ d'hyperplans singulier nous posons

$$T_a \mathcal{F} = \text{Ker } \omega(a),$$

où ω est un générateur de $\mathcal{F}_a$. Clairement a est un point singulier de $\mathcal{F}$ si et seulement si $T_a\mathcal{F} = T_aN$. La restriction de l'application $a \rightarrow T_a\mathcal{F}$ à $N \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ est un champ d'hyperplans analytique sur $N \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$. Ce champ est intégrable si et seulement si $\mathcal{F}$ est un champ d'hyperplans singulier intégrable. Il lui correspond alors un feuilletage analytique de codimension un sur $N \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ que nous noterons (très) abusivement encore $\mathcal{F}$ et nous dirons qu'une feuille de ce feuilletage est une feuille de $\mathcal{F}$. La restriction de ce feuilletage à un ouvert U de $N \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ sera encore notée $\mathcal{F}_U$.

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage singulier dégénéré, c'est-à-dire si $\mathcal{F}_C \equiv 0$ où C est une composante connexe de N , on dira abusivement que C est une feuille de $\mathcal{F}$.

2. $\mathcal{F}$ -ensembles

Dans toute la suite N désigne un espace analytique réel non singulier et $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de N .

2.1. $\mathcal{F}$ -FEUILLE DE ROLLE. - Une *hypersurface de Pfaff* associée à $\mathcal{F}$ est un triplet $H = (V, \mathcal{F}, M)$ où M est un ouvert semi-analytique de N inclus dans $N \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ et V une feuille du feuilletage $\mathcal{F}_M$, avec la convention $V = M$ si la restriction de $\mathcal{F}$ à M est le faisceau nul. Par exemple, si $N = \mathbf{R}^2$, $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et si $\mathcal{F}$ est le feuilletage singulier $\{(\mathbf{R}^2, \omega)\}$ avec

$$\omega = (x - y)dx + (y + x)dy$$

les feuilles de $\mathcal{F}_M$ sont homéomorphes à $\mathbf{R}$ et elles "spiralent" autour de l'origine 0. Toute demi-droite issue de 0 coupe chaque feuille en une infinité de points qui s'accumulent sur 0. Pour éviter ce "spiralement" nous introduisons la condition de Rolle suivante.

On dira que $H = (V, \mathcal{F}, M)$ *satisfait à la condition de Rolle* si pour tout chemin analytique $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tel que $\gamma(0), \gamma(1) \in V$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que le vecteur tangent à γ en $\gamma(t) = a$ soit contenu dans l'hyperplan $T_a\mathcal{F}$. De façon équivalente : tout chemin analytique sur M transverse à $\mathcal{F}$ coupe V en un point au plus. Cette condition géométrique est relativement naturelle. En effet, un argument de A. Haefliger, [Hae], [Mo-Ro]₂, montre que si M est simplement connexe, toute hypersurface pfaffienne $H = (V, \mathcal{F}, M)$ vérifie la condition de Rolle.

DÉFINITION. - Un sous-ensemble V de N est une *feuille de Rolle associée à $\mathcal{F}$* (on dira encore $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle) si l'on a l'une des deux propriétés suivantes :

- a) Il existe une hypersurface de Pfaff $H = (V, \mathcal{F}, M)$ qui satisfait à la condition de Rolle.
- b) L'ensemble V est un ouvert semi-analytique M connexe de N tel que $\mathcal{F}_M \equiv 0$. On dira alors que $V = M$ est *dégénérée*.

Il est clair qu'une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle est toujours une sous-variété analytique plongée d'un ouvert semi-analytique. De plus, elle possède les "mêmes" propriétés de finitude que les sous-ensembles semi-analytiques [Mo-Ro]_{1,2}. Nous les rappellerons dans le paragraphe II.3.

2.2. $\mathcal{F}$ -ENSEMBLE. - Un sous-ensemble W de N est un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire s'il existe un morphisme admissible $\Delta = (\delta, \alpha)$ et une feuille de Rolle V' associée à $\Delta^*(\mathcal{F})$ tels que $W = \delta(V')$ et tels que la restriction de δ à $\overline{V'}$ soit un morphisme propre. Un sous-ensemble de N est un $\mathcal{F}$ -ensemble s'il est une réunion localement finie de $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires.

Il est clair que les $\mathcal{F}$ -feuilles de Rolle sont des $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires. Cette définition donne maintenant un sens précis au théorème de l'introduction :

2.3. THÉORÈME. – *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de N . L'adhérence $\overline{W}$ d'un $\mathcal{F}$ -ensemble W est encore un $\mathcal{F}$ -ensemble.*

Le corollaire suivant répond à la question posée dans l'introduction : que peut-on dire du bord d'une feuille ?

COROLLAIRE. – *Soit V une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle non dégénérée. Son bord $\overline{V} \setminus V$ est une union localement finie de sous-variétés analytiques lisses qui sont des $\mathcal{F}$ -ensembles.*

Démonstration. – L'adhérence topologique $\overline{V}$ de V est un $\mathcal{F}$ -ensemble d'après le théorème. D'autre part, si $H = (V, \mathcal{F}, M)$, est l'hypersurface de Pfaff associée à V , on a :

$$\overline{V} \setminus V = \overline{V} \cap (\overline{M} \setminus M).$$

D'après la propriété (i) énoncée dans l'introduction $\overline{V} \setminus V$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble et d'après la propriété (ii) le corollaire est vrai.

On remarque que les 0-ensembles sont des sous-analytiques puisque l'image réciproque du feuilletage $\mathcal{F} \equiv 0$ par un morphisme admissible est encore le feuilletage nul. On verra dans III.3 que tout sous-analytique est un 0-ensemble. On aura alors prouvé le théorème et son corollaire pour le feuilletage dégénéré.

II. Stratifications adaptées. Désingularisation. Théorème de finitude

Le concept de stratifications semi-analytiques "adaptées" à une famille de feuilletages est un outil fondamental dans la preuve du théorème de finitude [Mo-Ro]_{1,2}. Il permet de raisonner strate par strate. Après l'avoir rappelé nous montrons comment il s'étend dans le cadre sous-analytique que nous serons amenés à envisager pour prouver la propriété (ii). Nous rappelons aussi quelques résultats de réduction des applications et des sous-analytiques de Hironaka [Hi]_{1,2} ainsi que des résultats de finitude de [Mo-Ro]_{1,2} que nous utiliserons systématiquement dans les chapitres suivants.

1. Stratification

Dans tout ce paragraphe N désigne un espace analytique réel non singulier de dimension n .

1.1. DÉFINITIONS. – Soient E et F deux sous-ensembles de N . On dit que E est adapté à F ("compatible avec" suivant Lojasiewicz) si $E \cap F = \emptyset$ ou si $E \subset F$. On dit que E est adapté à ("compatible avec") une fonction analytique f sur un ouvert U de N si E est adapté au sous-ensemble $U \cap \{f = 0\}$.

Soit Γ une sous-variété analytique de N et soit $\Omega = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p\}$ une famille finie de feuilletages singuliers sur N . Une sous-famille Ω' de Ω est transverse à Γ si en

tout point a de Γ on a :

$$\dim \Gamma - \sharp \Omega' = \dim \left(\left(\bigcap_{\mathcal{F}_i \in \Omega'} T_a \mathcal{F}_i \right) \cap T_a \Gamma \right).$$

On dit que Ω' est une base de Ω long de Γ lorsque Ω' est transverse à Γ , Γ est adapté au lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}_i$ de chaque $\mathcal{F}_i \in \Omega$ et qu'enfin en tout point a de Γ on a :

$$\dim \Gamma - \sharp \Omega' = \dim \left(\left(\bigcap_{i=1}^p T_a \mathcal{F}_i \right) \cap T_a \Gamma \right).$$

On dira encore que Γ est adaptée à Ω s'il existe une sous-famille Ω' de Ω qui soit une base de Ω le long de Γ . Ces concepts, en apparence techniques, sont très utiles géométriquement. En effet, supposons que Ω' soit une base de Ω le long de Γ et soit V_i des $\mathcal{F}_i$ -feuilles de Rolle pour $i = 1, 2, \dots, p$. Alors l'intersection :

$$Y = \bigcap_{i=1}^p V_i \cap \Gamma$$

est une sous-variété analytique fermée dans Γ de dimension $(\dim \Gamma - \sharp \Omega')$. C'est une réunion de feuilles du feuilletage non singulier induit par $\mathcal{F}$ sur Γ .

Une stratification $\mathcal{S} = (\Gamma_i)_{i \in I}$ de N est une partition localement finie de N en sous-variétés analytiques connexes Γ_i telle que si $\Gamma_i \cap \bar{\Gamma}_j \neq \emptyset$, alors :

$$\Gamma_i \subset \bar{\Gamma}_j \setminus \Gamma_j \quad \text{et} \quad \dim \Gamma_i < \dim \Gamma_j.$$

La stratification $\mathcal{S}$ est adaptée à un ensemble, une fonction, une famille finie de feuilletages,... si chaque strate Γ_i l'est. On dira que $\mathcal{S}$ est semi-analytique, (resp. sous-analytique), si chaque strate Γ_i est un sous-ensemble semi-analytique, (resp. sous-analytique) de N .

Les strates des stratifications "normales" de Lojasiewicz [Lo]₁, [Lo-Zu] possèdent une propriété supplémentaire que nous allons rappeler. Un feuillet normal Γ par rapport à une carte $(U, x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ de N est un sous-ensemble semi-analytique relativement compact de N dont l'adhérence est contenue dans U et tel qu'il existe des fonctions analytiques $f_0, f_1, \dots, f_k$ sur U possédant les deux propriétés suivantes : le bord $\partial \Gamma = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ est contenu dans $\{f_0 = 0\}$ et Γ est une composante connexe du sous-ensemble de U défini par :

$$\begin{cases} f_0 > 0, & f_1 = f_2 = \dots = f_k = 0 \\ df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dx_{k+1} \wedge dx_{k+2} \wedge \dots \wedge dx_n \neq 0 \end{cases}$$

En particulier, Γ est une sous-variété analytique de N de codimension k .

Rappelons enfin qu'un ouvert semi-analytique de N est la réunion d'une famille localement finie de feuillet normaux ouverts [Lo]₁. C'est aussi la réunion d'une famille localement finie d'ouverts semi-analytiques relativement compacts simplement connexes [Lo]₂.

1.2. THÉORÈME DE STRATIFICATION ADAPTÉE. — Soit Ω une famille finie de feuilletages singuliers sur N et soit $\{X_1, X_2, \dots, X_q\}$ une famille de sous-ensembles semi-analytiques (resp. sous-analytiques) de N . Alors il existe une stratification semi-analytique (resp. sous-analytique) $\mathcal{S} = \{\Gamma_i\}$ de N compatible avec les X_k et toute sous-famille de Ω . De plus, dans le cas semi-analytique, une carte (U, x) centrée en un point a étant fixée, on peut construire $\mathcal{S}$ de telle façon que les strates de $\mathcal{S}$ contenant a dans leur adhérence sont des feuilletés normaux relativement à cette carte.

Ce théorème est prouvé dans [Mo-Ro]₁ dans le cadre semi-analytique. L'argument essentiel de la preuve dans le cas sous-analytique est la sous-analyticité de l'application de Gauss associée à une sous-variété sous-analytique [De-Wa]. Il permet de prouver le lemme ci-dessous. Le théorème s'en déduit par des arguments classiques.

LEMME. — Soit X une sous-variété sous-analytique d'une variété analytique N et $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ une famille de feuilletages analytiques singuliers sur N . Le sous-ensemble des points de X où la famille $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ est transverse à X est un sous-analytique de N .

Preuve du lemme. — C'est un résultat local. Il suffit de le prouver lorsque $N = \mathbf{R}^n$, X est une sous-variété sous-analytique relativement compacte de $\mathbf{R}^n$ et les feuilletages $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ sont globalement définis par des 1-formes différentielles $\omega_1, \dots, \omega_p$ analytiques sur $\mathbf{R}^n$. Soit k la dimension de X et soit $\mathcal{G}_{n,k}$ la grassmannienne des k -plans de $\mathbf{R}^n$. Le graphe de l'application de Gauss associée à la sous-variété X :

$$T : X \longrightarrow \mathcal{G}_{n,k}, \quad x \longmapsto T_x X$$

est un sous-analytique [De-Wa] de $\mathbf{R}^n \times \mathcal{G}_{n,k}$. Par conséquent le graphe G de l'application θ qui à $x \in X$ associe $(T_x X, \omega_1(x), \dots, \omega_p(x)) \in \mathcal{G}_{n,k} \times (\mathbf{R}^{n*})^p$ est un sous-analytique de $\mathbf{R}^n \times \mathcal{G}_{n,k} \times (\mathbf{R}^{n*})^p$. Il est relativement compact puisque $\mathcal{G}_{n,k}$ est compact, les 1-formes ω_i sont analytiques et X est relativement compact. Le sous-ensemble A des points $(E, l_1, \dots, l_p)$ de $\mathcal{G}_{n,k} \times (\mathbf{R}^{n*})^p$ tels que

$$\dim \left(E \cap \left(\bigcap_{i=1}^p \ker l_i \right) \right) = k - p$$

est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathcal{G}_{n,k} \times (\mathbf{R}^{n*})^p$. Par conséquent $(\mathbf{R}^n \times A) \cap G$ est un sous-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n \times \mathcal{G}_{n,k} \times (\mathbf{R}^{n*})^p$. Son image par la projection canonique de $\mathbf{R}^n \times \mathcal{G}_{n,k} \times (\mathbf{R}^{n*})^p$ dans $\mathbf{R}^n$ est un sous-analytique de $\mathbf{R}^n$. C'est l'ensemble recherché.

Preuve du théorème dans le cas sous-analytique. — Soit $\mathcal{S}_{n+1}$ une stratification sous-analytique de N adaptée aux X_i (avec $n = \dim N$). On va construire une suite $(\mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_0)$ de stratifications sous-analytiques de N telle que $\mathcal{S}_i$ soit plus fine que $\mathcal{S}_{i+1}$ et telle que si Γ est une strate de $\mathcal{S}_i$ de dimension supérieure ou égale à i alors Γ est adaptée à toute sous-famille de Ω . Supposons que l'on ait déjà construit $(\mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_{i+1})$ vérifiant ces propriétés et construisons $\mathcal{S}_i$. Soit Y la réunion des strates Γ de $\mathcal{S}_{i+1}$ de dimension inférieure ou égale à i . Si Γ est une telle strate et Ω' une sous-famille de Ω on note $\Gamma_{\Omega'}$ le sous-analytique formé des points de Γ où Ω' est transverse à Γ .

Soit $\tilde{\mathcal{S}}_i$ une stratification sous-analytique de Y adaptée aux strates Γ de $\mathcal{S}_{i+1}$ de dimension inférieure ou égale à i et aux $\Gamma_{\Omega'}$. Les strates de $\tilde{\mathcal{S}}_i$ de dimension égale à i sont adaptées à toute sous-famille de Ω . La stratification $\mathcal{S}_i$ est la stratification qui a pour strates les $\Gamma \in \mathcal{S}_{i+1}$ avec $\dim \Gamma > i$ et les $\tilde{\Gamma} \in \tilde{\mathcal{S}}_i$ avec $\dim \tilde{\Gamma} \leq i$.

2. Rectilinéarisation

La démonstration du théorème énoncé dans l'introduction utilise deux types d'arguments de réduction de singularités. Dans un premier temps, on cherche à présenter les données analytiques de départ de façon "agréable" (croisements normaux) quitte à faire des éclatements de l'espace ambiant. Dans un deuxième temps, on réduit les singularités du feuilletage $\mathcal{F}$ à des "modèles simples". La première partie fait appel aux résultats de Hironaka de réduction de singularités des espaces analytiques réels ([A-H-V]), ainsi qu'à ses résultats de rectilinéarisation des sous-ensembles sous-analytiques [Hi]_{1,2}. Nous rappelons dans ce paragraphe ceux que nous serons amenés à utiliser.

2.1. DÉSINGULARISATION D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS

THÉORÈME DE DÉSINGULARISATION PLONGÉE ([Hi]_{1,2}, [A-H-V]). – Soient N un espace analytique réel non singulier, K un sous-ensemble compact de N et $f_1, \dots, f_p$ des fonctions analytiques sur N . Il existe un voisinage ouvert U de K et un morphisme propre $\pi : N' \rightarrow U$ tels que :

1. Le morphisme π est la composition d'une suite finie d'éclatements globaux à centres lisses.

2. Le morphisme π induit un isomorphisme analytique de $\pi^{-1}(W)$ sur

$$W = \{a \in U / (df_1 \wedge \dots \wedge df_p)(a) \neq 0\} \cup (U \setminus \{f_1 \dots f_p = 0\}).$$

3. Pour tout point $a' \in N'$, il existe une carte analytique $(U', x' = (x'_1, \dots, x'_n))$ en a' , des fonctions analytiques $\xi_1, \dots, \xi_p$ sur U' , ne s'annulant pas et des entiers $\alpha_{i,j} \geq 0$ tels que :

$$(f_j \circ \pi) |_{U'} = \xi_j x_1'^{\alpha_{1,j}} \dots x_n'^{\alpha_{n,j}}.$$

4. Les composantes irréductibles globales de $\{(f_1 \dots f_p) \circ \pi = 0\}$ sont lisses.

Remarquons que les ensembles analytiques $\{f_j \circ \pi = 0\}$ et $\{(f_1 \cdot f_2 \dots f_p) \circ \pi = 0\}$ sont des diviseurs à croisement normaux de N' d'après les propriétés 3 et 4. La preuve de ce théorème se fait d'abord dans le cas complexe et s'applique encore dans le cas réel, car elle est équivariante par l'automorphisme de conjugaison correspondant à la complexification de N . En appendice on donnera un argument de ce type pour la résolution de singularités de feuilletages réels.

2.2. DÉSINGULARISATION DES OUVERTS SEMI-ANALYTIQUES. – Un coin réel C de N est un ouvert semi-analytique relativement compact tel qu'il existe une carte $(U, x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ de N et $0 \leq \ell \leq n$ vérifiant :

$$x(U) = \mathbf{R}^n, \quad C = \{a \in U / x_1 > 0, \dots, x_\ell > 0\},$$

avec la convention évidente $C = U$ si $\ell = 0$. On dit que C est adapté à la carte (x, U) . Suivant la terminologie de Hironaka un coin réel est une union de quadrons. Plus précisément, on a la proposition suivante :

PROPOSITION (DE DÉSINGULARISATION D'UN OUVERT SEMI-ANALYTIQUE). - *Un ouvert semi-analytique M de N est une union localement finie d'ouverts semi-analytiques relativement compacts M_i de N telle que pour chaque indice i il existe un morphisme $\pi_i : N_i \rightarrow N$ ayant les propriétés suivantes :*

1. *Le morphisme π_i est une composition d'une suite finie d'éclatements locaux à centres lisses.*
2. *Le morphisme π_i induit un isomorphisme de $\pi_i^{-1}(M_i)$ sur M_i .*
3. *L'image réciproque $\pi_i^{-1}(M_i)$ est une union finie de coins réels ouverts C_{ij} de N_i associés à des cartes (U_{ij}, x_{ij}) telles que :*

$$\overline{\pi_i^{-1}(M_i)} \subset \bigcup_j U_{ij}, \quad C_{ij} = U_{ij} \cap \pi_i^{-1}(M_i).$$

Démonstration. - L'énoncé étant local, on peut supposer que M est un ouvert semi-analytique de N du type suivant :

$$M = \bigcup_{j=1}^q \bigcap_{i=1}^p \{f_{i,j} > 0\}$$

où les $f_{i,j}$ sont des fonctions analytiques sur N . Il suffit de prouver la proposition lorsque M est une intersection de semi-analytiques de type $f_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, p$. Pour la même raison, on peut supposer qu'il existe un morphisme π qui désingularise (globalement) $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. C'est à dire que $\pi : N' \rightarrow U = N$ vérifie les propriétés 1,2,3 et 4 du théorème de désingularisation plongée. En particulier π induit un isomorphisme de $\pi^{-1}(M)$ sur M . Enfin, en restreignant la carte (U', x') (décrite dans le 3 de 2.1), on peut supposer que U' est un ouvert semi-analytique isomorphe à $\mathbb{R}^n$ qui est relativement compact. D'autre part, M étant relativement compact, $\pi^{-1}(\overline{M})$ est un compact qui est recouvert par un nombre fini de cartes de ce type. Il en est de même pour $\pi^{-1}(M)$. Il suffit maintenant de constater que $U' \cap \pi^{-1}(M)$ est une union finie de coins réels ouverts. Ceci est une conséquence de l'écriture :

$$U' \cap \pi^{-1}(M) = \bigcap_{i=1}^p \{f_i \circ \pi = \xi_i x_1'^{\alpha_{1,i}} \dots x_n'^{\alpha_{n,i}} > 0\}.$$

2.3. PROPOSITION (DE DÉSINGULARISATION D'UN FEUILLET NORMAL). - *Soit Γ un feuillet normal de N adapté à une carte analytique (U, x) . Il existe un voisinage ouvert U_1 de $\overline{\Gamma}$ dans U , un morphisme propre $\pi : N' \rightarrow U_1$ et un sous-espace analytique non singulier fermé et connexe Z' de N' tels que :*

1. *Le morphisme π est une suite d'éclatements globaux à centres lisses.*
2. *Le morphisme π induit un isomorphisme de $\pi^{-1}(\Gamma)$ sur Γ .*
3. *L'ensemble $\pi^{-1}(\Gamma)$ est un ouvert semi-analytique relativement compact de Z' .*

Démonstration. — Soit $\pi : N' \rightarrow U_1$ le morphisme obtenu en appliquant le théorème de désingularisation plongée au compact $\bar{\Gamma}$ et aux fonctions $f_1, f_2, \dots, f_k$, Γ étant une composante connexe de

$$\{f_0 > 0, f_1 = f_2 = \dots = f_k = 0, df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_k \neq 0\}.$$

Ce morphisme vérifie déjà les assertions 1 et 2. D'après les assertions 3, 4 du théorème de désingularisation plongée, les composantes irréductibles de

$$\{f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi = \dots = f_k \circ \pi = 0\}$$

sont lisses. Soit Z' la composante irréductible de cet ensemble qui contient $\Gamma' = \pi^{-1}(\Gamma)$. Alors Γ' est une composante connexe de $Z' \cap \{f_0 \circ \pi > 0\}$. Ce qui prouve l'assertion 3.

