

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RICARDO PÉREZ MARCO

**Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et
une conjecture de V. I. Arnold**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 26, n° 5 (1993), p. 565-644

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_5_565_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES DYNAMIQUES HOLOMORPHES NON LINÉARISABLES ET UNE CONJECTURE DE V. I. ARNOLD

PAR RICARDO PÉREZ-MARCO

ABSTRACT. — We solve a conjecture of V. I. Arnold by constructing a non linearizable analytic diffeomorphism of the circle for which any analytic extension has no periodic orbits.

We study the same problem for holomorphic germs $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. If the diophantine condition

$$\sum_{n \geq 1} q_n^{-1} \log \log q_{n+1} = +\infty$$

holds, where $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ are the convergents of α , we construct a non-linearizable holomorphic germ $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, with no periodic orbits except 0. This condition is optimal: If it is not satisfied and f is non-linearizable, we prove the existence of a sequence of periodic orbits of f converging to 0.

We study also the case of polynomial germs $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$. In this context we prove, using a result of Yoccoz for the quadratic polynomial, that when α is not a Brjuno number any polynomial germ $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$ structurally stable has a sequence of periodic orbits converging to 0 and so, is non-linearizable.

Sommaire

Introduction

I. — Préliminaires

1) Notations.

- a) Notations générales.
- b) Notations pour les germes.
- c) Notations pour les difféomorphismes du cercle.

2) Arithmétique.

- a) Variante du développement en fraction continue.
- b) Conditions diophantiennes pour les germes.
- c) Conditions diophantiennes pour les difféomorphismes du cercle.

3) Cadre de travail et réductions.

4) Description des démonstrations.

II. – Démonstration des théorèmes 1 et 2

- 1) La construction fondamentale.
 - a) Construction de la surface de Riemann.
 - b) Construction de la dynamique.
 - c) Une propriété de la dynamique.
 - d) Estimations de modules d'anneaux.
- 2) Applications aux germes.
- 3) Application aux difféomorphismes du cercle.
- 4) Fin de la démonstration.

III. – Démonstration du théorème 3

- 1) La construction de Yoccoz pour les germes.
 - a) Description de la construction.
 - b) Correspondance d'orbites périodiques.
- 2) Démonstration du théorème 3.
 - a) Choix des t_n .
 - b) Fin de la démonstration.
- 3) Sur les domaines de linéarisation.

IV. – Germes polynomiaux

- 1) Cas des polynômes quadratiques.
- 2) Cas des germes polynomiaux structurellement stables.
- 3) Sur les points périodiques de Cremer.

V. – Annexes

- 1) Estimations de modules d'anneaux.
- 2) Précisions sur la construction de Yoccoz pour les germes.
- 3) Sur les domaines d'holomorphie.
- 4) Quelques résultats d'arithmétique.
 - a) Développement en fraction continue usuel.
 - b) Quelques propositions.
- 5) Existence d'une condition diophantienne optimale pour les difféomorphismes du cercle.
- 6) Quelques estimations.

Bibliographie

Introduction

Considérons un difféomorphisme analytique du cercle f . Poincaré a défini son *nombre de rotation* $\alpha = \rho(f)$, définit modulo $\mathbb{Z}$, qui est caractérisé par la propriété que l'ordre des itérés d'un point par f est le même que celui des itérés par la rotation rigide d'angle α . On s'intéresse à la dynamique locale de f au voisinage du cercle plongé dans le plan complexe. Cette dynamique est *linéarisable* si par un difféomorphisme analytique du cercle (changement de variables) f est conjugué à la rotation d'angle α .

La dynamique de f est mal comprise lorsque f est non linéarisable, et on sait que ceci ne peut se produire que lorsque α est très bien approché par des nombres rationnels. D'autre part il est bien connu que $\alpha = \rho(f)$ est rationnel si et seulement si f a une orbite périodique sur le cercle. Dans ce cas, il se peut qu'une petite perturbation analytique de f rende son nombre de rotation irrationnel et fasse bifurquer l'orbite périodique dans un voisinage complexe du cercle. Or, lorsque α est irrationnel et qu'on a des orbites périodiques dans tout voisinage du cercle, f est clairement non linéarisable puisque topologiquement f devrait se comporter comme une rotation irrationnelle.

Ces considérations laissent penser que ceci peut représenter la seule obstruction à la linéarisabilité analytique lorsque α est irrationnel. D'autant plus que récemment J.-C. Yoccoz [Y3] a établi la condition arithmétique optimale $\mathcal{H}$ sur le nombre de rotation sous laquelle tout difféomorphisme du cercle est linéarisable et il construit, lorsque cette condition n'est pas satisfaite, des exemples non linéarisables avec des orbites périodiques dans tout voisinage du cercle. Plus précisément V. I. Arnold a conjecturé [Ar2] :

*...Il semble qu'un difféomorphisme analytique du cercle est analytiquement équivalent à une rotation irrationnelle si et seulement si l'ensemble des points fixes des puissances de ce difféomorphisme ne possède pas de points limites réels...**

Dans ce travail on établira le théorème suivant qui répond négativement à cette conjecture.

THÉORÈME 1. — *Il existe un difféomorphisme analytique du cercle f de nombre de rotation irrationnel défini sur un voisinage V du cercle, tel que toute orbite positive $(f^n(z))_{n \geq 0}$ qui reste dans V accumule le cercle, et que le domaine d'holomorphic de tout itérée de f est la composante connexe contenant le cercle des points qui restent dans V pendant l'itération.*

En particulier, f est non linéarisable et tout prolongement analytique de f est sans orbite périodique.

Cependant, bien que le théorème 1 montre que l'existence d'orbites périodiques dans tout voisinage du cercle n'est pas la seule obstruction à la linéarisabilité, on verra qu'elle est la plus forte en un certain sens. En effet, on étudiera aussi la dynamique d'une

* La droite réelle est le revêtement universel du cercle et le difféomorphisme se relève en un difféomorphisme $\mathbb{Z}$ périodique de $\mathbb{R}$.

application holomorphe au voisinage d'un point fixe. Comme il est bien connu, c'est un problème étroitement lié au précédent (quand on regarde de loin, un cercle invariant « ressemble » à un point fixe). Dans ce cadre on montrera l'analogie de la conjecture d'Arnold lorsque le nombre de rotation, qui correspond ici à l'argument du multiplicateur au point fixe, vérifie une certaine condition diophantienne. Lorsque cette condition est violée on construira des dynamiques non linéarisables sans orbite périodique comme celles du théorème 1.

Désormais considérons une application holomorphe f définie au voisinage d'un point fixe, qu'on placera à l'origine de façon que $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$. Comme auparavant, on dit que la dynamique est *linéarisable* si ce germe est conjugué par un changement de variables holomorphe à sa partie linéaire, *i. e.* s'il existe $h(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$ germe holomorphe tel que

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = \lambda z.$$

Dans un tel cas la dynamique locale est simple, c'est celle de sa partie linéaire. En fait le seul cas où la dynamique locale n'est pas comprise se présente lorsque $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, et f est non linéarisable. Pour le cas $\alpha \in \mathbf{Q}$ on se reportera aux travaux de C. Camacho [Ca], de J. Ecalle [E] et de S. M. Voronin [V]. Les premiers travaux sur ce problème ont porté sur l'étude de la linéarisabilité. Au siècle dernier G. Koenigs [Ko] et H. Poincaré [Po] ont découvert que la linéarisabilité avait toujours lieu lorsque λ est non nul et de module différent de 1. En 1917, G. A. Pfeiffer [Pf] montre l'existence de germes non linéarisables, et dans les années 20, H. Cremer [Cr] met en évidence l'importance de l'arithmétique de α . En effet, si $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ désigne la suite des réduites de α , il montre l'existence de germes non linéarisables sous la condition de Cremer de mesure de Lebesgue nulle, qui assure que α est très bien approché par les rationnels,

$$(\mathcal{C}) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} = +\infty.$$

Il montre aussi, par un argument très simple, que tout germe polynomial de degré d du type précédent est non linéarisable lorsque

$$(\mathcal{C}_d) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{d^{q_n}} = +\infty.$$

Ce n'est qu'en 1942 que C.-L. Siegel [Si] découvre un ensemble de mesure de Lebesgue totale de nombres α , à savoir l'ensemble des nombres diophantiens, pour lesquels tout germe holomorphe est linéarisable. Sa démonstration de la convergence de la série formelle linéarisante est faite par la méthode des séries majorantes tout en contrôlant les petits diviseurs qui y apparaissent. Plus tard, dans les années 60, et par les mêmes méthodes, A. D. Brjuno améliore ce résultat remarquable de Siegel en l'établissant sous la condition plus large (dite de Brjuno),

$$(\mathcal{B}) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty.$$

Simultanément, T. M. Cherry [Ch] de façon indépendante, avait conjecturé ce résultat et l'optimalité de cette condition.

Le problème de la linéarisabilité a été finalement complètement résolu en 1987 par J.-C. Yoccoz ([Y1], [Y2]) qui établit l'optimalité de la condition de Brjuno. Yoccoz aborde le problème par des techniques géométriques qui lui permettent de donner une nouvelle démonstration du théorème de Siegel-Brjuno et de construire des germes holomorphes non linéarisables ayant une infinité d'orbites périodiques dans tout voisinage de 0 lorsque la condition de Brjuno est violée. Encore ici, l'accumulation de 0 par des orbites périodiques est une obstruction évidente à la linéarisabilité. On peut se demander comme auparavant si c'est la seule, c'est-à-dire si tout germe non linéarisable a une suite d'orbites périodiques qui accumule 0, ceci a été conjecturé par P. Sad [Sa]. Comme on l'a annoncé la réponse est encore négative.

THÉORÈME 2. — Soit $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ satisfaisant la condition diophantienne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} = +\infty,$$

alors il existe $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ holomorphe et injectif sur $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$ et tel que toute orbite $(f^n(z))_{n \geq 0}$ contenue dans $\mathbf{D}$ accumule 0.

En particulier f est non linéarisable et sans orbite périodique autre que 0 dans $\mathbf{D}$.

Cependant la réponse est positive lorsque la condition diophantienne apparaissant dans le théorème est en défaut. On montrera l'optimalité de cette condition :

THÉORÈME 3. — Si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} < +\infty,$$

alors tout germe holomorphe $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ non linéarisable possède une suite $(O_k)_{k \geq 0}$ d'orbites périodiques tendant vers 0, de périodes q_{n_k} , de nombres de rotation p_{n_k}/q_{n_k} , tels que les périodes font diverger la série de Brjuno

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n_k+1}}{q_{n_k}} = +\infty.$$

Ces résultats et leur démonstration (voir en particulier III.2.b) éclairent les causes qui provoquent la destruction de la linéarisabilité (voir à ce sujet les commentaires dans [Ar2], p. 304). On a un rôle prépondérant de l'arithmétique de α : la non linéarisabilité n'est possible que pour des nombres qui ne sont pas de Brjuno. Ensuite, à nombre de rotation fixé, le type de non linéarités du germe décide de la linéarisabilité. Les pires non linéarités, c'est-à-dire celles qui détruisent la linéarisabilité de façon plus efficace, sont celles provoquées par des orbites périodiques. Ainsi, si α est bien approché par les rationnels mais pas trop, alors le théorème 3 montre que la seule façon de détruire la linéarisabilité ne peut se réaliser qu'avec des orbites périodiques. Cependant le théorème 2

montre que ce type de non linéarités n'est plus nécessaire lorsque α est si bien approché par les rationnels que la série précédente diverge.

Remarquons que lorsqu'on étudie uniquement des germes holomorphes sans orbites périodiques dans un voisinage de 0, la nouvelle condition diophantienne remplace celle de Brjuno, le théorème 3 remplace celui de Siegel-Brjuno et le théorème 2 celui de Yoccoz. On reviendra en détail sur la description des démonstrations de ces résultats mais signalons déjà qu'ils résultent du développement des techniques géométriques de Yoccoz.

On étudie aussi dans cet article le cas des germes polynomiaux. Comme on l'a déjà mentionné les premiers résultats sont dus à Cremer. Plus récemment Yoccoz a montré [Y1] que lorsque α n'est pas un nombre de Brjuno alors le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ est non linéarisable. On se demande plus généralement si tout germe polynomial est non linéarisable lorsque α n'est pas un nombre de Brjuno. On peut se demander aussi si tout germe polynomial non linéarisable admet une suite d'orbites périodiques qui accumulent l'origine.

Yoccoz a montré récemment (1989 non publié) que lorsque α n'est pas un nombre de Brjuno, le polynôme quadratique P_λ a une suite d'orbites périodiques accumulant l'origine. En utilisant ce résultat (dont on donnera une démonstration en IV.1) on montrera

THÉORÈME 4. — *Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ et $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, est structurellement stable alors P a une suite d'orbites périodiques accumulant l'origine.*

On va préciser les termes employés dans le théorème. L'ensemble des germes polynomiaux structurellement stables de degré d est l'ouvert dense de

$$\mathcal{P}_{d,\lambda} = \{P \in \mathbb{C}[z]; P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d\} \approx \mathbb{C}^{d-1}$$

complémentaire de l'adhérence des polynômes ayant des orbites périodiques indifférentes non persistantes (voir [DH], [MSS] ou [ST]). On dira qu'un germe polynomial de degré d est structurellement stable s'il est structurellement stable de degré d . En fait, le résultat démontré est plus précis : On n'a besoin de la stabilité que pour des perturbations du coefficient de degré 2. Donc on a un ouvert dense de $\mathbb{C}$, dépendant des coefficients de degré autre que 2 du polynôme en question, de valeurs du coefficient de degré 2 pour lesquelles on a accumulation de l'origine par des orbites périodiques.

Comme corollaire on obtient :

THÉORÈME 5. — *Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ et $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, est structurellement stable, alors P est non linéarisable.*

Ce travail n'aurait vu le jour sans l'encadrement et les conseils de J.-C. Yoccoz pendant la réalisation de ma Thèse de Doctorat, ni sans ses découvertes contenues dans [Y1] qui sont aux fondements des développements présentés ici. Je veux également remercier M. Herman et R. Moussu pour leur lecture et conseils quand à la rédaction de ce texte.

Au moment où ce texte a été soumis, l'auteur a trouvé une construction qui permet d'établir un lien rigoureux entre le problème des germes holomorphes et les difféomorphismes analytiques du cercle. Une première conséquence est l'obtention de difféomorphismes du cercle analytiques de nombre de rotation irrationnel non linéarisables sans orbites périodiques à partir des germes holomorphes avec les mêmes propriétés. Il en

résulte une amélioration du théorème 1 qui est ainsi valable sous la condition arithmétique sur le nombre de rotation $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n^{-1} \log \log q_{n+1} = +\infty$.

I. Préliminaires

1) Notations

a) NOTATIONS GÉNÉRALES. — On conservera les notations de l'introduction (sauf en ce qui concerne les réduites p_n/q_n , voir la partie arithmétique ci-dessous) et on notera pour $r \in \mathbf{R}$, $\mathbf{H}_r = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > r\}$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}$, pour $r > 0$, $\mathbf{D}_r = \{z \in \mathbf{C}; |z| < r\}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$, $\mathbf{T}^1 = \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$, $\mathbf{E}(z) = e^{2\pi iz}$, $\mathbf{T}(z) = z + 1$.

Un bon nombre de constantes universelles interviendront dans nos estimations, on conviendra que $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1, \dots$ désigneront des constantes universelles positives ne dépendant d'aucun paramètre. Par commodité le même nom sera donné à des constantes distinctes (parfois dans une même expression quand il n'y aura pas de confusion possible), on réservera cependant les noms $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}'$ à des constantes bien spécifiques.

b) NOTATIONS POUR LES GERMES. — Les problèmes envisagés sont invariants par conjugaison par homothétie, on supposera $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ défini et univalent sur $\mathbf{D}$. On travaillera sur le revêtement universel de $\mathbf{D}^*$, $\mathbf{E}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}^*$. Le groupe des automorphismes de ce revêtement est engendré par $\mathbf{T}: z \mapsto z + 1$. Si $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, est univalent sur $\mathbf{D}$, il se relève à $\mathbf{H}$ en $\mathbf{F}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$ univalente telle que $f \circ \mathbf{E} = \mathbf{E} \circ \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ \mathbf{F}$ (c'est-à-dire $\mathbf{F}(z) - z$ est $\mathbf{Z}$ -périodique), et $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (\mathbf{F}(z) - z) = \alpha$. On note $\mathbf{S}(\alpha)$ l'espace des applications $\mathbf{F}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$ univalentes telles que $\mathbf{F} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ \mathbf{F}$ et $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (\mathbf{F}(z) - z) = \alpha$. $\mathbf{S}(\alpha)$ est un espace compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts [Du].

Si $z \in \mathbf{H}$ et $\mathbf{F}^q(z) = z + p$, avec p et q entiers, on dira que $\mathbf{F}$ a une orbite périodique de nombre de rotation p/q . On emploiera le même vocabulaire pour une orbite périodique de f , dans ce cas le nombre de rotation sera défini modulo 1. On aura toujours $p \wedge q = 1$, donc la période de l'orbite sera $|q|$ et on omettra de la préciser.

Finalement comme on l'a déjà dit, on travaillera sur $\mathbf{H}$ et on appellera $\operatorname{Im} z$ la hauteur d'un point z .

c) NOTATIONS POUR LES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE. — Dans ce cas on travaillera dans le revêtement universel $\mathbf{E}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{U}$ de $\mathbf{U}$. Pour $\Delta > 0$ on notera $\mathbf{B}_\Delta = \{z \in \mathbf{C}; |\operatorname{Im} z| < \Delta\}$ et $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{E}(\mathbf{B}_\Delta)$. Si f est un difféomorphisme du cercle $\mathbf{R}$ -analytique de nombre de rotation $\rho(f) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, qui possède un prolongement analytique holomorphe et univalent sur $\mathbf{A}_\Delta$, alors on considérera son relèvement $\mathbf{F}$ à $\mathbf{B}_\Delta$, $\mathbf{F}: \mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$, vérifiant $\mathbf{F}$ univalente, $f \circ \mathbf{E} = \mathbf{E} \circ \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ \mathbf{F}$, et $\mathbf{F}$ de nombre de rotation α . On notera $\mathbf{S}(\alpha, \Delta)$ l'espace des applications $\mathbf{F}$ vérifiant les conditions $\mathbf{F}: \mathbf{B}_\Delta \rightarrow \mathbf{C}$ univalente, $f \circ \mathbf{E} = \mathbf{E} \circ \mathbf{F}$, et $\mathbf{F}$ de nombre

de rotation α . $S(\alpha, \Delta)$ est aussi un espace compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

De même si $z \in B_\Delta$ et $F^q(z) = z + p$, avec p et q entiers, on dira que F a une orbite périodique de nombre de rotation p/q . On emploiera le même vocabulaire, modulo 1, pour une orbite périodique de f .

2) Arithmétique

a) VARIANTE DU DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE. — On rappelle ici une variante du développement en fraction continue usuel, introduite dans [Y1], qui s'adapte bien à notre problème. Désormais on surmontera d'un tilde les suites du développement en fraction continue usuel.

Pour $x \in \mathbf{R}$ on note $\|x\| = d(x, \mathbf{Z}) = \inf_{p \in \mathbf{Z}} |x - p|$. Maintenant pour $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ on définit la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ par

$$\alpha_0 = \|\alpha\|$$

et pour $n \geq 1$,

$$\alpha_n = \|\alpha_{n-1}^{-1}\|.$$

Donc on a pour $n \geq 0$, $0 < \alpha_n < 1/2$ et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + \varepsilon_0 \alpha_0, \\ \alpha_{n-1}^{-1} &= a_n + \varepsilon_n \alpha_n, \end{aligned}$$

avec $a_0 \in \mathbf{Z}$, et pour $n \geq 1$, $a_n \in \mathbf{N}$, $a_n \geq 2$, et $\varepsilon_n = \pm 1$. Ceci définit les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(\varepsilon_n)_{n \geq -1}$, en posant $\varepsilon_{-1} = 1$. On définit la suite $(\beta_n)_{n \geq -2}$ en posant $\beta_{-2} = \alpha$, $\beta_{-1} = 1$, et pour $n \geq 0$,

$$\beta_n = \prod_{i=0}^n \alpha_i.$$

Donc pour $n \geq 0$ on a $0 < \beta_n < 2^{-(n+1)}$. On définit les réduites dans cette variante du développement en fraction continue par

$$\begin{aligned} q_{-2} &= p_{-1} = 1, \\ p_{-2} &= q_{-1} = 0, \end{aligned}$$

et pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + \varepsilon_{n-1} p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + \varepsilon_{n-1} q_{n-2}. \end{aligned}$$

On a en particulier,

$$\begin{aligned} q_0 &= 1, \\ q_1 &= a_1 \geq 2. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine pour $n \geq -2$,

$$\begin{aligned}\beta_n &= (-1)^n \left(\prod_{j=-1}^n \varepsilon_j \right) (q_n \alpha - p_n), \\ q_{n+1} p_n - p_{n+1} q_n &= (-1)^{n+1} \left(\prod_{j=-1}^{n+1} \varepsilon_j \right), \\ q_{n+1} \beta_n + \varepsilon_{n+1} q_n \beta_{n+1} &= 1.\end{aligned}$$

De la dernière équation on obtient pour $n \geq 2$,

$$q_{n+1} \leq 2 \beta_n^{-1}.$$

Puis par récurrence pour $n \geq 0$,

$$\frac{p_{n-1} x + \varepsilon_{n-1} p_{n-2}}{q_{n-1} x + \varepsilon_{n-1} q_{n-2}} = a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{a_2 + \frac{\varepsilon_2}{\dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{x}}}},$$

donc

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{\varepsilon_0}{a_1 + \frac{\varepsilon_1}{a_2 + \frac{\varepsilon_2}{\dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_n}}}},$$

$$\begin{aligned}p_n \wedge q_n &= 1, \\ q_n &\geq 1.\end{aligned}$$

On exhibera dans l'annexe 4 le lien avec les suites $(\tilde{a}_n)$, $(\tilde{\beta}_n)$, $(\tilde{p}_n)$ et $(\tilde{q}_n)$, du développement en fraction continue usuel. Retenons simplement que (β_n) , (p_n) et (q_n) sont des sous-suites des suites usuelles, contenant au moins un terme sur deux.

On pourrait montrer aussi que, pour $n \geq 1$,

$$q_{n+1} = \text{Min} \left\{ q \geq 1; \|q \alpha\| < \frac{1}{2} \|q_n \alpha\| \right\}$$

Ceci montre directement que les $(q_n)_{n \geq 0}$ forment une sous-suite de la suite usuelle des $(\tilde{q}_n)_{n \geq 0}$ en se rappelant que

$$\tilde{q}_{n+1} = \text{Min} \{ q \geq 1; \|q \alpha\| < \|\tilde{q}_n \alpha\| \}.$$

b) CONDITIONS DIOPHANTIENNES POUR LES GERMES. — Dans l'annexe 4 on montre les différentes façons dont on peut exprimer les conditions diophantiennes intervenant dans les théorèmes. Pour $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ la proposition V.4.2 montre que la condition de Brjuno, $\mathcal{B}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log \tilde{q}_{n+1}}{\tilde{q}_n} < +\infty,$$

s'écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty,$$

ou encore

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} < +\infty.$$

La proposition V.4.1 montre que la condition diophantienne intervenant dans notre problème pour les germes,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log \tilde{q}_{n+1}}{\tilde{q}_n} < +\infty,$$

s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} < +\infty,$$

ou encore

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) < +\infty.$$

(le facteur e ne se trouve ici que pour assurer la positivité du logarithme itéré).

On notera $\mathcal{B}'$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ vérifiant cette condition. On utilisera dans la démonstration du théorème 3 le lemme suivant démontré dans l'annexe 4,

LEMME I.2.1. — Si on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{n_k-1} \log \alpha_{n_k}^{-1} = +\infty,$$

alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log q_{n_k+1}}{q_{n_k}} = +\infty.$$

NOTION DE BONNE RÉDUITE. — Cette partie arithmétique ne sera utilisée que dans la partie concernant les germes polynomiaux. Pour $0 \leq l \leq n$ on pose

$$B_{n,l} = \beta_{l-1}^{-1} \left[\sum_{j=l}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} - 18\pi \sum_{j=l}^n \beta_{j-1} \right].$$

D'après [Y1] on dira que n ou p_n/q_n est une *bonne réduite* si pour $0 \leq l < n$,

$$B_{n,l} \geq \log \alpha_l^{-1}.$$

On note J l'ensemble des bonnes réduites. On démontrera dans l'annexe 4 les lemmes suivants,

LEMME I.2.2. — Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ alors J est infini.