Le résultat suivant est une partie du théorème de rectilinéarisation de Hironaka. Il relie les sous-analytiques aux semi-analytiques via des composés d'éclatements locaux.

2.4. THÉORÈME DE RECTILINÉARISATION. — *Un sous-ensemble sous-analytique S de N est union localement finie de sous-ensembles S_i qui sont les images de semi-analytiques relativement compacts A_i par des morphismes $\pi_i : N_i \rightarrow N$ composés d'éclatements locaux à centres lisses.*

3. Finitude uniforme

Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème de finitude uniforme de [Mo-Ro]₂.

THÉORÈME DE FINITUDE UNIFORME. — *Soit X un sous-ensemble semi-analytique relativement compact de N . Si $H = (V, \mathcal{F}, M)$ est une hypersurface pfaffienne qui a la propriété de Rolle, alors le nombre de composantes connexes $b_0(V \cap X)$ de $V \cap X$ est majoré par un entier n_0 qui ne dépend que de $\mathcal{F}, M, X$.*

On déduit immédiatement de la définition de feuille de Rolle et de ce théorème que l'intersection d'une feuille de Rolle et d'un ouvert semi-analytique de N est une réunion localement finie de feuilles de Rolle. Le corollaire suivant qui précise le théorème est une conséquence d'un résultat plus général de [Li-Ro] et [Li]₁.

COROLLAIRE 1. — *Soient X, Y deux sous-ensembles semi-analytiques de N , avec X relativement compact. Alors il existe un entier n_1 qui ne dépend que de $\mathcal{F}, M, X, Y$ tel que pour toute hypersurface pfaffienne $H = (V, \mathcal{F}, M)$ qui a la propriété de Rolle on ait :*

$$b_0((\overline{V \cap X}) \cap Y) \leq n_1.$$

Pour prouver l'assertion (ii) énoncée dans l'introduction nous serons amenés à considérer des sous-ensembles sous-analytiques. L'extension suivante au cadre sous-analytique des résultats de finitude précédents nous sera alors utile.

COROLLAIRE 2. — *Soient X, Y deux sous-ensembles sous-analytiques de N où X est relativement compact. Alors il existe des entiers n_0, n_1 qui ne dépendent que de $\mathcal{F}, M, X$ (et Y pour n_1), tels que :*

$$b_0(X \cap V) < n_0, \quad b_0((\overline{X \cap V}) \cap Y) < n_1$$

si $H = (V, \mathcal{F}, M)$ est une hypersurface pfaffienne qui a la propriété de Rolle.

Démonstration. – Il existe un entier q_1 et un semi-analytique X_1 de $N \times \mathbf{R}^{q_1}$ relativement compact tel que X soit l'image de X_1 par la projection π_1 de $N \times \mathbf{R}^{q_1}$ sur N . Puisque $Y_1 = \overline{X}_1 \cap \pi_1^{-1}(Y)$ est encore un sous-analytique relativement compact de $N \times \mathbf{R}^{q_1}$, il existe $q_2 \in N$ et un ouvert semi-analytique relativement compact Y_2 de $N \times \mathbf{R}^{q_1+q_2}$ tel que :

$$\pi_2(Y_2) = Y_1, \quad Y_2 \subset X_2 = \overline{X}_1 \times [-1, 1]^{q_2}$$

où π_2 est la projection de $N \times \mathbf{R}^{q_1+q_2}$ sur $N \times \mathbf{R}^{q_1}$. Posons :

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_2, \quad \mathcal{F}' = \pi^*(\mathcal{F}), \quad V' = \pi^{-1}(V), \quad M' = \pi^{-1}(M).$$

Alors $H' = (V', \mathcal{F}', M')$ est une hypersurface de Pfaff qui satisfait à la condition de Rolle et on a :

$$\pi(V' \cap X_2) = V \cap X, \quad \pi((\overline{V'} \cap \overline{X_2}) \cap Y_2) = (\overline{V} \cap \overline{X}) \cap Y.$$

Il suffit pour conclure d'appliquer les résultats de finitude précédents à $N' = N \times \mathbf{R}^{q_1+q_2}$, $\mathcal{F}'$, X_2 , Y_2 .

III. Premières propriétés des $\mathcal{F}$ -ensembles

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés des $\mathcal{F}$ -ensembles qui découlent des théorèmes de finitude, de rectilinéarisation des sous-analytiques et d'un théorème de stratification des applications de Hardt. Après avoir déduit de la définition des $\mathcal{F}$ -ensembles des propriétés élémentaires de finitude et de connexité nous donnons une caractérisation locale des $\mathcal{F}$ -ensembles et nous montrons qu'un $\mathcal{F}$ -ensemble est localement connexe par arcs. L'argument essentiel est alors le théorème de finitude. Ensuite, en utilisant le théorème de rectilinéarisation des sous-analytiques on prouve l'assertion (i) de l'introduction :

(i) *L'intersection $W \cap X$ d'un $\mathcal{F}$ -ensemble W avec un sous-ensemble sous-analytique X de N est encore un $\mathcal{F}$ -ensemble.*

Le théorème de stratification des applications nous permettra ensuite de prouver l'assertion (ii) de l'introduction.

(ii) *Un $\mathcal{F}$ -ensemble W est une union localement finie de sous-ensembles lisses qui sont encore des $\mathcal{F}$ -ensembles.*

Enfin nous montrerons que, si W est un $\mathcal{F}$ -ensemble, $W \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ est la réunion d'une famille localement finie de $\mathcal{F}$ -ensembles W_i , où chaque W_i est une composante connexe de l'intersection d'une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle avec un sous-analytique de N .

1. Conséquences immédiates de la définition des $\mathcal{F}$ -ensembles

Dans tout ce chapitre, N désigne un espace analytique réel non singulier et $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de N . Rappelons que :

Un sous-ensemble W de N est un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire s'il existe un morphisme admissible $\Delta = (\delta, \alpha)$ et une $\Delta^(\mathcal{F})$ -feuille de Rolle $(V, \Delta^*(\mathcal{F}), M)$ tels que $W = \delta(V)$*

et la restriction de δ à $\bar{V}$ soit propre. Un $\mathcal{F}$ -ensemble est une union localement finie de $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires.

Dans la définition de $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire on peut supposer, quitte à restreindre l'ouvert semi-analytique M , que la restriction de δ à $\bar{M}$ (et non plus seulement la restriction de δ à $\bar{V}$) est propre. En effet, considérons un recouvrement localement fini de $\bar{V}$ par des ouverts semi-analytiques relativement compacts U_i , et notons M' l'ouvert semi-analytique

$$M' = \bigcup_i U_i \cap M.$$

Alors $(V, \Delta^*(\mathcal{F}), M')$ est une $\Delta^*(\mathcal{F})$ -feuille de Rolle et la restriction de δ à $\bar{M}'$ est propre.

On déduit de la connexité et de la connexité par arcs des feuilles de Rolle des propriétés similaires pour les $\mathcal{F}$ -ensembles :

- Un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire est connexe par arcs car c'est l'image par une application continue d'un ensemble connexe par arcs.
- Un $\mathcal{F}$ -ensemble relativement compact a un nombre fini de composantes connexes car c'est une union finie de $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires.
- Chaque composante connexe d'un $\mathcal{F}$ -ensemble est un $\mathcal{F}$ -ensemble.

La connexité locale par arcs des $\mathcal{F}$ -ensembles est plus difficile à établir. Sa preuve repose sur un "curve selection lemma" pfaffien et la caractérisation locale des $\mathcal{F}$ -ensembles : elle sera donnée dans le paragraphe suivant.

Remarquons enfin que si $\Delta = (\delta, \alpha)$ est un morphisme admissible alors l'image $\delta(W')$ d'un $\Delta^*(\mathcal{F})$ -ensemble W' est un $\mathcal{F}$ -ensemble dès que la restriction de δ à $\bar{W}'$ est propre. En effet, le composé de deux morphismes admissibles est un morphisme admissible et le composé de deux applications propres est une application propre. Nous utiliserons très souvent dans la suite cet argument pour prouver qu'un ensemble W est un $\mathcal{F}$ -ensemble. Nous le signalerons par l'expression suivante : "*par l'argument d'image directe W est un $\mathcal{F}$ -ensemble*".

2. Caractérisation locale des $\mathcal{F}$ -ensembles

Le concept de $\mathcal{F}$ -ensemble est local. Plus précisément, on a :

2.1. PROPOSITION. – *Un sous-ensemble W de N est un $\mathcal{F}$ -ensemble si et seulement s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

- (i) *Pour tout ouvert U de N , $W \cap U$ est un $\mathcal{F}_U$ -ensemble.*
- (ii) *Tout point a de N possède un voisinage ouvert U_a tel que $W \cap U_a$ soit un $\mathcal{F}_{U_a}$ -ensemble.*

Nous allons déduire cette proposition des deux lemmes suivants :

LEMME 1. – *L'intersection $W \cap X$ d'un $\mathcal{F}$ -ensemble W avec un ouvert semi-analytique relativement compact X est un $\mathcal{F}$ -ensemble.*

LEMME 2. – *Soient U un ouvert de N et $W \subset N$ un sous-ensemble dont l'adhérence $\bar{W}$ est contenue dans U . Alors W est un $\mathcal{F}$ -ensemble si et seulement si c'est un $\mathcal{F}_U$ -ensemble.*

2.2. PREUVE DE LA PROPOSITION. – Soit W un sous-ensemble de N . S'il vérifie (i) c'est un $\mathcal{F}$ -ensemble (prendre $U = N$) et si c'est un $\mathcal{F}$ -ensemble il vérifie (ii) (prendre pour

$a \in N$, $U_a = N$). Supposons que W vérifie (ii) et montrons qu'il vérifie (i). Soit U un ouvert de N . Il existe deux recouvrements localement finis de U par des ouverts $X_i \subset Y_i \subset U$ et une suite (a_i) de points de N tels que $\bar{X}_i \subset Y_i \subset U_{a_i}$ où X_i est un ouvert semi-analytique relativement compact de Y_i . L'intersection $W \cap U_{a_i}$ est un $\mathcal{F}_{U_{a_i}}$ -ensemble et X_i est un ouvert semi-analytique relativement compact de U_{a_i} . D'après le lemme 1

$$W \cap X_i = (W \cap U_{a_i}) \cap X_i$$

est un $\mathcal{F}_{U_{a_i}}$ -ensemble. Puisque

$$\overline{W \cap X_i} \subset Y_i \subset U$$

le sous-ensemble $W \cap X_i$ est un $\mathcal{F}_{Y_i}$ -ensemble et un $\mathcal{F}_U$ -ensemble d'après le lemme 2. Le sous-ensemble $W \cap U$ de U qui est la réunion de la famille localement finie des $\mathcal{F}_U$ -ensembles $W \cap X_i$ est un $\mathcal{F}_U$ -ensemble.

2.3. PREUVE DU LEMME 1. – Il suffit de considérer le cas où W est un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire. Il existe alors un morphisme admissible $\Delta = (\delta, \alpha)$ et une feuille de Rolle $(V, \Delta^*(\mathcal{F}), M)$ tels que $W = \delta(V)$ et tels que la restriction de δ à $\bar{M}$ soit propre. L'ouvert semi-analytique $M' = M \cap \delta^{-1}(X)$ est relativement compact. D'après le théorème de finitude $V \cap M'$ a un nombre fini de composantes connexes $V_1, \dots, V_p$. De plus les $(V_i, \Delta^*(\mathcal{F}), M')$ sont des feuilles de Rolle. Par conséquent, les $\delta(V_i)$ sont des $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires et

$$W \cap X = \delta(V_1) \cup \dots \cup \delta(V_p)$$

est un $\mathcal{F}$ -ensemble.

2.4. PREUVE DU LEMME 2. – Supposons que W soit un $\mathcal{F}_U$ -ensemble et soit j l'inclusion de U dans N . Alors $\Delta = (j, \{j\})$ est un morphisme admissible et la restriction de j à $\bar{W}$ est propre et $W = j(W)$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble. Réciproquement supposons que W soit un $\mathcal{F}$ -ensemble. En considérant la restriction à U des morphismes admissibles associés aux $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires W_i dont la réunion est W on constate que les W_i sont des $\mathcal{F}_U$ -ensembles élémentaires. Ainsi W est un $\mathcal{F}_U$ -ensemble.

La connexité locale des $\mathcal{F}$ -ensembles est une conséquence du "caractère local" des $\mathcal{F}$ -ensembles que nous avons vu avec la proposition 2.1. de ce chapitre.

2.5. PROPOSITION. – *Les $\mathcal{F}$ -ensembles sont localement connexes par arcs.*

Preuve. – Soient W un $\mathcal{F}$ -ensemble et a un point de W . Le point a admet une base de voisinages ouverts semi-analytiques relativement compacts. Soit U un ouvert de cette base. L'intersection $W \cap U$ est une union finie de $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires

$$W_1 = \delta_1(V_1), \dots, W_p = \delta_p(V_p).$$

Les W_i sont connexes par arcs et l'un d'eux au moins contient a . Par conséquent, la composante connexe C de $W \cap U$ qui contient a est l'union de certains W_i . Pour montrer

que C est connexe par arcs, il suffit de montrer que si un point b de C appartient à $\overline{W}_i$, il existe un arc continu γ vérifiant :

$$\gamma : [0, 1[\rightarrow \overline{W}_i, \quad \gamma(0) = b, \quad \gamma([0, 1[) \subset W_i.$$

Or si $b \in \overline{W}_i$, il existe $b' \in \overline{V}_i$ tel que $\delta(b') = b$ puisque δ restreinte à $\overline{V}_i$ est propre. D'après le curve selection lemma pfaffien [Li]₁, [Li-Ro], il existe un arc continu

$$\gamma' : [0, 1[\rightarrow \overline{V}_i, \quad \gamma'(0) = b', \quad \gamma'([0, 1[) \subset V_i.$$

L'arc $\delta \circ \gamma'$ est l'arc γ recherché.

3. Intersection d'un $\mathcal{F}$ -ensemble et d'un sous-analytique

Dans ce paragraphe, $\mathcal{F}$ désigne un feuilletage singulier d'un ensemble analytique réel non singulier N .

3.1. PROPOSITION. – *L'intersection d'un $\mathcal{F}$ -ensemble et d'un sous-ensemble sous-analytique est encore un $\mathcal{F}$ -ensemble.*

La preuve de cette proposition repose sur deux lemmes. Le résultat du premier est intéressant en soi.

LEMME 1. – *Tout sous-ensemble semi-analytique de N inclus dans le lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble.*

Remarque. – Tout sous-ensemble sous-analytique de N inclus dans $\text{Sing } \mathcal{F}$ est encore un $\mathcal{F}$ -ensemble d'après le lemme et la proposition. Cette assertion amène naturellement la question suivante : les sous-ensembles sous-analytiques contenus dans $\text{Sing } \mathcal{F}$ sont-ils les seuls $\mathcal{F}$ -ensembles contenus dans $\text{Sing } \mathcal{F}$? La réponse est positive si $\mathcal{F} \equiv 0$ puisque l'image réciproque du feuilletage dégénéré par un morphisme admissible est un feuilletage dégénéré. Nous verrons dans le paragraphe 5 en reprenant un exemple de [Li]₁, [Li-Ro] que ce n'est pas toujours le cas. Dans ce même paragraphe, nous décrivons la structure des $\mathcal{F}$ -ensembles en dehors de $\text{Sing } \mathcal{F}$ avec la proposition 5.1. C'est, en quelque sorte, une réciproque de la proposition 3.1. en dehors du lieu singulier.

LEMME 2 (DE L'IMAGE RÉCIPROQUE). – *Soit $(V, \mathcal{F}, M)$ une feuille de Rolle dans N , soit $\Delta = (\delta, \alpha)$ un morphisme admissible et soit $\mathcal{F}' = \Delta^*(\mathcal{F})$. Alors $\delta^{-1}(V)$ est la réunion d'une famille localement finie de $\mathcal{F}'$ -feuilles de Rolle et d'un semi-analytique contenu dans $\text{Sing } \mathcal{F}'$. C'est un $\mathcal{F}'$ -ensemble.*

Ce lemme est encore vrai si on remplace le morphisme admissible Δ par un morphisme analytique $\delta : N' \rightarrow N$ et si l'on pose $\mathcal{F}' = \delta^*(\mathcal{F})$. Par contre il ne se généralise pas aux $\mathcal{F}$ -ensembles : "l'image réciproque $\delta^{-1}(W)$ d'un $\mathcal{F}$ -ensemble W par un morphisme admissible $\Delta = (\delta, \alpha)$ n'est pas en général un $\Delta^*(\mathcal{F})$ -ensemble" comme le prouve l'exemple suivant.

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage singulier de $\mathbf{R}^2$ de l'exemple I.1.3. : $\mathcal{F}$ est engendré par $\omega = xdy - ydx$, $\text{Sing } \mathcal{F}$ est l'origine 0 de $\mathbf{R}^2$, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les demi-droites ouvertes issues de 0. Soit $\delta : N' \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'éclatement de centre le point 0. Le feuilletage $\delta^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ n'a pas de point singulier et il est transverse au diviseur exceptionnel $\delta^{-1}(0) = D$. C'est un sous-ensemble semi-analytique compact de N' qui rencontre une

infinité de feuilles de $\mathcal{F}'$. D'après le corollaire 5.1. de ce chapitre D n'est pas un $\mathcal{F}'$ -ensemble bien que le point 0 soit un $\mathcal{F}$ -ensemble d'après la proposition 3.1.

Ce type de phénomène, lié à la "dicriticité" du feuilletage $\mathcal{F}$ (voir [Ca]_{1,2,3}, [Ca-Ma]), complique évidemment l'étude des $\mathcal{F}$ -ensembles et montre qu'il sera difficile de faire une "théorie des $\mathcal{F}$ -ensembles". En particulier la dicriticité est la cause de la non sous-analycité des $\mathcal{F}$ -ensembles contenus dans le lieu singulier. On le verra avec le théorème d'équiréduction générique (IV.2.3.), le cas dicritique dans la preuve du théorème (V.7.) et surtout l'exemple du paragraphe 3.5. repris dans V.8.

3.2. PREUVE DE LA PROPOSITION. – Les hypothèses et la conclusion de la proposition sont clairement locales. Il suffit de prouver que $W \cap X$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble lorsque :

- X est un sous-ensemble sous-analytique relativement compact de N .
- W est un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire.

Soit $\Delta = (\delta, \alpha)$ (avec $\delta : N' \rightarrow N$) le morphisme admissible et soit $(V, \Delta^*(\mathcal{F}), M)$ la feuille de Rolle définissant W : on a $W = \delta(V)$ et M est un ouvert semi-analytique relativement compact de N' . Notons $\mathcal{F}' = \Delta^*(\mathcal{F})$.

Le sous-ensemble $X' = \delta^{-1}(X) \cap M$ est un sous-ensemble sous-analytique relativement compact de N' . La restriction de δ à $\overline{V \cap X'}$ est encore propre. D'après l'argument d'image directe il suffit de prouver que $V \cap X'$ est un $\mathcal{F}'$ -ensemble.

Les théorèmes de rectilinéarisation (II.2.4.), stratification (II.1.) et enfin le théorème de désingularisation des feuillet normaux (II.2.3.) impliquent clairement qu'il existe des morphismes admissibles

$$\Delta_i = (\delta_i, \alpha_i), \quad \delta_i : N_i \rightarrow N, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

et pour chaque i un ouvert semi-analytique relativement compact X_i de N_i tels que

$$X' = \bigcup_{i=1}^p \delta_i(X_i).$$

Les $\delta_i^{-1}(V)$ sont des $\Delta_i^*(\mathcal{F}')$ -ensembles d'après le lemme 2. Leurs intersections $\delta_i^{-1}(V) \cap X_i$ avec les ouverts semi-analytiques X_i sont encore des $\Delta_i^*(\mathcal{F}_i)$ -ensembles. Les images $\delta_i(\delta_i^{-1}(V) \cap X_i)$ sont des $\mathcal{F}'$ -ensembles puisque les restrictions des δ_i aux $\delta_i^{-1}(V) \cap X_i$ sont propres. Ainsi, la réunion

$$V \cap X' = \bigcup_{i=1}^p \delta_i(\delta_i^{-1}(V) \cap X_i)$$

est encore un $\mathcal{F}'$ -ensemble.

3.3. PREUVE DU LEMME 1. – C'est un problème local. D'après le théorème de stratification des semi-analytiques en feuillet normaux, il suffit de prouver le résultat pour un feuillet normal Γ inclus dans $\text{Sing } \mathcal{F}$. D'après le théorème de désingularisation d'un feuillet normal, il existe un ouvert U contenant $\overline{\Gamma}$ et un morphisme $\delta : N' \rightarrow U$ composé d'une suite finie d'éclatements globaux à centres lisses $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1, \dots, k}$ qui induit un isomorphisme de $\delta^{-1}(\Gamma)$ sur Γ . De plus il existe une sous-variété analytique fermée Z de N' telle que

$\delta^{-1}(\Gamma)$ soit un ouvert semi-analytique de Z . Notons α_0 l'inclusion de U dans N et α_{k+1} l'inclusion de Z dans N' . Alors

$$\Delta = (\delta', \alpha'), \quad \delta' = \alpha_0 \circ \delta \circ \alpha_{k+1}, \quad \alpha' = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}\}$$

est un morphisme admissible et le feuilletage $\Delta^*(\mathcal{F})$ est dégénéré car les centres des α_i ne coupent pas les transformés stricts de Γ . Ainsi $\delta'^{-1}(\Gamma)$ est un $\Delta^*(\mathcal{F})$ -ensemble et son image Γ est un $\mathcal{F}$ -ensemble.

3.4. PREUVE DU LEMME 2. – Supposons que le feuilletage $\mathcal{F}$ soit dégénéré. Le feuilletage $\mathcal{F}'$ l'est aussi et V est un ouvert semi-analytique de N . Ainsi $\delta^{-1}(V)$ est un ouvert semi-analytique de N' . C'est un $\mathcal{F}'$ -ensemble.

Supposons que le feuilletage $\mathcal{F}$ ne soit pas dégénéré et notons

$$\mathcal{F}' = \Delta^*\mathcal{F}, \quad M_1 = \delta^{-1}(M) \cap \text{Sing } \mathcal{F}', \quad M_2 = \delta^{-1}(M) \setminus \text{Sing } \mathcal{F}'.$$

Puisque $M \cap \text{Sing } \mathcal{F}$ est vide, l'image par δ de chaque composante connexe du semi-analytique M_1 est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$. Par conséquent, $\delta^{-1}(V) \cap M_1$ est une union de composantes connexes de M_1 . C'est un semi-analytique inclus dans $\text{Sing } \mathcal{F}'$. C'est un $\mathcal{F}'$ -ensemble d'après le lemme 1.

Le semi-analytique M_2 est la réunion d'une famille localement finie d'ouverts semi-analytiques relativement compacts simplement connexes U_i , $i \in I$. Montrons que pour chaque indice i , $U_i \cap \delta^{-1}(V)$ est une union finie de $\mathcal{F}'$ -feuilles de Rolle. C'est un ensemble analytique fermé de U_i de codimension au moins un puisque V est une hypersurface analytique fermée de M et que δ est génériquement transverse à V . De plus, c'est évidemment une union de feuilles de $\mathcal{F}'_{U_i}$. Ce sont des $\mathcal{F}'$ -feuilles de Rolle puisque U_i est simplement connexe.

Il reste à montrer que $U_i \cap \delta^{-1}(V)$ a un nombre fini de composantes connexes. Notons $G \subset N' \times N$ le graphe de δ . C'est un sous-ensemble semi-analytique de $N' \times N$. Soient π_N et $\pi_{N'}$ les projections canoniques de $N \times N'$ sur N et N' . Le sous-ensemble $\pi_{N'}^{-1}(U_i) \cap G$ est un sous-ensemble semi-analytique relativement compact de $N' \times N$ et $N' \times V$ est une $\pi_N^*(\mathcal{F})$ -feuille de Rolle. D'après le théorème de finitude le nombre de composantes connexes de $(\pi_{N'}^{-1}(U_i) \cap G) \cap (N' \times V)$ est fini. Il en est de même pour son image $U_i \cap \delta^{-1}(V)$ par la projection $\pi_{N'}$.

4. Régularité des $\mathcal{F}$ -ensembles

Ce paragraphe a pour objet la preuve de la propriété (ii) énoncée dans l'introduction. C'est-à-dire la proposition suivante :

4.1. PROPOSITION. – *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de N . Les $\mathcal{F}$ -ensembles sont des unions localement finies de sous-variétés analytiques lisses qui sont encore des $\mathcal{F}$ -ensembles.*

Nous allons tout d'abord montrer que cette proposition est une conséquence du lemme suivant :

LEMME. – *Soit π un morphisme analytique d'un espace analytique non singulier N' dans N , soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage analytique singulier de N' , soit M un ouvert semi-analytique*

relativement compact de N' et soit enfin X un sous-ensemble sous-analytique de N' qui est inclus dans M . Il existe une partition finie $\mathcal{P}$ de X dont les éléments Γ vérifient :

- (i) Γ est une sous-variété sous-analytique de N' adaptée à $\mathcal{F}'$.
- (ii) $\pi(\Gamma)$ est une sous-variété sous-analytique de N et la restriction de π à Γ est une fibration analytiquement triviale de base $\pi(\Gamma)$ et dont la fibre est isomorphe à $\mathbf{R}^k$ pour un certain k .
- (iii) Le feuilletage induit par $\mathcal{F}'$ sur Γ est soit tangent soit transverse à cette fibration.
- (iv) Si $(V, \mathcal{F}', M)$ est une feuille de Rolle alors $\pi(V \cap \Gamma)$ est une sous-variété analytique de N .

Preuve de la proposition. – Il s'agit de prouver un résultat local sur les $\mathcal{F}$ -ensembles. Il suffit de le prouver pour un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire relativement compact W . Soit $\Delta = (\delta, \alpha)$ le morphisme admissible et soit $(V, \Delta^*(\mathcal{F}), M)$ la feuille de Rolle qui définissent W : on a $W = \delta(V)$ et M est un ouvert semi-analytique relativement compact de N' . En appliquant le lemme avec

$$\pi = \delta, \quad \mathcal{F}' = \Delta^*(\mathcal{F}), \quad M = X$$

on obtient une partition finie de M en sous-ensembles sous-analytiques M_i telle que $\delta(V \cap M_i)$ soit une sous-variété lisse analytique de N pour chaque i . D'après l'argument de l'image directe les images $\delta(V \cap M_i)$ sont des $\mathcal{F}$ -ensembles. Ainsi, $W = \delta(V)$ est l'union finie des sous-variétés lisses $\delta(V \cap M_i)$ qui sont des $\mathcal{F}$ -ensembles.

4.2. PREUVE DU LEMME. – Cette preuve repose sur le théorème de stratification des applications de Hardt. En fait, nous n'en utiliserons que la version simplifiée suivante :

THÉORÈME DE STRATIFICATION DES APPLICATIONS [Har]. – Soit X un sous-ensemble sous-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$ et soit π un morphisme analytique de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$. Il existe une stratification sous-analytique $\mathcal{S} = \{\Gamma_i\}$ de X telle que pour chaque i l'image $\pi(\Gamma_i)$ soit une sous-variété (lisse) sous-analytique de X et telle que la restriction $\pi_{i,j}$ de π à Γ_i soit analytiquement isomorphe à la projection de $\pi(\Gamma_i) \times \mathbf{R}^{n_i}$ sur $\pi(\Gamma_i)$ où

$$n_i = \dim \Gamma_i - \dim \pi(\Gamma_i).$$

Preuve du lemme. – L'ouvert semi-analytique M relativement compact est une réunion finie d'ouverts semi-analytiques relativement compacts M_i qui possèdent les propriétés suivantes pour chaque i :

- M_i est contenu dans une carte analytique sur N' .
- $\mathcal{F}'$ est défini par une 1-forme différentielle sur M_i .
- $\pi(M_i)$ est contenu dans une carte analytique sur N .

Ainsi, il suffit de prouver le lemme lorsque $N' = \mathbf{R}^n$, $N = \mathbf{R}^m$, M est un ouvert semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{F}'$ est un feuilletage singulier de $\mathbf{R}^n$ globalement défini par une 1-forme ω .

Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de X . Lorsque $\dim X = 0$, X est un ensemble fini de point de $\mathbf{R}^n$ et le résultat est vrai pour X . Il suffit de prouver que pour tout X de dimension strictement positive il existe un sous-analytique X' contenu dans X de dimension strictement inférieure tel que la conclusion du lemme soit vraie sur $X \setminus X'$.

Soit $\mathcal{T}$ une stratification sous-analytique finie de X adaptée à toute sous-famille de la famille $\Omega = (\omega, d\pi_1, \dots, d\pi_m)$ où les π_k sont les applications coordonnées associées à π . Soit Γ_i une strate de $\mathcal{T}$. D'après le théorème de stratification de Hardt, il existe une stratification sous-analytique finie $\mathcal{S}_i = \{\Gamma_{i,j}\}$ de Γ_i telle que pour chaque j , $\pi(\Gamma_{i,j})$ soit une sous-variété sous-analytique de $\mathbf{R}^m$ et $\pi : \Gamma_{i,j} \rightarrow \pi(\Gamma_{i,j})$ soit analytiquement équivalent à la projection canonique :

$$\pi : (\Gamma_{i,j}) \times \mathbf{R}^{n_{i,j}} \rightarrow \pi(\Gamma_{i,j}), \quad n_{i,j} = \dim \Gamma_{i,j} - \dim \pi(\Gamma_{i,j}).$$

On note X' le sous-analytique de $\mathbf{R}^n$ réunion des strates $\Gamma_{i,j}$ de dimension strictement inférieure à la dimension de X . Montrons que $X \setminus X'$ associé à la partition

$$\mathcal{P} = \{\Gamma_{i,j} / \dim \Gamma_{i,j} = \dim X\}$$

vérifie les conclusions du lemme pour toute $\mathcal{F}'$ -feuille de Rolle dans M . Fixons $\Gamma_{i,j}$ et notons $\pi_{i,j}$ la submersion

$$\pi_{i,j} = \pi|_{\Gamma_{i,j}} : \Gamma_{i,j} \rightarrow \pi(\Gamma_{i,j}).$$

Puisque $\Gamma_{i,j}$ est un ouvert d'une strate Γ_i de $\mathcal{T}$, $\Gamma_{i,j}$ est, comme Γ_i , adaptée à toute sous-famille de Ω . En particulier $\Gamma_{i,j}$ est adaptée à $\mathcal{F}'$ et il peut se présenter deux cas :

- $\mathcal{F}'$ est tangent à $\Gamma_{i,j}$. Si V est une $\mathcal{F}'$ -feuille qui rencontre $\Gamma_{i,j}$, alors elle contient $\Gamma_{i,j}$ et $\pi(V \cap \Gamma_{i,j}) = \pi(\Gamma_{i,j})$ est une sous-variété d'après le théorème de Hardt.
- $\mathcal{F}'$ est transverse à $\Gamma_{i,j}$ et alors $\mathcal{F}'$ induit un feuilletage $\mathcal{F}'_{i,j}$ de codimension un non singulier de $\Gamma_{i,j}$. Si V est une $\mathcal{F}'$ -feuille de Rolle, $V \cap \Gamma_{i,j}$ est une union finie de feuilles de Rolle V'_k , $k = 1, 2, \dots, \ell$, de $\mathcal{F}'_{i,j}$ d'après le théorème de finitude. Puisque $\Gamma_{i,j}$ est adaptée à toute sous-famille de Ω on distingue de nouveau deux sous-cas :

a) Les feuilles de $\mathcal{F}'_{i,j}$ sont transverses à $\pi_{i,j}$. Alors les $\pi_{i,j}(V'_k)$ sont des sous-variétés ouvertes de $\pi(\Gamma_{i,j})$.

b) Les feuilles de $\mathcal{F}'_{i,j}$ sont tangentes aux fibres de $\pi_{i,j}$. Alors $\mathcal{F}'_{i,j}$ est l'image réciproque par $\pi_{i,j}$ d'un feuilletage analytique $\mathcal{F}_{i,j}$ de codimension un de $\pi(\Gamma_{i,j})$. Modulo l'isomorphisme décrit dans le théorème de Hardt, les feuilles V'_k sont les produits $V_k \times \mathbf{R}^{n_i}$ où V_k est une feuille de Rolle de $\mathcal{F}_{i,j}$. En particulier

$$\pi(V \cap \Gamma_{i,j}) = \bigcup_{k=1}^{\ell} V_k$$

est une sous-variété analytique de codimension un de $\pi(\Gamma_{i,j})$.

Dans les deux cas, $\pi(V \cap \Gamma_{i,j})$ est une sous-variété analytique de la variété $\pi(\Gamma_{i,j})$, c'est une sous-variété de $\mathbf{R}^m = N$.

5. Structure des $\mathcal{F}$ -ensembles en dehors du lieu singulier

Une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle étant un $\mathcal{F}$ -ensemble, les composantes connexes de l'intersection d'une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle et d'un sous-analytique sont des $\mathcal{F}$ -ensembles. Réciproquement, on peut décrire les $\mathcal{F}$ -ensembles en dehors du lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$ à l'aide de ces $\mathcal{F}$ -ensembles particuliers.

5.1. PROPOSITION. – Si W est un $\mathcal{F}$ -ensemble, le $\mathcal{F}$ -ensemble $W \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ est la réunion d'une famille localement finie de $\mathcal{F}$ -ensembles W_i du type suivant : chaque W_i est une composante connexe de l'intersection $V_i \cap X_i$ d'une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle V_i avec un sous-ensemble sous-analytique X_i .

Le corollaire suivant se déduit de la proposition précédente. C'est une caractérisation des sous-ensembles sous-analytiques qui sont des $\mathcal{F}$ -ensembles.

COROLLAIRE. – Un sous-ensemble sous-analytique X de N est un $\mathcal{F}$ -ensemble si et seulement si $X \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ est contenu dans une union localement finie de $\mathcal{F}$ -feuilles de Rolle. De plus, son adhérence $\bar{X}$ est alors un $\mathcal{F}$ -ensemble.

La structure des $\mathcal{F}$ -ensembles contenus dans $\text{Sing } \mathcal{F}$ est plus compliquée. Nous avons vu avec la proposition 3.1. que les sous-ensembles sous-analytiques contenus dans $\text{Sing } \mathcal{F}$ sont des $\mathcal{F}$ -ensembles. Mais la réciproque est fautive comme le prouve l'exemple suivant. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage singulier de $\mathbf{R}^4$ engendré par la 1-forme algébrique

$$\omega = 2xtz^2(ydx - xdy) + y^3(tdz - z^2dt).$$

La fonction analytique f définie sur $M = \{y > 0, z > 0, t > 0\}$ par

$$f(x, y, z, t) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{1}{z} - \text{Log } t$$

est une intégrale première de ω sur M . Le lieu singulier de $\mathcal{F}$ est le sous-ensemble

$$\text{Sing } \mathcal{F} = \{y = xzt = 0\} \cup \{z = t = 0\}.$$

L'intersection de l'adhérence de la $\mathcal{F}$ -feuille $V = f^{-1}(0)$ avec le lieu singulier de $\mathcal{F}$ est le sous-ensemble :

$$\bar{V} \cap \text{Sing } \mathcal{F} = \{z = ty = 0, y, t, \geq 0\} \cup \{x = y = 0, z \geq 0, t \geq \exp(-1/z)\}.$$

C'est un $\mathcal{F}$ -ensemble d'après le théorème principal mais ce n'est pas un sous-ensemble sous-analytique de $\mathbf{R}^4$.

5.2. PREUVE DU COROLLAIRE. – La proposition précédente implique que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si $X \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ est inclus dans la réunion d'une famille localement finie de $\mathcal{F}$ -feuilles de Rolle V_i , alors, les $X \cap V_i$ étant des $\mathcal{F}$ -ensembles d'après la proposition 3.1 :

$$X = (X \cap \text{Sing } \mathcal{F}) \cup \left(\bigcup_i (X \cap V_i) \right)$$

est la réunion d'une famille localement finie de $\mathcal{F}$ -ensembles. C'est un $\mathcal{F}$ -ensemble.

Montrons que $\overline{X}$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble. Soit (U_i) une famille localement finie d'ouverts semi-analytiques relativement compacts simplement connexes de N dont la réunion est $N \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$. Il suffit de montrer que $\overline{X} \cap U_i$ est inclus dans une union finie de $\mathcal{F}$ -feuilles de Rolle. Puisque U_i est un ouvert semi-analytique relativement compact qui ne rencontre pas $\text{Sing } \mathcal{F}$, $X \cap U_i$ est inclus dans une réunion finie de feuilles $V_1, \dots, V_p$ du feuilletage non singulier $\mathcal{F}_{U_i}$. Ce sont des $\mathcal{F}$ -feuilles de Rolle puisque U_i est simplement connexe. Elles sont fermées dans U_i . Ainsi, le sous-analytique $\overline{X} \cap U_i$ qui est inclus dans $V_1 \cup \dots \cup V_p$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble.

5.3. PREUVE DE LA PROPOSITION. – L'ouvert semi-analytique $N \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ est la réunion d'une famille localement finie d'ouverts semi-analytiques relativement compacts simplement connexes. Le problème étant local, on peut supposer que W est un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire inclus dans l'un d'eux noté U . Soit $\Delta = (\delta, \alpha)$ le morphisme admissible $(\delta : N' \rightarrow N)$ et $(V', \Delta^*(\mathcal{F}), M)$ la $\Delta^*(\mathcal{F})$ -feuille de Rolle qui définissent $W = \delta(V')$. Soit V la feuille de $\mathcal{F}_U$ qui contient W . C'est une $\mathcal{F}_U$ -feuille de Rolle puisque U est simplement connexe. Soit $\mathcal{P} = (\Gamma_i)$ la partition de M obtenue en appliquant le lemme du paragraphe 4 avec

$$\pi = \delta, \quad \mathcal{F}' = \Delta^*(\mathcal{F}), \quad M = X'.$$

Il nous reste à montrer que si Γ_i est un élément de $\mathcal{P}$ alors $\delta(V' \cap \Gamma_i)$ est la réunion de composantes connexes de $V \cap \delta(\Gamma_i)$. La sous-variété sous-analytique Γ_i de N' étant adaptée au feuilletage $\mathcal{F}'$ on distingue comme dans le lemme de III.4.2. les cas :

- $\mathcal{F}'$ est tangent à Γ_i . Si V' rencontre Γ_i alors Γ_i est inclus dans V' et $\delta(\Gamma_i) = \delta(\Gamma_i \cap V')$ est inclus dans V .
- $\mathcal{F}'$ est transverse à Γ_i . Alors $\mathcal{F}'$ induit un feuilletage $\mathcal{F}'_i$ de codimension un non singulier de Γ_i . *A priori*, le feuilletage $\mathcal{F}'_i$ peut être tangent ou transverse aux fibres de la fibration triviale δ_i induite par δ de Γ_i sur la sous-variété sous-analytique $\delta(\Gamma_i)$ de N . Puisque $\delta^{-1}(V) \cap \Gamma_i$ est une union finie de $\mathcal{F}'_i$ feuille de Rolle, le feuilletage $\mathcal{F}'_i$ est nécessairement tangent à la fibration δ_i . Plus précisément, $\mathcal{F}'_i = \delta_i^*(\mathcal{F}_i)$ où $\mathcal{F}_i$ est le feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur $\delta(\Gamma_i)$. Les feuilles de $\mathcal{F}_i$ sont les images par δ des feuilles de $\mathcal{F}'_i$. L'intersection $V' \cap \Gamma_i$ est une union finie de feuilles de $\mathcal{F}'_i$ et l'intersection $V \cap \delta(\Gamma_i)$ est une union finie de feuilles de $\mathcal{F}_i$. Puisque $\delta(V' \cap \Gamma_i)$ est inclus dans $V \cap \delta(\Gamma_i)$ et puisque l'image d'une feuille de $\mathcal{F}'_i$ est une feuille de $\mathcal{F}_i$, $\delta(V' \cap \Gamma_i)$ est une union de composantes connexes de $V \cap \delta(\Gamma_i)$.

IV. Les deux arguments principaux

1. Lemme d'aile pfaffien

Ce résultat est un analogue pfaffien du lemme d'aile de Whitney [Wh]. On peut aussi le considérer comme un "selection curve lemma" pfaffien [Li]₁, [Li-Ro] à paramètres.

1.1. LEMME D'AILE. – Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier sur un espace analytique réel non singulier N , soit M un ouvert semi-analytique de N qui ne rencontre pas $\text{Sing } \mathcal{F}$ et soit Z un sous-ensemble semi-analytique de N de codimension supérieure ou égale à 3 contenu

dans le bord $\partial M = \overline{M} \setminus M$ de M . Il existe un sous-ensemble semi-analytique A de N de codimension supérieure ou égale à 1 tel que :

$$\overline{V} \cap Z = (\overline{V \cap A}) \cap Z$$

pour toute hypersurface pfaffienne de Rolle $(V, \mathcal{F}, M)$.

1.2. DÉMONSTRATION (voir aussi [Li]₂). – La conclusion du lemme étant de nature locale, il suffit de le prouver “au voisinage” d’un point a de l’adhérence de Z . Plus précisément, on peut supposer que :

- N est un sous-ensemble ouvert U de $\mathbf{R}^n$ qui est muni de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- $\mathcal{F}$ est défini par une 1-forme ω analytique sur U .
- M est un feuillet normal ouvert de U . C’est à dire qu’il existe une fonction analytique f sur U telle que M soit une composante connexe relativement compacte de $\{f > 0\}$ et $\partial M \subset \{f = 0\}$.
- Z est un feuillet normal dans U adapté aux coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. C’est-à-dire : il existe des fonctions analytiques $g_0, g_1, \dots, g_k$ sur U telles que Z soit une composante connexe relativement compacte du sous-ensemble semi-analytique formé des $x \in U$ tels que :

$$\begin{cases} g_0(x) > 0, & g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_k(x) = 0 \\ dg_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n(x) \neq 0, \end{cases}$$

et tel que le bord $\overline{Z} \setminus Z$ de Z soit contenu dans le sous-ensemble analytique $\{g_0 = 0\}$.

On peut en outre supposer que M est inclus dans le sous-ensemble semi-analytique $\{g_0 > 0\}$ puisqu’il s’agit d’étudier l’adhérence d’une feuille de Rolle en des points de Z .

Il existe clairement des fonctions affines (des coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$) $\lambda, u, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$, strictement positives sur $\overline{M}$ telles que si on pose :

$$f' = \lambda f, \quad g' = u(g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_k^2), \quad x'_j = x_j + \lambda_j g',$$

alors la $(n - k + 3)$ -forme

$$\beta = df' \wedge dg' \wedge dx'_{k+1} \wedge dx'_{k+2} \wedge \dots \wedge dx'_n \wedge \omega$$

n’est pas identiquement nulle et la n -forme

$$\gamma = dg_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k \wedge dx'_{k+1} \wedge \dots \wedge dx'_{k+2} \wedge \dots \wedge dx'_n$$

ne s’annule pas sur Z . Quitte à restreindre éventuellement U cette dernière condition signifie que $g_0, g_1, \dots, g_k$ vérifient encore les propriétés de présentation de Z comme feuillet normal dans U adapté aux coordonnées

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_k, x'_{k+1}, \dots, x'_n).$$

On peut en outre supposer que l’application h de M dans $\mathbf{R}^{n-k+1}$ définie par :

$$h(x') = (g'(x'), x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots, x'_n)$$

est de rang maximum sur $M \setminus \overline{Z}$. Si b est un point de M , la composante connexe H_b de $h^{-1}(b) \cap M$ contenant b est un semi-analytique non singulier de dimension $k - 1$ qui est fermé dans M . La condition $\beta \not\equiv 0$ s'interprète de la façon suivante. Le feuilletage (singulier) de M de codimension $(n - k + 2)$ induit par $\mathcal{F}$ sur les H_b , $b \in M$ n'est pas partout tangent au feuilletage défini par les hypersurfaces de niveau de f' . Nous allons montrer que l'ensemble A cherché est l'ensemble :

$$A = \{x \in M / \beta(x) = 0\}$$

des points de tangence de ces deux feuilletages. Plus précisément, montrons que si V est une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle dans M et que si b est un point de $\overline{V} \cap Z$, il existe une suite de points $\{c_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ de $V \cap A$ qui converge vers b . Soit $\{b_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de points de V qui convergent vers b . Notons H_r le semi-analytique $H_{b_r} \subset M$. La fonction f' est strictement positive sur H_r et elle est identiquement nulle sur son bord

$$\partial H_r = \overline{H_r} \setminus H_r \subset \partial M.$$

Puisque V est une feuille de Rolle, $V \cap H_r$ est un sous-ensemble fermé de H_r dans M relativement compact. La restriction de la fonction f' à $V \cap H_r$ est strictement positive, elle atteint son maximum en un point c_r . En ce point, le feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur H_r et l'hypersurface de niveau $f'^{-1}(c_r)$ ne se coupent pas transversalement. C'est-à-dire que c_r est un point de $A \cap V$. Enfin la suite $\{c_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ converge vers b . En effet, $c_r \in H_r$ et toute suite (u_r) vérifiant $u_r \in H_r$ converge vers b .