LEMME I.2.3. — Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $C_0 > 0$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, des constantes universelles positives. Si $\alpha \notin \mathcal{B}'$ alors il existe $A(\alpha) \subset J$, $A(\alpha)$ infini, tel que si $n \in A(\alpha)$,

$$(i) \quad \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \geq C_0,$$

$$(ii) \quad (1-\varepsilon) \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} - C_1 \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} \log \log(e \alpha_j^{-1}) + C_2.$$

Ce lemme sera utilisé dans la partie IV des germes polynômiaux : La partie (i) sera utilisée pour démontrer le théorème IV.1.1. et la partie (ii) interviendra dans la démonstration du théorème 4.

b) CONDITIONS DIOPHANTIENNES POUR LES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE. — On montre en annexe (proposition V.5.1.) l'existence d'une condition $\mathcal{H}'$ [invariante sous l'action de $\text{PGL}(2, \mathbb{Z})$] sur le nombre de rotation α qui joue le même rôle pour les difféomorphismes du cercle que la condition $\mathcal{B}'$ pour les germes (mais la condition $\mathcal{H}'$ n'est pas déterminée explicitement). C'est-à-dire, si $\alpha \in \mathcal{H}'$ tout difféomorphisme du cercle analytique non-linéarisable de nombre de rotation α a une suite d'orbites périodiques qui accumulent le cercle, et réciproquement, si $\alpha \notin \mathcal{H}'$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, il existe des difféomorphismes analytiques non-linéarisables de nombre de rotation α sans orbites périodiques.

Ici on exhibe une partie non vide de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ qui, comme on verra, n'intersecte pas $\mathcal{H}'$. La condition diophantienne engendrée par l'orbite par $\text{PGL}(2, \mathbb{Z})$ de cette partie est loin de recouvrir $\mathbb{R} - \mathbb{Q} - \mathcal{H}'$. Mais ceci suffit pour répondre négativement à la question d'Arnold mentionnée dans l'introduction qui conjecture que $\mathcal{H}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. On considère l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, de suite associée $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, pour lesquels il existe une suite de réels strictement positifs (de « largeurs de bande ») $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ tels qu'on ait les conditions suivantes :

$$(i) \quad \forall l \geq 0, \quad C \leq \alpha_l \Delta_{l+1},$$

$$(ii) \quad \forall l \geq 0, \quad C \leq \Delta_l \leq \alpha_l \Delta_{l+1} + \frac{1}{2\pi} \log \log(e \alpha_l^{-1}) - C,$$

$$(iii) \quad \forall l \geq 1, \quad \alpha_l \Delta_{l+1} + C \leq \rho \alpha_{l-1}^{-1},$$

$$(iv) \quad \forall l \geq 0, \quad \alpha_l^{-1} \geq L.$$

Ici $0 < \rho < 1$ est une constante universelle assez petite, C et L sont des constantes universelles positives assez grandes, et L est grande par rapport à C .

Remarque. — En vue de la construction réalisée dans la partie II, on pourrait relaxer la condition (iii) en supposant seulement qu'elle se vérifie pour une infinité de valeurs de l .

Pour vérifier qu'il existe des α vérifiant ces conditions, considérons la condition (i) renforcée :

$$(i') \quad \forall l \geq 0, \quad C \leq \alpha_l \Delta_{l+1} \leq M,$$

où M est une constante universelle positive grande par rapport à C , les constantes étant choisies de façon que $L \geq (C + M)/\rho$. Alors les conditions (i') et (iv) impliquent (iii). Choisissons $\Delta_l = \alpha_l \Delta_{l+1} + (1/2\pi) \log \log(e \alpha_l^{-1}) - C$, de façon que la suite $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ soit déterminée par Δ_0 et α . Alors la seconde inégalité de (ii) est trivialement vérifiée, et la première se déduit de (i) pour $l \geq 1$, donc on supposera $\Delta_0 \geq C$ pour avoir (ii). Maintenant il ne reste qu'à trouver α vérifiant (i') et (iv). Un petit calcul montre qu'il suffit de prendre α tel que $\alpha_0^{-1} \geq L$ et pour $l \geq 0$,

$$\frac{1}{e} \exp \exp [2\pi C \alpha_l^{-1}] \leq \alpha_{l+1}^{-1} \leq \frac{1}{e} \exp \exp [2\pi (M \alpha_l^{-1} + (M - C))].$$

En prenant M assez grand au début l'existence de tels nombres est claire puisque la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ caractérise le nombre α .

Les constantes intervenant dans les différentes conditions ci-dessus interviennent à différents endroits de la construction. C'est pour cela que, contrairement à notre convention, on les nommera de façon différente afin de les distinguer. On choisira la suite $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ comme ci-dessous :

- (i) $\forall l \geq 0, \quad K \leq \alpha_l \Delta_{l+1},$
- (ii) $\forall l \geq 0, \quad L' \leq \Delta_l = \alpha_l \Delta_{l+1} + \frac{1}{2\pi} \log \log(e \alpha_l^{-1}) - C,$
- (iii) $\forall l \geq 1, \quad \alpha_l \Delta_{l+1} + C \leq \rho \alpha_{l-1}^{-1},$
- (iv) $\forall l \geq 0, \quad \alpha_l^{-1} \geq L.$

3) Cadre de travail et réductions

Donnons la définition précise des notions exposées brièvement dans l'introduction.

DÉFINITION DE LINÉARISABILITÉ. — *Un germe holomorphe $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ est linéarisable s'il existe un changement de variables holomorphe $h(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$ qui conjugue f à sa partie linéaire, soit*

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = \lambda z.$$

DÉFINITION D'ACCUMULATION. — *On dira qu'on a accumulation de l'origine par des orbites périodiques, ou qu'une suite d'orbites périodiques tend vers l'origine, lorsque dans tout*

voisinage U de 0 on a une (donc une infinité) orbite périodique $\{z_0, \dots, z_{q-1}\}$, distincte de 0 , telle que pour $0 \leq i \leq q-1$, $z_{i+1} = f(z_i) \in U$ avec $z_0 = z_q$.

On dira qu'un germe vérifie ces propriétés lorsque un de ses représentants les vérifie. Dans ce cas tout autre représentant les vérifiera également. On formule de façon analogue les mêmes définitions pour les difféomorphismes analytiques du cercle. Remarquons qu'il se peut qu'il existe des germes holomorphes ayant une suite de points périodiques qui tendent vers 0 sans que les orbites périodiques associées tendent vers 0 au sens défini ci-dessus. Cependant ayant un tel germe on déduit par conjugaison, par une application univalente ayant un domaine d'holomorphic convenable, un germe holomorphe sans orbite périodique (sauf 0). Les mêmes remarques sont valables pour les difféomorphismes du cercle. Les propositions I.3.1 et I.3.2 ci-dessous montrent ces affirmations. Ainsi, pour des germes (resp. des difféomorphismes du cercle $\mathbf{R}$ -analytiques) le problème de l'existence de dynamiques sans accumulation de l'origine (resp. du cercle) par des orbites périodiques ou par des points périodiques ne se distinguent pas. La distinction entre ces deux situations aura lieu lorsqu'on s'intéressera à des applications définies globalement, comme dans le cas des polynômes.

Il convient également d'être prudent quand au vocabulaire employé quand aux itérés d'un représentant f d'un germe. En effet, f^n est-il défini uniquement aux points où l'on peut itérer n fois ou bien sur le domaine d'holomorphic propre au germe itéré? Ces deux domaines peuvent être complètement différents et n'avoir en commun que d'être des voisinages de 0 . En effet, on peut construire des exemples d'applications avec un domaine d'holomorphic différent de $\mathbf{C}$ et dont un itéré est l'identité. Aussi on peut aussi construire des exemples d'applications [Y1] dont le domaine d'itérations disconnecte dramatiquement l'itéré de l'application devenant l'identité dans certaines composantes connexes et une autre application dans d'autres. Ainsi, que signifie être un point fixe d'un itéré? Est-ce être un point fixe du prolongement analytique d'un représentant du germe itéré (avec les problèmes de définition que cela pose lorsque le domaine d'holomorphic est non planaire...) ou bien c'est un point dont les itérés restent dans le domaine de définition de f et l'orbite est finie?

Le bon point de vue est obtenu en remarquant qu'on est en train de considérer un problème de dynamique locale, donc toutes les propriétés doivent être invariantes par conjugaison par un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbf{C}, 0)$. Ainsi la propriété d'accumulation telle qu'elle a été définie est bien en accord avec ceci, tandis que le problème d'accumulation de 0 par des points fixes des prolongements analytiques des germes itérés est mal posé puisqu'il n'est pas invariant. De la même façon la notion naturelle d'itéré d'un représentant f d'un germe est l'application définie aux points qui restent par ces itérations par f dans le domaine de définition de f . Ainsi la bonne façon d'interpréter (puisque'il n'est pas dit dans [Ar2] dans quel sens est utilisé le mot itéré) la conjecture d'Arnold est que l'accumulation est équivalente à la non linéarisabilité. De toutes façons, comme le montre les propositions I.3.1 et I.3.2, les contre-exemples construits répondent aussi négativement aux autres interprétations.

PROPOSITION I.3.1. — *Soit f un difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation irrationnel qui se prolonge analytiquement sur un voisinage V du cercle où il*

est sans orbites périodiques (c'est-à-dire qu'il n'existe pas $z_0 \in V$ tel que pour $0 \leq i \leq q$, $z_{i+1} = f(z_i) \in V$ et $z_q = z_0$). Il existe un difféomorphisme analytique du cercle h tel que $g = h^{-1} \circ f \circ h$ et tous ses itérés $(g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ont leur domaine d'holomorphic planaire et contenu dans V (ceci veut dire qu'il n'y a pas de prolongement analytique en dehors de V ni de prolongement multivalué) et n'ont pas de points fixes dans V .

Pour les germes,

PROPOSITION I.3.2. — Soit $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, un germe holomorphe définit sur un voisinage V de 0 et sans orbites périodiques autre que 0 dans V . Il existe un germe de difféomorphisme holomorphe $h(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$ tel que $g = h^{-1} \circ f \circ h$ et tous ses itérés $(g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ont leur domaine d'holomorphic planaire et contenu dans V et n'ont pas de points fixes dans V autre que 0.

L'annexe 3 est consacrée à la démonstration de ces deux propositions.

Le point de départ des techniques géométriques est le critère dynamique fondamental de linéarisabilité : La stabilité.

DÉFINITION DE LA STABILITÉ. — La dynamique d'un germe holomorphe f (resp. un difféomorphisme du cercle $\mathbb{R}$ -analytique) est stable s'il existe un voisinage de l'origine (resp. du cercle) ou toute la famille des itérés $(f^n)_{n \geq 0}$ est définie et normale.

Puis on a,

PROPOSITION I.3.3. — La stabilité est équivalente à la linéarisabilité.

Démonstration de la proposition I.3.3. — Un sens est facile et, réciproquement, si la famille des itérés est normale dans un voisinage U alors la famille des $(k_n)_{n \geq 0}$ avec,

$$k_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{-i} f^i,$$

l'est aussi. En extrayant une sous-suite convergente vers h^{-1} on obtient que h linéarise f puisque,

$$k_n \circ f = \lambda k_n + \frac{\lambda}{n} (\lambda^{-n} f^n - \text{id}).$$

Pour une démonstration plus géométrique on consultera [He]. $\square$

Remarquons que pour avoir stabilité il suffit que tous les itérés de f se prolongent sur un même voisinage de 0 et que l'image de ce voisinage par les itérés reste dans un voisinage de 0 dont le complémentaire dans $\mathbb{C}$ a au moins deux points. On utilisera ceci à plusieurs reprises.

4) Description des démonstrations

Cette partie est uniquement destinée à introduire de façon informelle les idées et la motivation des constructions géométriques qui seront introduites dans la suite. Nous

espérons qu'elles contribueront à une meilleure compréhension du problème. Nous conseillons de refaire les constructions géométriques exposées succinctement. Bien sûr le lecteur Bourbachique peut sauter cette partie sans scrupules.

Chronologiquement c'est le théorème 3 qui a été démontré le premier. La démonstration utilise les techniques de la démonstration de Yoccoz du théorème de Siegel-Brjuno qu'on retrouve dans [Y1] et [Y2]. Ces techniques sont rappelées en III.1 et dans l'annexe 2. L'idée essentielle est de partir de $F \in S(\alpha)$ et de construire une suite d'applications $(F_n)_{n \geq 0}$, avec $F_n \in S(\alpha_n)$. L'application F_{n+1} reflète la dynamique de F_n à une hauteur supérieure à une hauteur de coupure $t_n > 0$, plus précisément c'est une application de premier retour de F_n . La hauteur t_n est la hauteur maximale des *fortes non linéarités* de F_n , c'est-à-dire la hauteur au-dessus de laquelle F_n est proche de la translation de α_n . Plus précisément t_n vérifie, pour $\text{Im } z \geq t_n$,

$$\begin{aligned} |F_n(z) - z - \alpha_n| &\leq \alpha_n/4, \\ |DF_n(z) - 1| &\leq 1/4. \end{aligned}$$

Le résultat fondamental de cette construction est que si l'on peut choisir la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n < +\infty,$$

alors F est linéarisable.

Ce qui empêche de prendre t_n plus petit sont les fortes non linéarités de F_n . Par exemple, d'après les inégalités ci-dessus, t_n est supérieur à la hauteur des points fixes de F_n . D'ailleurs les non linéarités des applications ayant des points fixes seront les plus « méchantes », c'est-à-dire les plus hautes. On peut montrer facilement que l'on peut toujours prendre $t_n = (1/2\pi) \log \alpha_n^{-1} + C$. Ceci avec le critère de linéarisabilité de la construction donne le théorème de Siegel-Bruno immédiatement. Cette quantité est optimale à une constante universelle additive près, on a des exemples de $F \in S(\alpha)$ avec des points fixes à une hauteur $t_n = (1/2\pi) \log \alpha_n^{-1} - C$ (voir un schéma de la dynamique dans la figure I.1).

Plus précisément si $F \in S(\alpha)$ alors on peut écrire,

$$F(z) = z + \alpha + \varphi(z),$$

avec φ qui est $\mathbb{Z}$ -périodique, tendant vers 0 pour $\text{Im } z \rightarrow +\infty$, donc admet le développement en série de Fourier,

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{2\pi i n z}.$$

En considérant le cas « générique » où on ne garde que le premier terme du développement en série de Fourier,

$$F(z) = z + \alpha + a_1 e^{2\pi i z},$$

on obtient le type de dynamique de la figure I.1 avec la hauteur du point fixe indiquée.

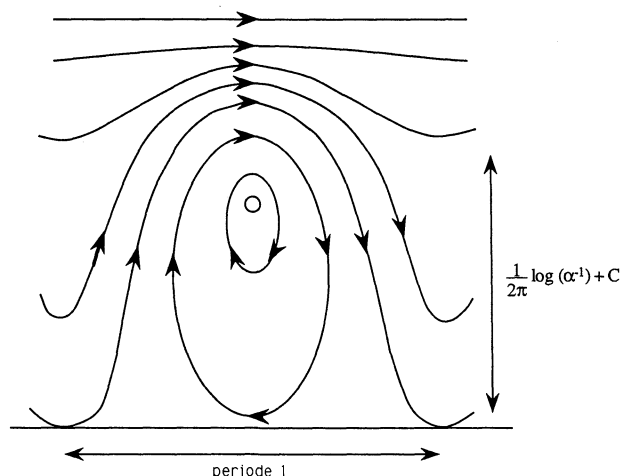


Fig. I.1

Notons que des petits α_n correspondent à des bonnes approximations rationnelles de α , donc dans le cas où α est un « bon » nombre (pas trop Liouville) les non linéarités ne peuvent empêcher la linéarisabilité. Par contre si l'arithmétique de α est mauvaise ce sont les linéarités des éléments de la suite des $(F_n)_{n \geq 0}$ qui décident de la linéarisabilité.

Mais, comment sont les non linéarités des applications sans point fixe ? Si $F \in S(\alpha)$ est sans point fixe, on peut écrire

$$F(z) = z + \alpha e^{\psi(z)},$$

avec

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

A nouveau en ne gardant que le premier terme du développement, la figure I.2 montre l'allure de la dynamique obtenue pour,

$$F(z) = z + \alpha e^{a_1 e^{2\pi i z}}.$$

Dans cet exemple la hauteur des fortes non linéarités est $t = (1/2\pi) \log \log(e \alpha^{-1}) + C$ (le e n'est placé ici que pour que le logarithme itéré soit positif puisque l'on travaillera dans ce cadre avec des α compris entre 0 et 1/2). Dans le cas général, lorsque F_n est sans point fixe on peut montrer que cette borne est la bonne, comme le laisse penser la forme exponentielle itérée de la non linéarité de F : on peut prendre $t_n = (1/2\pi) \log \log(e \alpha_n^{-1}) + C$ (voir proposition III.2.1). Remarquons que, lorsque α_n est petit (cas des bonnes approximations rationnelles), cette hauteur est plus faible que le t_n obtenu lorsqu'on a des points fixes. Donc dans le cas où tous les F_n sont sans point fixe, la condition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} \log \log(e \alpha_n^{-1}) < +\infty,$$

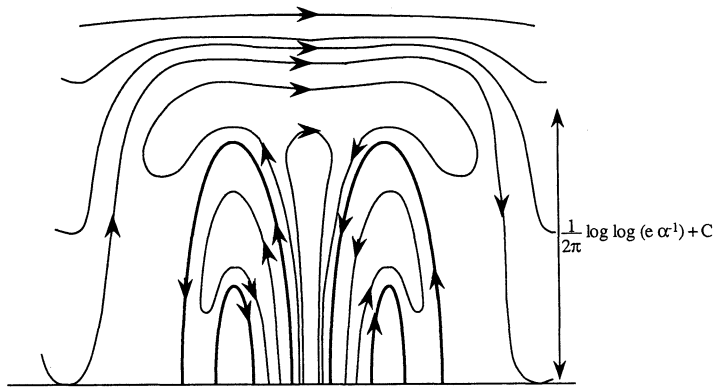


Fig. I.2

assure la linéarisabilité. Or l'étude de la construction des F_n montre qu'un point fixe pour F_n correspond à une orbite périodique pour F , dont on connaît la période et le nombre de rotations et on sait minorer la hauteur (proposition III.1.2). Ceci établit le théorème 3 (voir III.2.b).

On va décrire les idées qui mènent à la construction des germes du théorème 2, de façon que les constructions géométriques du chapitre II deviennent naturelles et perdent tout mystère. Dans [Y1] et [Y2], Yoccoz démontre l'optimalité de la condition de Brjuno en construisant des germes non linéarisables quand cette condition n'est pas vérifiée. Le principe est de renverser la construction décrite ci-dessus en rajoutant à F_{n+1} une non linéarité, qui correspondra à la dynamique de F_n à une hauteur inférieure à t_n . Ceci se fait par récurrence en partant d'une rotation et en « collant » successivement la non linéarité de la dynamique de la figure I.1, qui est la plus haute possible. Finalement par compacité on extrait une sous-suite qui converge vers le contre-exemple. Le fait de coller des points fixes à chaque étape à une hauteur maximale $t_n = (1/2\pi) \log \alpha_n^{-1} - C$ et l'hypothèse que α n'est pas un nombre de Brjuno, donne pour le germe construit une suite d'orbites périodiques accumulant l'origine. C'est ceci que l'on veut éviter, et pour cela on collera à chaque étape les non linéarités de la dynamique de la figure I.2 à une hauteur $t_n = (1/2\pi) \log \log (e \alpha_n^{-1}) - C$, qui est la hauteur maximale à laquelle on peut avoir une non linéarité sans points fixes. Par le même procédé que précédemment on obtiendra lorsque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} \log \log (e \alpha_n^{-1}) = +\infty,$$

des germes non linéarisables sans orbite périodique et ayant les propriétés dynamiques du théorème 2.

Pour mener à bien ce programme il faut bien comprendre la dynamique de la figure I.2. La première remarque à faire est que la dynamique de I.2 est la dynamique de I.1 avec le point fixe « tiré » vers le bas (vers $-i\infty$). Ce que l'on veut dire par là est simplement

que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z + \alpha \left(1 + \frac{a_1 e^{2\pi i z}}{n} \right)^n = z + \alpha e^{a_1 e^{2\pi i z}},$$

et les points fixes de $z \mapsto z + \alpha(1 + (a_1 e^{2\pi i z}/n))^n$ tendent vers $-i\infty$. Les deux familles de « cloches » qui apparaissent dans le cas I.2 sont des éléments nouveaux de la dynamique.

Décrivons maintenant comment Yoccoz colle à $F \in S(\alpha)$ la non linéarité du type I.1. On se ramène dans la récurrence à $\alpha > 2$ (en fait ici α est un certain α_n^{-1}). Il est facile de voir que, quitte à conjuguer F par une translation imaginaire pure (constante universelle), le demi-axe imaginaire pur et son image forment les bords d'une demi-bande verticale de largeur approximative α (voir *fig. I.3*). On complète la figure en rajoutant des demi-droites verticales issues de 0 et de $F(0)$. On obtient ainsi une bande $\mathcal{B}$, voir *fig. I.4*.

On recolle les bords de $\mathcal{B}$ par F et par la translation $z \mapsto z + F(0)$ et on obtient ainsi une surface de Riemann $\mathcal{S}$ qui, en rajoutant le point correspondant à 0 est biholomorphe à un cylindre doublement infini (voir *fig. I.5*).

Sur une partie de $\mathcal{S}$ (on enlève la partie hachurée dans les figures) on peut définir une dynamique univalente qui correspond à la translation par $z \mapsto z - 1$ dans la bande initiale $\mathcal{B}$, avec les conditions de compatibilité dues au collage (l'allure du champ de la dynamique est esquissé dans les figures). Ensuite on uniformise $\mathcal{S} \approx \mathbb{C}^*$ en envoyant le bout correspondant à $+i\infty$ dans $\mathcal{B}$ en 0 (voir *fig. I.6*).

Puis on conjugue par une homographie qui fixe 0 et qui ramène le point fixe en ∞ le plus proche possible de 0 de façon que la zone où la dynamique n'est pas définie reste en dehors du disque unité (voir *fig. I.7*).

La dynamique obtenue en relevant à $\mathbf{H}$ est un élément de $S(\alpha^{-1})$, elle a une non linéarité du type de la figure I.1 (on peut montrer qu'on peut obtenir le point fixe à la hauteur essentiellement optimale de la figure I.1). L'information de la dynamique de l'application initiale F se reflète dans la nouvelle dynamique au voisinage de l'origine.

On veut réaliser cette construction sans introduire de point fixe. Il faut changer radicalement le noyau géométrique de la construction. On veut éliminer le point fixe A introduit dans la figure I.7. Une première approche consiste à faire exploser (en un sens différent de celui du blow-up) ce point en créant un point de ramification infini : On relève la dynamique au revêtement universel de $\mathbb{C} - A$ (penser à ce revêtement comme une superposition de plans avec des coupures tels que montre la figure I.8).

Malheureusement ceci introduit une infinité de points fixes au-dessus de 0. Cependant quand on uniformise cette surface par le logarithme branché au point de ramification, en envoyant un des points sur 0 et composant par une homothétie de façon à rapprocher le plus possible la zone où la dynamique n'est pas définie mais en s'assurant qu'elle reste en dehors de $\mathbf{D}$ (en fait on essaye de rapprocher ainsi les non linéarités), on retrouve en relevant à $\mathbf{H}$ la figure I.9 (pour faire le dessin il faut bien comprendre géométriquement l'exponentielle itérée).