1.3. REMARQUE. — Ce lemme d'aile n'a de l'intérêt que lorsque b est un point de $\overline{Z} \cap \text{Sing } \mathcal{F}$. En effet, lorsque b n'appartient pas à $\text{Sing } \mathcal{F}$, on peut supposer que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les hypersurfaces de niveau d'une submersion analytique. Dans ce cas le germe de $\overline{V}$ en a est semi-analytique et les germes de $\overline{V} \setminus V$ et $(\overline{V} \setminus V) \cap Z$ en a le sont aussi. Cependant, la démonstration ci-dessus dégage bien les hypothèses et les arguments essentiels dans la preuve du lemme d'aile classique.

2. Équiréduction générique

Dans tout ce paragraphe, N désigne un espace analytique non singulier réel ou complexe et $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de N de lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$.

2.1. LIEU SINGULIER ADAPTÉ À UN DIVISEUR À CROISEMENTS NORMAUX. — Rappelons qu'un *diviseur à croisements normaux* D dans N est une réunion localement finie d'hypersurfaces analytiques non singulières D_j , $j \in J$, de N telle que quelque soit le point a de N il existe une carte $(U, x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ centrée en a dans laquelle D s'écrit :

$$D \cap U = \{x \in U / \prod_{i \in A} x_i = 0\}$$

où A est un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant

$$\#A = \{j \in J / a \in D_j\}.$$

Soit Δ une hypersurface lisse de N . On dit que Δ est une *composante dicritique* de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est génériquement transverse à Δ . Dans la cas contraire $\Delta \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ est une réunion de feuilles de $\mathcal{F}$ et on dit encore que Δ est une *composante non dicritique* de $\mathcal{F}$.

On dit que $\mathcal{F}$ et un diviseur D sont à *croisements normaux* en un point a si a n'est pas un point singulier de $\mathcal{F}$ et s'il existe un voisinage ouvert U de a tel que $(D \cap U) \cup V$ soit un diviseur à croisements normaux dans U où V est la feuille de $\mathcal{F}_U$ passant par a .

Le *lieu singulier adapté*, noté $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$, de $\mathcal{F}$ par rapport à un diviseur à croisements normaux D dans N est l'ensemble des points a de N tels que $\mathcal{F}$ et D ne sont pas à croisements normaux en a . Remarquons que, par définition, $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ contient $\text{Sing } \mathcal{F}$. Il est clair que $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ est un sous-ensemble analytique fermé de N de codimension supérieure ou égale à 2 : l'ensemble des points a de $\text{Sing}(\mathcal{F}, D) \cap D$ est un ensemble de codimension supérieure ou égale à 1 dans D .

2.2. DÉFINITION. – Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier sur N et soit D un diviseur à croisements normaux dans N . On dit qu'un point a du lieu singulier adapté $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ est une *singularité simple de type dimensionnel deux* si a est un point de $D \cap \text{Sing } \mathcal{F}$ tel qu'il existe une carte (U, x) centrée en a qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) Il existe un générateur ω de $\mathcal{F}$ au point a qui s'écrit dans les coordonnées $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\omega = a_1(x_1, x_2)dx_1 + a_2(x_1, x_2)dx_2,$$

où les jets d'ordre 1 de a_1, a_2 en 0 s'écrivent :

$$j^1 a_1(x_1, x_2) = \lambda x_2, \quad j^1 a_2(x_1, x_2) = -x_1 \quad \text{avec } \lambda \notin \mathbf{Q}_+^*.$$

(ii) $D \cap U$ est un diviseur sans composante dicritique qui est contenu dans $x_1 x_2 = 0$.

Ainsi, les germes de singularités simples $(\mathcal{F}, D)$ de type dimensionnel deux sont des “cylindres locaux” sur des germes en 0 des singularités simples $(\mathcal{F}_0, D_0)$ dans un 2-plan. C'est à dire que $\mathcal{F}_0$ est défini par un germe d'équation de Pfaff $\omega_0 = 0$ simple au sens de [Ca]_{1,2,3}, [Ma-Mo] et que D_0 est un diviseur à croisements normaux tangent à $\mathcal{F}_0$.

2.3. THÉORÈME D'ÉQUIRÉDUCTION GÉNÉRIQUE. – Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de N , soit D un diviseur dans N et soit a un point de N . Il existe un voisinage ouvert U de a dans N , un sous-ensemble analytique fermé Z de U de codimension supérieure ou égale à 3 et un morphisme analytique $\pi : N' \rightarrow U$ qui est un composé d'un nombre fini d'éclatements globaux à centres lisses tel que :

1. Z est contenu dans $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ et π induit un isomorphisme de $N' \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}, D))$ sur $U \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}, D)$.

2. L'image réciproque $D' = \pi^{-1}(D)$ est un diviseur à croisements normaux dans N' .

3. Tout point a' de $\text{Sing}(\mathcal{F}', D') \setminus \pi^{-1}(Z)$ est une singularité simple de type dimensionnel deux du feuilletage $\mathcal{F}' = \pi^*(\mathcal{F})$.

La preuve de ce résultat clef pour la démonstration du théorème est esquissée dans le cas “non dicritique” et sans adaptation à un diviseur dans [Ca-Ma]. Sa démonstration est longue et s'appuie sur des arguments que nous n'utiliserons pas dans la preuve du théorème. Aussi, nous ne la ferons que dans un appendice.

V. Adhérence d'un $\mathcal{F}$ -ensemble

Dans tout ce chapitre N est un espace analytique réel non singulier de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de N . Nous allons essentiellement prouver le théorème énoncé dans l'introduction :

“L'adhérence d'un $\mathcal{F}$ -ensemble est un $\mathcal{F}$ -ensemble”.

1. Plan de la démonstration

Envisageons tout d'abord le cas du feuilletage singulier dégénéré $\mathcal{F} \equiv 0$. Comme nous l'avons vu dans III.3.1. un 0-ensemble W de N est un sous-ensemble sous-analytique. Son adhérence $\overline{W}$ est encore sous-analytique.

Nous allons prouver le théorème dans le cas $\mathcal{F} \not\equiv 0$ en raisonnant par récurrence sur n la dimension de N . Lorsque $n = 1$, un $\mathcal{F}$ -ensemble W est une union localement finie de points. C'est un sous-ensemble fermé de N . Le théorème est vrai lorsque $n = 1$. Pour conduire la récurrence nous allons considérer les trois assertions suivantes :

$T(n)$: L'adhérence $\overline{W}$ d'un $\mathcal{F}$ -ensemble W est un $\mathcal{F}$ -ensemble si $\dim N \leq n$.

$H(n)$: L'adhérence $\overline{V}$ d'une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle est un $\mathcal{F}$ -ensemble si $\dim N \leq n$.

$H(n)^*$: Soit C un coin ouvert de N associé à une carte (U, x) , soit a un point de U et soit V une feuille de Rolle dans C . Il existe un voisinage ouvert U' de a tel que $\overline{V} \cap U'$ soit un $\mathcal{F}_{U'}$ -ensemble si $\dim N \leq n$.

Il est clair que $T(n)$ implique $H(n)$ et que $H(n)$ implique $H(n)^*$ d'après le critère local (III.2.). Nous prouvons dans le paragraphe 2 que $H(n)$ implique $T(n)$, dans le paragraphe 3 que $H(n)^*$ implique $H(n)$. Dans le paragraphe 4, nous montrons que, pour achever la preuve du théorème, il suffit de prouver que $H(n)^*$ est vrai dans les deux cas suivants :

- *Cas réduit.* Le point a est une singularité réduite de $\mathcal{F}$. C'est l'objet du paragraphe 6.
- *Cas dicritique.* Le point a appartient à un diviseur dicritique. C'est l'objet du paragraphe 7. et que, sous les hypothèses de $H(n)^*$, $\overline{V} \cap A$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble si A est un sous-ensemble semi-analytique de dimension strictement inférieure à n . Évidemment, A correspond à une “aile” sur un ensemble de codimension ≥ 3 et nous dirons que cette dernière implication est le :

- *Cas de l'aile.* Le point a appartient à l'ensemble Z défini dans le théorème d'équiréduction. C'est l'objet du paragraphe 5.

La preuve de $H(n)^*$ dans le cas dicritique et de l'assertion $\overline{V} \cap A$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble dans le cas de l'aile s'appuie sur l'hypothèse de récurrence $H(n-1)$. Par contre, la preuve de $H(n)^*$ dans le cas réduit n'utilise que les propriétés des singularités réduites. On peut ainsi résumer ce plan de preuve par le diagramme suivant :

$$T(n) \xleftarrow{2.} H(n) \xleftarrow{3.} H(n)^* \left\{ \begin{array}{ll} \text{aile} & \xleftarrow{5.} T(n-1) \\ \text{réduit} & \xleftarrow{6.} T(2) \\ \text{dicritique} & \xleftarrow{7.} T(n-1) \end{array} \right.$$

2. Preuve de $H(n)$ implique $T(n)$

Soit W un $\mathcal{F}$ -ensemble de N , $\dim N = n$. C'est une réunion localement finie, $W = \bigcup W_j$, de $\mathcal{F}$ -ensembles élémentaires W_j . Son adhérence $\overline{W}$ est la réunion localement finie des adhérences $\overline{W}_j$ des W_j . Il suffit de prouver l'implication pour un $\mathcal{F}$ -ensemble élémentaire W :

$$W = \delta(V'), \quad \delta : N' \rightarrow N, \quad \Delta = (\delta, \alpha)$$

Δ étant un morphisme admissible, V' une $\Delta^*(\mathcal{F})$ -feuille de Rolle telle que la restriction de δ à $\overline{V'}$ soit propre. Le morphisme δ étant un composé d'éclatements à centres lisses et de plongements on a :

$$\dim N' \leq \dim N = n.$$

On peut appliquer l'hypothèse $H(n)$ à V' . Son adhérence $\overline{V'}$ est un $\Delta^*(\mathcal{F})$ -ensemble. D'après l'argument d'image directe, l'image de cette adhérence $\delta(\overline{V'})$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble. Enfin, la restriction de δ à $\overline{V'}$ étant propre

$$\overline{W} = \overline{\delta(V')} = \delta(\overline{V'})$$

est un $\mathcal{F}$ -ensemble.

3. Preuve de $H(n)^*$ implique $H(n)$

Soit $H = (V, \mathcal{F}, M)$ une hypersurface pfaffienne satisfaisant à la condition de Rolle. Soit M_i un recouvrement de M localement fini par des ouverts semi-analytiques M_i vérifiant la conclusion de la proposition II.2.2. de désingularisation des ouverts semi-analytiques. Alors on a

$$\overline{V} = \bigcup \overline{V \cap M_i}.$$

Il suffit de prouver que chaque $\overline{V \cap M_i}$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble. D'après le théorème de finitude $V \cap M_i$ est une union finie d'hypersurfaces pfaffiennes $V_{i,k}$ satisfaisant à la condition de Rolle. Puisque

$$\overline{V \cap M_i} = \bigcup_k \overline{V_{i,k}}$$

il suffit de prouver l'implication lorsque $M = M_i$. Appliquons la proposition II.2.2. de désingularisation des ouverts semi-analytiques à $M = M_i$. Il existe un morphisme analytique π de N' sur N composé d'une suite d'éclatements à centres lisses qui induit un isomorphisme de $M' = \pi^{-1}(M)$ sur M tel que

$$\overline{M'} = \bigcup_k \overline{C_k} \subset \bigcup_k U_k, \quad M' \cap U_k = C_k$$

où les C_k sont des coins réels ouverts adaptés à des cartes (U_k, x_k) . Posons

$$\mathcal{F}' = \pi^*(\mathcal{F}), \quad V' = \pi^{-1}(V).$$

Puisque π est un isomorphisme de M' sur M , V' est une $\mathcal{F}'$ -feuille de Rolle dans M' et $\overline{M'}$ étant compact (union finie de compacts) la restriction de π à $\overline{V'}$ est propre. D'après l'argument d'image directe il suffit de prouver que $\overline{V'}$ est un $\mathcal{F}'$ -ensemble. Nous allons le faire en utilisant le critère local (III.2.). Soit a un point de $\overline{M'} \cap U_k$. Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert U' de a tel que

$$(\overline{V' \cap U_k}) \cap U' = \overline{V' \cap C_k} \cap U'$$

soit un $\mathcal{F}'_{U'}$ -ensemble. D'après le théorème de finitude $V' \cap C_k$ est une union finie de $\mathcal{F}'$ -feuilles de Rolle $V'_{k,\ell}$. D'après l'hypothèse $H(n)^*$ les $\overline{V'_{k,\ell}} \cap U'$ sont des $\mathcal{F}'_{U'}$ -ensembles et ainsi

$$\overline{V' \cap C_k} \cap U' = \bigcup_{\ell} (\overline{V'_{k,\ell}} \cap U')$$

est encore un $\mathcal{F}'_{U'}$ -ensemble.

4. Réduction de la preuve de $H(n)^*$

Nous pouvons tout d'abord supposer (dans les hypothèses de $H^*(n)$) que :

$$N = \mathbf{R}^n, \quad C = M = \{x_1 > 0, \dots, x_\ell > 0\}, \quad a = (0, 0, \dots, 0).$$

Soit D le diviseur à croisements normaux de $\mathbf{R}^n$ d'équation $x_1, x_2 \cdots x_\ell = 0$. Notons que

$$\text{Sing}(\mathcal{F}, D) \cap M = \emptyset$$

et appliquons le théorème d'équiréduction. Avec les notations du théorème d'équiréduction générique IV.2.3. nous disposons : d'un voisinage ouvert U de a , d'un sous-ensemble analytique $Z \subset U$ de codimension supérieure ou égale à 3 et d'un morphisme analytique $\pi : N' \rightarrow U$. On peut supposer que U est une boule de centre a . Soit V la $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle que nous étudions. D'après le théorème de finitude $V \cap U$ est une union finie de $\mathcal{F}_U$ -feuilles de Rolle. Il suffit de montrer $H(n)^*$ pour l'une d'elle. Nous pouvons supposer que nous sommes dans la situation suivante :

- $N = \mathbf{R}^n$, $M = \{x_1 > 0, \dots, x_\ell > 0\}$, $a = (0, 0, \dots, 0)$, $D = \{x_1 x_2 \cdots x_\ell = 0\}$.
- Z est un sous-ensemble analytique fermé de $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ de codimension supérieure ou égale à 3.
- $\pi : N' \rightarrow N$ est un composé d'une suite d'éclatements globaux à centres lisses qui satisfont les propriétés 1,2,3 du théorème IV.2.3.

Il s'agit de prouver que si $(V, \mathcal{F}, M)$ est une hypersurface pfaffienne satisfaisant à la condition de Rolle alors $\overline{V}$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble. Posons

$$M' = \pi^{-1}(M), \quad V' = \pi^{-1}(V), \quad \mathcal{F}' = \pi^*(\mathcal{F}), \quad D' = \pi^{-1}(D).$$

Puisque la restriction de π à M' est un isomorphisme sur M , $(V', \mathcal{F}', M')$ est encore une hypersurface pfaffienne satisfaisant à la condition de Rolle. Notons $D' = \bigcup D'_j$ la décomposition de D' en composantes irréductibles et soit pour chaque j

$$W'_j = (\overline{V'} \cap D'_j) \setminus \pi^{-1}(Z), \quad W_j = \pi(W'_j).$$

On a la décomposition

$$\overline{V} = \pi(\overline{V'}) = V \cup (\overline{V} \cap Z) \cup \bigcup_j W_j.$$

Puisque V est un $\mathcal{F}$ -ensemble, il suffit de prouver que $\overline{V} \cap Z$ et les W_j sont des $\mathcal{F}$ -ensembles, ceci sous l'hypothèse d'induction $T(n-1)$. On sera amené à distinguer deux types de W_j selon que D'_j est ou n'est pas dicritique.

5. Cas de l'aile, étude de $\overline{V} \cap Z$

Il existe, d'après le lemme d'aile pfaffien IV.1.1., un sous-ensemble semi-analytique A de N de codimension ≥ 1 tel que

$$\overline{V} \cap Z = (\overline{V \cap A}) \cap Z.$$

D'après la proposition III.3.1. (intersection d'un semi-analytique et d'un $\mathcal{F}$ -ensemble) il nous suffit de prouver que $\overline{V \cap A}$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble. Si A est une réunion localement finie de sous-ensembles semi-analytiques relativement compacts, A_i , il suffit de prouver que $\overline{V \cap A_i}$ est un $\mathcal{F}$ -ensemble pour chaque i . Ainsi, d'après le théorème de stratification adaptée appliqué à $\{\mathcal{F}\}$, A , M , on peut supposer que A est un feuillet normal, de dimension strictement inférieure à n , adapté à $\{\mathcal{F}\}$ et M . Il faut alors distinguer deux cas :

- *Le feuillet normal A est tangent à $\mathcal{F}$.* On a $A \cap V = A$ si $A \cap V \neq \emptyset$. Alors, $\overline{A \cap V} = \overline{A}$ est l'adhérence d'un semi-analytique contenu dans une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle. C'est un $\mathcal{F}$ -ensemble d'après le corollaire de III.5.1.
- *Le feuillet normal A est transverse à $\mathcal{F}$.* La restriction $\mathcal{F}$ à A est un feuilletage de codimension 1 sans singularité. L'intersection $V \cap A$ est une union finie de feuilles V_k de ce feuilletage qui satisfont une condition de type Rolle : une courbe analytique dans A transverse à $\mathcal{F}_A$ coupe $V \cap A$ en un point au plus. Appliquons la proposition de désingularisation des feuilletages normaux II.2.3. à A . On obtient un ouvert U de N contenant $\overline{A}$, une suite d'éclatements globaux $\pi : N' \rightarrow U$, une immersion fermée j_B d'un sous-espace non singulier B dans N' . Si j_U est l'immersion canonique de U dans N ,

$$\Delta = (\delta, \alpha), \quad \alpha = \{j_U, \alpha_1, \dots, \alpha_k, j_B\}, \quad \delta = j_U \circ \pi \circ j_B$$

est un morphisme admissible. La restriction de δ à $A' = \delta^{-1}(A)$ (ouvert semi-analytique de B) est un isomorphisme sur A qui échange $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}'_{A'}$ où on a posé $\mathcal{F}' = \Delta^*(\mathcal{F})$. Alors si $V'_k = \delta^{-1}(V_k \cap A)$, l'hypersurface pfaffienne $(V'_k, \mathcal{F}', A')$ satisfait la condition de Rolle. C'est en particulier un $\mathcal{F}'$ -ensemble sur la variété B avec

$$\dim B = \dim A \leq n - 1.$$

D'après l'hypothèse de récurrence $T(n-1)$, son adhérence $\overline{V'}_k$ est un $\mathcal{F}'$ -ensemble. La restriction de δ à $\overline{V'}_k$ est propre puisque $\delta|_{\overline{A'}}$ est propre. On en déduit par "image directe" que

$$\overline{V \cap A} = \bigcup_k \overline{\delta(V')_k} = \bigcup_k \delta(\overline{V'_k})$$

est un $\mathcal{F}$ -ensemble.

6. Étude de W_j dans le cas non-dicritique

Rappelons (voir 4) que

$$W_j = \pi(W'_j), \quad W'_j = \overline{V'} \cap D'_j \setminus \pi^{-1}(Z).$$

Nous allons prouver que W'_j est un sous-ensemble sous-analytique contenu dans $\text{Sing } \mathcal{F}'$. Ce sera un $\mathcal{F}'$ -ensemble d'après III.3.1. Plus précisément, nous montrons que W'_j est union de composantes connexes du sous-ensemble semi-analytique

$$T' = (\text{Sing } (\mathcal{F}', D') \cap \overline{M'}) \setminus \pi^{-1}(Z).$$

Montrons que W'_j est contenu dans T' . Soit a' un point de D'_j qui n'est pas un point singulier de $\mathcal{F}'$. Il existe une carte $(U_{a'}, x')$ centrée en a' telle que $\mathcal{F}_{U_{a'}}$ soit le feuilletage de $U_{a'}$ par les hypersurfaces $\{x'_n = \text{constante}\}$ si $x = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Puisque D'_j n'est pas dicritique on peut supposer que $D'_j \cap U_{a'}$ est contenu dans l'hypersurface $x'_n = x'_n(a')$. D'autre part, V' étant une $\mathcal{F}'$ -feuille de Rolle, son intersection avec $U_{a'}$ est contenue dans une union finie de telles hypersurfaces qui ne rencontre pas D' et par conséquent D'_j . Ainsi le point a' n'appartient pas à $\overline{V'}$. On a ainsi prouvé que

$$W'_j \subset \text{Sing } \mathcal{F}' \subset \text{Sing } (\mathcal{F}', D').$$

Il est alors clair que W'_j est inclus dans T' .