La dynamique rappelle fortement celle de la figure I.2 et la hauteur des non linéarités est la bonne. En se rappelant des idées commentées au début, on voit rapidement que

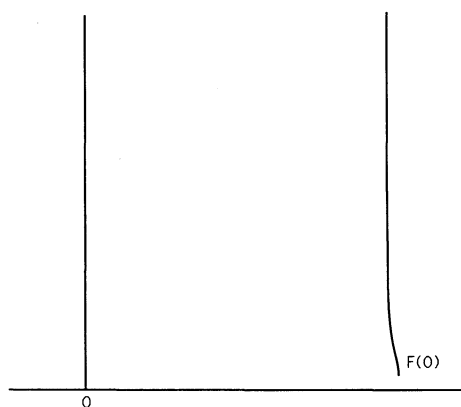


Fig. I.3

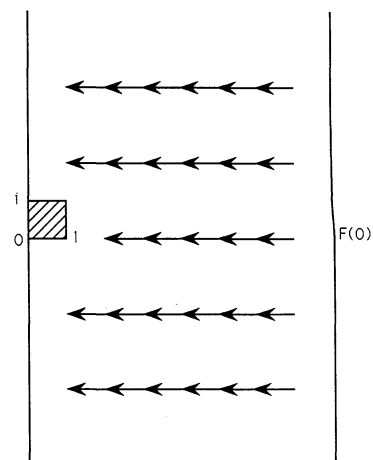


Fig. I.4

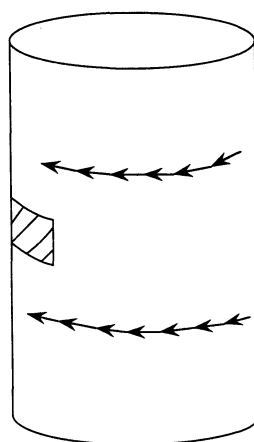


Fig. I.5

la dynamique de I.2 est obtenue à partir de celle de I.9 en « tirant » les points fixes non désirés vers le bas, comme le montre la figure I.10.

Cette déformation géométrique correspond sur le revêtement universel à faire tendre les points fixes vers le point de ramification sauf celui qui était envoyé sur l'origine, qui se trouve à la feuille 0 sur les figures (voir *fig. I.11*).

L'allure de la dynamique sur la feuille 0 est alors comme celle de la figure I.7 et celle des autres feuilles est celle de la figure I.12.

Or lorsqu'on relève au revêtement universel l'inverse de l'homographie qui passait de la figure I.6 à I.7 (elle ramenait le point fixe A de l'infini), la dynamique de I.12 devient une translation (voir *fig. I.13*).

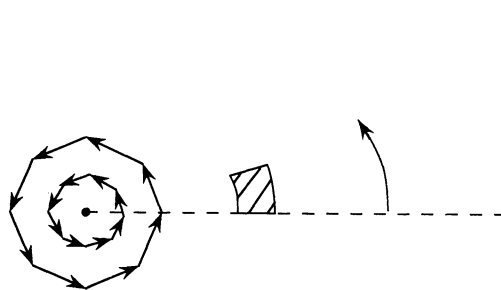


Fig. I.6

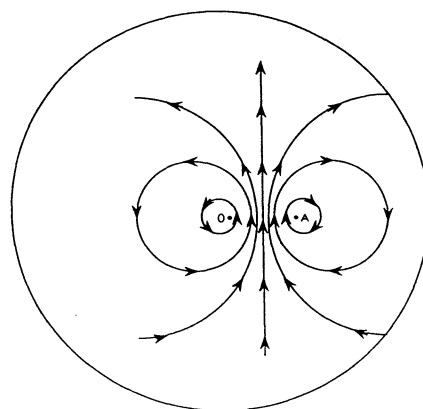


Fig. I.7

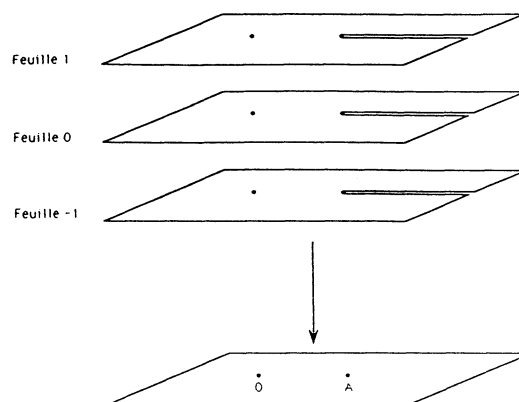


Fig. I.8

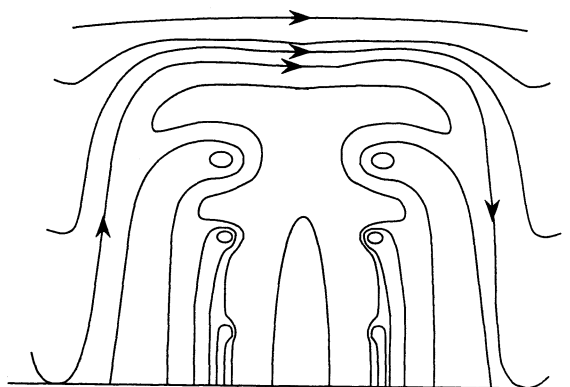


Fig. I.9

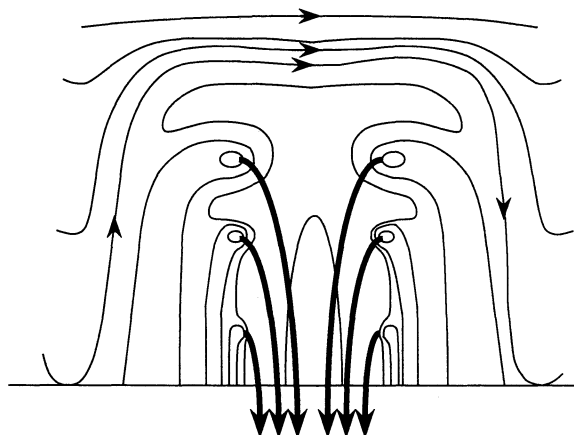


Fig. I.10

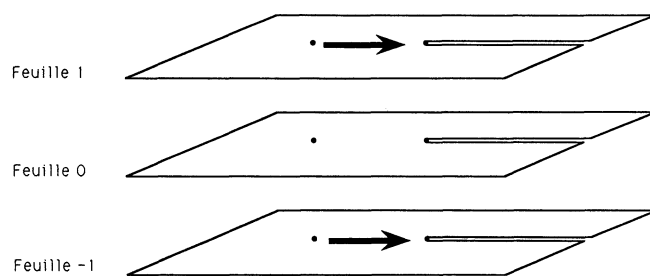


Fig. I.11

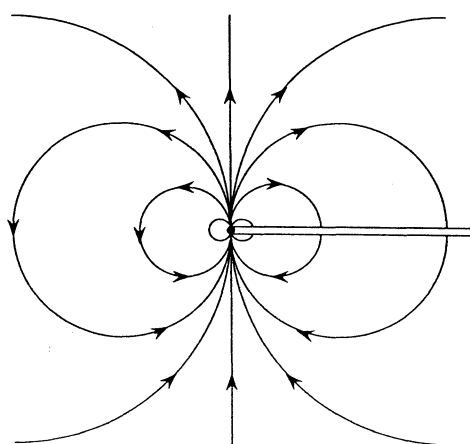


Fig. I.12

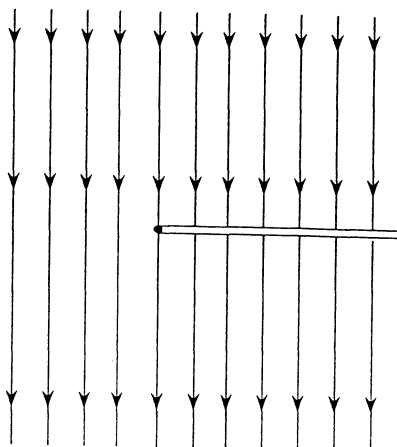


Fig. I.13

Comme on conjugue après par le logarithme l'effet de la conjugaison par l'homographie devient une simple symétrie centrale. Ceci montre qu'il faut modifier le cylindre de I.5 sur lequel on avait mis la translation en le considérant comme la feuille 0 d'une surface comme celle dessinée en I.8 [I.14].

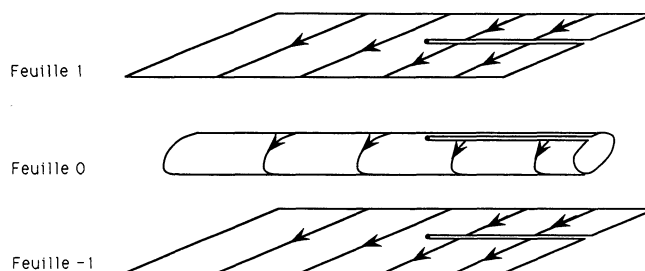


Fig. I.14

C'est exactement cette surface que l'on construit au paragraphe II. Sur une partie de laquelle on met une dynamique qui est une translation dans des coordonnées adéquates et par uniformisation on obtient qu'on a collé une non-linéarité du type de I.2. Les « cloches » qu'on avait remarquées comme étant des éléments nouveaux par rapport à la dynamique de I.1 correspondent aux feuilles de la surface I.14 rajoutés au cylindre, qui sont elles à leur tour les éléments nouveaux par rapport à la surface I.5. Une dernière remarque pour finir : On est obligé de considérer une surface avec un point de ramification infini si l'on veut coller les non linéarités à la bonne hauteur. En effet on pourrait imaginer construire une surface comme celle de I.14 avec un nombre (indépendant de α) fini de feuillettes de part et d'autre de la feuille cylindrique et recoller les deux

feuilles aux bouts. Cependant le module des anneaux considérés en II.1). *d*) serait plus petit et on n'aurait pas les mêmes estimations de hauteurs dans la propriété II.2.1. Il est essentiel d'avoir beaucoup de feuillets pour avoir de la « place » pour que les anneaux considérés aient un grand module.

Pour le cas des difféomorphismes du cercle du théorème 1 l'idée est la même. Dans ce cas la condition diophantienne est plus compliquée car pour un élément de $S(\alpha, \Delta)$ on a un nouveau facteur qui pour les germes n'existait pas : On a une échelle donnée par le nombre de rotation α qui est à comparer avec la période 1 et la largeur de la bande Δ . L'idée essentielle à retenir dans ce cas est la remarque suivante faite par Arnold qui se trouve dans l'introduction de [Ar1] :

... Le problème du centre est un cas singulier du problème d'une application du cercle dont le rayon, dans le cas singulier, est égal à zéro...

(le problème du centre est le problème de la linéarisation des germes holomorphes).

Faire tendre le rayon du cercle vers 0 est la même chose que faire tendre, dans le revêtement universel, la largeur de bande de définition Δ vers l'infini. C'est pour cela que l'on pensera à un tel difféomorphisme comme proche d'un germe et qu'on placera $\mathbf{R}$ « près » de $+i\infty$, et on travaillera dans le demi-plan de partie imaginaire négative.

La condition sur le nombre de rotation sous laquelle on construit des difféomorphismes analytiques non linéarisables sans orbites périodiques n'est pas optimale dans ce cas. Ceci est dû à ce que l'on ne sait pas traiter dans l'étape de renormalisation le cas où la largeur de bande est petite vis-à-vis de l'inverse du nombre de rotation. Ceci nous force à ne considérer que des nombres de rotation où ceci ne se produit jamais. Dans ce cas la construction géométrique est du même style que pour les germes.

II. Démonstration des théorèmes 1 et 2

Le but de cette section II est de démontrer les théorèmes 1 et 2. La partie II.1 et la fin de II.4 est commune pour les deux constructions. La partie II.2 est spécifique aux cas des germes et la partie II.4 à celui des difféomorphismes du cercle. Le traitement conjoint de la partie fondamentale II.1 de la construction permet d'éviter des redites pénibles. Néanmoins il est conseillé d'en faire deux lectures, une pour chaque construction.

1) La construction fondamentale

Dans cette partie II.1 on décrit comment on réalise le collage de la non linéarité que montre la figure I.2. Les idées heuristiques qui motivent la construction que l'on va mettre en œuvre et qui est le cœur de toute la démonstration, ont été longuement exposées en I.4. On a été conduit à considérer la surface $\mathcal{S}$ que montre la figure I.14. Ainsi en partant d'une application F univalente vérifiant des propriétés énoncées ci-dessus on construit en II.1.a la surface de Riemann $\mathcal{S}$. Ensuite en II.1.b on construit une dynamique univalente $f: \mathcal{S} - \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ sur une partie de $\mathcal{S}$. La surface $\mathcal{S}$ est biholomorphe à $\mathbf{C}^*$ et

en II.2 et II.3, en conjuguant f par une uniformisation convenable, on obtiendra le collage de la non linéarité, plus précisément on démontrera les propriétés II.2.1 et II.3.1. Pour cela on utilisera la propriété II.1.1 démontrée en II.1.c. Il nous faudra contrôler l'image de $\mathcal{T}$ par l'uniformisation, *i.e.* contrôler la géométrie de $\mathcal{S}$, ce qui se fait en II.1.d et dans l'annexe 1 par des estimations de modules d'anneaux. Maintenant passons à la construction.

Soient $L' \geq 3$, $\Delta \in [L', +\infty]$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Le cas $\Delta = +\infty$ correspond au cas des germes et $\Delta < +\infty$ à celui des difféomorphismes du cercle. On se donne F univalente sur un voisinage de $\mathcal{H}$, avec $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z_0 \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} z_0 + \Delta\}$, commutant à la translation $T: z \mapsto z+1$. Si $\Delta < +\infty$, on supposera la droite horizontale $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0 + \Delta\}$ invariante par F . On suppose que $\alpha > 2$ est tel que F soit proche de la translation de α , plus précisément il existe $0 < \delta < 1/4$ tel que pour $z \in \mathbb{C}$ avec $t = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0 \in [0, \Delta]$,

$$\begin{aligned} |F(z) - z - \alpha| &\leq \delta e^{-2\pi t}, \\ |DF(z) - 1| &\leq \delta e^{-2\pi t}. \end{aligned}$$

a) CONSTRUCTION DE LA SURFACE DE RIEMANN. — Soit $\pi: S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ un revêtement universel et a un relèvement à S de la fonction $\arg(z - z_0)$ (penser à S de façon « classique » comme une superposition de plans avec des coupures convenablement recollées comme montre la figure I.8).

Notons R la translation $z \mapsto z + (F(z_0) - z_0)$, $l_1 =]z_0, z_0 + i\Delta[$, $l_2 = F(l_1)$, $l_3 =]z_0, z_0 - i\infty[$, $l_4 = R(l_3)$ et $\mathcal{B}$ la région ouverte de $\mathbb{C}$ délimitée par

$$l_1 \cup \{z_0\} \cup l_3, \quad l_2 \cup \{F(z_0)\} \cup l_4, \quad \text{et} \quad l_5 = [z_0 + i\Delta, F(z_0 + i\Delta)]$$

($l_5 = \emptyset$ si $\Delta = +\infty$) (voir fig. II.1).

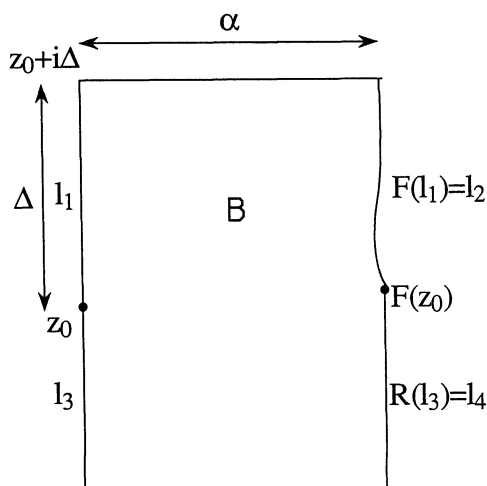


Fig. II.1

Notons $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3, \tilde{l}_4, \tilde{l}_5, \tilde{\mathcal{B}}$ les relèvements à S de $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \mathcal{B}$ dans $a^{-1}]-\pi/2, 3\pi/2[$) (observer la discontinuité de la section induite par le relèvement le

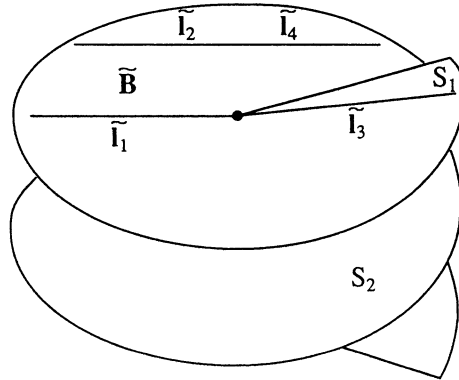


Fig. II.2

long de l_3). Dans S considérons les surfaces à coins $S_1 = a^{-1} ([3\pi/2, +\infty[$ de bord $\tilde{l}_3$ et $S_2 = \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2 \cup \tilde{l}_4 \cup \tilde{l}_5 \cup \tilde{\mathcal{B}} \cup a^{-1}]-\infty, -\pi/2[$) (voir fig. II.3).

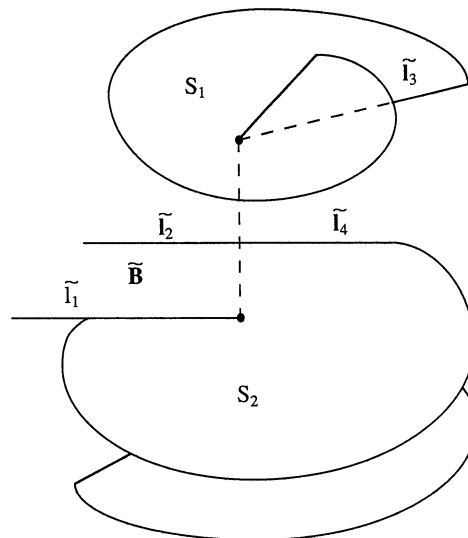


Fig. II.3

On recolle S_1 et S_2 en identifiant $\tilde{l}_1$ et $\tilde{l}_2$ par le relèvement adéquat de F , et $\tilde{l}_3$ et $\tilde{l}_4$ par le relèvement adéquat de R (voir fig. II.4).

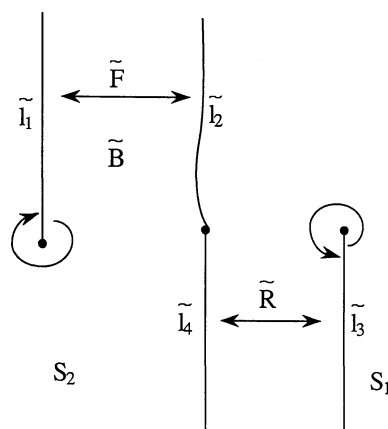


Fig. II.4

On obtient ainsi une surface $\mathcal{S}$; pour la structure complexe héritée, l'intérieur de $\mathcal{S}$ est une surface de Riemann, $\mathcal{S}$ est à bord pour $\Delta < +\infty$ et ouverte pour $\Delta = +\infty$. On identifiera quant aux notations un point de $S_1 \cup S_2 - (\tilde{l}_2 - \tilde{l}_4)$ et son image dans $\mathcal{S}$.

b) CONSTRUCTION DE LA DYNAMIQUE. — Sur une partie de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} - \mathcal{T}$, on définit une dynamique continue $g: \mathcal{S} - \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ et univalente sur $\mathcal{S} - \mathcal{T}$. Soit $\mathcal{R}$ le carré fermé dans $\mathbb{C}$ de sommets $z_0, z_0 + 1, z_0 + 1 + i, z_0 + i$. On pose $\mathcal{T} = \pi^{-1}(\mathcal{R})$ (voir fig. II.5).

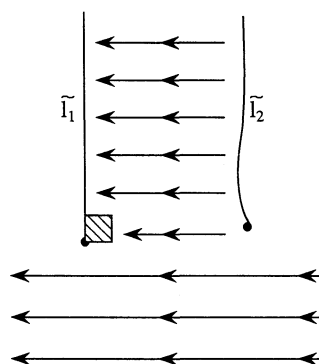


Fig. II.5

Alors il existe une unique

$$g: \begin{cases} \mathcal{S} - \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S} \\ z \mapsto z' = g(z) \end{cases}$$

continue et univalente sur $\mathcal{S} - \mathcal{I}$ telle que

$$\begin{cases} |a(z) - a(z')| < \pi \\ \pi(z') = \pi(z) - 1 \end{cases}$$

sauf dans les deux cas suivants,

- $0 < a(z) \leq \pi/2$, $\operatorname{Re} \pi(z) \in [0, 1]$, $\operatorname{Im} \pi(z) > 1$, où on a

$$a(z') \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \pi(z') = F(\pi(z)) - 1.$$

- $3\pi/2 \leq a(z) < 2\pi$, $\operatorname{Re} \pi(z) \in [0, 1]$, où on a $a(z') \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\pi(z') = R(\pi(z)) - 1$.

Remarquons que la seule zone où la récurrence est possible est contenue dans $\pi^{-1}(\mathcal{H}) \cap a^{-1}([-\pi/2, \pi/2])$. Ceci constitue la remarque fondamentale qui donne le lemme II.1.1 duquel se déduit la propriété II.1.1.

c) UNE PROPRIÉTÉ DE LA DYNAMIQUE. — On note pour $a \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$, $C(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}$, et m la partie entière de $(1/2\pi) \log \alpha + C$. Considérons la

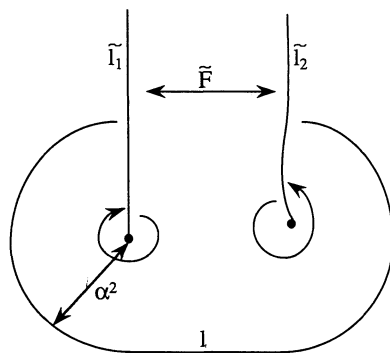


Fig. II.6

courbe l sur $\mathcal{S}$ définie par (voir *fig.* II.6),

$$\begin{aligned} l = & (\pi^{-1}(C(z_0, \alpha^2)) \cap a^{-1}([-\pi/2 - 2\pi m, -\pi/2] \cup [3\pi/2, 3\pi/2 + 2\pi m])) \\ & \cup (a^{-1}(\{-\pi/2 - 2\pi m, 3\pi/2 + 2\pi m\})) \\ & \cup (\pi^{-1}([z_0 - i\alpha^2, F(z_0) - i\alpha^2]) \cap a^{-1}([\pi/2, -\pi/2])). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{U}$ la composante connexe de $\mathcal{S} - (\mathcal{T} \cup I)$ contenant une partie de $\tilde{I}_1$. On a alors la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ II.1.1. — *Il existe $C(\alpha)$ constante ne dépendant que de α , telle que si $n \geq C(\alpha)$, $z \in \mathcal{U}$ et pour $0 \leq i \leq n$, $g^i(z) \in \mathcal{U}$; alors pour $0 \leq j \leq [n/C(\alpha)]$, $F^j(\pi(z)) \in \mathcal{H}$.*

La démonstration repose sur le lemme :

LEMME II.1.1. — *Il existe $C(\alpha)$ constante ne dépendant que de α telle que si $z \in \mathcal{S}$, et $z \notin \pi^{-1}(\mathcal{H}) \cap a^{-1}([-\pi/2, \pi/2])$ alors il existe $0 \leq i \leq C(\alpha)$ tel que $g^i(z) \notin \mathcal{U}$.*

Démonstration. — C'est clair, on peut prendre $C(\alpha) = 4\alpha^2$. Un meilleur choix serait de l'ordre de $2\alpha^2 + \alpha$. $\square$

Démonstration de la propriété. — Soit $C(\alpha)$ donné par le Lemme. Alors pour $0 \leq i \leq n - C(\alpha)$, $\pi(g^i(z)) \in \mathcal{H}$. Or $p \geq 0$ itérations de z par g restant dans $\pi^{-1}(\mathcal{H}) \cap a^{-1}([-\pi/2, \pi/2])$ correspondent à au moins $[p/2\alpha]$ itérations de $\pi(z)$ par F restant dans $\mathcal{H}$, d'où le résultat. Remarquons que pour le choix $C(\alpha) = 4\alpha^2$ on a même

$$\max_{0 \leq j \leq [n/C(\alpha)]} \operatorname{Im} F^j(\pi(z)) > 1. \quad \square$$

d) ESTIMATIONS DE MODULES D'ANNEAUX. — On considère la situation où $\Delta \geq K\alpha$, avec $K \geq 2$. On fera la construction toujours dans ce cadre.

Pour $0 < h \leq \Delta$ on pose

$$\Lambda_h = \{ z \in \tilde{\mathcal{B}}; |\operatorname{Re} \pi(z) - (\operatorname{Re} z_0 + \alpha)/2| \leq 1/2 \text{ et } \operatorname{Im} \pi(z) \geq \operatorname{Im} z_0 + h \}.$$

On considère le domaine annulaire $U_h = \mathcal{U} - \Lambda_h$, soit $M_h = \operatorname{Mod} U_h$ son module. On montre dans l'annexe 1 que, pour $h > 1$,

$$M_h \geq \alpha^{-1} h + \frac{1}{2\pi} \log \log(e\alpha) - C.$$

2) Application aux germes

Soit $\alpha > 2$ et $F \in S(\alpha)$ un germe holomorphe. L'espace $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{T}^1} S(\alpha)$ étant compact, il existe C_0 telle que pour $\operatorname{Im} z \geq C_0$ et $t = \operatorname{Im} z$,

$$\begin{aligned} |F(z) - z - \alpha| &\leq \delta, \\ |DF(z) - 1| &\leq \delta, \end{aligned}$$

où δ a été introduit au début de II.1.

Le lemme II.2.1 ci-dessous montre

$$\begin{aligned} |F(z) - z - \alpha| &\leq \delta e^{-2\pi(t-C_0)}, \\ |DF(z) - 1| &\leq \delta e^{-2\pi(t-C_0)}. \end{aligned}$$

LEMME II.2.1. (Lemme de Schwarz). — Soit $g: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, $\mathbf{Z}$ -périodique et telle que

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} g(z) = 0.$$

Si pour $\operatorname{Im} z \geq C_0$, $|g(z)| \leq C$, alors pour $t = \operatorname{Im} z \geq C_0$,

$$|g(z)| \leq C e^{-\pi(t-C_0)}.$$

Démonstration. — C'est le lemme de Schwarz appliqué à $\theta(w) = g(z)$, $w = e^{2\pi iz}$. $\square$

On veut construire $G \in S(-\alpha^{-1})$ à partir de F de façon que l'on ait

PROPRIÉTÉ II.2.1. — Il existe $C(\alpha)$ constante ne dépendant que de α , telle que si $n \geq C(\alpha)$, $z \in \mathbf{H}$ et pour $0 \leq i \leq n$, $G^i(z) \in \mathbf{H}$: alors il existe $z' \in \mathbf{H}$ tel que :

1. Pour $0 \leq j \leq [n/C(\alpha)]$, $F^j(z') \in \mathbf{H}$.
2. $\max_{0 \leq i \leq n} \operatorname{Im} G^i(z) \geq \alpha^{-1} \max_{0 \leq j \leq [n/C(\alpha)]} \operatorname{Im} F^j(z') + (1/2\pi) \log \log(e\alpha) - C$.

Donc quitte à considérer $z \mapsto F(z + iC_0) - iC_0$ au lieu de F on peut supposer $C_0 = 0$. On fait la construction fondamentale avec $z_0 = 0$ et $\Delta = +\infty$. On obtient alors une surface de Riemann $\mathcal{S}$ homéomorphe à $\mathbf{C}^*$. On a $\lim_{h \rightarrow +\infty} M_h = +\infty$ donc $\mathcal{S}$ est biholomorphe à

$\mathbf{C}^*$ ou à $\mathbf{D}^*$ (en fait on peut montrer qu'elle est biholomorphe à $\mathbf{C}^*$ mais ceci ne nous importe pas). Soit $k: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}^*$ un plongement de $\mathcal{S}$ tel que

- $\lim_{\operatorname{Im} \pi(z) \rightarrow +\infty} k(z) = 0$.
- $\mathbf{D} \subset k(\mathcal{U})$ et $k(\mathcal{S} - \mathcal{U}) \cap \bar{\mathbf{D}} \neq \emptyset$.

On a $k(\mathcal{S}) \cap \mathbf{D} = \emptyset$, donc si $p = k^{-1} \circ E$, on peut choisir $G \in S(-\alpha^{-1})$ tel que $p \circ G = g \circ p$. La propriété II.1.1 de la dynamique de g donne le point 1 de la propriété II.2.1 en prenant $z' \in \mathbf{H}$ tel que $z' = \pi \circ p(z)$. Soit $z'' = p(z)$. Il existe $0 \leq i_0 \leq n$ tel que $g^{i_0}(z'') \in \Lambda_h$, avec $h + 1/4 = \max_{0 \leq j \leq [n/C(\alpha)]} \operatorname{Im} F^j(z') > 1$. Alors en appliquant le lemme ci-dessous

$$\operatorname{Im} G^{i_0}(z) \geq \alpha^{-1} h + \frac{1}{2\pi} \log \log(e\alpha) - C,$$

ce qui donne le point 2 de la proposition.

LEMME II.2.2. — Pour $h > 0$,

$$p^{-1}(\Lambda_h) \subset H_{\alpha^{-1}h + (1/2\pi) \log \log(e\alpha) - C}.$$

Démonstration. — Pour $1 < h$, $k(\Lambda_h)$ est contenu dans la composante bornée du complémentaire du domaine annulaire $k(U_h)$ et

$$\operatorname{mod} k(U_h) = \operatorname{mod}(U_h) = M_h \geq \alpha^{-1} h + \frac{1}{2\pi} \log \log(e\alpha) - C.$$

La solution du problème extrémal de Teichmüller (voir [Ah1], p. 47) donne

$$e^{2\pi \operatorname{mod}(U_h)} \leq 16 \left(\frac{1}{\max_{z \in \Lambda_h} |k(z)|} + 1 \right)$$

(où on s'est servi de $k(\mathcal{S} - \mathcal{U}) \neq \emptyset$). Pour α ou $\alpha^{-1}h$ grands le résultat en découle, pour α et $\alpha^{-1}h$ inférieurs à une certaine valeur il suffit d'augmenter la constante C . $\square$

3) Application aux difféomorphismes du cercle

Pour $\alpha \geq L$ et $F \in S(\alpha, \Delta)$, $\Delta \geq L' \geq 3$, et $\Delta \geq K\alpha$, $K \geq 2$; on va construire $G \in S(-\alpha^{-1}, \Delta')$, avec $\Delta' = \alpha^{-1}\Delta + (1/2\pi)\log \log(e\alpha) - C$ de façon qu'on ait :

PROPRIÉTÉ II.3.1. — *Il existe $C(\alpha)$, constante ne dépendant que de α , telle que si $n \geq C(\alpha)$, $z \in B_\Delta$, et pour $0 \leq i \leq n$, $G^i(z) \in B_{\Delta'}$; alors il existe $z' \in B_\Delta$ tel que :*

1. *Pour $0 \leq j \leq [n/C(\alpha)]$, $F^j(z') \in B_{\Delta'}$.*

2.

$$\min_{0 \leq i \leq n} |\operatorname{Im} G^i(z)| \leq \alpha^{-1}\Delta + C.$$

D'après les estimations de l'annexe 6, il existe C_0 telle que, si $\Delta > C_0$, pour $z \in B_{\Delta - C_0}$, $\operatorname{Im} z \leq 0$, $t = \operatorname{Im} z + \Delta$,

$$|F(z) - z - \alpha| \leq \delta e^{-2\pi(t - C_0)},$$

$$|DF(z) - 1| \leq \delta e^{-2\pi(t - C_0)}.$$

Donc quitte à supposer au début $L' \leq C_0 + 3$ et à échanger Δ par $\Delta - C_0$ on peut supposer $C_0 = 0$.

On fait la construction fondamentale avec $z_0 = -i\Delta$. On obtient ainsi une surface à bord $\mathcal{S}$. On complète la construction en la faisant aussi de façon symétrique par rapport à la droite réelle. On obtient une surface à bord $\bar{\mathcal{S}}$. En recollant $\mathcal{S}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ suivant $\pi^{-1}(\mathbf{R}) \cap a^{-1}([-\pi/2, \pi/2])$ par le relèvement de l'identité on aboutit à une surface de Riemann $\mathcal{A}$ homéomorphe à un cylindre. La conjugaison complexe induit sur $\mathcal{A}$ une involution antiholomorphe et $\mathcal{A}$ ne peut être biholomorphe qu'à $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ ou à un anneau de module fini (elle est en fait biholomorphe à $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ mais ceci ne nous importe pas). Considérons un plongement $k: \mathcal{A} \rightarrow k(\mathcal{A}) \subset \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ tel que $k(\alpha/2) = 1/2$, $k(\tilde{l}_5) \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $k(\mathcal{S}) \subset \operatorname{adh}(\mathbf{H}/\mathbf{Z})$. On a $\mathcal{U} = U_\Delta$ donc $\operatorname{mod} k(\mathcal{U}) = \operatorname{mod} \mathcal{U} = M_\Delta$. La solution au problème extrémal de Grötzsch (voir [Ah1], p. 47) donne

$$M_\Delta = \operatorname{mod} E \circ k(\mathcal{U}) \leq \frac{1}{2\pi} \log(4R)$$

avec $R = \min_{z \in C_2} |z|$ où C_2 est la composante connexe non bornée de $C - E \circ k(\mathcal{U})$. Donc si

$\Delta' = \alpha^{-1} \Delta + (1/2\pi) \log \log(e\alpha) - C$, compte tenu de la minoration de M_Δ donnée auparavant, on a $D_{e^{2\pi\Delta'}} \subset C - C_2$. Soit $B_{\Delta'} \subset p^{-1}(\mathcal{U} \cup \bar{\mathcal{U}})$, avec $p = k^{-1} \circ \tilde{\pi}$ où $\tilde{\pi}: C \rightarrow C/\mathbb{Z}$ est la projection canonique.

On peut choisir $G \in S(-\alpha^{-1}, \Delta')$ tel que $p \circ G = g \circ p$. Comme avant, le point 1 de la propriété découle de la propriété de la dynamique de g en prenant $z' \in B_\Delta$ tel que $z' = \pi \circ p(z)$. Soit $z'' = p(z)$. Il existe $0 \leq i_0 \leq n$ tel que $g^{i_0}(z_0) \in \Lambda_1$. Du lemme qui suit on déduit

$$|\operatorname{Im} G^{i_0}(z)| \leq \alpha^{-1} \Delta + C,$$

d'où le point 2.

LEMME II.3.1. — On a

$$\operatorname{Max} |\operatorname{Im} k(\Lambda_1)| \leq \alpha^{-1} \Delta + C.$$

Démonstration. — Soit $l = \operatorname{Max} |E \circ k(\Lambda_1)| > 1$. Par la solution au problème extrémal de Teichmüller déjà mentionné on a

$$e^{2\pi M_1} \leq 16 \left(\frac{e^{2\pi \Delta'}}{l} + 1 \right).$$

Or on a $M_1 \geq (1/2\pi) \log \log(e\alpha) - C$, donc en prenant L assez grand au début on a

$$l \leq C e^{2\pi(\Delta' - M_1)}.$$

Or

$$l = e^{2\pi \operatorname{Max} |\operatorname{Im} k(\Lambda_1)|} \leq C e^{2\pi(\alpha^{-1} \Delta + C)}$$

d'où le résultat. $\square$

Quitte à prendre au début L assez grand, on a le lemme suivant que l'on utilisera dans la suite :

LEMME II.3.2. — Il existe $0 < \rho < 1$, constante universelle, telle que, si $z' \in B_\Delta$, $|z' - \alpha/2| \leq \rho\alpha$, et $\alpha \geq L$ alors

$$|\operatorname{Im} z| = |\operatorname{Im} k(z')| \leq \operatorname{Min} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} |\operatorname{Im} z'| \right).$$

Démonstration. — On considère un anneau A dans C délimité par des cercles concentriques de centre $\alpha/2$ de rayon interne $\rho\alpha$ et de rayon externe $\alpha/3$ par exemple. z' est contenu dans la composante bornée du complémentaire de A . Soit A' l'anneau tel que $\pi \circ p(A') = A$ et qui contient $1/2$ et z'' dans la composante bornée de son complémentaire. 1 est contenu dans la composante non bornée de A' . Or, le module de A' est le même que celui de A , qui est aussi grand que l'on veuille en prenant ρ assez petit (car $\alpha \geq L$). Donc la solution au problème extrémal de Teichmüller donne la majoration par $1/2$.

Pour la majoration par $1/2 |\operatorname{Im} z'|$ on fait le même argument en prenant le cercle intérieur de rayon de l'ordre de $|\operatorname{Im} z'|$ et centré sur l'axe réel. Alors la composante

bornée du complémentaire de l'anneau A' correspondant contient z'' et un point de l'axe réel. La deuxième majoration découle. $\square$

4) Fin de la démonstration

On va itérer la construction précédente pour obtenir des difféomorphismes du cercle analytiques ou des germes non linéarisables et sans orbites périodiques.

Pour les difféomorphismes du cercle, on se donne $\Delta_0 = \Delta \geq L'$ et $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ et $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ étant les suites associées, vérifiant les conditions :

- (i) $\forall l \geq 0, \quad K \leq \alpha_l \Delta_{l+1},$
- (ii) $\forall l \geq 0, \quad L' \leq \Delta_l = \alpha_l \Delta_{l+1} + \frac{1}{2\pi} \log \log (e \alpha_l^{-1}) - C,$
- (iii) $\forall l \geq 1, \quad \alpha_l \Delta_{l+1} + C \leq \rho \alpha_{l-1}^{-1},$
- (iv) $\forall l \geq 0, \quad \alpha_l^{-1} \geq L,$

avec les constantes choisies convenablement en accord avec les lemmes précédents. Pour les germes on prend $\Delta_n = +\infty$, on notera $S(\alpha_l, +\infty) = S(\alpha_l)$.

Soit $n \geq 0$ et $0 \leq l \leq n+1$. On construit $F_{n,l} \in S(\alpha_l, \Delta_l)$ (germe ou difféomorphisme) de la façon suivante :

- $F_{n,n+1}(z) = z + \alpha_{n+1} \in S(\alpha_{n+1}, \Delta_{n+1})$
- Pour $0 \leq l \leq n$ supposons construite $F_{n,l+1} \in S(\alpha_{l+1}, \Delta_{l+1})$. On pose

$$\tilde{F}_{n,l+1}(z) = \begin{cases} F_{n,l+1}(z) + a_{l+1} & \text{si } \varepsilon_{l+1} = +1 \\ -\overline{F_{n,l+1}(-\bar{z})} + a_{l+1} & \text{si } \varepsilon_{l+1} = -1 \end{cases}$$

Alors à $\tilde{F}_{n,l+1} \in S(\alpha_l^{-1}, \Delta_{l+1})$ on associe $G_{n,l} \in S(-\alpha_l, \Delta_l)$ par la construction fondamentale, pour $\alpha = \alpha_l^{-1} > L$ dans le cas des difféomorphismes du cercle, et $\Delta = \Delta_{l+1}$. On pose finalement $F_{n,l} = -\overline{G_{n,l}(-\bar{z})}$.

On peut supposer dans la suite que $\alpha = \alpha_0$. On pose $F_n = F_{n,0} \in S(\alpha, \Delta)$.

A partir des propriétés démontrées on a les propositions suivantes. Pour les germes

PROPOSITION II.4.1. — *Pour $n \geq 0$ il existe $M(n) \geq 1$, constante ne dépendant que de n et de α (mais pas de n'), telle que, si $n' \geq n$ et $z \in \mathbf{H}$ sont tels que $F_n^i(z) \in \mathbf{H}$ pour $0 \leq i \leq M(n)$; alors*

$$\max_{0 \leq i \leq M(n)} \operatorname{Im} F_n^i(z) \geq D_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \log (e \alpha_i^{-1}) - C.$$

Pour les difféomorphismes

PROPOSITION II.4.2. — *Pour $n \geq 0$, il existe $M(n) \geq 1$, constante ne dépendant que de n et de α (mais pas de n'), telle que, si $n' \geq n$ et $z \in B_\Delta$ sont tels que $F_n^i(z) \in B_\Delta$ pour*

$0 \leq i \leq M(n)$; alors

$$\min_{0 \leq i \leq M(n)} |\operatorname{Im} F_{n'}^i(z)| \leq d_n = 2^{-n}.$$

Démonstration II.4.1. — Soit $M \geq 1$ et $z \in \mathbf{H}$ tels que $F_{n'}^i(z) \in \mathbf{H}$ pour $0 \leq i \leq M$. On pose $z_0 = z$ et $M_0 = M$.

Soit $0 \leq l \leq n$, supposons construits $z_l \in \mathbf{H}$ et $M_l \geq 1$, tels que $F_{n',l}^i(z_l) \in \mathbf{H}$ pour $0 \leq i \leq M_l$. Si $M_l \geq C(\alpha_l)$ en utilisant la partie 1 de la propriété II.2.1 on obtient $z_{l+1} \in \mathbf{H}$ tel que $F_{n',l+1}^i(z_{l+1}) \in \mathbf{H}$ pour $0 \leq i \leq M_{l+1} = [M_l/C(\alpha_l^{-1})]$. Donc en prenant M assez grand, $M \geq M(n)$, on peut continuer la récurrence jusqu'à l'ordre $l = n+1$ et obtenir $z_{n+1} \in \mathbf{H}$ et $M_{n+1} \geq 1$ tel que $F_{n',n+1}^i(z_{n+1}) \in \mathbf{H}$ pour $0 \leq i \leq M_{n+1}$.

Si $h_l = \max_{0 \leq i \leq M_l} \operatorname{Im} F_{n',l}^i(z_l)$ en utilisant la partie 2 on a

$$h_l \geq \alpha_l h_{l+1} + \frac{1}{2\pi} \log \log(e \alpha_l^{-1}) - C$$

et par récurrence descendante on a $h_0 \geq D_n$ (en utilisant $\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_{i-1} \leq C$). $\square$

Démonstration II.4.2. — Comme dans la démonstration précédente, en utilisant le point 1 de la propriété II.3.1, on construit pour $0 \leq l \leq n+1$, $z_l \in B_{\Delta_l}$ et $M_l \geq 1$ tels que $F_{n',l}^i(z_l) \in B_{\Delta_l}$ pour $0 \leq i \leq M_l$. Ceci est possible dès que $M \geq M(n)$.

On pose $\gamma_l = \min_{0 \leq i \leq M_l} |\operatorname{Im} F_{n',l}^i(z_l)|$ pour $0 \leq l \leq n+1$. En appliquant le point 2 de la propriété II.3.1 on a $0 < \gamma_n \leq \alpha_n^{-1} \Delta_{n+1} + C \leq \rho \alpha_n^{-1}$. Puis par récurrence descendante en appliquant le lemme II.3.2 pour $0 \leq l \leq n-1$ (la première fois on utilise la majoration par $1/2$, $\gamma_{n-1} \leq 1/2$, et puis après on utilise la seconde majoration, $\gamma_l \leq (1/2) \gamma_{l+1}, \dots$) on a $\gamma_l \leq 2^{-(n-l)}$ et on a le résultat. $\square$

On considère la suite infinie $(F_n)_{n \geq 0}$. Soit F un point d'accumulation de cette suite ($S(\alpha, \Delta)$ est compact). Et soit finalement f tel que $f \circ E = E \circ F$. Dans le cas des germes si $\alpha \notin \mathcal{B}'$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = +\infty$ et on montre que f vérifie le théorème 1. Dans le cas des

difféomorphismes du cercle on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$ et on montre que f vérifie le théorème 3.

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que la suite elle-même est convergente.

Démonstration du théorème 2. — Soit $z \in \mathbf{H}$ dont les itérés positifs par F restent dans $\mathbf{H}$. Soit $H \geq 0$ arbitraire. Il existe $n \geq 0$ assez grand tel que $D_n \geq H+1$. Maintenant il existe $n' \geq n$ assez grand tel que :

- $n' \geq n$.
- Pour $0 \leq i \leq M(n)$, $|F_{n'}^i(z) - F^i(z)| \leq 1$.
- Pour $0 \leq i \leq M(n)$, $F_{n'}^i(z) \in \mathbf{H}$.

Alors la proposition II.4.1 donne l'existence de $0 \leq i_0 \leq M(n)$ tel que

$$\operatorname{Im} F_{n'}^{i_0}(z) \geq D_n \geq H+1, \quad \text{donc} \quad \operatorname{Im} F^{i_0}(z) \geq H. \quad \square$$

Démonstration du théorème 1. — Soit $z \in B_\Delta$ dont les itérés positifs par F restent dans B_Δ . Soit $h > 0$ arbitraire. Il existe $n \geq 0$ assez grand tel que $0 < d_n < h/2$. Maintenant il existe $n' \geq n$, $n' \in A$, assez grand tel que :

- $n' \geq n$.
- Pour $0 \leq i \leq M(n)$, $|F_{n'}^i(z) - F^i(z)| \leq h/2$.
- Pour $0 \leq i \leq M(n)$, $F_{n'}^i(z) \in B_\Delta$.

Alors la proposition II.4.2 donne l'existence de $0 \leq i_0 \leq M(n)$ tel que

$$|\operatorname{Im} F_{n'}^{i_0}(z)| \leq d_n \leq h/2, \quad \text{donc} \quad |\operatorname{Im} F^{i_0}(z)| \leq h. \quad \square$$

III. Démonstration du théorème 3

1) La construction de Yoccoz pour les germes

a) Description de la construction. — La première partie de [Y1] est consacrée à donner une nouvelle démonstration du théorème de Siegel-Brjuno. On y introduit une construction qui est fondamentale pour la démonstration de la réciproque. Ici, on se servira de cette construction que dans le sens direct du théorème de Siegel-Brjuno. On reprend dans la suite la construction de Yoccoz.

On part de $F \in S(\alpha)$. On construit par récurrence une suite $(F_n)_{n \geq 0}$, $F_n \in S(\alpha_n)$. On obtient le germe de F_{n+1} à partir de celui de F_n par une construction géométrique de Douady et Ghys (voir [D]). La version quantitative de cette construction nécessite un comportement de F_n avec des faibles non linéarités, c'est-à-dire proche de la translation $z \mapsto z + \alpha_n$. Ceci se produit à une hauteur suffisamment grande. La dynamique de F_{n+1} reflète celle de F_n pour la zone de partie imaginaire supérieure à une certaine hauteur de coupure t_n .

Pour $F \in S(\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$ on définit

$$P_{n,\varepsilon}(F) = \begin{cases} F(z) + n & \text{si } \varepsilon = -1 \\ -\overline{F(-\bar{z})} - n & \text{si } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

alors $P_{n,\varepsilon}(F) \in S(-\varepsilon(n + \alpha))$.

On pose $F_0 = P_{-a_0, -\varepsilon_0}(F) \in S(\alpha_0)$. Supposons construit $F_n \in S(\alpha_n)$. On prend t_n tel que l'on ait l'estimation fondamentale qui rend possible la construction, à savoir, pour $\operatorname{Im} z \geq t_n$,

$$|F_n(z) - z - \alpha_n| \leq \alpha_n/4,$$

$$|DF_n(z) - 1| \leq 1/4.$$

Ce sont uniquement ces estimations qui restreignent le choix des t_n . Soit $l = [it_n, +i\infty]$ et $l' = [it_n, F_n(it_n)]$. Alors $l \cup l' \cup F_n(l)$ forme le bord d'une bande ouverte $\mathcal{U}_n$ de $\mathbb{C}$ (voir fig. III.1).