Pour achever la preuve il suffit de prouver que W'_j est un ouvert de T' car il est clair que c'est un fermé de T' . Soit a' un point de W'_j . Alors a' appartient à $\text{Sing } (\mathcal{F}', D')$ et c'est une singularité simple de type dimensionnel 2 de $\mathcal{F}'$. Il existe une carte analytique (U, x) , avec $U \simeq \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui est centrée en a' telle que

$$\pi^{-1}(Z) \cap U = \emptyset, \quad D'_j \subset \{x_1 x_2 = 0\},$$

et telle que $\mathcal{F}'_U$ soit engendré par une 1-forme du type :

$$\omega = a(x_1, x_2)dx_1 + b(x_1, x_2)dx_2$$

En particulier on a

$$\text{Sing } (\mathcal{F}', D') \cap U = \{x_1 = x_2 = 0\}.$$

Puisque V' est un "cylindre analytique" sur $V' \cap \{x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0\}$ et que $a' = (0, 0, \dots, 0)$ appartient à $\overline{V'}$, l'ensemble $\{x_1 = x_2 = 0\}$ est contenu dans $\overline{V'}$. Cet ensemble est contenu dans D'_j . Ainsi

$$U \cap W'_j = (\overline{V'} \cap D'_j \setminus \pi^{-1}(Z)) \cap U = \{x_1 = x_2 = 0\}$$

est un ouvert de T' .

7. Cas dicritique

Il s'agit de prouver, comme dans le cas précédent que

$$W'_j = (\overline{V} \cap D'_j) \setminus \pi^{-1}(Z)$$

est un $\mathcal{F}'$ -ensemble. Puisque D'_j est un diviseur dicritique et d'après le théorème d'équiréduction générique, le feuilletage $\mathcal{F}'$ est transverse à $D'_j \setminus \pi^{-1}(Z)$. Soit $\mathcal{F}'_j$ le feuilletage singulier induit par $\mathcal{F}'$ sur D'_j . Alors on a

$$\text{Sing } \mathcal{F}'_j \cap (D'_j \setminus \pi^{-1}(Z)) = \emptyset$$

Notons M'_j le sous-ensemble de D'_j défini par

$$M'_j = \{a \in D'_j / e(D'_j, a) = 1\} \cap \overline{M'} \setminus \pi^{-1}(Z),$$

où $e(D', a)$ signifie "le nombre de composantes irréductibles de D' " passant par a . Nous allons prouver que M'_j possède les trois propriétés suivantes :

(α) M'_j est un ouvert semi-analytique de D'_j .

(β) $W'_j = \overline{V'} \cap M'_j \setminus \pi^{-1}(Z)$.

(γ) $\overline{V'} \cap M'_j$ est une union localement finie de $\mathcal{F}'_j$ -feuilles de Rolle.

Puisque D'_j est de dimension $n - 1$, on peut appliquer $T(n - 1)$ à $\mathcal{F}'_j$. D'après (α), (γ) $\overline{V'} \cap M'_j$ est un $\mathcal{F}'_j$ -ensemble, son adhérence est encore un $\mathcal{F}'_j$ -ensemble. Ainsi, W'_j est un $\mathcal{F}'_j$ -ensemble, c'est aussi un $\mathcal{F}'$ -ensemble par image directe.

Preuve de (α). – Il suffit de prouver que l'ensemble

$$M_j^* = \overline{M'} \cap D'_j \setminus \{a \in D'_j / e(D', a) > 1\}$$

est un ouvert semi-analytique de D'_j . En localisant on se ramène au cas où M' est une composante connexe de $N' \setminus D'$ qui est un coin. Alors, l'ensemble M_j^* est une union de composantes connexes de l'ensemble

$$M_j^{**} = D'_j \setminus \{a \in D'_j / e(D', a) > 1\}.$$

Puisque M_j^{**} est un ouvert semi-analytique de D'_j , il en est de même pour M_j^* .

Preuve de (β). – Montrons que si $W_j^* = \overline{V'} \cap M'_j$ on a

$$W'_j = \overline{W_j^*} \setminus \pi^{-1}(Z) = \overline{V'} \cap D'_j \setminus \pi^{-1}(Z).$$

Il suffit, par définition de M'_j , de prouver que si a appartient à W'_j et si $e(D', a) > 1$ alors a appartient à $\overline{W_j^*}$. Puisque $a \notin \pi^{-1}(Z)$ on sait que $e(D', a) = 2$. On choisit une carte centrée en a , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que dans cette carte :

$$D'_j = \{x_1 = 0\}, \quad D' = \{x_1 x_2 = 0\}.$$

On peut toujours supposer d'après le théorème de finitude que dans cette carte on a

$$V' = M' \cap \{x_3 = 0\}.$$

D'autre part, M' s'écrit dans la carte

$$M' = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

On en déduit qu'au voisinage de a on a

$$W_j^* = \overline{V'} \cap M'_j = \{x_1 = x_3 = 0\} \cap \{x_2 > 0\}.$$

Ce qui prouve (β) .

Preuve de (γ) . Quitte à localiser nous pouvons supposer

$$\begin{aligned} N' &= \mathbf{R}^n, & D' &= \{x_1 x_2 \cdots x_\ell = 0\}, \\ D'_j &= \{x_1 = 0\}, & M' &= \{x_1 > 0, \dots, x_\ell > 0\} \end{aligned}$$

et que l'intersection $\overline{V'} \cap M'_j$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes d'après le corollaire 2 du théorème de finitude. Tout chemin analytique γ_j dans D'_j transverse à $\mathcal{F}'_j$ peut être "poussé" en un chemin γ proche de γ_j , analytique dans M' qui est encore transverse à $\mathcal{F}'$. Si γ_j coupe plus d'une fois une feuille V'_j de $\mathcal{F}'_j$, alors γ coupe plus d'une fois la feuille V' de $\mathcal{F}'$ dont l'adhérence contient V'_j . Ainsi, les composantes connexes de $\overline{V'} \cap M'_j$ sont des $\mathcal{F}'_j$ -feuilles de Rolle.

8. Étude d'un exemple

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage de $\mathbf{R}^4$ de l'exemple III.5.1. : $\mathcal{F}$ est engendré par la 1-forme algébrique

$$\omega = 2xtz^2(ydx - xdy) + y^3(tdz - z^2dt).$$

La fonction analytique f définie sur $M = \{y > 0, z > 0, t > 0\}$ par

$$f(x, y, z, t) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{1}{z} - \text{Log } t$$

est une intégrale première de ω sur M . Le lieu singulier de $\mathcal{F}$ est le sous-ensemble

$$\text{Sing } \mathcal{F} = \{t = y = 0\} \cup \{t = z = 0\} \cup \{y = z = 0\} \cup \{x = y = 0\}.$$

L'ouvert M est un coin et c'est une composante connexe de $\mathbf{R}^4 \setminus D$ où D est le diviseur

$$D = \{y = 0\} \cup \{z = 0\} \cup \{t = 0\}.$$

Il est clair que $V = f^{-1}(0)$ est une $\mathcal{F}$ -feuille de Rolle dans M . Nous allons étudier comment elle adhère à ∂M qui est contenu dans D . Nous montrerons en particulier que le caractère transcendant (*i.e.* non sous-analytique) de $\overline{V} \cap \text{Sing } \mathcal{F}$ provient du caractère "dicritique" de $\mathcal{F}$ le long du 2-plan $\{x = y = 0\}$.

Dans cette étude on distinguera quatre cas qui sont apparus dans la preuve du théorème. L'adhérence de la feuille V ne rencontre pas $D \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ puisque les composantes du

diviseur sont non-dicritiques. Au voisinage de points appartenant à un semi-analytique contenu dans le lieu singulier l'étude de $\mathcal{F}$ se ramène à celle du feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur un 2-plan transverse à $\text{Sing } \mathcal{F}$. C'est le cas au voisinage des singularités simples de type dimensionnel deux et au voisinage de points où il existe deux champs de vecteurs non singuliers qui trivialisent le feuilletage. L'intersection de $\bar{V}$ avec cette partie du lieu singulier est semi-analytique. Le lieu singulier comporte une partie dicritique de codimension deux : $\{x = y = 0\}$. Le diviseur D' obtenu après éclatement de cette partie est dicritique. L'intersection $\bar{V} \cap \{x = y = 0\}$ est la projection d'une feuille du feuilletage induit par le transformé strict de $\mathcal{F}$ sur D' . C'est un $\mathcal{F}$ -ensemble non sous-analytique. Enfin il resterait *a priori* à étudier l'intersection de l'adhérence de V avec un semi-analytique de codimension trois contenu dans le lieu singulier (cas de l'aile) mais dans l'exemple étudié ce ne sera pas nécessaire.

Étude de $\mathcal{F}$ au voisinage de $\{y = t = 0\}$. – Les points du semi-analytique

$$S_1 = \{y = t = 0, x \neq 0, z > 0\}$$

sont des singularités simples de type dimensionnel 2. De plus la 2-forme $d\omega$ ne s'annule pas sur S_1 . On a un phénomène de Kupka de long de S_1 .

L'étude de $\mathcal{F}$ au voisinage de S_1 se ramène à celle de $j_{\pm 1}^* \mathcal{F}$ où $j_{\pm 1}$ sont les plongements des 2-plans $P_{\pm 1} = \{x = \pm 1, z = 1\}$ dans $\mathbf{R}^4$. Les feuilletages $j_{\pm 1}^* \mathcal{F}$ sont engendrés par la 1-forme

$$\omega_{\pm 1} = 2tdy + y^3 dt$$

qui a pour séparatrices $\{t = 0\}$, $\{y = 0\}$. Ses autres courbes intégrales C_λ ont pour équation

$$\lambda t = \exp(1/y^2), \quad \lambda \in \mathbf{R}^*.$$

Elles n'adhèrent pas à l'origine $t = y = 0$. On en déduit que V n'adhère pas S_1 puisque la trace de V sur $P_{\pm 1}$ est la courbe C_e .

Étude de $\mathcal{F}$ au voisinage de $\{t = z = 0\}$. – Les points du semi-analytique

$$S_2 = \{t = z = 0, y > 0\}$$

sont des singularités simples de type dimensionnel 2. De plus la 2-forme $d\omega$ ne s'annule pas sur S_2 . On a encore un phénomène de Kupka le long de S_2 .

L'étude de $\mathcal{F}$ au voisinage de S_2 se ramène à celle de $j_2^* \mathcal{F}$ où j_2 est le plongement du 2-plan $P_2 = \{x = y = 1\}$ dans $\mathbf{R}^4$. Le feuilletage $j_2^* \mathcal{F}$ est engendré par la 1-forme

$$\omega_2 = t dz - z^2 dt$$

qui a pour séparatrices $\{t = 0\}$, $\{z = 0\}$. Ses autres courbes intégrales D_λ dans $M \cap P_2$ ont pour équations :

$$t = \lambda e^{-1/z}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Elles contiennent l'origine $t = z = 0$ dans leur adhérence. Puisque V coupe P_2 selon D_e , son adhérence $\bar{V}$ contient $\bar{S}_2$.

Étude de $\mathcal{F}$ au voisinage de $\{z = y = 0\}$. – Les points de $\{z = y = 0\}$ ne sont pas des singularités simples de type dimensionnel 2 et il n'y a pas de phénomène de Kupka le long de $\{z = y = 0\}$. Néanmoins, les champs de vecteurs

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad Z = z^2 \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t}$$

trivialisent le feuilletage $\mathcal{F}$ le long de

$$S_3 = \{z = y = 0, x \neq 0, t > 0\}.$$

L'étude de $\mathcal{F}$ au voisinage de S_3 se ramène à celle de $j_{\pm 3}^* \mathcal{F}$ où $j_{\pm 3}$ sont les plongements des 2-plans $P_{\pm 3} = \{x = t = 1\}$ dans $\mathbf{R}^4$. Les feuilletages $j_{\pm 3}^* \mathcal{F}$ sont engendrés par la 1-forme

$$\omega_{\pm 3} = -2z^2 dy + y^3 dz$$

qui a pour séparatrices $\{z = 0\}$, $\{y = 0\}$. Les courbes intégrales de $j_{\pm 3}^* \mathcal{F}$ dans $M \cap P_{\pm 3}$ ont pour équation

$$z = \frac{y^2}{1 - \lambda y^2}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Elles contiennent $z = y = 0$ dans leur adhérence. Puisque V coupe $P_{\pm 3}$ selon la courbe E_0 , son adhérence $\overline{V}$ contient $\overline{S_3}$.

Étude de $\mathcal{F}$ au voisinage de $\{x = y = 0\}$. – Les points de $\{x = y = 0\}$ ne sont pas des singularités simples de type dimensionnel 2. Soit $\delta : N' \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'éclatement de centre le 2-plan $\{x = y = 0\} = P_4$. Dans la carte $(U, x = vy)$ le feuilletage $\mathcal{F}' = \delta^*(\mathcal{F})$ est engendré par la forme

$$\omega' = 2vtz^2 dv + tdz - z^2 dt.$$

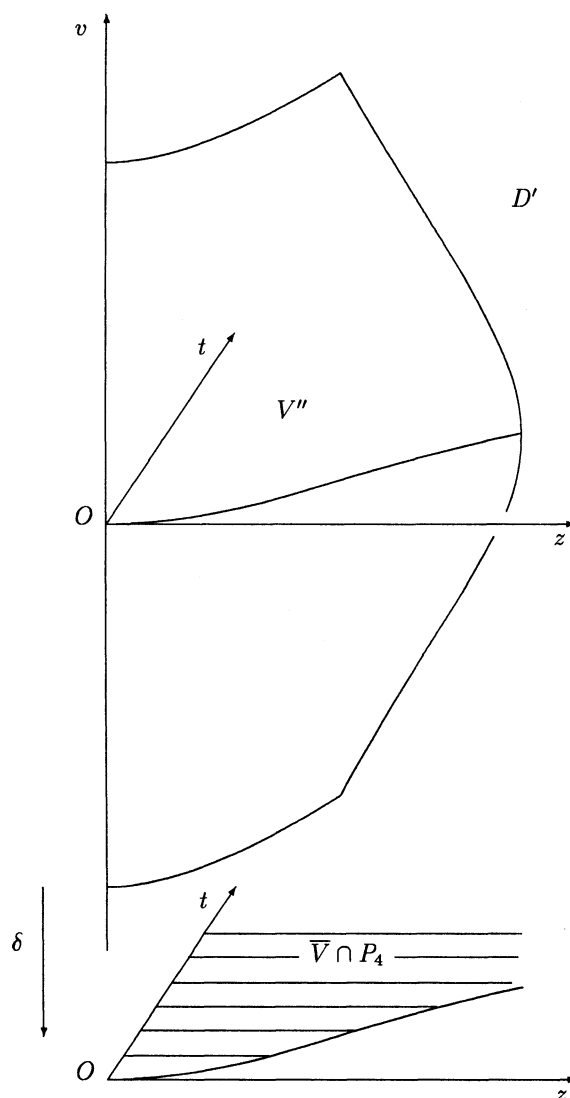
Il est tangent aux fibres de la projection $(v, y, z, t) \rightarrow (v, z, t)$. En particulier, le diviseur exceptionnel $D' = \delta^{-1}(P_4)$ est dicritique. Le feuilletage $\mathcal{F}''$ induit par $\mathcal{F}'$ sur D' est encore engendré par ω' . L'intersection de $\overline{V}$ avec P_4 est l'adhérence de l'image par δ de la feuille V'' de $\mathcal{F}''$ d'équation

$$v^2 - 1/z - \text{Log } t = 0, \quad z > 0, t > 0$$

dans la carte (v, z, t) . C'est le sous-ensemble

$$\overline{V} \cap P_4 = (\{t \geq \exp(-1/z), z > 0\} \cup \{t \geq 0, z = 0\}) \cap P_4.$$

On notera que la courbe $t = \exp(-1/z)$, $z > 0$ est l'image d'une ligne de pli pour la restriction de δ à V'' .



APPENDICE : ÉQUIRÉDUCTION GÉNÉRIQUE D'UN FEUILLETAGE SINGULIER DE CODIMENSION UN

par Felipe CANO

L'objet de cet appendice est la preuve du théorème d'équiréduction générique IV.2.3. Elle est esquissée pour le cas non dicritique dans [Ca-Ma]. La preuve que nous présentons ici est légèrement différente. Elle est valable pour les cas dicritiques et non dicritiques dans les cadres complexe ou réel. Nous la faisons tout d'abord dans le cadre complexe. La version

réelle s'en déduit automatiquement puisque la preuve appliquée à la complexification du cas réel est équivariante par l'automorphisme de conjugaison.

1. Structure de la démonstration

Soient N un espace analytique complexe non-singulier et $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier sur N (comme dans I.1.5.). Considérons également un diviseur à croisements normaux D et un point a de N . On cherche un voisinage ouvert U de a et un morphisme analytique $\pi : N' \rightarrow U$ qui satisfont aux conclusions du théorème d'équiréduction générique (IV.2.3.).

Le morphisme $\pi : N' \rightarrow U$ est obtenu par composition d'une suite finie d'éclatements globaux. Nous donnons un procédé pour choisir étape après étape la suite d'éclatements en restreignant éventuellement l'ouvert U de N . Ceci est équivalent à choisir les nouveaux centres d'éclatement. Cette construction se poursuit tant qu'on n'a pas atteint les conclusions du théorème. On obtient une suite $\mathcal{S}$, finie ou infinie, que nous appelons "*suite d'équiréduction*". Si la suite $\mathcal{S}$ est finie on a construit le morphisme cherché $\pi : N' \rightarrow U$. Lorsque N et $\mathcal{F}$ sont obtenus par complexification d'objets réels ce morphisme est compatible avec la complexification, ce qui implique la solution aussi du cas réel.

Il s'agit donc de montrer que la suite d'équiréduction $\mathcal{S}$ est nécessairement finie. Cela se fait par un contrôle local. On raisonne par l'absurde en supposant qu'elle est infinie. Ceci nous permet de trouver une "*chaîne infinie de points infiniment voisins*"

$$a = P_0 \in N \leftarrow P_1 \in N_1 \leftarrow \dots \leftarrow P_j \in N_j \leftarrow \dots$$

telle que chaque P_j s'envoie sur le précédent par la suite d'équiréduction et de façon à ce que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1. Chaque point P_j est un point du lieu singulier adapté du feuilletage singulier $\mathcal{F}_j$ de l'espace ambiant N_j par rapport au diviseur D_j qui nous intéresse mais ce n'est pas une singularité simple de type dimensionnel deux.

2. A chaque point P_j on peut attacher un invariant local $\text{Inv}(P_j)$ formé de trois entiers positifs r_j, m_j^*, α_j^* tel que l'on ait $\text{Inv}(P_j) \geq \text{Inv}(P_{j+1})$ pour l'ordre lexicographique.

3. Étant donné un indice j , il existe un indice $j' > j$ pour lequel on a l'inégalité stricte $\text{Inv}(P_j) > \text{Inv}(P_{j'})$.

Il est clair que les propriétés précédentes sont en contradiction avec l'hypothèse de non finitude de la suite d'équiréduction puisque l'invariant $\text{Inv}(P_j)$ ne peut décroître strictement qu'un nombre fini de fois.

Après avoir trouvé la chaîne de points infiniment voisins et construit les invariants "*verticaux*" r_j, m_j^*, α_j^* on montre la dernière propriété. Pour cela on suppose que la suite d'invariants se stabilise :

$$\text{Inv}(P_j) = (r, m^*, \alpha^*), \text{ pour tout indice } j.$$

On distingue alors deux situations : $\alpha^* = 0$ et $\alpha^* = 1$. Le cas $\alpha^* = 0$ correspond géométriquement à une situation dicritique assez spéciale : on éclate une sous-variété de codimension deux et il apparaît un feuilletage induit sur le diviseur exceptionnel qui est "*génériquement vertical*" par rapport à l'éclatement. Ceci empêche une possible trivialité topologique le long du centre d'éclatement. Ce cas est contrôlé directement au moyen d'un invariant "ad hoc", qui diminue au bout d'un nombre fini d'étapes.

Le cas $\alpha^* = 1$ correspond aux situations non-dicritiques et “dicritiques résonnantes”. Par un argument de section plane générique on se ramène au théorème classique de Seidenberg [Se] de réduction de singularités en dimension deux.

2. Semi-continuité des singularités simples

Soient N , $\mathcal{F}$ et D comme dans le paragraphe précédent. Considérons le “mauvais” ensemble $\text{Sing}^*(\mathcal{F}, D)$ formé des points P de $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ qui ne sont pas des singularités simples de type dimensionnel deux. Nous allons montrer que c’est un fermé analytique de $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ et donc de l’espace ambiant N . Pour faire cela, donnons la définition de *singularité pré-simple de type dimensionnel deux*.

DEFINITION. - Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier sur N et soit D un diviseur à croisements normaux dans N . On dit qu’un point a du lieu singulier adapté $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ est une *singularité pré-simple de type dimensionnel deux* si a est un point de $D \cap \text{Sing} \mathcal{F}$ tel qu’il existe une carte (U, x) centrée en a qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) Il existe un générateur ω de $\mathcal{F}$ au point a qui s’écrit dans les coordonnées $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\omega = a_1(x_1, x_2)dx_1 + a_2(x_1, x_2)dx_2,$$

où les jets d’ordre 1 de a_1, a_2 en 0 s’écrivent :

$$j^1 a_1(x_1, x_2) = \lambda x_2, \quad j^1 a_2(x_1, x_2) = -x_1 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}.$$

(ii) $D \cap U$ est un diviseur sans composante dicritique qui est contenu dans $x_1 x_2 = 0$.

Une singularité pré-simple de type dimensionnel deux est une singularité simple de type dimensionnel deux dès que λ n’appartient pas à $\mathbb{Q}_+^*$.

On note $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$ l’ensemble des singularités pré-simples de type dimensionnel deux et $\text{SSing}(\mathcal{F}, D)$ l’ensemble des singularités simples de type dimensionnel deux. Nous montrerons les résultats suivants :

1. La différence $\text{Sing}(\mathcal{F}, D) \setminus \text{PSing}(\mathcal{F}, D)$ est un fermé analytique.
2. Le lieu singulier adapté $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ est lisse en tout point de $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$.
3. L’ensemble des singularités simples de type dimensionnel deux $\text{SSing}(\mathcal{F}, D)$ est une union de composantes connexes de $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$.

Il est alors clair que $\text{Sing}^*(\mathcal{F}, D)$ est un fermé analytique de $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$. Pour montrer que $\text{Sing}(\mathcal{F}, D) \setminus \text{PSing}(\mathcal{F}, D)$ est un fermé analytique nous caractériserons les points de $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$ à l’aide de fonctions semi-continues supérieurement.