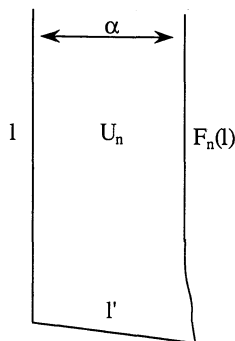


Fig. III.1

On recolle les bords de $\bar{\mathcal{U}}_n$, l et $F_n(l)$, par F_n et on obtient une surface à bord v_n . Son intérieur $\dot{v}_n$ est une surface de Riemann pour la structure complexe héritée de $\mathcal{U}_n$. Elle est biholomorphe au disque ouvert pointé. En relevant au revêtement universel on aboutit à une application holomorphe injective $L_n: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathbb{C}$ se prolongant de façon continue à $\bar{\mathcal{U}}_n$ et telle que si $z \in l$,

$$L_n \circ F_n(z) = L_n(z) + 1.$$

Quitte à rajouter une constante universelle à t_n on montre que L_n se prolonge analytiquement de façon injective sur $\mathcal{W}_n = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re} z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq t_n\}$. Sur $\mathcal{W}_n \cap F_n^{-1}(\mathcal{W}_n)$, L_n conjugue F_n à la translation T , pour $z \in \mathcal{W}_n \cap F_n^{-1}(\mathcal{W}_n)$,

$$T \circ L_n(z) = L_n \circ F_n(z).$$

Sur $\mathcal{W}_n \cap T(\mathcal{W}_n)$, l'application L_n conjugue T^{-1} à une application holomorphe G_n , pour $z \in \mathcal{W}_n \cap T(\mathcal{W}_n)$,

$$G_n \circ L_n(z) = L_n \circ T^{-1}(z).$$

On montre que l'application G_n ainsi définie s'étend à $\mathbf{H}$ tout entier, de façon que sa restriction à $\mathbf{H}$ est élément de $S(-\alpha_n^{-1})$.

Pour terminer on pose $F_{n+1} = P_{a_{n+1}, e_{n+1}}(G_n) \in S(\alpha_{n+1})$.

La dynamique de F_{n+1} à une hauteur d_{n+1} correspond à celle de F_n à une hauteur $d_n \geq t_n$. Le lien entre d_n et d_{n+1} est donné par l'estimation sur L_n ([Y1] I.3.5. (7)), pour $z \in \mathcal{W}_n$,

$$\operatorname{Im} z - t_n - C \leq \alpha_n \operatorname{Im} L_n(z) \leq \operatorname{Im} z - t_n + C.$$

Plus précisément à tout $z \in \mathbf{H}$ on associe une suite $(z_n)_{n \geq 0}$. On pose $z_0 = z$. Si $d_n = \operatorname{Im} z_n \geq t_n$ on prend z'_n tel que $z_n - z'_n \in \mathbf{Z}$ et $0 \leq \operatorname{Re} z'_n < 1$, puis $z_{n+1} = L_n(z'_n)$. La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est finie ou infinie selon les propriétés dynamiques de l'itération de z par F .

A partir de l'estimation précédente et par récurrence on a, pour $n \geq 0$,

$$D_n - C \leq d_0 \leq D_n + C$$

avec

$$D_n = \beta_{n-1} d_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j.$$

La dynamique de z_n par F_n reflète celle de z par F . C'est ceci que traduit la proposition suivante (c'est essentiellement la proposition I.3.6 de [Y1]).

PROPOSITION III.1.1. — Si $z \in \mathbf{H}$ et s'il existe $m \geq 0$ tel que $F^m(z) \notin \mathbf{H}$, alors la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est finie et a moins de $m+1$ points.

On déduit une condition suffisante de linéarisabilité.

THÉORÈME III.1.1. — Si on peut choisir la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n < +\infty$ alors F est linéarisable.

Démonstration. — Prenons $z \in \mathbf{H}$ tel que

$$\operatorname{Im} z = d_0 > \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n + C = \Phi + C.$$

D'après l'inégalité précédente, pour $n \geq 0$, $d_n \geq t_n$ et z_n est bien défini.

Ainsi la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ associé à z est infinie et par la proposition précédente pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $F^m(z) \in \mathbf{H}$. Ceci démontre l'existence d'un disque de Siegel contenant $D_{C e^{-2\pi\Phi}}$. $\square$

Remarque. — On peut montrer facilement (voir lemme III.2.2) que l'on peut toujours prendre $t_n = (1/2\pi) \log \alpha_n^{-1} + C$. La condition $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n < +\infty$ devient alors la condition de Brjuno, et le théorème de Siegel-Brjuno est ainsi prouvé. D'ailleurs dans l'annexe 2 on démontrera une généralisation du théorème III.1.1 sans utiliser la proposition précédente (théorème V.2.1 sur le contrôle de la diffusion).

b) CORRESPONDANCE D'ORBITES PÉRIODIQUES. — Dans la démonstration du théorème 3 on aura besoin de la proposition suivante pour contrôler la correspondance orbitale dans la construction. On démontrera ceci dans l'annexe 2.e.

PROPOSITION III.1.2. — Soit $n \geq 0$. Si F_n a un point fixe de hauteur h_n alors F a une orbite périodique de nombre de rotation p_n/q_n dont les hauteurs des points sont comprises

entre $H_n - C$ et $H_n + C$ avec

$$H_n = \beta_{n-1} h_n + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j.$$

2) Démonstration du théorème 3

a) CHOIX DES t_n . — Comme on l'a déjà mentionné on peut toujours prendre $t_n = (1/2\pi) \log \alpha_n^{-1} + C$. Si l'on tient compte de la structure géométrique de F_n on montre dans ce paragraphe que l'on peut prendre mieux, $t_n = (1/2\pi) \log \log (e \alpha_n^{-1}) + C$, si F_n n'a pas de points fixes. Considérons $F \in S(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, F sans points fixes. Il faut prouver

PROPOSITION III.2.1. — *Il existe une constante universelle C telle que, si F est sans point fixe, on ait pour $\operatorname{Im} z \geq (1/2\pi) \log \log (e \alpha^{-1}) + C$,*

$$\begin{aligned} |F(z) - z - \alpha| &\leq \alpha/4, \\ |DF(z) - 1| &\leq 1/4. \end{aligned}$$

Remarque. — Si F a des points fixes et $h \geq 0$ est la plus grande hauteur d'un point fixe, en appliquant la proposition à $z \mapsto F(z + ih) - ih$ on a, pour $\operatorname{Im} z \geq (1/2\pi) \log \log (e \alpha^{-1}) + h + C$,

$$\begin{aligned} |F(z) - z - \alpha| &\leq \alpha/4, \\ |DF(z) - 1| &\leq 1/4. \end{aligned}$$

Donc on peut toujours prendre $t_n = (1/2\pi) \log \log (e \alpha_n^{-1}) + h_n + C$, où h_n est la plus grande hauteur d'un point fixe de F_n .

Démonstration. — F s'écrit $F(z) = z + \alpha + \varphi(z) = z + \alpha e^{\psi(z)}$, où φ et ψ sont $\mathbb{Z}$ -périodiques et $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = \lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \psi(z) = 0$. Par compacité de $\bigcup_{\alpha \in T^1} S(\alpha)$ il existe C telle que pour $\operatorname{Im} z \geq C$,

$$\begin{aligned} |D\varphi(z)| &\leq 1/4, \\ |\varphi(z)| &\leq 1/4. \end{aligned}$$

La première inégalité nous donne la deuxième estimation de la proposition. Pour abrégé on notera $t = \operatorname{Im} z$. La deuxième inégalité nous donne, pour $t \geq C$,

$$|e^{\psi(z)} - 1| \leq \alpha^{-1}/4.$$

D'où

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leq C \log \alpha^{-1}.$$

Maintenant en appliquant le lemme II.2.1 ci-dessous à $\theta(w) = \psi(z)$, $w = e^{2\pi i z}$, $\theta: \mathbf{D}_R \rightarrow \mathbf{C}$, avec $R = e^{-2\pi C}$ et $r = e^{-2\pi t}$, on a, pour $t \geq C_1$,

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leq |\psi(z)| \leq C \log(\alpha^{-1}) e^{-2\pi t}.$$

Ainsi pour $t \geq (1/2\pi) \log \log(e\alpha^{-1}) + C$, $\operatorname{Re} \psi(z) \leq C$; donc $|\varphi(z)| \leq C\alpha^{-1}$. Finalement en appliquant le lemme II.2.1 (lemme de Schwartz) on a, pour $t \geq (1/2\pi) \log \log(e\alpha^{-1}) + C$, $|F(z) - z - \alpha| = |\varphi(z)| \leq \alpha/4$. $\square$

LEMME III.2.1 (Lemme de Carathéodory). — Soit $\theta: \bar{D}_R \rightarrow \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur D_R telle que $\theta(0) = 0$. Alors pour $|w| = r < R$,

$$|\theta(w)| \leq \frac{2r}{R-r} \sup_{|u|=R} \operatorname{Re} \theta(u).$$

Démonstration. — Posons $m = \sup_{|u|=R} \operatorname{Re} \theta(u)$ et $\eta(w) = \theta(w)/(2m - \theta(w))$. On a $\eta(0) = 0$ et pour $w \in D_R$, $|\eta(w)| \leq 1$ car l'image de θ est contenue dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} u \leq m\}$. Le lemme de Schwarz donne, pour $|w| = r < R$,

$$\left| \frac{\theta(w)}{2m - \theta(w)} \right| \leq \frac{r}{R}.$$

Or l'ensemble des points $u \in \mathbb{C}$ tels que $\|u(2m - u)^{-1}\| \leq M < 1$ est un disque fermé, symétrique par rapport à l'axe réel et contenu dans le disque fermé de centre 0 et rayon $2mM(1 - M)^{-1}$. Le lemme en résulte. $\square$

b) FIN DE LA DÉMONSTRATION. — Donnons-nous $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} < +\infty$$

et $F \in S(\alpha)$ non linéarisable. On fait la construction de Yoccoz en prenant $t_n = (1/2\pi) \log \alpha_n^{-1} + C$, si F_n a un point fixe, et $t_n = (1/2\pi) \log \log(e\alpha_n^{-1}) + C$ sinon. F est non-linéarisable donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n = +\infty$. Or

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \log(e\alpha_i^{-1}) - C < +\infty,$$

donc il existe une sous-suite infinie $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que F_{n_k} ait un point fixe, $t_{n_k} = (1/2\pi) \log \alpha_{n_k}^{-1} + C$, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{n_k-1} \log \alpha_{n_k}^{-1} = +\infty,$$

ce qui donne (voir le lemme I.2.1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log q_{n_k+1}}{q_{n_k}} = +\infty.$$

On obtient une suite d'orbites périodiques $(O_k)_{k \geq 1}$ pour F . La hauteur des points de O_k est supérieure à

$$\sum_{j=0}^{n_k-1} \beta_{j-1} t_j - C \geq \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{n_i-1} \log \alpha_{n_i}^{-1} - C.$$

Le résultat en découle.

Remarque. — Si on fait la construction de Yoccoz en prenant

$$t_n = \frac{1}{2\pi} \log \log (e \alpha_n^{-1}) + h_n + C,$$

(voir la remarque précédente), on rappelle que h_n désigne la plus grande hauteur d'un point fixe de F_n , et $f \circ E = E \circ F$, on peut donner un énoncé plus précis du théorème 2, qui apparaît alors comme une généralisation du théorème de Siegel-Brjuno.

THÉORÈME 3 bis. — Soit $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} < +\infty, \quad f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2),$$

$\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ avec les notations précédentes,

- Si $\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} h_j < +\infty$ alors f est linéarisable.
- Si $\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} h_j = +\infty$ alors f est non-linéarisable et on a une suite d'orbites périodiques

qui accumulent l'origine.

Plus précisément si $h_n > 0$ on a une orbite de nombre de rotation p_n/q_n dont la distance des points à l'origine est comprise entre $e^{-2\pi(H_n+C)}$ et $e^{-2\pi(H_n-C)}$, avec

$$H_n = \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} h_j + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}).$$

3) Sur les domaines de linéarisation

On veut ici discuter, à nombre de rotation fixé, quel est le « plus petit » domaine de linéarisation possible. Ce domaine est toujours non vide (et donc le problème a un sens) pour des germes arbitraires seulement si $\alpha \in \mathcal{B}$, et pour des germes sans orbites périodiques que lorsque $\alpha \in \mathcal{B}'$.

Les résultats de Yoccoz sont beaucoup plus précis que la seule optimalité de la condition de Brjuno : Il détermine, à une constante universelle près, la « taille » minimale du domaine de linéarisation à nombre de rotation fixé et montre qu'elle est nulle, c'est-à-dire qu'il existe des germes non linéarisables, lorsque $\alpha \notin \mathcal{B}$. Dans le cas des germes sans orbites périodiques on peut établir ce même type de résultats.

Rappelons le théorème de Yoccoz. On considère l'espace S_α des germes holomorphes $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, univalents sur $\mathbf{D}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (l'espace $S(\alpha)$ défini auparavant est le revêtement universel de S_α). Pour $f \in S_\alpha$ on note $R(f) \geq 0$ le rayon de convergence de l'application linéarisante de f , soit $h(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$, telle que

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = \lambda z.$$

Naturellement $R(f) = 0$ si et seulement si f est non linéarisable. Finalement soit

$$R(\alpha) = \inf_{f \in S_\alpha} R(f).$$

Considérons la fonction Φ définie en I.2.b. On a

THÉORÈME ([Y1]). — Si $\Phi(\alpha) < +\infty$ alors $R(\alpha) > 0$ et

$$|\Phi(\alpha) + \log R(\alpha)| \leq C,$$

où C est une constante universelle.

De la même façon considérons l'espace $S_\alpha^0 \subset S_\alpha$ contenant les applications de S_α sans orbites périodiques dans $\mathbf{D}$, et

$$R^0(\alpha) = \inf_{f \in S_\alpha^0} R(f).$$

On peut établir de la proposition II.4.1 utilisée convenablement et le théorème V.2.1 le théorème suivant qui montre que la fonction Ψ , définie aussi en I.2.b, correspond à la fonction Φ et donne l'ordre de grandeur minimal de la taille du domaine de linéarisation pour les applications sans orbites périodiques.

THÉORÈME III.3.1. — Si $\psi(\alpha) < +\infty$ alors $R^0(\alpha) > 0$ et

$$|\psi(\alpha) + \log R^0(\alpha)| \leq C,$$

où C est une constante universelle.

Comme commentaire à ce résultat signalons qu'il donne un critère d'existence d'orbites périodiques au voisinage d'un point fixe pour certaines applications : En effet si l'on a $\psi(\alpha) < +\infty$ et si $f \in S_\alpha$ a un domaine de linéarisation plus petit qu'une certaine taille ne dépendant que de α , alors f a au moins une orbite périodique dans $\mathbf{D}^*$.

IV. Germes polynomiaux

1) Cas des polynômes quadratiques

Pour prouver le théorème 4, nous nous servons du théorème suivant qui est dû à Yoccoz et qui n'a pas encore été publié.

THÉORÈME IV.1.1 (Yoccoz). — Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, a une suite d'orbites périodiques qui accumulent l'origine.

Plus précisément si $\alpha \notin \mathcal{B}'$, pour $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$, constante ne dépendant que de $\varepsilon > 0$, telle qu'il existe une infinité de bonnes réduites p_n/q_n (se reporter à la partie arithmétique I.2.b pour sa définition) telles que P_λ a une orbite périodique de nombre de rotation p_n/q_n dont la distance des points à 0 est inférieure à $C(\varepsilon) r_n^{1-\varepsilon}$ avec $r_n = e^{-2\pi K_n}$,

$$K_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1}.$$

L'intérêt de ce théorème est de montrer qu'il y a des orbites périodiques qui accumulent 0 et pas seulement des points périodiques, ce qui est une conséquence directe du fait que pour $\alpha \notin \mathcal{B}$ on a P_λ non-linéarisable (Yoccoz 87, voir [Y1]) et que l'ensemble de Julia d'un polynôme est l'adhérence de ses points périodiques répulsifs.

Puisque pour $\alpha \notin \mathcal{B}$ on a P_λ non linéarisable, le cas où $\alpha \in \mathcal{B}' - \mathcal{B}$ est réglé par le théorème 3 qui est général pour les germes non linéarisables.

Il reste à étudier le cas où $\alpha \notin \mathcal{B}'$. La démonstration est basée sur les contre-exemples non linéarisables construits dans [Y1]. Rappelons que si $\alpha \notin \mathcal{B}$ alors on a une infinité de bonnes réduites (lemme I.2.2). Lorsque $\alpha \notin \mathcal{B}$, on construit dans [Y1] un germe holomorphe $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ défini et injectif sur $\mathbf{D}$, ayant pour toute bonne réduite p_n/q_n de α une orbite périodique de nombre de rotation p_n/q_n tel que

$$F^{q_n}(z_n) = z_n + p_n,$$

et pour $0 \leq i \leq q_n$,

$$\operatorname{Im} F^i(z_n) \geq K_n - C,$$

où on rappelle, $K_n = (1/2\pi) \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \alpha_i^{-1}$.

On se place dans le cadre de travail de [Y1] II.4 où on montre que si $\alpha \notin \mathcal{B}$ alors $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ est non linéarisable. Le début de la démonstration (lemmes 1 à 4) est le même et est destiné à obtenir des estimations uniformes (lemme 4).

On note S l'espace des applications univalentes sur $\mathbf{D}$ s'annulant en 0 et de dérivée de module 1 en 0. L'espace S est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

On pose $\mathcal{W} = \mathbf{D}_{1/36}$. Pour $f \in S$, $a \in]0, 1]$ et $b \in \mathbf{C}$, on pose

$$f_{a,b}(z) = a^{-1} f(az) + bz^2.$$

On définit $\mathcal{W}_{f,a,b} = \{z \in \mathbf{D}_{1/3}; f_{a,b}(z) \in \mathcal{W}\}$. On a,

LEMME IV.1.1. — Pour $f \in S$, $a \in]0, 1]$ et $b \in \mathbf{C}$, $|b| \geq 10$, $(\mathcal{W}, \mathcal{W}_{f,a,b}, f_{a,b})$ est à allure polynomiale de degré 2.

Remarque. — On rappelle que ceci signifie (voir [DH]) que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}_{f,a,b}$ sont des ouverts simplement connexes de $\mathbf{C}$ tels que $\mathcal{W}_{f,a,b}$ soit relativement compact dans $\mathcal{W}$ et que $f_{a,b}: \mathcal{W}_{f,a,b} \rightarrow \mathcal{W}$ est holomorphe et propre de degré 2.

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où $a=1$ [en effet si $f \in S$ alors $z \mapsto a^{-1}f(az)$ est dans S].

Comme $f_{1,b} \in S$ on a (voir [Du]), pour $z \in \mathbf{D}$,

$$|f_{1,b}(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Donc, pour $|z|=1/3$, $|f_{1,b}(z)| \leq 3/4$. Et pour $|b| \geq 10$ et $|z|=1/3$,

$$|bz^2| \geq \frac{10}{9} = \frac{13}{36} + \frac{3}{4}.$$

Donc $\mathcal{W}_{f,1,b}$ est relativement compact dans $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}_{f,1,b} = f_{1,b}^{-1}(\mathcal{W})$ et $f_{1,b}: \mathcal{W}_{f,1,b} \rightarrow \mathcal{W}$ est de degré 2 par le théorème de Rouché. Il reste à voir que $\mathcal{W}_{f,1,b}$ est connexe (alors la simple connexité découle du principe du maximum). Sinon, soit $\mathcal{W}'_{1,b}$ la composante connexe contenant 0. Elle est simplement connexe et $f_{1,b}: \mathcal{W}'_{1,b} \rightarrow \mathcal{W}$ est un biholomorphisme. Or $f_{1,b}(0)=0$, $|f'_{1,b}(0)|=|\lambda|=1$, et $\mathcal{W}'_{1,b} \subset \mathcal{W}$, l'inclusion étant stricte, contredisent l'invariance du module d'un domaine simplement connexe pointé par biholomorphisme. $\square$

On va adapter dans ce cadre le théorème de Douady-Hubbard de rectification des applications à allure polynomiale (voir [DH]). On prendra dans la suite de ce préliminaire (jusqu'au lemme 4 inclus) b à valeurs dans le compact $\Gamma = \{z \in \mathbf{C}; 10 \leq |z| \leq 11\}$.

On considère η une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$, valant 1 sur $]-\infty, 1/3]$ et 0 sur $[13/36, +\infty[$.

On définit $\tilde{f}_{a,b}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ par, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$\tilde{f}_{a,b}(z) = \eta(|z|)f_{a,b}(z) + (1 - \eta(|z|))(\lambda z + bz^2).$$

Sur $\mathbf{D}_{1/3}$, $\tilde{f}_{a,b} = f_{a,b}$.

Sur $\mathbf{C} - \mathbf{D}_{13/36}$, $\tilde{f}_{a,b}(z) = \lambda z + bz^2$.

Lorsque a tend vers 0, $f_{a,b}$ converge uniformément sur $\bar{\mathbf{D}}_{1/3}$ vers $z \mapsto \lambda z + bz^2$ de façon uniforme en f et b , donc $\tilde{f}_{a,b}$ converge uniformément sur $\mathbf{C}$ pour la C^∞ -topologie vers $z \mapsto \lambda z + bz^2$. Donc on déduit,

LEMME IV.1.2. — Il existe $a_0 \in]0, 1]$ et $k: [0, a_0] \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $k(0)=0$, et pour tout $f \in S$, $b \in \Gamma$, $a \in]0, a_0]$, $f_{a,b}$ est un revêtement ramifié de degré 2 de $\mathbf{C}$ et, pour $1/3 \leq |z| \leq 13/36$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}_{a,b}(z) \right| \leq k(a) \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_{a,b}(z) \right|.$$

Soit $a \in]0, a_0]$. Maintenant transportons la structure complexe standard σ_0 sur $\mathbf{C} - \mathcal{W}$ par $\tilde{f}_{a,b}$. Sur $\mathcal{W} - \mathcal{W}_{f,a,b}$ on obtient la structure complexe $\tilde{f}_{a,b}^* \sigma_0$. Puis, par transports successifs par $\tilde{f}_{a,b}$, on obtient une structure complexe $\sigma = \sigma_{f,a,b}$ sur $\mathbf{C}$ invariante par $\tilde{f}_{a,b}$, avec $\sigma_{f,a,b} = \sigma_0$ sur $\mathbf{C} - \mathcal{W}$ et sur $\bigcap_{n \geq 0} \tilde{f}_{a,b}^n(\mathcal{W})$. Le lemme 2 nous montre que

la dilatation de σ par rapport à σ_0 , de forme de Beltrami $\mu = \mu_{f,a,b}$, est majorée par $k(a)$, puisque sur $\mathcal{W}_{f,a,b}$, $\tilde{f}_{a,b}$ est holomorphe. Par le théorème d'Ahlfors-Bers on peut rectifier la structure complexe $\sigma_{f,a,b}$ par un unique homéomorphisme quasi-conforme $\varphi = \varphi_{f,a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi^* \sigma_0 = \sigma_{f,a,b}$, avec

- Pour presque tout $z \in \mathbb{C}$, $|(\partial/\partial \bar{z}) \varphi(z)/(\partial/\partial z) \varphi(z)| = |\mu_{f,a,b}| \leq k(a)$,
- $\varphi(0) = 0$,
- $\varphi(z) - z$ bornée,
- φ holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathcal{W}$,

(voir [Ah1], p. 91, théorème 1 et démonstration, ici μ est à support compact).

On obtient $\varphi_{f,a,b}$ holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathcal{W}$, car dans ce domaine $\sigma_{f,a,b} = \sigma_0$. On a aussi,

LEMME IV.1.3. — Pour $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \circ \tilde{f}_{a,b} \circ \varphi^{-1}(z) = \lambda z + bz^2$.

Démonstration. — L'application $\varphi \circ \tilde{f}_{a,b} \circ \varphi^{-1}$ est un homéomorphisme local au voisinage de tout point distinct de l'image par φ du point de ramification de $\tilde{f}_{a,b}$. Il laisse invariante la structure complexe σ_0 . C'est donc une application holomorphe de degré 2 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On peut l'écrire $\lambda' z + b' z^2$.

On a $\lambda = \lambda'$ car le multiplicateur d'un point fixe d'un difféomorphisme holomorphe est un invariant topologique lorsqu'il est de module 1 (d'après [N]). Dans le cas quasi-conforme on a une démonstration plus simple de ce fait (voir [Y1], II.1.6).

On a finalement $b = b'$ par la propriété $\varphi(z) - z$ borné, qui montre que φ établit une conjugaison du bassin attracteur du point ∞ avec dérivée 1 à l'infini. $\square$

Pour finir ces préliminaires, considérons la famille d'homéomorphismes quasi-conformes $(\varphi_{f,a,b})_{\substack{f \in S \\ b \in \mathbb{T}}}$. Les éléments de cette famille fixent 0 et ∞ , et sont univalents sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{W}$, de dérivé 1 à l'infini ($\varphi(z) - z$ bornée), donc on a des estimées uniformes en f et b pour les images d'un troisième point dans $\mathbb{C} - \mathcal{W}$. Donc (voir [Le]) on a une famille normale d'homéomorphismes $K(a)$ -quasi-conformes, avec $K(a) = (1 + k(a))/(1 - k(a))$. Il vient

LEMME IV.1.4. — Il existe une constante $C(a) > 0$ ne dépendant que de a , telle que, pour $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ on ait

$$|\phi_{f,a,b}(z_1) - \phi_{f,a,b}(z_2)| \leq C(a) |z_1 - z_2|^{1/K(a)}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\alpha \notin \mathcal{B}'$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Fixons dans la suite $a \in]0, a_0]$ tel que $1/K(a) \geq 1 - \varepsilon$ [on a $\lim_{a \rightarrow 0} K(a) = 1]$.

Prenons pour $f \in S$ le contre-exemple de Yoccoz dont on a décrit les propriétés au début, et considérons $f_{a,b}$ pour $b \in \bar{\mathbb{D}}_{11}$.

LEMME IV.1.5. — a) Il existe une constante $C_1 = C_1(a) > 0$ et un entier $N(a) \geq 1$ tels que pour toute bonne réduite p_n/q_n de α avec $n \geq N(a)$, on a une orbite périodique pour $f_{a,0}$ de nombre de rotation p_n/q_n entièrement contenue dans $\mathbb{D}_{C_1 r_n}$.

b) Pour toute bonne réduite p_n/q_n de α , il existe $d_n > 0$, telle que pour tout $b \in \bar{D}_{11}$, $f_{a,b}$ n'a pas de points périodiques de période q_n dans D_{d_n} .

Démonstration. — La partie a) découle des propriétés de f et de $f_{a,0}(z) = a^{-1}f(az)$. La partie b) découle du fait que $(f_{a,b})_{b \in \bar{D}_{11}}$ est une famille compacte et les points périodiques de période q_n fixé ne peuvent accumuler 0 qui est un point fixe de multiplicité 1. $\square$

Dans la partie arithmétique I.2 on a défini un ensemble infini $A(\alpha)$ de bonnes réduites qui vérifiaient les conditions du lemme I.2.2. On a

LEMME IV.1.6. — Il existe $C_2 = C_2(a) > C_1 > 0$ tel que pour tout $n \in A(\alpha)$ et tout $b \in \bar{D}_{11}$ l'image de $D_{C_1 r_n}$ par $f_{a,b}^{q_n}$ est contenue dans $D_{C_2 r_n}$.

Donc $f_{a,b}^{q_n}$ est bien défini sur $D_{C_1 r_n}$ et toute orbite périodique de période q_n qui a un point dans $D_{C_1 r_n}$ a tous ses points dans $D_{C_2 r_n}$.

Démonstration. — Puisque $b \in \bar{D}_{11}$ varie dans un compact, il existe une homothétie de centre 0, de rapport constant universel, par conjugaison de laquelle $f_{a,b}$ devient univalente sur D .

Alors, $n \geq 1$ étant fixé, pour démontrer le lemme il suffit de vérifier les hypothèses du théorème V.2.1 sur le contrôle de la diffusion (Annexe 2.f). C'est-à-dire,

$$K_n \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} + C,$$

soit

$$\beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \geq 2\pi(C + C_0).$$

Or d'après la partie arithmétique (lemme I.2.2), puisque $\alpha \notin \mathcal{B}'$, ceci se produit pour une infinité de bonnes réduites, $n \in A(\alpha)$. $\square$

Remarque. — C'est uniquement ici qu'intervient l'hypothèse $\alpha \notin \mathcal{B}'$. On pourrait faire le même raisonnement pour certains $\alpha \notin \mathcal{B}$, mais malheureusement pas pour tous (pas pour ceux pour lesquels la série de Brjuno diverge et ses termes sont inférieurs à une certaine constante).

Finalement on montre,

LEMME IV.1.7. — Pour tout $n \geq N(a)$, $n \in A(\alpha)$, il existe une valeur $b_n \in \Gamma$ telle que f_{a,b_n} ait une orbite périodique de période q_n dans $D_{C_2 r_n}$.

Démonstration. — D'après le lemme IV.1.6 il suffit de trouver un point périodique pour f_{a,b_n} de période q_n dans $D_{C_1 r_n}$.

Encore d'après le lemme IV.1.6, si $n \in A(\alpha)$, pour tout $b \in \bar{D}_{11}$, $f_{a,b}^{q_n}$ est bien défini sur $D_{C_1 r_n}$.

Pour $b \in \bar{D}_{11}$ et $z \in D_{C_1 r_n}$ on considère la fonction méromorphe de deux variables,

$$G_n(b, z) = \frac{z}{f_{a,b}^{q_n}(z) - z}.$$

S'il n'existe pas $b_n \in \Gamma$ tel que f_{a, b_n} ait un point périodique de période q_n dans $D_{C_1 r_n}$ alors G_n serait holomorphe sur $\{(b, z) \in \mathbb{C}^2; b \in \Gamma, |z| < C_1 r_n\}$. Par la partie b du lemme IV.1.5, G_n est holomorphe sur $\{(b, z) \in \mathbb{C}^2; |b| < 11, |z| < d_n\}$. Par le théorème d'Hartogs on aurait que G_n est holomorphe sur $\{(b, z) \in \mathbb{C}^2; |b| < 11, |z| < C_1 r_n\}$. Or par le lemme IV.1.5 $f_{a, 0}$ a un point périodique de période q_n dans $D_{C_1 r_n}$ si $n \geq N(a)$. Il donne lieu à un pôle de G_n , d'où le résultat. $\square$

Démonstration du théorème IV.1.1. — Pour $z \in D_{1/3}$ on a $f_{a, b}(z) = \tilde{f}_{a, b}(z)$, donc au voisinage de 0, $\phi = \phi_{f, a, b}$ conjugue $f_{a, b}$ à $\lambda z + bz^2 = b^{-1} P_\lambda(bz)$.

Quitte à augmenter $N(a) = N$ on peut supposer que pour $n \in A(\alpha)$, $n \geq N(a)$, on a $C_2 r_n \leq 1/3$, et il existe $b_n \in \Gamma$ tel que f_{a, b_n} ait une orbite périodique de période q_n dont tous les points sont dans $D_{C_2 r_n}$. Son image par ϕ est une orbite périodique de période q_n pour $\lambda z + bz^2$ entièrement contenue dans $D_{C'(e) r_n^{1-\varepsilon}}$ d'après le lemme IV.1.4. Or $10 \leq |b| \leq 11$, donc on a une orbite périodique de période q_n pour P_λ entièrement contenue dans $D_{C(e) r_n^{1-\varepsilon}}$. Ceci pour tout $n \in A(\alpha)$, $n \geq N(a)$, d'où le résultat. $\square$

2) Cas des polynômes structurellement stables

On rappelle la définition que l'on avait donnée de germe polynomial structurellement stable. Pour $d \geq 3$ on considère l'ouvert dense de

$$\mathcal{P}_{\lambda, d} = \{P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d, (a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d-1}\} \approx \mathbb{C}^{d-1}$$

dont le complémentaire est l'adhérence des polynômes ayant un point périodique indifférent non persistant, c'est l'ensemble des germes polynomiaux structurellement stables de degré d . On dit qu'un germe polynomial de degré d est structurellement stable s'il est structurellement stable de degré d .

Si $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$, $a_d \neq 0$, est un germe structurellement stable il existe un voisinage V de P dans $\mathcal{P}_{\lambda, d}$, tel que tout polynôme Q dans V est quasi-conformément conjugué sur $\mathbb{C}$ à P , la conjugante quasi-conforme varie de façon holomorphe par rapport au paramètre et a une dilatation uniformément bornée par rapport au paramètre (voir [MSS], [ST], [Su], [DH]).

Maintenant pour démontrer le théorème 4 on se donne P structurellement stable et on considère pour $b \in \mathbb{C}$,

$$P_b(z) = (\lambda z + z^2) + a_2 bz^2 + \dots + a_d b^{d-1} z^d.$$

Pour $b=0$ on a $P_0(z) = \lambda z + z^2$. Pour $b \neq 0$,

$$\begin{aligned} P_b(z) &= z^2 + b^{-1} P(bz) \\ &= b^{-1} Q_b(bz) \end{aligned}$$

avec $Q_b(z) = \lambda z + (a_2 + b^{-1}) z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_d z^d$.

Pour $|b| > B(P)$ on a $Q_b \in V$. Donc pour $b \in \Gamma = \{z \in \mathbb{C}; B(P) \leq |z| \leq B(P) + 1\}$, Q_b est quasi-conformément conjugué à P . Plus précisément, pour $b \in \Gamma$, il existe $\phi_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle

que

$$\phi_b \circ Q_b = P \circ \phi_b,$$

avec $b \mapsto \phi_b$ continue et pour $b \rightarrow \infty$, $\phi_b \rightarrow \text{id}_{\mathbb{C}}$. La famille $(\phi_b)_{b \in \Gamma}$ est une famille normale et il existe $C > 0$ et $K \geq 1$, tels que, pour $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$,

$$|\phi_b(z_1) - \phi_b(z_2)| \leq C |z_1 - z_2|^{1/K}.$$

Remarquons aussi que $\phi_b(0) = 0$ car $\phi_b(0)$ est un point fixe indifférent de P par l'invariance quasi-conforme du multiplicateur d'un point fixe indifférent, et si ce n'était pas 0 il ne serait pas persistant.

Montrons maintenant,

THÉORÈME IV.2.1. — *Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ alors P a une suite de points périodiques qui tendent vers 0. Donc P est non linéarisable.*

Démonstration. — Partons d'une suite $(z_n)_{n \geq 0}$ tendant vers 0, de points périodiques de périodes $(q'_n)_{n \geq 0}$ pour le polynôme quadratique P_λ .

On a vu que l'on pouvait prendre pour $(q'_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite des réduites de α . On n'utilisera pas ceci dans la démonstration de ce théorème. Remarquons que pour avoir une telle suite de points périodiques il suffit de savoir que P_λ est non linéarisable pour $\alpha \notin \mathcal{B}$.

On a pour $n \geq 0$, $|z_n| < \mu_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0$. Fixons $n \geq 0$ tel que $(B(P) + 1)\mu_n < 1$ et montrons qu'il existe $b_n \in \Gamma$ et $w_n \in \mathbb{C}$, $|w_n| < \mu_n$, tel que $P_{b_n}^{q'_n}(w_n) = w_n$.

Pour $q'_n \geq 1$ fixé, il existe $\rho_n > 0$ tel que $(P_{b_n}^{q'_n}(z) - z)/z$ n'ait pas de zéros dans $\mathbf{D}_{\rho_n}$ pour $b \in \bar{\mathbf{D}}_{B(P)+1}$ (b varie dans un compact).

Maintenant,

$$G_n(b, z) = \frac{z}{P_{b_n}^{q'_n}(z) - z},$$

est une fonction méromorphe des deux variables (b, z) dans un voisinage de $\mathbf{D}_{B(P)+1} \times \mathbf{D}_{\mu_n}$. En raisonnant par l'absurde, on a G_n holomorphe sur

$$(\mathbf{D}_{B(P)+1} \times \mathbf{D}_{\rho_n}) \cup ((\mathbf{D}_{B(P)+1} - \mathbf{D}_{B(P)}) \times \mathbf{D}_{\mu_n}).$$

Le théorème d'Hartogs montre que G_n est holomorphe sur $\mathbf{D}_{B(P)+1} \times \mathbf{D}_{\mu_n}$, ce qui contredit le fait que G_n a un pôle en $(0, z_n)$, qui provient du point périodique du polynôme quadratique.

Donc il existe $b_n \in \Gamma$ et $w_n \in \mathbf{D}_{\mu_n}$ tel que

$$P_{b_n}^{q'_n}(w_n) = w_n.$$

Donc si $v_n = b_n w_n$ on a $Q_{b_n}^{q_n'}(v_n) = v_n$ et $v_n \in D_{(B(P)+1)\mu_n} \subset D$. En posant

$$u_n = \phi_{b_n}(v_n) \in D_{C[(B(P)+1)\mu_n]^{1/K}}$$

on a $P^{q_n'}(u_n) = u_n$.

Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} C[(B(P)+1)\mu_n]^{1/K} = 0$, d'où le résultat. $\square$

Remarque. — Notons que dans ce cas-ci on n'a pas eu à étudier le domaine de définition des itérés, ici on ne travaille plus avec des germes.

Ce dernier théorème montre que P est non linéarisable. Donc si $\alpha \in \mathcal{B}'$ la conclusion du théorème 4 est donnée par le théorème 2 qui est général pour les germes non-linéarisables.

Terminons la démonstration du théorème 4. On considère le cas qui nous reste, à savoir $\alpha \notin \mathcal{B}'$. Dans ce cas, l'étude du cas quadratique montre que pour $\varepsilon > 0$, il existe $A(\alpha) \subset \mathbb{N}$ infini, tel que dans la démonstration précédente l'on puisse prendre $(q_n')_{n \geq 0} = (q_n)_{n \in A(\alpha)}$ et $(\mu_n)_{n \geq 0} = (C(\varepsilon) r_n^{1-\varepsilon})_{n \geq 0}$, avec $r_n = e^{-2\pi K_n}$,

$K_n = (1/2\pi) \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1}$. Prenons $\varepsilon = 1/2$, par exemple. Ainsi on obtient des points

périodiques pour P , $(u_n)_{n \in A(\alpha)}$, de périodes $(q_n)_{n \in A(\alpha)}$ avec

$$|u_n| \leq C[(B(P)+1)C(1/2)r_n^{1/2}]^{1/K}.$$

Soit $u_n = e^{2\pi i z_n}$ avec

$$\operatorname{Im} z_n \geq \frac{1}{2K} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} - C.$$

Supposons par l'absurde que P n'ait pas une suite d'orbites périodiques qui accumule 0. Alors d'après la partie III on peut faire pour P (en le conjuguant par une homothétie de façon qu'il devienne univalent sur D) la construction de Yoccoz en choisissant, sauf pour un nombre fini de fois,

$$t_n = \frac{1}{2\pi} \log \log (e \alpha_n^{-1}) + C.$$

D'après le lemme I.2.2 de la partie arithmétique I.2, en choisissant $1 - \varepsilon = 1/2K$, pour $n \in A(\alpha)$ on a,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} - C &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) + C_2, \\ &\geq \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + C'. \end{aligned}$$

On fait appel maintenant au théorème V.2.1 sur le contrôle de la diffusion et son corollaire, la proposition V.2.5 (Annexe 2.f) pour obtenir que les q_n points de l'orbite

de u_n par P se trouvent dans $D_{r'_n}$, avec

$$r'_n = C' [(B(P) + 1) C (1/2) r_n^{1/2}]^{1/K}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} r'_n = 0$, donc on obtient encore une suite d'orbites périodiques qui accumulent 0.

Remarque. — On n'a utilisé la stabilité structurelle que pour des perturbations du coefficient de degré 2. On montre de façon identique :

THÉORÈME 4 bis. — Soit $d \geq 2$, $\alpha \notin \mathcal{B}$ et $(a_3, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d-2}$ fixés. Alors il existe un ouvert dense $U \subset \mathbb{C}$ tel que pour toute valeur $a_2 \in U$, $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_d z^d$ a une suite d'orbites périodiques qui accumulent 0 et, en particulier, P est non-linéarisable.

Remarque. — Il est clair que ces mêmes méthodes donnent les mêmes théorèmes pour les fractions rationnelles structurellement stables.

3) Sur les points périodiques de Cremer

On veut faire le point sur ce qui est connu sur l'étude de la linéarisabilité des germes polynomiaux. Le cas du polynôme quadratique est complètement réglé par les résultats de Yoccoz : Lorsque $\alpha \notin \mathcal{B}$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ est non linéarisable et a une suite d'orbites périodiques qui accumulent 0. Pour un germe polynomial de degré supérieur on a montré qu'on a le même résultat pour un ouvert dense de valeurs du coefficient de degré 2.

D'autre part, si $d \geq 1$, Cremer (voir [Cr]) montre sous la condition

$$(\mathcal{C}_d) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{d^{q_n}} = +\infty,$$

que tout germe polynomial $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$ de degré d a une suite de points périodiques qui accumulent 0 et par suite est non linéarisable*. Il est curieux de remarquer que la condition diophantienne

$$\mathcal{C}_\infty = \bigcap_{d \geq 2} \mathcal{C}_d,$$

pour laquelle l'argument de Cremer s'applique à tout germe polynomial, indépendamment du degré, s'écrit

$$(\mathcal{C}_\infty) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} = +\infty.$$

* J'ai découvert récemment l'article de P. Tortrat [To] où cet auteur montre que la condition $(\mathcal{T})$ $\limsup (\log q_{n+1}/d^{q_n}) > 0$ suffit pour obtenir la non linéarisabilité.

En conclusion, le seul cas qui reste à régler quant à l'étude de la linéarisabilité des germes polynomiaux est celui où $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} - \mathcal{B} - \mathcal{C}_d$, et P est un germe polynomial de degré d non structurellement stable par rapport à des perturbations du coefficient de degré 2.

Quant à la question sur l'accumulation de l'origine par des orbites périodiques pour un germe polynomial non linéarisable de degré quelconque, le cas $\alpha \in \mathcal{B}'$ est réglé par le théorème 3 et le cas $\alpha \in \mathcal{C}_\infty$ est réglé par l'argument de Cremer comme on va le voir. Ainsi le seul cas que l'on ne sait pas traiter est celui où la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n}$$

diverge avec ses termes bornés. Rappelons,

THÉORÈME (H. Cremer). — Soit $d \geq 2$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, avec $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ la suite des réduites de α qui satisfont

$$(\mathcal{C}_d) \quad \sup_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{d^{q_n}} = +\infty,$$

alors tout germe polynomial $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$ a une suite de points périodiques qui accumulent 0.

Démonstration. — On écrit l'équation des points périodiques de période q et distincts de 0,

$$\frac{P^q(z) - z}{z} = (\lambda^q - 1) + \dots + a_d z^{d^q - 1} = 0.$$

Ainsi le produit des racines de cette équation est

$$\prod_{i=1}^{d^q - 1} z_i = a_d^{-1} (\lambda^q - 1),$$

donc,

$$\prod_{i=1}^{d^q - 1} |z_i| = |a_d^{-1} (\lambda^q - 1)|.$$

Il vient qu'il existe une racine w_q telle que

$$|w_q| \leq |a_d^{-1}|^{1/(d^q - 1)} |\lambda^q - 1|^{1/(d^q - 1)},$$

On voit sans peine que la condition $(\mathcal{C}_d)$ est équivalente à

$$\inf_{q \geq 1} |\lambda^q - 1|^{1/(d^q - 1)} = 0,$$

ce qui assure l'accumulation de 0 par une suite $(w_q)_{q \geq 1}$ de points périodiques. $\square$

En utilisant ceci et le théorème V.2.1 on montre,

PROPOSITION IV.3.1. — *Si $\alpha \in \mathcal{C}_\infty$ alors tout germe polynomial est non linéarisable et a une suite d'orbites périodiques qui accumulent 0.*

Démonstration de la Proposition IV.3.1. — Le théorème de Cremer donne la non linéarisabilité. Supposons par l'absurde que l'on ait un voisinage de 0 sans autre orbite périodique que 0. On peut alors, une fois pour toutes, normaliser P pour qu'il soit univalent et sans orbite périodique autre que 0 dans D. En faisant la construction de Yoccoz, exposée en III.1, on peut prendre pour $n \geq 0$,

$$t_n = \frac{1}{2\pi} \log \log (e \alpha_n^{-1}) + C.$$

Mais on peut contrôler l'orbite périodique associée au point périodique donné par l'argument de Cremer, grâce au théorème V.2.1, si l'on a

$$(*) \quad (2\pi) \frac{\log q_{n+1}}{d^{q_n}} \geq \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{i-1} t_i + C.$$

Puisqu'on a supposé qu'il n'y a pas d'orbites périodiques dans D autre que 0, il existe $M > 0$ telle que si

$$\frac{\log q_{n+1}}{d^{q_n}} \geq M,$$

alors on ne peut avoir (*), soit

$$\frac{\log q_{n+1}}{d^{q_n}} \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{i-1} \log \log (e \alpha_i^{-1}) + C.$$

Avec le lemme V.4.2 on a facilement,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta_{i-1} \log \log (e \alpha_i^{-1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\log \log q_{i+1}}{q_i} + C = S_{n-1} + C.$$

Ainsi, si

$$\frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} \geq \log d + \frac{\log M}{q_n},$$

alors

$$\frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} \leq \log d + \frac{1}{q_n} \log \left[\frac{1}{(2\pi)^2} S_{n-1} + C \right].$$

Posons pour $n \geq 0$,

$$M_n = \text{Max} \left\{ \log d + \log M, \frac{\log \log q_{i+1}}{q_i}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n \right\}.$$

La suite $(M_n)_{n \geq 0}$ est croissante et par le raisonnement précédent, pour $n \geq 1$ on a $M_n = M_{n-1}$ ou

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} \leq \frac{\log d}{M_{n-1}} + \frac{1}{q_n M_{n-1}} \log \left[\frac{n M_{n-1}}{(2\pi)^2} + C \right] = u_n.$$

Or $\alpha \in \mathcal{C}_\infty$ donc M_n tend vers l'infini et pour $n \geq N$ on a $u_n < 1$ ce qui montre que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ est stationnaire pour $n \geq N$. Absurde. $\square$

Remarque. — En fixant le degré on peut obtenir l'accumulation de 0 par des orbites périodiques avec de meilleures conditions diophantiennes.

V. ANNEXES

Annexe 1

Estimations de modules d'anneaux

Cette annexe est destinée à obtenir les estimations de modules d'anneaux de II.1.d.

On commence par montrer que pour $1 \leq h \leq \alpha$ on a $M_h \geq (1/2\pi) \log \log(e\alpha) - C$. Quitte à augmenter la constante C on peut supposer α supérieur à une certaine valeur que l'on supposera plus grande que 10.

Soit $d = \{z \in \mathcal{B}; \operatorname{Re} \pi(z) = \alpha/2\}$ et $\mathcal{S}' = \{z \in \mathcal{U}; |\pi(z) - z_0| \leq 2 \text{ ou } |\pi(z) - z_0 - \alpha| \leq 2 \text{ pour } \arg z \in [-\pi/2, \pi/2]\}$. $d \cup a^{-1}(\pi/2)$ divise $\mathcal{U} - \mathcal{S}'$ en deux parties simplement connexes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ (voir fig. V.1).

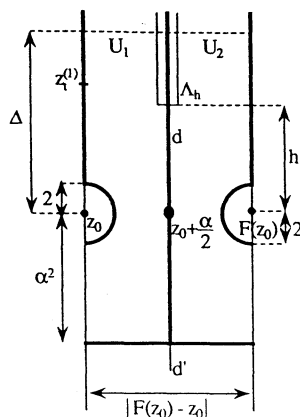


Fig. V.1

Si Ω est une partie de $\mathbb{C}$ simplement connexe, $a \in \mathbb{C} - \Omega$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, on appellera logarithme normalisé branché en a d'argument θ suivant la direction u l'application holomorphe sur Ω , $z \rightarrow \theta + (1/2\pi i) \log((z-a)/u)$. En dehors d'un voisinage de a

l'application ci-dessus a une norme C^2 bornée, c'est pourquoi les images de deux chemins différentiables paramétrés C^1 proches contenus dans Ω seront encore C^1 proches.

Sur $\mathcal{U}_1$ on considère le relèvement du logarithme normalisé branché en z_0 d'argument nul suivant la direction i . Soit $\mathcal{U}'_1$ son image (voir fig. V. 2).

Sur $\mathcal{U}_2$ on considère le relèvement du logarithme normalisé branché en $z_0 + \alpha$ d'argument nul suivant la direction i . Soit $\mathcal{U}'_2$ son image (voir fig. V. 2).