Soit E le diviseur formé des composantes non-dicritiques de D et considérons un point P de N . Il existe des coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_n)$ en P et un ensemble $A \subset \{1, \dots, n\}$ tels que

$$E = \left(\prod_{i \in A} x_i = 0 \right) \text{ localement en } P.$$

La multiplicité du diviseur $e(E, P) = \#A$ est égale au nombre de composantes irréductibles globales de E qui passent par P . D’autre part, si ω est un générateur de $\mathcal{F}$ en P il s’écrit

sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^n b_i dx_i = \left(\prod_{i \in A} x_i \right) \left(\sum_{i \in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} a_i dx_i \right)$$

où les b_i et les a_i sont des germes de fonctions analytiques en P . Cette expression locale nous permet de définir les invariants suivants $[\text{Ca}]_{1,2,3}$, $[\text{Ca-Ce}]_{1,2}$:

$$\text{“L'ordre usuel”} : \nu(\mathcal{F}, P) = \min \{ \nu_P(b_i); i = 1, \dots, n \}$$

$$\text{“L'ordre adapté”} : \nu(\mathcal{F}, D; P) = \min \{ \nu_P(a_i); i = 1, \dots, n \}$$

où $\nu_P(f)$ est l'ordre en P de la fonction f . L'ordre usuel et l'ordre adapté définissent des fonctions semi-continues supérieurement en P . Soit $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ le sous-ensemble analytique fermé de N défini par

$$\mathcal{K}(\mathcal{F}) = \text{Sing } \mathcal{F} \cap \{ Q \in N; d\omega(Q) = 0 \}.$$

Le long de $\text{Sing } \mathcal{F} \setminus \mathcal{K}(\mathcal{F})$ on a un phénomène de Kupka-Reeb [Ku]. La proposition suivante donne la caractérisation cherchée des singularités pré-simples de type dimensionnel deux.

PROPOSITION 1. – *Un point P de $\text{Sing } (\mathcal{F}, D)$ est une singularité pré-simple de type dimensionnel deux si et seulement s'il n'est sur aucune composante dicritique de D et s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\nu(\mathcal{F}, P) = 1$.
2. $1 \leq e(D, P) \leq 2$.
3. $e(D, P) + \nu(\mathcal{F}, D; P) \leq 2$.
4. $\nu(\mathcal{F}, D; P) = 1 \Rightarrow P \notin \mathcal{K}(\mathcal{F})$

Démonstration (Voir aussi [Ca-Ma; Prop 1]). – Si P est une singularité pré-simple de type dimensionnel deux, les conditions sont satisfaites. Montrons la réciproque. Supposons d'abord que $\nu(\mathcal{F}, D; P) = 1$. Dans un voisinage de P il y a un phénomène de Kupka-Reeb. Il existe donc un générateur ω de $\mathcal{F}$ en P qui s'écrit sous la forme

$$\omega = a(x_1, x_2)dx_1 + b(x_1, x_2)dx_2$$

dans un certain système de coordonnées. Puisque $e(D, P) = 1$ et puisque D n'est pas dicritique, on peut supposer que $D = (x_1 = 0)$ au voisinage de P . Alors la 1-forme ω s'écrit sous la forme

$$\omega = x_1 \left[a(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1} + b'(x_1, x_2) dx_2 \right]$$

avec $\nu(a, b') = \nu(a, b) = 1$. La condition $d\omega(P) \neq 0$ implique alors que la partie linéaire de $a(x_1, x_2)$ est du type $\alpha x_1 + \beta x_2$ où $\beta \neq 0$. Le champ de vecteurs $b\partial/\partial x_1 - a\partial/\partial x_2$ a donc une partie linéaire non nilpotente. Le point P est une singularité pré-simple de type dimensionnel deux.

Supposons maintenant que $\nu(\mathcal{F}, D; P) = 0$. Alors la multiplicité du diviseur est $e(D, P) = 1$, ou $e(D, P) = 2$. Choisissons des coordonnées dans lesquelles $D = (x_1 = 0)$ si $e(D, P) = 1$ et $D = (x_1 x_2 = 0)$ si $e(D, P) = 2$. On peut écrire un générateur de $\mathcal{F}$ en P sous la forme

$$\begin{aligned}\omega &= x_1 \left[a_1 \frac{dx_1}{x_1} + dx_2 + \sum_{i \geq 3} a_i dx_i \right] & \text{si } e(D, P) = 1, \\ \omega &= x_1 x_2 \left[\frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_2}{x_2} + \sum_{i \geq 3} a_i dx_i \right] & \text{si } e(D, P) = 2.\end{aligned}$$

Par conséquent les champs de vecteurs

$$\begin{aligned}a_i \partial / \partial x_2 - \partial / \partial x_i \quad i = 3, \dots, n & \quad \text{si } e(D, P) = 1, \\ x_1 a_i \partial / \partial x_1 - \partial / \partial x_i \quad i = 3, \dots, n & \quad \text{si } e(D, P) = 2\end{aligned}$$

trivialisent le feuilletage. En intégrant ces champs on obtient un système de coordonnées dans lequel

$$\begin{aligned}\omega &= x_1 \left[a_1(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1} + dx_2 \right] & \text{si } e(D, P) = 1, \\ \omega &= x_1 x_2 \left[\frac{dx_1}{x_1} + a_2(x_1, x_2) \frac{dx_2}{x_2} \right] & \text{si } e(D, P) = 2.\end{aligned}$$

Évidemment, les champs de vecteurs $b\partial/\partial x_1 - a\partial/\partial x_2$ correspondants ont une partie linéaire non nilpotente.

COROLLAIRE 2. — *L'ensemble $\text{Sing}^*(\mathcal{F}, D)$ est un fermé analytique de l'espace ambiant N .*

Démonstration. — De la semi-continuité des invariants introduits et de la proposition on déduit que $\text{Sing}(\mathcal{F}, D) \setminus \text{PSing}(\mathcal{F}, D)$ est un fermé analytique. D'autre part, il est évident que $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ est lisse en tout point de $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$. Un point P de $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$ est une singularité simple de type dimensionnel deux si et seulement si $\lambda \notin \mathbf{Q}_+$ où $j^1\omega = \lambda x_2 dx_1 - x_1 dx_2$ dans de bonnes coordonnées. Puisque c'est un invariant localement constant sur $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$, $\text{SSing}(\mathcal{F}, D)$ est une union de composantes connexes de $\text{PSing}(\mathcal{F}, D)$.

Il y a un autre type de semi-continuité pour les singularités simples de type dimensionnel deux : celui donné par les sections planes. Il jouera un rôle important dans la démonstration du théorème d'équiréduction générique.

PROPOSITION 3. — *Soit P un point de $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ au voisinage duquel $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ est lisse, de codimension deux et contenu dans chaque composante irréductible de D . Soit $i : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow N$ une immersion transverse à $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$ telle que $i(0) = P$ et soit ω un générateur local de $\mathcal{F}$ en P . Alors, le point P est une singularité simple de type dimensionnel deux si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\text{Sing}(i^*\omega) = \{0\}$. En particulier, la forme $i^*\omega$ définit sur $(\mathbf{C}^2, 0)$ le feuilletage $i^*\mathcal{F}$.
2. L'origine $0 \in (\mathbf{C}^2, 0)$ est une singularité simple (nécessairement de type dimensionnel deux) pour le feuilletage $i^*\mathcal{F}$ par rapport au diviseur $i^{-1}(D)$.

Démonstration. — Voir [Ce-Ma; Th 4.2].

3. La suite d'équiréduction

Considérons les données de départ : N un espace analytique complexe non-singulier, $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier sur N , D un diviseur à croisements normaux sur N et un point a de N . Nous donnons ici un procédé pour construire étape après étape la suite d'éclatements.

La "suite d'équiréduction" $\mathcal{S}$ qu'on va définir par induction résulte d'un procédé qui consiste à choisir pour chaque indice $j \geq 0$ une collection d'objets

$$\pi_j, N_j, U_j, \mathcal{F}_j, D_j, Y_j, Z_j, N'_j, \sigma'_j, \sigma''_j$$

tant que les conclusions du théorème d'équiréduction générique ne sont pas vérifiées. Les U_j sont des voisinages ouverts emboîtés d'un voisinage compact K du point a . Les π_j, σ'_j et σ''_j sont des morphismes composés d'éclatements globaux à centres lisses tels que

$$\pi_{j-1} : N_{j-1} \rightarrow U_{j-1}, \quad \sigma'_j : N'_j \rightarrow \pi_{j-1}^{-1}(U_j),$$

$$\sigma''_j : N_j \rightarrow N'_j, \quad \pi_j = \pi_{j-1} \circ \sigma'_j \circ \sigma''_j.$$

Les feuilletages $\mathcal{F}_j$ sont les transformés stricts de $\mathcal{F}$ par les morphismes π_j . Les diviseurs $D_j \subset N_j$ sont les images inverses correspondantes de D . L'ensemble Y_j est un sous-ensemble de N_j formé des points de $\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j)$ qui ont un *comportement générique par rapport à l'éclatement qui suit dans la désingularisation* (on précisera plus tard). L'ensemble Z_j est formé des points de $\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j)$ qui ne sont pas dans Y_j . L'adhérence $\overline{Y_j}$ de Y_j ainsi que l'ensemble $\overline{Z_j}$ sont des fermés analytiques de N_j . Le morphisme σ'_j est une désingularisation de $\overline{Y_{j-1}}$, et le morphisme σ''_j est l'éclatement de certaines composantes irréductibles de codimension deux du transformé strict de $\overline{Y_{j-1}}$.

Nous définissons les objets précédents par induction sur l'indice j de telle sorte que l'on puisse toujours passer de l'étape $j-1$ à l'étape j dès que

$$\text{Codim}(\text{Sing}^*(\mathcal{F}_{j-1}, D_{j-1}) \cap \pi_{j-1}^{-1}(K)) = 2.$$

Nous montrerons aussi que si le procédé s'arrête à l'étape j , alors on obtient les conclusions du théorème d'équiréduction générique.

Fixons un voisinage compact K du point a . Donnons les objets à l'étape $j=0$:

$$\begin{aligned} N_0 &= U_0 = N; \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}; \quad D_0 = D; \\ \pi_0 &= \sigma'_0 = \sigma''_0 = \text{id}_N. \end{aligned}$$

L'ensemble Y_0 est l'ensemble des points Q de $\text{Sing}^*(\mathcal{F}, D)$ tels que $\text{Sing}^*(\mathcal{F}, D)$ est lisse, de codimension deux et contenu dans l'intersection des composantes irréductibles de D en Q (en particulier on a $e(D, Q) \leq 2$). Si $Y_0 \neq \emptyset$, l'adhérence $\overline{Y_0}$ coïncide avec la réunion de certaines composantes irréductibles de codimension deux de $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$. C'est donc un fermé analytique. Soit Z_0 le fermé analytique de N de codimension plus grande ou égale à trois défini par

$$Z_0 = \text{Sing}^*(\mathcal{F}, D) \setminus Y_0.$$

Donnons maintenant les objets à l'étape $j \geq 1$, lorsqu'ils sont définis à l'étape $j-1$ et que

$$\text{Codim}(\text{Sing}^*(\mathcal{F}_{j-1}, D_{j-1}) \cap \pi_{j-1}^{-1}(K)) = 2.$$

L'énoncé suivant est un avatar de la désingularisation des espaces analytiques ([A-H-V]). Nous n'en donnons pas la démonstration ici.

THÉORÈME 4 [A-H-V]. — *Considérons un morphisme propre $\pi_{j-1} : N_{j-1} \rightarrow U_{j-1}$ d'espaces analytiques non-singuliers, un compact K de U_{j-1} , un diviseur à croisements normaux D_{j-1} et un fermé analytique $\overline{Y_{j-1}}$ de codimension 2 de N_{j-1} . Alors, il existe un ouvert U_j de U_{j-1} tel que $K \subset U_j$ et un morphisme $\sigma'_j : N'_j \rightarrow \pi_{j-1}^{-1}(U_j)$ composé d'éclatements globaux à centres lisses tels que :*

1. *Soit S le fermé analytique formé des points de $Q \in \overline{Y_{j-1}}$ où $\overline{Y_{j-1}}$ n'est ni lisse, ni de codimension deux et ni inclus dans chaque composante irréductible de D en Q . Alors, le morphisme σ'_j induit un isomorphisme*

$$\sigma'_j : N'_j \setminus \sigma'^{-1}(S) \rightarrow \pi_{j-1}^{-1}(U_j) \setminus S.$$

2. *L'image inverse $D'_j = \sigma'^{-1}_j(S \cup D_{j-1})$ est un diviseur à croisements normaux de N'_j .*

3. *Le transformé strict Y'_j de $\overline{Y_{j-1}}$ est lisse et de codimension deux (non vide et ayant peut-être plusieurs composantes connexes).*

Remarquons que l'ensemble S est de codimension supérieure ou égale à trois. La notation employée dans l'énoncé précédent permet de définir le morphisme σ'_j ainsi que les objets auxiliaires D'_j et Y'_j . Le morphisme $\sigma''_j : N_j \rightarrow N'_j$ est, par définition, l'éclatement de centre Y'_j . On note π_j le composé $\pi_{j-1} \circ \sigma'_j \circ \sigma''_j$. Le diviseur D_j et le feuilletage $\mathcal{F}_j$ sont donnés par

$$D_j = \sigma''^{-1}_j(D'_j \cup Y'_j) = (\sigma'_j \circ \sigma''_j)^{-1}(D_{j-1} \cup \overline{Y_{j-1}})$$

$$\mathcal{F}_j = (\sigma'_j \circ \sigma''_j)^* \mathcal{F}_{j-1} = \pi_j^* \mathcal{F}.$$

Il reste à définir Y_j et Z_j . L'ensemble Y_j est formé des points

$$Q \in \text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j) \setminus \pi_j^{-1}(\pi_{j-1}(Z_{j-1}))$$

tels que $\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j)$ soit lisse, de codimension deux et inclus dans chaque composante irréductible de D_j en Q et tels que le morphisme π_j induise en Q un isomorphisme local de $\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j)$ sur $\text{Sing}^*(\mathcal{F}, D)$. L'ensemble Z_j est le complémentaire de Y_j dans $\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j)$. Ceci termine la construction de la suite d'équiréduction $\mathcal{S}$.

REMARQUE 5. — Les propriétés suivantes découlent de la construction de $\mathcal{S}$.

1. Le fermé $\overline{Y_j}$ est une union de composantes irréductibles de codimension deux de $\text{Sing}(\mathcal{F}_j, D_j)$. Localement, en un point Q de Y_j on a

$$Y_j = \text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j) = \text{Sing}(\mathcal{F}_j, D_j) = \text{Sing } \mathcal{F}_j.$$

2. L'ensemble Z_j est un fermé analytique de N_j et la codimension de $\pi_j(Z_j)$ est supérieure ou égale à trois.

3. L'image de Y_j par le morphisme $\sigma'_j \circ \sigma''_j$ est contenue dans Y_{j-1} .
4. Le morphisme π_j induit une suite d'éclatements globaux de l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ du compact K .

Supposons maintenant que la construction de la suite d'équiréduction $\mathcal{S}$ s'arrête à l'étape j . Cela veut dire que

$$\text{Codim}(\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j) \cap \pi_j^{-1}(K)) > 2.$$

Les conclusions du théorème d'équiréduction générique sont alors vérifiées avec

$$\begin{aligned} \pi &= \pi_j : N' = \pi_j^{-1}(\overset{\circ}{K}) \rightarrow \overset{\circ}{K} = U \\ Z &= \overset{\circ}{K} \cap \left(\bigcup_{i=0, \dots, j-1} \pi_i(Z_i) \cup \pi_j(\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j)) \right). \end{aligned}$$

4. Invariants locaux et centres permis

Nous définissons ici des invariants locaux supplémentaires et nous introduisons la notion de centre permis d'éclatement. Ces invariants sont de nature géométrique (multiplicités et mesure de contact) ou de nature arithmétique (résonnance). La notion de centre permis d'éclatement est inspirée d'une idée analogue utilisée dans l'étude des variétés analytiques. C'est une propriété générique qui permet un contrôle des invariants locaux.

Considérons les données de départ du paragraphe précédent et soit Y un sous-espace analytique fermé non-singulier de l'espace ambiant N . Supposons que Y et D soient à croisements normaux au point a de N . Il existe des coordonnées locales $x = (x_1, \dots, x_n)$ en a et deux ensembles $A, B \subset \{1, \dots, n\}$ tels qu'au voisinage de a

$$E = \left(\prod_{i \in A} x_i = 0 \right), \quad Y = (x_i = 0; i \in B).$$

Si ω est un générateur de $\mathcal{F}$ en a il s'écrit sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^n b_i dx_i = \left(\prod_{i \in A} x_i \right) \left(\sum_{i \in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} a_i dx_i \right)$$

où les b_i et les a_i sont des germes de fonctions analytiques en a . Nous rajoutons à l'ordre usuel et l'ordre adapté définis auparavant les invariants géométriques suivants (*voir* aussi [Ca]_{1,2,3}, [Ca-Ce]_{1,2}):

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}, D; a) &= \min(\{\nu_a(a_i); i \in A\} \cup \{\nu_a(a_i) + 1; i \notin A\}) \\ \delta(\mathcal{F}, D; Y, a) &= \min(\{\nu_a(a_i); i \notin B \setminus A\} \cup \{\nu_a(a_i) + 1; i \in B \setminus A\}) \\ \mu(\mathcal{F}, D; Y) &= \min(\{\nu_Y(a_i); i \notin B \setminus A\} \cup \{\nu_Y(a_i) + 1; i \in B \setminus A\}) \end{aligned}$$

où $\nu_Y(f)$ est l'ordre générique de la fonction f aux points de Y . L'invariant $\mu(\mathcal{F}, D; a)$ s'appelle *multiplicité adaptée de $\mathcal{F}$ par rapport à D au point a* . Signalons qu'il est égal à $\mu(\mathcal{F}, D; Y)$ lorsque $Y = \{a\}$. Remarquons aussi que la multiplicité adaptée, contrairement

à l'ordre adapté, n'est pas nécessairement supérieurement semi-continue. Elle l'est pourtant le long des strates d'équimultiplicité du diviseur D . Par contre, la différence

$$\delta(\mathcal{F}, D; Y, a) - \mu(\mathcal{F}, D; Y)$$

définit une fonction supérieurement semi-continue sur Y .

DÉFINITION 6 ([Ca]_{1,2,3}). – On dit que Y est un centre permis pour $\mathcal{F}$, D en a si Y est tangent à $\mathcal{F}$, à croisements normaux avec D en a et si on a l'égalité

$$\delta(\mathcal{F}, D; Y, a) = \mu(\mathcal{F}, D; Y).$$

Lorsque Y est tangent à $\mathcal{F}$, “ être un point de Y où Y est un centre permis pour $\mathcal{F}, D$ ” est une condition analytique ouverte. Définissons maintenant l'invariant de résonnance $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; a)$. Notons

$$r = \nu(\mathcal{F}, D; a); \quad m = \mu(\mathcal{F}, D; a).$$

On a toujours $r \leq m \leq r + 1$. Soient $A_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ les composantes homogènes de degré r des coefficients a_i de la forme ω . Lorsque $m = r + 1$, on pose $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; a) = 0$. Si $m = r$ on pose

1. $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; a) = 1$, si $\sum_{i \in A} A_i = 0$.
2. $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; a) = 2$, si $\sum_{i \in A} A_i \neq 0$ et il existe une fonction $\phi : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ telle que $\sum_{i \in A} \phi(i) A_i = 0$.
3. $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; a) = 0$, s'il n'existe pas une fonction $\phi : A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ telle que $\sum_{i \in A} \phi(i) A_i = 0$.

La condition $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; a) = 1$ est équivalente à dire que $m = r$ et l'éclatement de centre a est dicritique (le diviseur exceptionnel de l'éclatement est dicritique).

La notion de centre permis n'est pas suffisante pour construire la chaîne des points infiniment voisins. On utilise d'autres propriétés génériques des points le long des composantes irréductibles de codimension deux du lieu singulier adapté. Nous en donnons la liste dans la proposition suivante.

PROPOSITION 7. – Soit S une composante irréductible de codimension deux du lieu singulier adapté $\text{Sing}(\mathcal{F}, D)$. Il existe un fermé analytique T inclus dans S , différent de S (et donc $\text{Codim } T \geq 3$), en dehors duquel les propriétés suivantes sont satisfaites. En tout point Q de $S \setminus T$:

1. S est non singulier, permis et inclus dans chaque composante irréductible de D en Q (en particulier $e(D, Q) \leq 2$).
2. Les invariants $e(D, P)$, $\nu(\mathcal{F}, P)$, $\nu(\mathcal{F}, D; P)$, $\mu(\mathcal{F}, D; P)$ et $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; P)$ sont constants le long de S pour les points P d'un voisinage de Q .
3. Si $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; Q) = 1$, l'éclatement (dans un voisinage de Q) de centre S est dicritique.
4. Avec l'écriture locale précédente pour un générateur ω de $\mathcal{F}$ en Q , soient $f = \sum_{i \in A} a_i$ et $r = \nu(\mathcal{F}, D; Q)$. Si $\nu_Q(f) > r$ on a $\nu_S(f) > r$.

Démonstration. – Les deux premières assertions découlent de la nature analytique semi-continue des invariants (la multiplicité adaptée l'étant lorsque l'on a équivarier multiplicité le long de D). Le même argument est valable pour la dernière. Supposons donc que $\text{Rs}(\mathcal{F}, D; Q) = 1$ et soit $m = \mu(\mathcal{F}, D; Q)$. Alors $m = r$ et $\nu_S(f) > r$ puisque $\nu_Q(f) > r$. Soit $S = (x_i = 0; i \in B)$, localement en Q . On a $A \subset B$. D'après 1), 2) et 4) les conditions $m = r$, et $\nu_Q(f) > r$ impliquent

$$\mu(\mathcal{F}, D; S) = r, \quad \text{et} \quad \nu_S \left(\sum_{i \in A} + \sum_{i \in B \setminus A} x_i a_i \right) > r.$$

Ceci nous assure la dicriticité de l'éclatement de centre S .