Pour $2 \leq t \leq \alpha$, on note $z_t^{(1)} = z_0 + it$ et $z_t^{(2)} = F(z_t^{(1)}) = F(z_0 + it)$. On a

$$\begin{aligned} |z_t^{(2)} - (z_t^{(1)} + \alpha)| &\leq \delta e^{-2\pi t}, \\ |\dot{z}_t^{(2)} - \dot{z}_t^{(1)}| &\leq \delta e^{-2\pi t}. \end{aligned}$$

(en notant $\dot{z}_t^{(2)} = (d/dt) z_t^{(2)}$). Soient $w_t^{(1)}$ et $w_t^{(2)}$ les images de $z_t^{(1)}$ et $z_t^{(2)}$ dans $\mathcal{U}'_1$ et $\mathcal{U}'_2$. On a $w_t^{(1)} = (1/2\pi i) \log t$ et par la remarque précédente, pour $2 \leq t \leq h$,

$$\begin{aligned} |w_t^{(2)} - w_t^{(1)}| &\leq C e^{-2\pi t}, \\ |\dot{w}_t^{(2)} - \dot{w}_t^{(1)}| &\leq C e^{-2\pi t}. \end{aligned}$$

Soit $d' = \{z \in d; \operatorname{Im} \pi(z) \leq \operatorname{Im} z_0\}$. On pose $A'_1 = w_\alpha^{(1)} = A'_2$; on note d'_1 et d'_2 , $\mathcal{U}''_1$ et $\mathcal{U}''_2$, les images de d' , de $\overline{U_h} \cap \mathcal{U}_1$ et $\overline{U_h} \cap \mathcal{U}_2$ dans $\mathcal{U}'_1$ et $\mathcal{U}'_2$. On note

$$v_t^{(1)} = d'_1 \cap C(A'_1, |w_t^{(1)} - A'_1|) \quad \text{et} \quad v_t^{(2)} = -\overline{v_t^{(1)}} \in d'_2.$$

Le demi-anneau $V_1 \subset \mathcal{U}'_1$ délimité par

$$C(A'_1, C)$$

et

$$C\left(A'_1, \frac{1}{2\pi} \log \alpha - C\right)$$

est contenu dans $\mathcal{U}''_1$ (voir fig. V. 2).

De même dans $\mathcal{U}''_2$ on considère le demi-anneau V_2 qui est délimité par

$$C(A'_2, C)$$

et

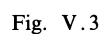
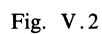
$$C\left(A'_2, \frac{1}{2\pi} \log \alpha - C\right)$$

(voir fig. V. 2).

Soit V'_1 l'image de V_1 par le logarithme normalisé branché en A'_1 d'argument nul pour la direction i (voir fig. V. 3).

Soit V'_2 l'image de V_2 par le logarithme normalisé branché en A'_2 d'argument $1/2$ pour la direction $-i$ (voir fig. V. 3).

V'_1 et V'_2 sont disjoints. On note $\overline{w}_t^{(1)}$, $\overline{w}_t^{(2)}$, $\overline{v}_t^{(1)}$, $\overline{v}_t^{(2)}$ les images de $w_t^{(1)}$, $w_t^{(2)}$, $v_t^{(1)}$, $v_t^{(2)}$.


$$|\bar{w}_t^{(2)} - (1 + \bar{w}_t^{(1)})| \leq C e^{-2\pi t},$$

$$\left| \dot{\bar{w}}_t^{(2)} - \dot{\bar{w}}_t^{(1)} \right| \leq C e^{-2\pi t}.$$

On a $\bar{w}_t^{(1)} = (1/2\pi i) \log[(1/2\pi)(\log \alpha + C - \log t)]$. Donc si on définit $y(t) = \text{Im } \bar{w}_t^{(1)}$ ($y(t) = 0$ si $2 \leq t \leq C$) on a ($t \neq C$)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t(\log \alpha + C - \log t)}.$$

Il résulte que $\int_2^\alpha e^{-2\pi t} y'(t) dt \leq C$. Maintenant on relève la métrique standard sur $V'_1 \cup V'_2$ à U_h pour obtenir la métrique ρ . L'image dans $V'_1 \cup V'_2$ de tout chemin γ joignant les deux bords de U_h est un chemin γ' , qui est peut-être disconnecté, qui traverse verticalement $V'_1 \cup V'_2$. On minore la longueur $L(\gamma, \rho) = L(\gamma', |dz|^2)$ de ces chemins par une méthode, employée en [Y 3] et que l'on peut retrouver dans [Ah 2], de sommation des contributions infinitésimales des bandes transversales.

On prend le feuilletage de $V'_1 \cup V'_2$ qui à $C \leq t \leq \alpha$ associe la feuille $\mathcal{F}_{y(t)} = \mathcal{F}'_t = [\bar{w}_t^{(1)}, \bar{v}_t^{(1)}] \cup [\bar{v}_t^{(2)}, \bar{w}_t^{(2)}]$. Compte tenu des estimations ci-dessus, si ds est la longueur du lacet γ' traversant forcément la bande infinitésimale comprise entre $\mathcal{F}_y$ et $\mathcal{F}_{y+dy}$ on a

$$ds \geq (1 - C e^{-2\pi t}) dy = (1 - C e^{-2\pi t}) y'(t) dt,$$

donc

$$\begin{aligned} L(\gamma, \rho) &= \int_C ds \geq \int_C^{(1/2\pi) \log \log \alpha - C} (1 - C e^{-2\pi(y)}) dy, \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \log \log \alpha - C - C \int_2^\alpha e^{-2\pi t} y'(t) dt, \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \log \log \alpha - C. \end{aligned}$$

Pour rendre rigoureux cet argument il faut découper en bandes horizontales et revenir sur la définition d'intégrale de Riemann. Aussi de façon évidente l'aire $A(\rho)$ de U_h pour la métrique ρ est

$$A(\rho) \leq \frac{1}{2\pi} \log \log \alpha + C.$$

Donc

$$\begin{aligned} M_h = \text{mod } U_h &= \sup_\mu \frac{(\inf_\gamma L(\gamma, \mu))^2}{A(\mu)}, \\ &\geq \frac{\left(\frac{1}{2\pi} \log \log \alpha - C\right)^2}{\frac{1}{2\pi} \log \log \alpha + C} = \frac{1}{2\pi} \log \log(e\alpha) - C. \end{aligned}$$

Remarque. — Si $\hat{U}_\alpha = \{z \in U_\alpha; \text{Im } \pi(z) - \text{Im } z_0 \leq \alpha\}$ on a même montré que

$$\text{mod } \hat{U}_\alpha \geq \frac{1}{2\pi} \log \log \alpha - C$$

car le support de ρ est contenu dans $\hat{U}_\alpha$.

Reste à montrer que pour $\Delta \geq h \geq \alpha$ on a

$$M_h \geq \alpha^{-1} h + \frac{1}{2\pi} \log \log(e\alpha) - C.$$

Comme avant on peut supposer $\alpha^{-1} h$, et donc h (car $\alpha > 2$), supérieurs à une certaine valeur fixée que l'on prendra plus grande que 10.

Considérons l'anneau $W_h = \bigcup_{\alpha+1 \leq t \leq h} \mathcal{F}_t$ où $\mathcal{F}_t = [z_t^{(1)}, z_t^{(2)}]$. Alors $W_h \cap \hat{U}_\alpha = 0$ et $U_h \supset \hat{U}_\alpha \cup W_h$ (voir fig. V.4), ainsi en utilisant la monotonie du module (voir [Ah 2],

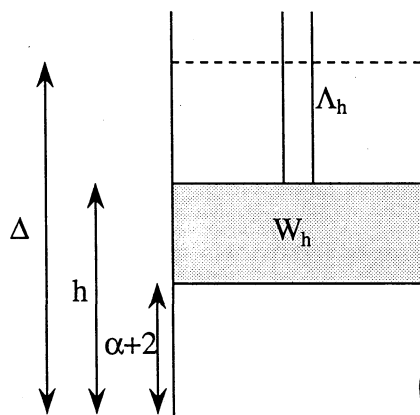


Fig. V.4

p. 55) on a

$$\begin{aligned} \text{mod } U_h &\geq \text{mod } W_h + \text{mod } \hat{U}_\alpha, \\ &\geq \text{mod } W_h + \frac{1}{2\pi} \log \log(e\alpha) - C. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\text{mod } W_h \geq \alpha^{-1} h - C$. On relève à W_h la métrique standard de $\pi(W_h)$ pour obtenir la métrique ρ . Tout chemin γ joignant les deux bords de W_h se projette en un chemin γ , qui peut être disconnecté, et qui traverse chaque feuille $\mathcal{F}_t$, pour $\alpha+1 \leq t \leq h$. D'après les estimations, pour $\alpha \leq t \leq h$,

$$\begin{aligned} |z_t^{(2)} - (z_t^{(1)} + \alpha)| &\leq \delta e^{-2\pi t}, \\ |\dot{z}_t^{(2)} - \dot{z}_t^{(1)}| &\leq \delta e^{-2\pi t}, \end{aligned}$$

on obtient que la contribution ds à $L(\gamma, \rho) = L(\gamma', |dz|^2)$ de la traversée de la bande infinitésimale comprise entre $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{t+dt}$ est

$$ds \geq (1 - C e^{-2\pi t}) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} L(\gamma, \rho) &= \int ds \geq \int_{\alpha+1}^h (1 - C e^{-2\pi t}) dt, \\ &\geq h - \alpha - C - C \int_{\alpha+1}^h e^{-2\pi t} dt, \\ &\geq h - \alpha - C. \end{aligned}$$

Aussi, si $A(\rho)$ est l'aire de $\pi(W_h)$ pour la métrique ρ on a

$$A(\rho) \leq \alpha(h - \alpha) + C,$$

donc

$$\frac{L(\gamma, \rho)^2}{A(\rho)} \geq \alpha^{-1} h - C,$$

et $\text{mod } W_h \geq \alpha^{-1} h - C$.

Annexe 2

Précisions sur la construction de Yoccoz pour les germes

a) PRÉLIMINAIRE. — On reprend les notations introduites dans III. 1. Dans la suite on omettra l'indice n . L'inégalité I. 3. 5(4) dans [Y 1] nous donne, quitte à remplacer t par $t + C$ et L par $L - iC\alpha^{-1}$, pour $z \in \mathcal{W}$,

$$(1) \quad \text{Re } z - 1/5 \leq \alpha \text{Re } L(z) \leq \text{Re } z + 1/5$$

$$(2) \quad \text{Im } z - t - 4/5 \leq \alpha \text{Im } L(z) \leq \text{Im } z - t - 2/5$$

On rappelle que $\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{C}; |\text{Re } z| \leq 1, \text{Im } z \geq t\}$. On pose (voir fig. V. 5)

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} = L(\mathcal{W}) \cap \mathbf{H}$$

$$\Omega_0 = L(\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \geq t, 0 < \text{Re } z \leq 1\})$$

$$\Omega_1 = L(\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \geq t, -1 < \text{Re } z \leq 0\})$$

$$\Delta_1 = \{z \in \Omega_1; \text{Im } z \geq 0\}$$

L'application L réalise un homéomorphisme de $\mathcal{W}$ sur son image. Comme conjuguée par L de T^{-1} , G est défini sur $\bar{\Omega}_0$ c'est-à-dire, pour $z \in \bar{\Omega}_0$,

$$G(z) = L \circ T^{-1} \circ L^{-1}(z).$$

Ainsi G est injective sur $\bar{\Omega}_0$. On montre dans [Y 1] que G s'étend à $\mathbf{H}$ en un élément de $S(-\alpha^{-1})$, l'extension est donc injective sur $\mathbf{H}$. De nouveau quitte à considérer $t + C$ au lieu de t et $L - iC\alpha^{-1}$ au lieu de L , on peut supposer que G s'étend de façon injective sur $L(\mathcal{W})$. L'objectif de ce préliminaire est de démontrer le lemme ci-dessous qui sera utilisé plus tard.

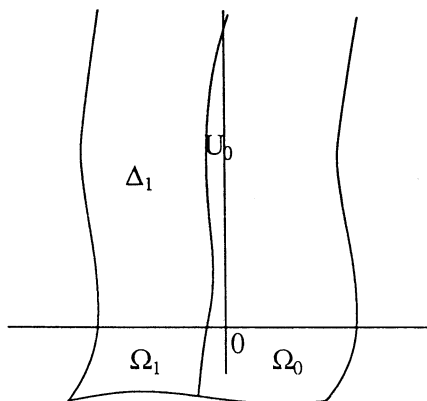


Fig. V.5

LEMME V.2.1. — Si $z \in \mathcal{U}_0$ et si pour $0 \leq i \leq p$ on a $G^i(z) \in \mathbf{H}$ et $G^p(z) \in \mathcal{U}_0$, alors $p=0$ ou $p=1$; dans ce dernier cas $z \in \Omega_0 \cap \mathbf{H}$.

On prouve d'abord

LEMME V.2.2. — Si $z \in \mathbf{H} \cup \Omega_0$ alors il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que $z + q \in \bar{\Omega}_0$.

Démonstration. — Si $z \in \bar{\Omega}_0$ on prend $q=0$. Sinon, d'après (1), la bande

$$\{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z > 0, 1/5 \alpha^{-1} \leq \operatorname{Re} z \leq 4/5 \alpha^{-1}\}$$

est contenue dans $\bar{\Omega}_0$, or elle est de largeur $3/5 \alpha^{-1} \geq 6/5 > 1$ (on a utilisé $\alpha < 1/2$). $\square$

LEMME V.2.3. — Si $z \in \mathbf{H}$ alors

$$\operatorname{Re} G(z) \leq \operatorname{Re} z - 3/5 \alpha^{-1},$$

$$\operatorname{Im} G(z) \geq \operatorname{Im} z - 2/5 \alpha^{-1}.$$

Démonstration. — Soit $q \in \mathbf{Z}$ tel que $z + q \in \bar{\Omega}_0$, $z + q = L(z')$ avec $z' \in \mathcal{W} \cap \mathbf{T}(\mathcal{W})$, alors

$$\operatorname{Re} G(z) + q = \operatorname{Re} G(z + q) = \operatorname{Re} G \circ L(z') = \operatorname{Re} L(z' - 1)$$

$$\leq \alpha^{-1} \operatorname{Re}(z' - 1) + 1/5 \alpha^{-1}$$

$$\leq \alpha^{-1} \operatorname{Re} z' - 4/5 \alpha^{-1}$$

$$\leq \operatorname{Re} L(z') + 1/5 \alpha^{-1} - 4/5 \alpha^{-1}$$

$$\leq \operatorname{Re}(z + q) - 3/5 \alpha^{-1}$$

Où on a utilisé (1) à deux reprises. De la même façon on démontre la deuxième estimation. $\square$

En revenant au lemme V.2.1 que l'on veut prouver, le lemme V.2.3 montre que forcément $p=0,1$ ou 2 . Il montre aussi que si $G^i(z) \notin \mathcal{U}$ alors pour $j > i$, $G_j(z) \notin \mathcal{U}$ (car $\operatorname{Re} G^i(z) \leq -4/5 \alpha^{-1}$ donne $\operatorname{Re} G^j(z) \leq -(4/5 + (j-i)3/5) \alpha^{-1} < -6/5 \alpha^{-1}$). On a

$G(\Omega_0) = \Omega_1$, donc compte tenu des remarques précédentes pour prouver le lemme il reste seulement à voir que $G(\Delta_1) \cap \mathcal{U}_0 = \emptyset$.

On a $G(\Delta_1) \cap \Omega_1 = G(\Delta_1) \cap G(\Omega_0) = \emptyset$ car G est injective sur $L(\mathcal{V})$. Maintenant en utilisant le lemme V.2.3 pour $z \in \Delta_1$ on a

$$\operatorname{Re} G(z) \leq \operatorname{Re} z - \frac{3}{5} \alpha^{-1} \leq -\frac{2}{5} \alpha^{-1} < \operatorname{Re} z',$$

pour $z' \in \Omega_0$. Donc $G(\Delta_1) \cap \Omega_0 = \emptyset$.

b) EXTENSION DE L . — Dans la suite on considère G restreint à $\mathbf{H}$, l'écriture $G^{-i}(z)$ sous-entendra que pour $0 \leq j \leq i$, $G^{-j}(z) \in \mathbf{H}$. On pose pour $p \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} p=0, & \quad \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} = L(\mathcal{V}) \cap \mathbf{H}, \\ p>0, & \quad \mathcal{U}_p = \{z \in \mathcal{U}; \text{ pour } 1 \leq i \leq p, G^i(z) \in \mathbf{H}\} \subset \mathcal{U}_0 \\ p<0, & \quad \mathcal{U}_p = \{z \in \mathcal{U}; \text{ pour } 1 \leq i \leq -p, G^{-i}(z) \in \mathbf{H}\} \subset \mathcal{U}_0 \end{aligned}$$

puis $\mathcal{V}_p = T^{-p} \circ L^{-1}(\mathcal{U}_p)$ et finalement $\mathcal{V} = \bigcup_{p \in \mathbf{Z}} \mathcal{V}_p$. On étend L à $\mathcal{V}$ en posant, pour $z \in \mathcal{V}_p$,

$$L(z) = G^p \circ L \circ T^p(z).$$

Justification : Cette définition ne dépend pas du choix de $p \in \mathbf{Z}$ tel que $z \in \mathcal{V}_p$. Si $z \in \mathcal{V}_p \cap \mathcal{V}_q$ alors $|q-p| \leq 1$ et

$$L \circ T^q(z) = L \circ T^{q-p} \circ T^p(z) = G^{p-q} \circ L \circ T^p(z)$$

car $T^q(z)$ et $T^p(z)$ sont dans $\mathcal{V}$. Donc

$$G^p \circ L \circ T^p(z) = G^q \circ L \circ T^q(z).$$

Il résulte de cette construction que si $z \in \mathcal{U}_0$ et pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $G^m(z) \in \mathbf{H}$, alors pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $G^m(z) \in L(\mathcal{V})$, donc en particulier $L(\mathcal{V})$ contient toute orbite périodique de G . En effet, par hypothèse, pour $p \in \mathbf{Z}$, on a $z \in \mathcal{U}_p$. Donc $T^{-p} \circ L^{-1}(z) \in \mathcal{V}_p$. Ainsi,

$$L(T^{-p} \circ L^{-1}(z)) = G^p \circ L \circ T^p(T^{-p} \circ L^{-1}(z)) = G^p(z) \in L(\mathcal{V}_p).$$

c) PROPRIÉTÉS DE L'EXTENSION. — Comme le montrent les propositions qui suivent l'extension construite conserve les propriétés fondamentales de L .

THÉORÈME V.2.1. — $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{C}$ est injective.

Démonstration. — Soient z et z' dans $\mathcal{V}$ tels que $L(z) = L(z')$. Supposons $z \in \mathcal{V}_p$ et $z' \in \mathcal{V}_q$ avec, par exemple $p \geq q$. Alors

$$G^p \circ L \circ T^p(z) = G^q \circ L \circ T^q(z')$$

soit

$$G^{p-q} \circ L \circ T^p(z) = L \circ T^q(z').$$

Or $T^p(z)$ et $T^q(z')$ sont dans $\mathring{\mathcal{W}}$ donc $G^{p-q}(\mathcal{U}) \cup \mathcal{U} \neq \emptyset$. En appliquant le lemme V.2.1 on a $p-q=0$ ou $p-q=1$, dans ce dernier cas $L \circ T^p(z) \in \Omega_0 \cap \mathbf{H}$. Dans les deux cas

$$G^{p-q} \circ L \circ T^p(z) = L \circ T^{q-p} \circ T^p(z) = L \circ T^q(z),$$

soit $L \circ T^q(z) = L \circ T^q(z')$, d'où $z = z'$ par injectivité de L sur $\mathring{\mathcal{W}}$. $\square$

PROPOSITION V.2.2. — Sur $\mathcal{V} \cap F^{-1}(\mathcal{V})$,

$$T \circ L = L \circ F.$$

Remarque. — L'ouvert $\mathcal{V}$ n'étant pas connexe en général on ne peut pas appliquer le principe du prolongement analytique.

On utilise le lemme

LEMME V.2.4. — Si $z \in \mathcal{V} \cap F^{-1}(\mathcal{V})$ alors il existe $p \in \mathbf{Z}$ tel que $z \in \mathcal{V}_p$ et $F(z) \in \mathcal{V}_p$.

Démonstration. — Soit $p \in \mathbf{Z}$ tel que $z \in \mathcal{V}_p$, soit $T^p(z) \in \mathring{\mathcal{W}}$. Si $F \circ T^p(z) = T^p \circ F(z) \notin \mathring{\mathcal{W}}$ alors $\operatorname{Re} T^p(z) \geq 1 - 5/4\alpha$, car pour $\operatorname{Im} z > t$, $|F(z) - z - \alpha| \leq \alpha/4$. Dans ce cas $T^{p-1}(z) \in \mathring{\mathcal{W}}$ et $F \circ T^{p-1}(z) \in \mathring{\mathcal{W}}$, et $z \in \mathcal{V}_{p-1}$, $F(z) \in \mathcal{V}_{p-1}$, donc $p-1$ convient. $\square$

Démonstration de la proposition V.2.2. — Pour $z \in \mathcal{V} \cap F^{-1}(\mathcal{V})$ on prend $p \in \mathbf{Z}$ tel que $z \in \mathcal{V}_p$ et $F(z) \in \mathcal{V}_p$. Il vient

$$\begin{aligned} T \circ L(z) &= T \circ G^p \circ L \circ T^p(z) \\ &= G^p \circ T \circ L \circ T^p(z) \\ &= G^p \circ L \circ F \circ T^p(z) \\ &= G^p \circ L \circ T^p \circ F(z) \\ &= G^p \circ G^{-p} \circ L \circ F(z) \\ &= L \circ F(z). \end{aligned}$$

Ce qui finit la démonstration. $\square$

A partir de la construction de l'extension de L il est clair que sur $\mathcal{V} \cap T(\mathcal{V})$, on a $G \circ L = L \circ T^{-1}$. En conclusion on a montré

PROPOSITION V.2.3. — L se prolonge à l'ouvert $\mathcal{V}$ tel que $L(\mathcal{V})$ contient toutes les orbites périodiques de G et

- L est injective sur $\mathcal{V}$.
- Sur $\mathcal{V} \cap F^{-1}(\mathcal{V})$, $T \circ L = L \circ F$.
- Sur $\mathcal{V} \cap T(\mathcal{V})$, $G \circ L = L \circ T^{-1}$.

Remarque. — Par la remarque faite à la fin de la partie b, on a montré plus : Si pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $G^m(L(z)) \in \mathbf{H}$, alors pour tout $m \in \mathbf{Z}$ on a $F^m(z) \in \mathbf{H}$.

d) CORRESPONDANCE DE HAUTEURS. — L'ingrédient essentiel de la proposition qui suit est l'estimation (2) sur la fonction L donné au début de la partie a.

PROPOSITION V.2.4. — Si $z \in \mathcal{W} \cap T(\mathcal{W})$, et si pour $0 \leq i \leq m$ on a $G^i \circ L(z) \in H$, et $0 < H \leq \operatorname{Im} G^i \circ L(z) \leq H'$; alors, pour $0 \leq j \leq 4/5 \alpha^{-1} m$,

$$\alpha H + t + 2/5 \leq \operatorname{Im} F^j(z) \leq \alpha H' + t + 4/5.$$

Démonstration. — On rappelle que pour $\operatorname{Im} z > t$, $|F(z) - z - \alpha| \leq \alpha/4 \leq 1/4$. Par l'absurde soit $0 < p \leq (4/5) \alpha^{-1} m$ le plus petit entier positif tel que $\alpha H + t + 2/5 > \operatorname{Im} F^p(z)$ [$p \geq 1$ forcément à cause de l'estimation (2) sur L]. Alors

$$\operatorname{Im} F^p(z) > \alpha H + t + 2/5 - 1/4 = \alpha H + t + 3/20 \geq t > 0.$$

On pose $x_0 = z$ et pour $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F(x_i) & \text{si } \operatorname{Re} F(x_i) \leq 1, \\ x_{i+1} &= F(x_i) - 1 & \text{si } \operatorname{Re} F(x_i) > 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\text{pour } 0 \leq i \leq p, & 0 < \operatorname{Re} x_i \leq 1, \\ &\text{pour } 0 \leq i \leq p, & x_i \in \mathcal{W} \cap T(\mathcal{W}). \end{aligned}$$

On a pour $0 \leq j \leq p$, $x_j = F^j(x_0) - n_j$, avec $(3/4) \alpha j \leq n_j \leq (5/4) \alpha j$, pour $1 \leq j \leq p$. Soit $y_i = L(x_i)$. Alors

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + 1 & \text{si } x_{i+1} = F(x_i), \\ y_{i+1} &= G(y_i) + 1 & \text{si } x_{i+1} = F(x_i) - 1. \end{aligned}$$

Donc $y_p = G^{n_p}(y_0) + p$ avec $n_p \leq (5/4) \alpha p \leq m$. Or $x_p \in \mathcal{W} \cap T(\mathcal{W})$ donc

$$\operatorname{Im} G^{n_p}(y_0) = \operatorname{Im} y_p = \operatorname{Im} L(x_p) \leq \alpha^{-1} (\operatorname{Im} x_p - t - 2/5) = \alpha^{-1} (\operatorname{Im} F^p(z) - t - 2/5) < H,$$

contradiction. Le même argument montre la majoration. $\square$

e) CORRESPONDANCE D'ORBITES PÉRIODIQUES. — On va montrer ici la proposition III.1.2 utilisée dans la démonstration du théorème 2. On reprend les notations introduites dans la partie III.