5. La chaîne des points infiniment voisins

Nous supposons maintenant que la suite d'équiréduction $\mathcal{S}$ est infinie et nous allons chercher la contradiction annoncée au début de l'appendice. Dans ce paragraphe, on construit la chaîne infinie des points infiniment voisins $\{P_j\}_{j=0,1,\dots}$. Dans les paragraphes suivants, on travaillera sur cette suite pour trouver la contradiction recherchée.

Reprenons les notations de la construction de la suite d'équiréduction. D'après la proposition 7 on peut trouver un fermé analytique T_j inclus dans N_j de codimension au moins trois tel que $T_j \subset \overline{Y_j}$ et tel que les propriétés de la proposition 7 soient satisfaites aux points Q de $\overline{Y_j} \setminus T_j$. Notons

$$\overline{Y_j} \cap \pi_j^{-1}(\overset{\circ}{K}) = \Gamma_1^j \cup \dots \cup \Gamma_{k_j}^j$$

la décomposition en composantes irréductibles de $\overline{Y_j} \cap \pi_j^{-1}(\overset{\circ}{K})$. La codimension de chaque Γ_s^j est deux. Les Γ_s^j sont les composantes irréductibles de $\text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j) \cap \pi_j^{-1}(\overset{\circ}{K})$ qui ne sont pas contenues dans Z_j . Remarquons aussi que si $j \geq 1$, il existe une unique composante $\Gamma_{s'}^{j-1}$ telle que

$$(\sigma'_j \circ \sigma''_j)(\Gamma_s^j) = \Gamma_{s'}^{j-1}$$

On notera cette situation par $\Gamma_{s'}^{j-1} < \Gamma_s^j$. Ceci induit un ordre partiel sur l'ensemble $\mathbf{G}$ des Γ_s^j . Les niveaux de $\mathbf{G}$ étant finis et $\mathbf{G}$ étant infini, il existe une chaîne infinie

$$\Gamma^0 = \Gamma_{s_0}^0 < \Gamma^1 = \Gamma_{s_1}^1 < \dots < \Gamma^j = \Gamma_{s_j}^j < \dots$$

Les points P_j que nous cherchons appartiennent aux Γ^j . En effet, pour des raisons de dimension et de dénombrabilité, il existe un point

$$P_0 \in \Gamma^0 \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} \pi_j(Z_j \cup T_j).$$

Le morphisme $\pi_j : \Gamma^j \rightarrow \Gamma^0$ étant surjectif et fini, l'ensemble $\pi_j^{-1}(P_0)$ est non vide et fini :

$$\pi_j^{-1}(P_0) = \{P_j^1, \dots, P_j^{t_j}\} \subset \Gamma^j \setminus (Z_j \cup T_j)$$

En répétant cet argument, nous trouvons une suite infinie de points P_j de $\Gamma^j \setminus (Z_j \cup T_j)$, tels que si $j \geq 1$ on a

$$(\sigma'_j \circ \sigma''_j)(P_j) = P_{j-1}.$$

C'est la suite cherchée.

REMARQUE 8. – Les propriétés énoncées dans la proposition 7 sont satisfaites dans un voisinage de chaque point P_j . Il en est de même pour celles qui correspondent aux points de $\Gamma^j \setminus Z_j$ lors de la construction de la suite d'équiréduction. Remarquons aussi que

$$\Gamma^j = \text{Sing}(\mathcal{F}_j, D_j) = \text{Sing}^*(\mathcal{F}_j, D_j)$$

localement en P_j . De plus, le morphisme

$$\sigma'_j \circ \sigma''_j : N_j \rightarrow \pi_{j-1}^{-1}(U_j)$$

est l'éclatement de centre Γ^{j-1} dans un voisinage de P_{j-1} . Dorénavant, on note $\sigma_j = \sigma'_j \circ \sigma''_j$ et on le restreint à un voisinage suffisamment petit de P_{j-1} de manière à ce qu'il s'identifie à l'éclatement de centre Γ^{j-1} .

6. Invariants verticaux

Dans la situation précédente, les invariants $\text{Inv}(P_j)$ sont définis par

$$\text{Inv}(P_j) = (r_j, m_j^*, \alpha_j^*)$$

où l'on note

$$r_j = \nu(\mathcal{F}_j, D_j; P_j), \quad m_j = \mu(\mathcal{F}_j, D_j; P_j), \quad \alpha_j = \mu(\mathcal{F}_j, D_j; \Gamma_j),$$

$$\text{Rs}_j = \text{Rs}(\mathcal{F}_j, D_j; P_j), \quad m_j^* = \min\{r_j + 1, m_j + \text{Rs}_j\}, \quad \alpha_j^* = \alpha_j + 1 - m_j.$$

Signalons que $r_j \leq \alpha_j \leq m_j \leq m_j^* \leq r_j + 1$. En particulier α_j^* appartient à $\{0, 1\}$. On sait que si $\text{Rs}_j = 1$, l'éclatement σ_{j+1} est dicritique par construction. Le lemme suivant caractérise la "dicriticité non résonnante" à l'aide de l'invariant α_j^* . La proposition traduit la semi-continuité verticale des invariants $\text{Inv}(P_j)$.

LEMME 9. – *Supposons que $\text{Rs}_j = 0$. L'éclatement σ_{j+1} (localement en P_j) est dicritique si et seulement si $\alpha_j^* = 0$.*

PROPOSITION 10. – *Pour tout indice $j \geq 0$ on a $\text{Inv}(P_j) \geq \text{Inv}(P_{j+1})$ pour l'ordre lexicographique.*

Démonstration du lemme et de la proposition. – Certaines parties de cette preuve ont déjà été présentées dans $[\text{Ca}]_{1,2,3}$. Nous les reprenons pour la commodité du lecteur. Fixons les équations locales à partir desquelles on déduira les résultats. On peut choisir un système

de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ en P_j tel que l'on ait localement en P_j

(i) $\Gamma_j = (x_1 = x_2 = 0)$,

(ii) $D_j \subset (x_1 x_2 = 0)$.

Soit E_j le diviseur formé des composantes non-dicritiques de D_j . Il existe des entiers $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ tels que $E_j = (x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} = 0)$. Le feuilletage $\mathcal{F}_j$ est engendré en P_j par

$$\omega = (x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2}) \left[a_1 \frac{dx_1}{x_1^{\epsilon_1}} + a_2 \frac{dx_2}{x_2^{\epsilon_2}} + \sum_{i \geq 3} a_i dx_i \right].$$

On peut supposer que l'on a aussi les propriétés

(iii) $\nu_{(x_1, x_2)}(a_1, \dots, a_n) = \nu_{(x_1, \dots, x_n)}(a_1, \dots, a_n) = r_j$.

(iv) $\nu_{(x_1, x_2)}\{a_j; \epsilon_j = 1\} \geq r_j + 1$, $\nu_{(x_1, \dots, x_n)}\{a_j; \epsilon_j = 1\} \geq r_j + 1$.

Il existe aussi des coordonnées locales $(x'_1, \dots, x'_n)$ en P_{j+1} telles que le morphisme σ_{j+1} soit décrit (en P_j et P_{j+1}) par les formules

$$x_i = x'_i, i \neq 2; x_2 = x'_1(x'_2 + \zeta).$$

Quitte à changer l'ordre de x_1, x_2 et à faire un changement de coordonnées du type $x_2 \mapsto x_2 + x_1 \phi(x_1, x_3, \dots, x_n)$, on peut supposer que l'on a de plus les propriétés suivantes

(v) $\zeta \neq 0 \Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$.

(vi) $\Gamma_{j+1} = (x'_1 = x'_2 = 0)$, localement en P_{j+1} .

Le diviseur exceptionnel de σ_{j+1} est donné par $x'_1 = 0$ et nous avons donc $(x'_1 = 0) \subset D_{j+1} \subset (x'_1 x'_2 = 0)$. Soit E_{j+1} le diviseur formé des composantes non dicritiques de D_{j+1} . Alors $E_{j+1} = (x_1^{\epsilon'_1} x_2^{\epsilon'_2} = 0)$ où $\epsilon'_1 = 0, 1$ suivant que σ_{j+1} est ou non dicritique et $\epsilon'_2 = \epsilon_2$ ou $\epsilon'_2 = 0$ suivant qu'on ait $\zeta = 0$ ou $\zeta \neq 0$. Posons $e = \epsilon_1 + \epsilon_2$ et $\beta = \alpha + e$ si σ_{j+1} est dicritique ou $\beta = \alpha + e - 1$ si σ_{j+1} est non dicritique. Un générateur ω' de $\mathcal{F}_{j+1}$ s'écrit alors

$$\omega' = x_1'^{-\beta} \sigma_{j+1}^*(\omega).$$

Le lemme et la proposition vont se déduire rapidement de l'écriture de $\sigma_{j+1}^*(\omega)$ et de ω' . Si f est un germe de fonction en P_j , notons $\tilde{f} = f \circ \sigma_{j+1}$ le germe correspondant en P_{j+1} . Alors ω' s'écrit

$$\begin{aligned} \omega' &= x_1'^{-\beta} \sigma_{j+1}^*(\omega) = (x_1'^{\epsilon'_1} x_2'^{\epsilon'_2}) \left[a'_1 \frac{dx'_1}{x_1'^{\epsilon'_1}} + a'_2 \frac{dx'_2}{x_2'^{\epsilon'_2}} + \sum_{i \geq 3} a'_i dx'_i \right] \\ &= (x_1'^{\epsilon_1 + \epsilon_2} (x'_2 + \zeta)^{\epsilon_2}) \left[\left(\tilde{a}_1 + x_1'^{\epsilon_1 - \epsilon_2} (x'_2 + \zeta)^{1 - \epsilon_2} \tilde{a}_2 \right) \frac{dx'_1}{x_1'^{\epsilon_1}} \right. \\ &\quad \left. + x_1'^{1 - \epsilon_2} \tilde{a}_2 \frac{dx'_2}{(x'_2 + \zeta)^{\epsilon_2}} + \sum_{i \geq 3} \tilde{a}_i dx'_i \right]. \end{aligned}$$

Démontrons d'abord le lemme. Si $\text{Rs}_j = 0$ et $\alpha^* = 0$, on a $r_j = \alpha_j$ et $m_j = r_j + 1$. Alors,

$$\begin{aligned} r_j &= \nu_{(x_1, \dots, x_n)}(a_3, \dots, a_n) = \nu_{(x_1, x_2)}(a_3, \dots, a_n) \\ r_j + 1 &\geq \nu_{(x_1, x_2)}(a_i; \epsilon_i = 1). \end{aligned}$$

Ceci implique que $x_1'^{\alpha_j+e}$ divise $\sigma_{j+1}^*(\omega)$. On a donc un éclatement dicritique. Réciproquement, si σ_{j+1} est dicritique et $m_j = r_j$, nécessairement $\text{Rs}_j = 1$, d'où $m_j = r_j + 1$. Si $\alpha_j = r_j + 1$, on pourrait diviser $\sigma_{j+1}^*(\omega)$ au plus par la puissance $r_j + e$ de x_1' . Puisque $\alpha_j - 1 + e = r_j + e$, on serait alors dans le cas non-dicritique. Ceci complète la preuve du lemme.

Démontrons maintenant la proposition. Posons $r = r_j$ pour simplifier. Un calcul standard très simple à partir des expressions des coefficients a_i' montre que $r_{j+1} \leq r$ (voir [Ca]_{1,2,3}). Supposons que $r_{j+1} = r_j = r$ et montrons que alors $m_{j+1}^* \leq m_j^*$. Il suffit de montrer que si $m_j^* = r$ alors $m_{j+1}^* = r$. Puisque $m_j^* = r$, on a $m_j = \alpha_j = r$, $\text{Rs}_j = 0$. En particulier on a

$$\nu_{(x_1, \dots, x_n)}(a_i; \epsilon_i = 1) = \nu_{(x_1, x_2)}(a_i; \epsilon_i = 1) = r.$$

Ceci implique que $e = \epsilon_1 + \epsilon_2 \geq 1$. Soit A_i la partie de degré r du coefficient a_i . Puisque $r_{j+1} = r$, on peut écrire

$$A_i = \lambda_i(x_2 - \zeta x_1)^r \text{ pour } i \in \{s; \epsilon_s = 1\}.$$

Puisque $\text{Rs}_j = 0$, on a

$$\sum_{i \in \{s; \epsilon_s = 1\}} n_i \lambda_i \neq 0, \text{ si } n_i \in \mathbf{Z}_+.$$

Cette propriété, combinée avec la non dicriticité de σ_{j+1} , permet de déduire que $\nu_{(x_1', \dots, x_n')}(a_1') = r$ et donc $m_{j+1} = r$. Maintenant, si $e' = \epsilon_1' + \epsilon_2' = 1$, on a $\text{Rs}_{j+1} = 0$, d'où $m_{j+1}^* = r$. Supposons que $e' = 2$ et notons A_i' la partie de degré r du coefficient a_i . On a

$$\begin{aligned} A_1' &= \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)x_2'^r + \Phi(x_1', x_3', \dots, x_n'), & \text{si } e = 2 \\ \lambda_2 x_2'^r + \Phi(x_1', x_3', \dots, x_n'), & \text{si } e = 1 \end{cases} \\ A_2' &= \lambda_2 x_2'^r + \Psi(x_1', x_3', \dots, x_n'). \end{aligned}$$

L'hypothèse $\text{Rs}_j = 0$ implique alors $n_1 A_1 + n_2 A_2 \neq 0$ pour tout $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}_+$. Par conséquent $\text{Rs}_{j+1} = 0$ et donc $m_{j+1}^* = r$. Pour terminer, supposons que

$$r = r_j = r_{j+1}, \quad m^* = m_j^* = m_{j+1}^*$$

et montrons que $\alpha_j^* \geq \alpha_{j+1}^*$. Il suffit de montrer que si $\alpha_j^* = 0$ alors $\alpha_{j+1}^* = 0$. Puisque $\alpha_j^* = 0$, on a $m_j = r + 1$, $\alpha_j = r$. En particulier

$$\nu_{(x_1, \dots, x_n)}(a_3, \dots, a_n) = \nu_{(x_1, x_2)}(a_3, \dots, a_n)$$

et les formules pour a_i' montrent alors que

$$\nu_{(x_1', \dots, x_n')}(a_3', \dots, a_n') \leq r.$$

Donc $\alpha_{j+1} \leq r$ et par conséquent $\alpha_{j+1} = r$. Il reste à montrer que $m_{j+1} = r + 1$. D'après le lemme, l'éclatement σ_{j+1} est dicritique et donc $\epsilon_1' = 0$. D'où $e' = \epsilon_1' + \epsilon_2' \leq 1$ et alors $\text{Rs}_{j+1} = 0$. Ceci nous dit que $m_{j+1} = m_{j+1}^*$. On déduit alors de l'inégalité $m_{j+1}^* = m_j^* \geq m_j = r + 1$ l'égalité $m_{j+1} = r + 1$. Ceci termine la démonstration.

7. Contrôle par une section plane

D'après la proposition 10 si le théorème d'équiréduction générique n'est pas vrai, l'invariant $\text{Inv}(P_j)$ se stabilise puisqu'il ne peut pas diminuer strictement une infinité de fois. Supposons que pour tout j $\text{Inv}(P_j) = (r, m^*, \alpha^*)$. Pour prouver le théorème, il suffit alors de montrer que cette hypothèse est impossible. On distingue deux situations : $\alpha^* = 0$ et $\alpha^* = 1$. Le cas $\alpha^* = 0$ qu'on appelle *cas dicritique non résonnant* est traité dans le paragraphe suivant. Ici nous considérons le cas $\alpha^* = 1$.

Considérons un indice $j \geq 0$. Le théorème de transversalité de Mattei-Moussu [Ma-Mo] dit qu'il existe une immersion de germes d'espaces analytiques

$$\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (N_j, P_j)$$

transverse à Γ_j et à D_j telle que si ω est un générateur local de $\mathcal{F}_j$ en P_j , alors $\phi^*\omega$ est à singularité isolée. En particulier $\phi^*\omega$ engendre le feuilletage $\underline{\mathcal{F}} = \phi^*\mathcal{F}_j$ et $\underline{D} = \phi^{-1}(D_j)$ est un diviseur à croisements normaux de $(\mathbb{C}^2, 0)$. On dira, pour simplifier, qu'une telle immersion est une immersion *transverse*.

PROPOSITION 11. – Soit ϕ une immersion transverse. Posons

$$\underline{r} = \nu(\underline{\mathcal{F}}, \underline{D}; 0); \quad \underline{m} = \mu(\underline{\mathcal{F}}, \underline{D}; 0)$$

Alors $(r_j, m_j) \leq (\underline{r}, \underline{m})$ pour l'ordre lexicographique. De plus, en choisissant ϕ suffisamment générale, on a l'égalité $(r_j, m_j) = (\underline{r}, \underline{m})$ qui implique $R s_j = \underline{R s}$, où $\underline{R s} = R s(\underline{\mathcal{F}}, \underline{D}; 0)$. En particulier, si l'on note

$$\underline{m}^* = \min \{ \underline{r} + 1, \underline{m} + \underline{R s} \}$$

on a aussi $(r_j, m_j^*) \leq (\underline{r}, \underline{m}^*)$ et $(r_j, m_j^*) = (\underline{r}, \underline{m}^*)$.

Démonstration. – Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 10 et choisissons des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ en P_j ayant les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) de cette démonstration. Puisque ϕ est transverse à Γ_j , on peut supposer que $\phi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ et donc que

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= (x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2}) \left[a_1(x_1, x_2, 0, \dots, 0) \frac{dx_1}{x_1^{\epsilon_1}} + a_2(x_1, x_2, 0, \dots, 0) \frac{dx_2}{x_2^{\epsilon_2}} \right] \\ &= (x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2}) \left[\underline{a}_1(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1^{\epsilon_1}} + \underline{a}_2(x_1, x_2) \frac{dx_2}{x_2^{\epsilon_2}} \right]. \end{aligned}$$

Puisque $\phi^*\omega$ est à singularité isolée, ses coefficients n'ont pas de facteur commun. Ainsi, si $\epsilon_i = 1$ alors $x_i = 0$ est une hypersurface intégrale de $\underline{\mathcal{F}}$. Par définition, on a alors

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \nu_{(x_1, x_2)}(\underline{a}_1, \underline{a}_2) \\ \underline{m} &= \min \{ \nu_{(x_1, x_2)}(\underline{a}_i); \epsilon_i = 1 \} \cup \{ \nu_{(x_1, x_2)}(\underline{a}_i) + 1; \epsilon_i = 0 \}. \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que $\underline{r} \geq r$. Pour achever la preuve de la première partie de l'énoncé il suffit de prouver que si $\underline{r} = r$ et $\underline{m} = m$ alors $m = r$. Si $\underline{m} = m$, il existe un indice

i tel que $\epsilon_i = 1$ et $\nu_{(x_1, x_2)}(\underline{a}_i) = \underline{r} = r$. D'où

$$r = \underline{r} \geq \nu_{(x_1, \dots, x_n)}(\underline{a}_i) \geq r$$

et donc $m = r$.

Supposons maintenant que $(r, m) = (\underline{r}, \underline{m})$ et montrons que $\text{Rs} = \underline{\text{Rs}}$. Si $\underline{m} = m = r+1$, les invariants Rs et $\underline{\text{Rs}}$ sont automatiquement nuls. Si $\underline{m} = m = r$, notons A_i , respectivement $\underline{A}_i$, la partie de degré r de a_i , respectivement de $\underline{a}_i$. Comme $\nu_{(x_1, x_2)}(\underline{a}_i) \geq r$, on a $A_i = \underline{A}_i$ et donc $\text{Rs} = \underline{\text{Rs}}$.

Il reste à démontrer qu'on a effectivement $(r, m) = (\underline{r}, \underline{m})$ pour un choix de ϕ suffisamment général. Considérons,

$$\phi_{\lambda, \mu}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \lambda_3 x_1 + \mu_3 x_2, \dots, \lambda_n x_1 + \mu_n x_2)$$

pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^{n-2}$. Un calcul standard permet alors de vérifier qu'on a la propriété désirée pour un choix général de $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^{n-2}$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la suite d'équiréduction est finie lorsque $\alpha^* = 1$. Choisissons ϕ assez générale pour que $(r_j, m_j) = (\underline{r}, \underline{m})$, $(r_j, m_j^*) = (\underline{r}, \underline{m}^*)$ et $\text{Rs}_j = \underline{\text{Rs}}$. L'immersion ϕ se relève par l'éclatement σ_{j+1} en un morphisme

$$\phi' : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (N_{j+1}, P_{j+1})$$

tel que $\phi \circ \sigma_{j+1} = \sigma_{j+1} \circ \phi'$ où σ_{j+1} est donné par l'éclatement de l'origine suivi d'une localisation.

Supposons que $\sigma_{j+1}^*(\mathcal{F}) = (\phi')^* \mathcal{F}_{j+1}$ et que ϕ' satisfasse aux mêmes conditions que ϕ . On déduit du théorème de Seidenberg [Se] en itérant ce procédé, que pour un indice k suffisamment grand, la singularité à l'origine de $\sigma_{j+k}^*(\phi^{(k)*} \mathcal{F}_{j+k})$ est une singularité simple. On obtient ainsi la contradiction cherchée, car $\phi^{(k)}$ étant transverse, le point P_{j+k} devrait être une singularité simple de type dimensionnel deux, d'après la proposition 3.

Les constructions précédentes indiquent que ϕ' est transverse à Γ_{j+1} et D_{j+1} . On sait que l'éclatement σ_{j+1} est dicritique pour $\mathcal{F}_j$ si et seulement si l'éclatement σ_{j+1} est dicritique pour $\underline{\mathcal{F}}$ et ceci lorsque $\text{Rs}_j = \underline{\text{Rs}} = 1$. Notons

$$\begin{array}{llll} \beta = \alpha + e - 1 & = m_j + e - 1 & = \underline{m} + e - 1 & \text{si } \text{Rs}_j \neq 1 \\ \beta = \alpha + e & = m_j + e & = \underline{m} + e & \text{si } \text{Rs}_j = 1 \end{array}$$

où $e = e(D_j, P_j)$. Pour calculer un générateur local de $\mathcal{F}_{j+1}$, respectivement de $\sigma_{j+1}^*(\mathcal{F})$, il suffit de diviser $\sigma_{j+1}^* \omega$, respectivement $\sigma_{j+1}^*(\phi^* \omega)$ par exactement β fois une équation réduite du diviseur exceptionnel correspondant. Ceci implique que si ω_{j+1} est un générateur local de $\mathcal{F}_{j+1}$ en P_{j+1} , alors $(\phi')^* \omega_{j+1}$ est un générateur local de $\sigma_{j+1}^*(\mathcal{F})$. En particulier $(\phi')^* \omega_{j+1}$ est à singularité isolée et donc l'immersion ϕ' est transverse. Une autre conséquence de cet argument est que $\sigma_{j+1}^*(\mathcal{F}) = (\phi')^* \mathcal{F}_{j+1}$. Nous allons montrer que ϕ' satisfait aux mêmes conditions que ϕ . Soient

$$\mathcal{F}' = \sigma_{j+1}^*(\underline{\mathcal{F}}) = \phi'^* \mathcal{F}_{j+1},$$

$$D' = \phi'^{-1}(D_{j+1}) = \sigma_{j+1}^{-1}(\underline{D})$$

et considérons les invariants

$$r' = \nu(\mathcal{F}', D'; 0), \quad m' = \mu(\mathcal{F}', D'; 0)$$

$$Rs' = Rs(\mathcal{F}', D'; 0), \quad m'^* = \min \{r' + 1, m' + Rs'\}.$$

En combinant la proposition précédente avec la proposition de stabilité verticale des invariants (proposition 10 appliquée à $\mathcal{F}$, on déduit que

$$(r, m^*) = (r, \underline{m}^*) \geq (r', m'^*) \geq (r_{j+1}, m_{j+1}^*) = (r, m^*).$$

Par conséquent $(r', m'^*) = (r_{j+1}, m_{j+1}^*)$. Maintenant, pour obtenir à l'étape $j + 1$ la même situation qu'à l'étape j il suffit de montrer que $m' = m_{j+1} = m$. Si $m^* = r$, le résultat est immédiat. Plus précisément, le seul mauvais cas possible est le suivant :

$$m^* = r + 1; \quad m_j = \underline{m} = r + 1$$

$$m_{j+1} = r; \quad Rs_{j+1} \neq 0; \quad m' = r + 1.$$

Montrons qu'il ne se produit pas. Nous reprenons les notations de la démonstration de la proposition 10 et nous supposons que l'immersion ϕ s'écrit $\phi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0, \dots, 0)$. L'inégalité $Rs_{j+1} \neq 0$ implique alors $\epsilon'_1 + \epsilon'_2 = e' = 2$, $\epsilon_2 = 1$ et $\nu(a'_2) = r$. Puisque $\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = 1$, alors $\zeta = 0$ et l'éclatement σ_{j+1} a localement une formule *combinatoire* (les monômes sont respectés). Vu que $\nu(a_2) \geq r + 1$, on trouve dans le coefficient a_2 un monôme du type $\lambda x_1^{s_1} x_2^{s_2}$ où $s_1 + 2s_2 - (r + 1) = r$. Ce monôme existe encore dans le coefficient $a_2(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ de $\phi^* \omega$ et par conséquent $m' = r$.

8. Le cas dicritique non résonnant

Le paragraphe précédent était consacré à la finitude de la suite d'équiréduction lorsque $\text{Inv}(P_j) = (r, m^*, \alpha^*)$ pour tout indice j avec $\alpha^* = 1$. Ici nous terminons la démonstration du théorème d'équiréduction générique en considérant le cas $\alpha^* = 0$.

Supposons que $\alpha^* = 0$. Dans ce cas les éclatements σ_j sont dicritiques et l'invariant de résonance Rs_j est constamment nul. C'est le cas *dicritique non résonnant*. On montre que le diviseur exceptionnel est transverse au feuilletage (dicriticité) à chaque étape et le feuilletage induit sur le diviseur exceptionnel est *vertical* : les feuilles de ce feuilletage se projettent sur des points isolés du centre Γ_j de l'éclatement σ_{j+1} . Cette situation de nature géométrique empêche un *bon comportement topologique générique* du feuilletage le long du centre Γ_j . De plus, on ne peut pas faire un contrôle par une section plane comme précédemment. On contrôle l'évolution des singularités au moyen d'un invariant "ad hoc". La nature de ce nouvel invariant est similaire à celle d'un exposant de contact (voir [A-H-V]). Rappelons que $\alpha^* = 0$ implique $r_j = r = \alpha_j$, $m_j = r + 1$ pour tout indice $j \geq 0$. Choisissons des notations et des coordonnées comme dans la preuve de la proposition 10. Plus précisément, on peut choisir un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ en P_j tel que l'on ait localement en P_j

- (i) $\Gamma_j = (x_1 = x_2 = 0)$.

- (ii) $D_j \subset (x_1 x_2 = 0)$ et le diviseur formé des composantes non-dicritiques de D_j est $E_j = (x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} = 0)$ avec $\epsilon_i \in \{0, 1\}$.
 (iii) $\mathcal{F}_j$ est engendré en P_j par

$$\omega = (x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2}) \left[a_1 \frac{dx_1}{x_1^{\epsilon_1}} + a_2 \frac{dx_2}{x_2^{\epsilon_2}} + \sum_{i \geq 3} a_i dx_i \right]$$

- (iv) $\nu_{(x_1, x_2)}(a_3) = \nu_{(x_1, \dots, x_n)}(a_3) = r_j = r$.
 (v) $\nu_{(x_1, x_2)}\{a_j; \epsilon_j = 1\} \geq r_j + 1 = r + 1$.
 (vi) Le morphisme d'éclatement σ_{j+1} est décrit (en P_j et P_{j+1}) par :

$$x_i = x'_i, \quad i \neq 2; \quad x_2 = x'_1(x'_2 + \zeta).$$

- (vii) $\Gamma_{j+1} = (x'_1 = x'_2 = 0)$, localement en P_{j+1} .

Notons que $\epsilon'_1 = 0$, puisque l'éclatement est dicritique. Alors un générateur ω' de $\mathcal{F}_{j+1}$ en P_{j+1} s'écrit

$$\omega' = x_2'^{\epsilon'_2} \left[a'_1 dx'_1 + a'_2 \frac{dx'_2}{x_2'^{\epsilon'_2}} + \sum_{i \geq 3} a'_i dx'_i \right].$$

Dans cette expression, nous avons $a'_3 = x_1'^{-r} \tilde{a}_3$ où $\tilde{a}_3 = a_3 \circ \sigma_{j+1}$. Puisque $\nu_{(x'_1, \dots, x'_n)}(a'_3) \geq r$ (et donc $= r$) la forme initiale A_3 de a_3 s'écrit $A_3 = (x_2 - \zeta x_1)^r$. En particulier, le monôme $x_2'^r$ a un coefficient non nul dans l'expression de a'_3 . Ceci implique que σ_{j+2} s'écrit dans les coordonnées $(x'_1, \dots, x'_n)$ selon la même formule que σ_{j+1} . On peut donc supposer sans perte de généralité que $\epsilon_1 = 0$ et que x_2^r est un monôme intervenant dans l'expression de la forme initiale A_3 de a_3 . Cette situation se reproduit pour tout indice $j + s$. Nous construisons de tels systèmes de coordonnées $(x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(s)})$ à tous les niveaux $j + s$. Notons aussi que $1 \geq e_j \geq e_{j+1}$. Quitte à oublier un nombre fini d'étapes initiales, on a seulement les deux possibilités suivantes :

- A) $e(E_{j+s}, P_{j+s}) = 0$, pour tout $s \geq 0$,
 B) $e(E_{j+s}, P_{j+s}) = 1$, pour tout $s \geq 0$.

Dans les deux cas, quitte à faire un changement initial de coordonnées du type

$$\begin{aligned} x_2 &\mapsto x_2 + \sum_{s \geq 1} \zeta_s x_1^s \\ x_2 &\mapsto x_2 + \sum_{s \geq 1} x_1^s \psi_s(x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(le second pour avoir $\Gamma = (x_1 = x_2 = 0)$ à tous les niveaux) on peut supposer que le système de coordonnées $(x_1^{(s+1)}, \dots, x_n^{(s+1)})$ s'obtient à partir de $(x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(s)})$ par la formule

$$x_i^{(s)} = x_i^{(s+1)} \quad i \neq 2; \quad x_2^{(s)} = x_1^{(s)} x_2^{(s+1)}.$$

Notons

$$\omega^{(s)} = \left(x_2^{(s)}\right)^\epsilon \left[a_1^{(s)} dx_1^{(s)} + a_2^{(s)} \frac{dx_2^{(s)}}{\left(x_2^{(s)}\right)^\epsilon} + \sum_{i \geq 3} a_i^{(s)} dx_i^{(s)} \right]$$

un générateur de $\mathcal{F}_{j+s}$ en P_{j+s} . Ici $\epsilon = 0$ dans le cas A) et $\epsilon = 1$ dans le cas B). On obtient les formules récursives suivantes pour les coefficients $a_i^{(s)}$

$$\begin{aligned} a_1^{(s+1)} &= \left(x_1^{(s+1)}\right)^{-(r+\epsilon)} \left[\left(x_1^{(s+1)}\right)^\epsilon a_1^{(s)} + \left(x_2^{(s+1)}\right)^{1-\epsilon} a_2^{(s)} \right] \\ a_2^{(s+1)} &= \left(x_1^{(s+1)}\right)^{-(r-1+\epsilon)} a_2^{(s)} \\ a_i^{(s+1)} &= \left(x_1^{(s+1)}\right)^{-r} a_i^{(s)} \quad \text{si } i \geq 3. \end{aligned}$$

Le contrôle par un invariant du type *exposant de contact* permet de déduire de ces formules les propriétés suivantes :

Cas A) L'élément $(x_2^{(1)})^r$ divise les coefficients $a_1^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}$ et de plus $x_1^{(1)} \left(x_2^{(1)}\right)^{r-1}$ divise $a_2^{(1)}$ lorsque $r \geq 1$ et $x_1^{(1)}$ divise $a_2^{(1)}$ lorsque $r = 0$.

Cas B) L'élément $(x_2^{(1)})^r$ divise les coefficients $a_1^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}$ et $x_1^{(1)} \left(x_2^{(1)}\right)^r$ divise $a_2^{(1)}$.

En effet, montrons à titre d'exemple, que $(x_2)^r$ divise a_3 ; la preuve des autres propriétés se fait de la même manière. Écrivons

$$a_3 = \sum_{u \geq 0} \sum_{v=0}^{r-1} x_1^u x_2^v \psi_{u,v}(x_3, \dots, x_n) + x_2^r \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

et considérons l'invariant

$$\kappa = \min \left\{ \frac{u}{r-v}; \psi_{u,v} \neq 0 \right\}.$$

D'une part, il est clair que $\kappa \geq 1$. D'autre part les formules récurrentes pour $a_3^{(j+s)}$ impliquent que $\kappa \geq 1$ diminue exactement d'une unité à chaque éclatement. La seule possibilité est donc que $\kappa = +\infty$, c'est à dire, que x_2^r divise a_3 .

Si $r \geq 2$ on a terminé, car les coefficients $a_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, n$ n'ont pas de facteur commun. Cet argument permet de conclure dans le cas B) lorsque $n = 1$. Dans le cas A), $r = 0$ il n'y a pas de singularité et il n'y a pas transversalité par rapport à Γ_{j+1} puisque $a_3^{(1)}(0) \neq 0$. Le point P_{j+1} n'est donc pas un point singulier adapté. Il nous reste à considérer les cas B), $r = 0$ et A), $r = 1$. Dans les deux situations, le feuilletage $\mathcal{F}_{j+1}$ a un générateur de la forme

$$\omega = x_2 \left[a_1 dx_1 + x_1 \tilde{a}_2 \frac{dx_2}{x_2} + dx_3 + \sum_{i \geq 4} a_i dx_i \right]$$

avec $\text{Sing}(\omega) = (x_1 = x_2 = 0)$. Le champ de vecteurs $\partial/\partial x_1 - a_1 \partial/\partial x_3$ trivialise le feuilletage, mais il n'est pas tangent à $\text{Sing}(\omega) = (x_1 = x_2 = 0)$. C'est la contradiction cherchée.

9. Le cas réel

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{F}$ désigne un feuilletage singulier d'un espace analytique réel non singulier N et D un diviseur à croisements normaux de N comme dans l'énoncé du théorème d'équiréduction générique.

Rappelons (voir [Hi]₂) qu'une complexification de N est un triplet $(\tilde{N}, \sigma, \rho)$ où $\tilde{N}$ est un espace analytique complexe, σ une auto-conjugaison de $\tilde{N}$ et ρ un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -espaces appelés,

$$\rho : N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \tilde{N} \mid_F \quad \text{avec} \quad F = \{P \in \tilde{N} / \sigma(P) = P\}$$

tel que la conjugaison complexe sur $N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ soit compatible avec $\sigma \mid_F$. Nous écrivons $\tilde{N}$ au lieu de $(\tilde{N}, \sigma, \rho)$. Le germe $\tilde{N}$ le long de N est unique.

L'isomorphisme ρ induit un isomorphisme de $O_N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = O_{\tilde{N}} \mid_F$ -modules noté encore ρ de $\Omega_N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur $\Omega_{\tilde{N}} \mid_F$. On a l'inclusion naturelle $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \hookrightarrow \Omega_N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Il existe un unique feuilletage intégrable $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\tilde{N}$ (de façon germifiée sur N) tel que

$$\tilde{\mathcal{F}} \mid_F = \rho(\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}).$$

Plus précisément si

$$\omega = \sum_{i=1}^n b_i dx_i, \quad b_i \in O_N(U)$$

est un générateur de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U de N , il existe un ouvert $\tilde{U}$ de $\tilde{N}$ qui contient U et des fonctions holomorphes uniques $\tilde{b}_i \in O_{\tilde{N}}(\tilde{U})$ telles que $\tilde{b}_i \mid_U = b_i$. Alors la 1-forme différentielle

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i dx_i$$

est un générateur de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\tilde{U}$. Il est clair que :

- 1) Le lieu singulier de $\tilde{\mathcal{F}}$ considéré avec sa structure d'espace analytique complexe $(\text{Sing } \tilde{\mathcal{F}}, O_{\tilde{N}}/\mathcal{J}_{\tilde{\mathcal{F}}})$ est la complexification du lieu singulier de $\mathcal{F}$, avec sa structure d'espace analytique réel.
- 2) La complexification d'un feuilletage commute avec les opérations de saturation, d'image réciproque, de transformé strict.

Comme l'énoncé du théorème d'équiréduction générique est local, nous pouvons supposer que N est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathcal{F}$ est globalement défini par une 1-forme différentielle. Soient $\tilde{N}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{D}$ les complexifications de $N, \mathcal{F}, D$. Appliquons le théorème complexe à ce triplet. On obtient un morphisme $\tilde{\pi}$

$$\tilde{\pi} : \tilde{N}' \rightarrow \tilde{N}$$

qui est une composition d'éclatements globaux. Il suffit de montrer qu'ils sont des complexifications d'éclatements réels. Rappelons que $\text{Sing } \tilde{\mathcal{F}}$ est donné par un faisceau cohérent d'idéaux $\tilde{\mathcal{J}} \subset O_{\tilde{N}}$ localement engendré par les coefficients de ω . Donc, $\tilde{\mathcal{J}}$ est

équivant par l'auto-conjugaison canonique de $\tilde{N}$ (autrement dit, $\tilde{\mathcal{F}}$ est "réel"). On applique alors deux types de transformations :

1) La résolution de Hironaka (morphisms σ'_j) de certaines composantes irréductibles de $\tilde{\mathcal{F}}$. C'est un procédé équivariant pour l'action d'auto-conjugaison (voir [A-H-V],[Hi]), donc réel.

2) L'éclatement de composantes irréductibles de $\tilde{\mathcal{F}}$: les morphismes σ''_j . Un calcul direct montre l'équivariance dans ce cas.

BIBLIOGRAPHIE

- [A-H-V] J. M. AROCA, H. HIRONAKA et J. L. VICENTE, *Introduction to the theory of infinitely near singular points, The theory of the maximal contact, Desingularization theorems (Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, Vol. 28, 29, 30, Madrid CSIC, 1977).*
- [Ca]₁ F. CANO, *Dicriticalness of a singular foliation (Holomorphic Dynamics, Proceeding 1986 Mexico, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1345, 1988, pp. 73-75, Springer Verlag).*
- [Ca]₂ F. CANO, *Réduction des singularités des feuilletages holomorphes (C.R.A.S. Paris, t. 307, Série I, 1988, pp. 795-798).*
- [Ca]₃ F. CANO, *Reduction of the singularities of the non dicritical singular foliations. Dimension three (Am. J. of Math., Vol. 115, 1993, tome 3, pp. 509-588).*
- [Ca-Ce]₁ F. CANO et D. CERVEAU, *Le problème de la séparatrice, une conséquence de la résolution des singularités des feuilletages holomorphes (C.R.A.S. Paris, t. 307, Série I, 1988, pp. 387-390).*
- [Ca-Ce]₂ F. CANO et D. CERVEAU, *Desingularization of non dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices (Acta Math., Vol. 169, 1992, pp. 1-103).*
- [Ca-Ma] F. CANO et J.-F. MATTEI, *Hypersurfaces integrales des feuilletages holomorphes (Ann. Inst. Fourier, Vol. 42, 1-2, 1992, pp. 49-72).*
- [Ce-Ma] F. CANO et J.-F. MATTEI, *Formes intégrables holomorphes singulières (Astérisque, Vol. 97, 1982).*
- [Ch] J.-Y. CHARBONNEL, *Sur certains sous-ensembles de l'espace euclidien (Ann. Inst. Fourier, Vol. 41, 3, 1991, pp. 679-717).*
- [De-Wa] S. DENKOWSKA et K. WACHTA, *La sous-analycité de l'application tangente (Bull. Acad. Polonaise des Sciences, Série des sc. math., Vol. XXX, 7-8, 1982, pp. 329-331).*
- [Dr] L. VAN DEN DRIES, *Tarski's problem and pfaffian functions, Logic Colloquium'84 Paris, North Holland, Amsterdam, 1986.*
- [Hae] A. HAEFLIGER, *Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoides (Thèse, Comm. Math. Helv., Vol. 32, 1958, pp. 248-329).*
- [Har] R. M. HARDT, *Topological properties of subanalytic sets (Trans. Amer. Soc., Vol. 211, 1975, pp. 150-208).*
- [Hi]₁ H. HIRONAKA, *Resolution of the singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II (Ann. of Math., Vol. 79, 1964, pp. 109-326).*
- [Hi]₂ H. HIRONAKA, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps, Istituto Matematico "L. Tonelli", Pisa, 1973.*
- [Hi]₃ H. HIRONAKA, *Stratification and flatness, Nordic Summer School, Symposium in Mathematics, Oslo, 1976.*
- [Hi]₄ H. HIRONAKA, *Subanalytic sets (Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Tokyo, Kinokuniya, 1973, pp. 453-493).*
- [Kh]₁ A. G. KHOVANSKII, *Real analytic varieties with the finiteness property and complex abelian integrals (Funct. Anal. and Appl., Vol. 18, 1984, pp. 119-127).*
- [Kh]₂ A. G. KHOVANSKII, *Fewnomials (A.M.S. translations of mathematical monographs 88, 1991).*
- [Ku] I. KUPKA, *Singularities of integrable pfaffian forms (Proc. Nat. Acad. Sciences, Vol. 52, 1964).*
- [Li]₁ J.-M. LION, *Étude des hypersurfaces pfaffiennes (Thèse, Université de Bourgogne, 1991).*

- [Li]₂ J.-M. LION, *Un lemme d'aile pour les ensembles pfaffiens* (C.R.A.S. Paris, t. 316, Série I, 1993, pp. 187-189).
- [Li-Ro] J.-M. LION et C. A. ROCHE, *Topologie des hypersurfaces pfaffiennes*, preprint Université de Bourgogne, 1993.
- [Lo]₁ S. LOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*, preprint I.H.E.S., 1965.
- [Lo]₂ S. LOJASIEWICZ, *Triangulation of semi-analytic sets* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), Vol. 18, 1964, pp. 449-474).
- [Lo-Zu] S. LOJASIEWICZ et M. A. ZURRO, *Una introduccion a la Geometria semi y sub analitica* (Valladolid : Secretariado de Publicaciones, Universidad, D.L. 1993, Serie Ciencias. ISBN 84-7762-312-0).
- [Ma-Mo] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières* (Ann. scien. Éc. Norm. Sup., 4^e série, Vol. 13, 1980, pp. 469-523).
- [Mo-Ro]₁ R. MOUSSU et C. A. ROCHE, *Théorie de Hovanskii et problème de Dulac* (Invent. Math., Vol. 105, 1991, pp. 431-441).
- [Mo-Ro]₂ R. MOUSSU et C. A. ROCHE, *Théorèmes de finitude uniforme pour les variétés pfaffiennes de Rolle* (Ann. Inst. Fourier, Vol. 42, 1-2, 1992, pp. 393-420).
- [Ri] J.-J. RISLER, *Complexité et géométrie réelle (d'après A. Khovanskii)*, (Séminaire BOURBAKI, Vol. 637, 1984).
- [Ro] C. ROCHE, *Densities for certain leaves of real analytic foliations*, Actes du colloque Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janiero Janvier 1992), (à paraître dans Astérisque, 1993).
- [Se] A. SEIDENBERG, *Reduction of singularities of the differentiable equation $AdY=BdX$* (Am. J. of Math., 1968, pp. 248-269).
- [To]₁ J.-C. TOUGERON, *Algèbres analytiques topologiquement noethériennes, Théorie de Hovanskii* (Ann. Inst. Fourier, Vol. 41, 4, 1991, pp. 823-840).
- [To]₂ J.-C. TOUGERON, *Sur certaines algèbres de fonctions analytiques* (Séminaire de Géométrie Algébrique réelle de Paris VII, 1986).
- [Wh] H. WHITNEY, *Tangents to analytic varieties* (Ann. of Math., Vol. 81, 1965, pp. 496-549).

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1993;
révisé le 10 novembre 1994.)

Felipe CANO
Dept. de Algebra, Geo. y Topo.
Facultad de Ciencias,
Universidad de Valladolid,
45005 Valladolid, Espagne.

Jean-Marie LION et Robert MOUSSU
Laboratoire de Topologie U.R.A. 755,
Université de Bourgogne, B.P. 138,
21004 Dijon Cedex, France.