PROPOSITION III.1.2. — Soit $n \geq 0$. Si F_n a un point fixe de hauteur h_n alors F a une orbite périodique de nombre de rotation p_n/q_n , dont les hauteurs des points de toute l'orbite sont comprises entre $H_n - C$ et $H_n + C$ avec

$$H_n = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + \beta_{n-1} h_n.$$

La correspondance d'orbites périodiques entre F_0 et F est claire.

LEMME V.2.5. — Si F_0 a une orbite périodique de nombre de rotation p/q alors F a une orbite de nombre de rotation $(qa_0 + \varepsilon_0 p)/q = a_0 + \varepsilon_0 p/q$ de mêmes hauteurs.

Pour $n \geq 0$ la correspondance entre F_{n+1} et F_n est donnée par

LEMME V.2.6. — Si F_{n+1} a une orbite de nombre de rotation p/q , de hauteurs comprises entre H et H' , $H \leq H'$, alors F_n a une orbite périodique de nombre de rotation

$$\frac{q}{\varepsilon_{n+1}p + qa_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} + \varepsilon_{n+1}p/q}$$

dont les hauteurs des points sont comprises entre $\alpha_n H + t_n - C$ et $\alpha_n H' + t_n + C$.

Démonstration du lemme V.2.6. — On se servira ici de l'extension de L et de ses propriétés. Considérons une orbite périodique de F_{n+1} de nombre de rotation p/q et dont les hauteurs des points sont comprises entre H et H' . Si $\varepsilon_{n+1} = -1$ on prendra $z_0 = L_n(z)$ avec $z \in \mathcal{W}_n \cap T(\mathcal{W}_n)$, tel que $F_{n+1}^q(z_0) = z_0 + p$. Si $\varepsilon_{n+1} = +1$ on prendra $-\bar{z}_0 = L_n(z)$ avec $z \in \mathcal{W}_n \cap T(\mathcal{W}_n)$, tel que $F_{n+1}^q(z_0) = z_0 + p$.

Si $\varepsilon_{n+1} = +1$, $F_{n+1}(z) = -\overline{G_n(-\bar{z})} - a_{n+1}$,

$$\begin{aligned} F_{n+1}^q(z_0) = z_0 + p &\Leftrightarrow -\overline{G_n^q(-\bar{z}_0)} = z_0 + (p + qa_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow G_n^q(-\bar{z}_0) = -\bar{z}_0 - (qa_{n+1} + p) \\ &\Leftrightarrow G_n^q \circ L_n(z) = T^{-(qa_{n+1} + p)} \circ L_n(z) \\ &\Leftrightarrow L_n \circ T^{-q}(z) = L_n \circ F_n^{-(qa_{n+1} + p)}(z) \\ &\Leftrightarrow T^{-q}(z) = F_n^{-(qa_{n+1} + p)}(z) \\ &\Leftrightarrow F_n^{p + qa_{n+1}}(z) = T^q(z) \end{aligned}$$

et l'orbite de z par F_n est périodique de nombre de rotation $q/(-p + qa_{n+1})$.

Si $\varepsilon_{n+1} = +1$, $F_{n+1}(z) = -\overline{G_n(-\bar{z})} - a_{n+1}$,

$$\begin{aligned} F_{n+1}^q(z_0) = z_0 + p &\Leftrightarrow -\overline{G_n^q(-\bar{z}_0)} = z_0 + (p + qa_{n+1}) \\ &\Leftrightarrow G_n^q(-\bar{z}_0) = -\bar{z}_0 - (qa_{n+1} + p) \\ &\Leftrightarrow G_n^q \circ L_n(z) = T^{-(qa_{n+1} + p)} \circ L_n(z) \\ &\Leftrightarrow L_n \circ T^{-q}(z) = L_n \circ F_n^{-(qa_{n+1} + p)}(z) \\ &\Leftrightarrow T^{-q}(z) = F_n^{-(qa_{n+1} + p)}(z) \\ &\Leftrightarrow F_n^{p + qa_{n+1}}(z) = T^q(z) \end{aligned}$$

Et l'orbite de z par F_n est périodique de nombre de rotation $q/(p + qa_{n+1})$. Si $p \wedge q = 1$ alors $q \wedge (\varepsilon_{n+1}p + qa_{n+1}) = 1$, et on a la première partie du lemme V.2.6. En choisissant z_0 tel qu'on a précisé et en appliquant la proposition sur la correspondance de hauteurs on obtient les estimations sur les hauteurs des points de l'orbite périodique de F_n . $\square$

A partir de ces lemmes on peut finalement démontrer la proposition

Démonstration de la proposition III.1.2. — On définit $p_n^{(n)} = 0$, $q_n^{(n)} = 1$, et pour $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{p_k^{(n)}}{q_k^{(n)}} = \frac{q_{k+1}^{(n)}}{q_{k+1}^{(n)} a_{k+1} + \varepsilon_{k+1} p_{k+1}^{(n)}} = \frac{1}{a_{k+1} + \varepsilon_{k+1} p_{k+1}^{(n)} / q_{k+1}^{(n)}},$$

$p_k^{(n)} \wedge q_k^{(n)} = 1$ et $q_k^{(n)} \geq 0$. Puis $H_n^{(n)} = K_n^{(n)} = h_n$ et pour $0 \leq k \leq n-1$,

$$H_k^{(n)} = \alpha_k H_{k+1}^{(n)} + t_k - C,$$

$$K_k^{(n)} = \alpha_k K_{k+1}^{(n)} + t_k + C.$$

Alors, en appliquant le lemme V.2.6, si F_n a un point fixe à une hauteur h_n , pour $0 \leq k \leq n$, F_k a une orbite périodique de nombre de rotation $p_k^{(n)}/q_k^{(n)}$ dont les points ont des hauteurs comprises entre $H_k^{(n)}$ et $K_k^{(n)}$. En appliquant le lemme V.2.5, F a une orbite périodique de nombre de rotation $p_n/q_n = a_0 + \varepsilon_0 p_0^{(n)}/q_0^{(n)}$. Les hauteurs sont comprises entre $H_0^{(n)} \geq H_n - C$ et $K_0^{(n)} \leq H_n + C$ (pour obtenir la constante $C > 0$ universelle on utilise $\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} < 2$). $\square$

f) CONTRÔLE DE LA DIFFUSION. — On se propose dans cette dernière partie d'estimer la hauteur à partir de laquelle on peut contrôler les orbites pendant un temps q_n , plus précisément on a :

THÉORÈME V.2.1. — Il existe des constantes $C > 0$ et $C' > 0$ telles que, si

$$\operatorname{Im} z \geq \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + C',$$

alors pour $0 \leq j \leq q_n$,

$$\operatorname{Im} F^j(z) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + C.$$

Remarque. — Comme corollaire de cette proposition (en faisant $n \rightarrow +\infty$) on obtient le critère de linéarisabilité utilisé dans la construction de Yoccoz. Il est facile de voir que ce théorème généralise le théorème de Siegel-Bruno et donne en plus la taille d'un voisinage de stabilité autour de 0.

Démonstration. — Il existe C_0 telle que, pour $\operatorname{Im} z \geq C_0$ et $F \in S(\alpha)$, $|F(z) - z - \alpha| \leq 1/4$.

On suppose que $\operatorname{Im} z \geq \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + 8/5 + (C_0 + 1/4)$. Considérons alors la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ définie dans III.1.a; à partir de l'estimation (2) du préliminaire a de cette annexe on a par récurrence,

$$d_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j - 2/5 \geq \beta_{n-1} d_n \geq d_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j - 8/5.$$

Il vient que

$$d_n \geq \beta_{n-1}^{-1} (C_0 + 1/4) \geq 2^n (C_0 + 1/4) \geq C_0 + 2^{n-2},$$

donc pour $0 \leq j \leq 4 \times 2^{n-2} = 2^n$,

$$\operatorname{Im} F_n^j(z_n) \geq C_0 > 0,$$

puisque, comme on l'a rappelé au début, à une hauteur plus grande que C_0 , F fait décroître la partie imaginaire des points d'au plus $1/4$ à chaque itération. Par récurrence

en utilisant la proposition V.2.4 de la partie *d* qui donne la correspondance de hauteurs on a pour $0 \leq j \leq 2^n (4/5)^{n-1} \beta_{n-1}^{-1} = 2(8/5)^{n-1} \beta_{n-1}^{-1}$,

$$\operatorname{Im} F^j(z) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + \beta_{n-1} C_0 + 2/5.$$

d'où le résultat car $q_n \leq 2 \beta_{n-1}^{-1} \leq 2(8/5)^{n-1} \beta_{n-1}^{-1}$ d'après le lemme V.4.2. $\square$

Comme application immédiate

PROPOSITION V.2.5. — *Si F a un point périodique de période q_n , de hauteur supérieure à $\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + C'$, alors F a une orbite périodique dont les points ont des hauteurs supérieures à $\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} t_j + C$.*

Et comme on l'a déjà dit on obtient comme corollaire,

THÉORÈME V.2.2. — *Si on peut choisir la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} t_n < +\infty$ alors F est linéarisable.*

Annexe 3 Sur les domaines d'holomorphic

Le but de cette annexe est de démontrer la proposition I.3.1 et I.3.2.

PROPOSITION I.3.1. — *Soit f un difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation irrationnel qui se prolonge analytiquement sur un voisinage V du cercle où il est sans orbite périodique (c'est-à-dire qu'il existe pas $z_0 \in V$ tel que pour $0 \leq i \leq q$, $z_{i+1} = f(z_i) \in V$ et $z_q = z_0$). Il existe un difféomorphisme analytique du cercle h tel que $g = h^{-1} \circ f \circ h$ et tous ses itérés $(g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ont leur domaine d'holomorphic planaire et contenu dans V (ceci veut dire qu'il n'y a pas de prolongement analytique en dehors de V) et n'ont pas de points fixes dans V .*

PROPOSITION I.3.2. — *Soit $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, un germe holomorphe défini sur un voisinage V de 0 et sans orbite périodique autre que 0 dans V . Il existe un germe de difféomorphisme holomorphe $h(z) = z + \mathcal{O}(z^2)$ tel que $g = h^{-1} \circ f \circ h$ et tous ses itérés $(g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ont leur domaine d'holomorphic planaire et contenu dans V et n'ont pas de points fixes dans V autre que 0.*

L'idée de la démonstration est de conjuguer f par un certain h ayant un domaine d'holomorphic convenable « en position générale ». Les deux propositions se démontrent exactement de la même façon. Pour fixer les idées on traitera le cas des germes.

Dans la suite on ne considérera que des applications holomorphes h ayant un domaine d'holomorphic $D(h)$ contenant 0 et planaire $D(h) \subset \mathbb{C}$. On rappelle que le domaine

d'holomorphic $D(h)$ se définit comme le domaine de Riemann sur $\mathbb{C}$ défini par les classes d'homotopie des lacets issus d'un point base (ici 0) suivant lesquels on a un prolongement analytique, et est ainsi un ouvert connexe. On dira que deux domaines U et V à bords C^1 par morceaux (ayant un nombre fini d'arcs C^1) se coupent transversalement lorsque en chaque point de $\partial U \cap \partial V$ chaque bord admet des tangentes qui sont distinctes.

Il va falloir contrôler des domaines d'holomorphic des applications et de ses itérés. L'ingrédient fondamental pour cela sera le lemme suivant.

LEMME V.4.1. — Soient f et g univalentes sur $D(f)$ et $D(g)$ se prolongeant en des homéomorphismes de $\overline{D(f)}$ et $\overline{D(g)}$. On suppose que 0 est dans $D(f)$ et $D(g)$, et $f(0)=g(0)=0$. Si $D(f)$ et $g(D(g))$ sont à bords C^1 par morceaux et se coupent transversalement alors

$$D(f \circ g) = g^{-1}(D(f) \wedge g(D(g))),$$

où le symbole $\wedge$ indique que l'on ne garde de l'intersection des deux ensembles que la composante connexe contenant 0.

Remarque. — Ce lemme donne des conditions suffisantes sur f et g pour que le domaine d'holomorphic de $f \circ g$ soit celui que l'on attend naïvement, i.e. les points $z \in D(g)$ tels que $g(z) \in D(f)$. En général ceci n'est pas vrai comme le montre l'exemple $f(z) = h^{-1}(-h(z))$, avec h germe holomorphic en 0 ne commutant pas à $z \mapsto -z$. On a $f^2 = \text{id}$ mais $D(f)$ n'est pas forcément $\mathbb{C}$.

Démonstration. — Une inclusion est claire : $f \circ g$ est visiblement bien défini et univalent sur $g^{-1}(D(f) \cap g(D(g)))$. Pour démontrer l'inclusion inverse supposons par l'absurde que $f \circ g$ soit holomorphic sur un voisinage V d'un point z du bord de $g^{-1}(D(f) \wedge g(D(g)))$. Quitte à changer de point z on peut supposer que $g(z) \notin \partial D(f) \cap \partial(g(D(g)))$ en utilisant que cette intersection est transverse. Aussi, quitte à rétrécir le voisinage V on peut supposer qu'on a soit $g(z) \in \partial D(f)$ et $V \subset D(g)$, soit $z \in \partial D(g)$ et $g(V) \subset D(f)$ (voir fig. V.6).

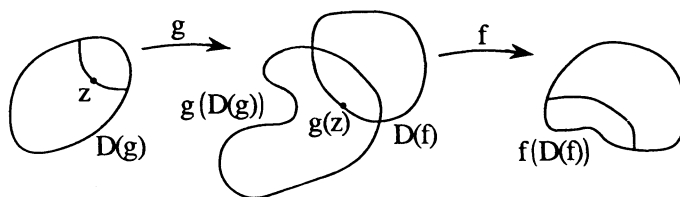


Fig. V.6

Dans le premier cas $(f \circ g) \circ g^{-1}$ est bien défini sur $g(V)$ et prolonge analytiquement f , donc $g(V) \subset D(f)$ et $g(z) \in D(f)$ ce qui contredit $g(z) \in \partial D(f)$. Dans le deuxième cas $f^{-1} \circ (f \circ g)$ prolonge analytiquement g à V d'où $z \in D(g)$ ce qui contredit $z \in \partial D(g)$. $\square$

Maintenant fixons un voisinage $U \subset V$ de 0 où f et f^{-1} sont définis, univalentes et sans orbite périodique excepté 0. On considère un domaine U_0 , voisinage de 0 et relativement compact dans U tel que $f(U_0) \subset U$ et $f^{-1}(U_0) \subset U$, dont le bord est un

cercle C^1 plongé dans C mais n'est analytique en aucun de ses points. On considère $h: D \rightarrow U_0$ la représentation conforme de U_0 telle que $h(0)=0$ et $Dh(0) \in \mathbf{R}_+$, en composant par une homothétie on peut supposer $Dh(0)=1$ (voir fig. V.7).

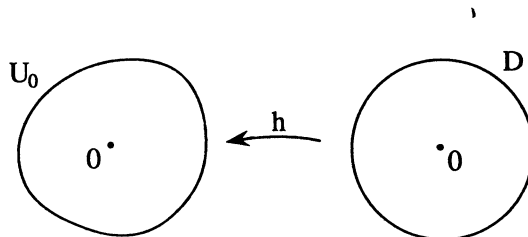


Fig. V.7

L'application h est univalente et puisque ∂U_0 est localement connexe par le théorème de Carathéodory on a une unique extension de h en un homéomorphisme de $\bar{D}$ sur $\bar{U}_0$. On a $D(h)=D$. En effet, une extension analytique de h à un voisinage ouvert contenant un point z_0 de ∂D , que l'on peut supposer non critique ($Dh(z_0) \neq 0$) puisque les points critiques sont isolés, montrerait que le bord ∂U_0 est analytique au voisinage de $h(z_0)$.

On définit

$$\begin{aligned} \text{pour } n \geq 0, \quad & U_{n+1} = U_n \wedge f(U_n), \\ \text{pour } n \leq 0, \quad & U_{n-1} = U_n \wedge f^{-1}(U_n). \end{aligned}$$

Soit g le germe holomorphe $g = h^{-1} \circ f \circ h$. Si l'intersection $U_{-1} = U_0 \wedge f^{-1}(U_0)$ est transverse, en utilisant $f(U_0) \subset U$ et en appliquant le lemme V.4.1 on a $D(g) = h^{-1}(U_{-1})$ et g s'étend en un homéomorphisme de $\bar{D}(g)$ dans son image. De même si on a la transversalité de l'intersection définissant U_1 on aura $D(g^{-1}) = h^{-1}(U_1)$ et g^{-1} s'étendra en un homéomorphisme de l'adhérence de son domaine de définition sur son image. Posons pour $n \in \mathbf{Z}$, $V_n = h^{-1}(U_n)$. Alors pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= h^{-1}(U_{n+1}) = h^{-1}(U_n \wedge f(U_n)) \\ &= h^{-1}(h(V_n) \wedge f \circ h(V_n)) = V_n \wedge h^{-1}(f \circ h(V_n)) = V_n \wedge g(V_n). \end{aligned}$$

Et pour $n \leq 0$,

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= h^{-1}(U_{n-1}) = h^{-1}(U_n \wedge f^{-1}(U_n)) \\ &= h^{-1}(h(V_n) \wedge f^{-1} \circ h(V_n)) = V_n \wedge h^{-1}(f^{-1} \circ h(V_n)) = V_n \wedge g^{-1}(V_n). \end{aligned}$$

Donc on a les mêmes relations de récurrence que pour la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. Ainsi, si les intersections définissant la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sont transverses, on obtient que les intersections pour la suite $(V_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ le sont aussi. Dans ce cas, en appliquant le lemme V.4.1, on a pour $n \geq 0$,

$$D(g^{n+1}) = D(g^n \circ g) = g^{-1}(D(g^n) \wedge g(D(g^n))) = D(g^n) \wedge g^{-1}(D(g^n)),$$

et pour $n \leq 0$,

$$D(g^{n-1}) = D(g^n \circ g^{-1}) = g(D(g^n) \wedge g^{-1}(D(g^n))) = D(g^n) \wedge g(D(g^n)),$$

[On a utilisé $l(A \wedge B) = l(A) \wedge l(B)$ pour un homéomorphisme l défini sur un voisinage de 0 tel que $l(0) = 0$].

Or $D(g) = V_{-1}$ et $D(g^{-1}) = V_1$ donc par récurrence pour $n \neq 0$,

$$D(g^n) = V_{-n}.$$

En plus dans ce cas g^n est sans point fixe. En effet, si z est un point fixe de g^n alors $z \in V_{-n}$ et $h(z) \in U_{-n}$. On aurait pour $0 \leq i \leq n$, $f^i(h(z)) \in U_0$ et $f^n(h(z)) = z$ contredisant que f est sans orbites périodiques dans V .

Finalement pour prouver la proposition I.3.2 il ne reste à montrer que sous les hypothèses faites sur f on peut choisir le domaine U_0 en position générale pour que les intersections définissant la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ soient toutes transverses. La proposition suivante suffit à nos besoins :

PROPOSITION V.4.1. — Soit $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, définie et univalente sur un voisinage U de $\mathbf{D}$ ainsi que f^{-1} , et sans orbites périodique autre que 0 dans U (c'est-à-dire, il n'existe pas $z \in U$ tel que $f^q(z) = z$ avec, pour $0 \leq i \leq q$, $f^i(z) \in U$). Il existe un C^1 plongement i non analytique, C^1 arbitrairement proche du plongement $E: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $E(t) = e^{2\pi i t}$, pour lequel $i(\mathbf{T}) = \partial U_0$, U_0 ouvert simplement connexe, et pour $n \geq 0$, $U_{n+1} = U_n \wedge f(U_n)$, on a ∂U_n et $\partial f(U_n)$ qui s'intersectent transversalement. De même pour $n \leq 0$, si $U_{n-1} = U_n \wedge f^{-1}(U_n)$, on a ∂U_n et $\partial f^{-1}(U_n)$ qui s'intersectent transversalement.

Remarque. — On rappelle que si $f: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^2$ est C^1 on définit

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x \in \mathbf{T}} \|f\| + \sup_{x \in \mathbf{T}} \left(\sup_{y \in \mathbf{R} - \{0\}} \frac{\|D_x f(y)\|}{\|y\|} \right),$$

où $\|\cdot\|$ est une norme de $\mathbf{R}^2$.

Dans l'espace vectoriel des applications différentiables de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{R}^2$ on considère la topologie induite par $\|\cdot\|_{C^1}$ qui en fait un espace de Banach. Dans un certain voisinage du plongement E toute application C^1 , $i: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^2$, est un plongement. Dans la suite on fixera une boule fermée centrée en E qui est un tel voisinage de E . Remarquons que l'espace métrique X est de Baire. La proposition V.4.1 découle du lemme suivant.

LEMME V.4.2. — L'ensemble des plongements $X_N \subset X$ qui satisfont la condition de transversalité de la proposition pour $-N \leq n \leq N$ forment un ouvert dense de X .

Démonstration de la proposition V.4.1. — Par le théorème de Baire l'intersection

$$\bigcap_{N \geq 0} X_N$$

est un G_δ dense non vide de X . $\square$

Dans la démonstration du lemme V.4.2 on utilisera :

LEMME V.4.3. — Soit C un cercle C^1 -plongé dans $\mathbf{R}^2$ et $j: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ un plongement C^1 du segment compact $I = [a, b]$ (C^1 à gauche en a et C^1 à droite en b). Il existe une perturbation $\phi: I \rightarrow \mathbf{R}^2$, C^1 arbitrairement petite, telle que $j + \phi: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ soit un plongement

C^1 , $(j+\phi)(\mathring{I})$ soit transverse à C et $\phi(a)=\phi(b)=0$, $D\phi(a+0)=D\phi(b-0)=0$ (on dira que ϕ est C^1 tangente aux bords).

Démonstration du lemme V.4.3. En munissant l'espace $C^1(\mathring{I}, \mathbb{R}^2)$ de la topologie forte de Whitney la partie (a) du théorème de transversalité de [Hi], p. 74, nous donne l'existence de la perturbation C^1 arbitrairement petite ϕ . $\square$

Démonstration du lemme V.4.3. Soit Y_N les plongements de X qui satisfont la condition de transversalité pour $0 \leq n \leq N$. Il suffit de démontrer que Y_N est ouvert dense dans X . En effet dans ce cas l'ensemble Z_N des plongements de X satisfaisant la condition de transversalité pour $-N \leq n \leq 0$ sera aussi ouvert dense par la même démonstration appliquée à f^{-1} , donc $X_N = Y_N \cap Z_N$ sera un ouvert dense de X .

Maintenant Y_N est ouvert car la condition de transversalité est ouverte. Pour montrer la densité de Y_N dans X il suffit de montrer la densité de $Y_N \cap \mathring{X}$ dans $\mathring{X}$. On montre ceci par récurrence sur N .

• Cas $N=0$.

Donnons-nous un plongement $j \in \mathring{X}$. Montrons l'existence d'un plongement i , C^1 arbitrairement proche de j , tel que $i(\mathbf{T}) = \partial U_0$ et $\partial f(U_0)$ intersecte transversalement ∂U_0 .

Puisque f est continue et sans point fixe autre que 0, pour tout $z \in U$ on a un voisinage de z , W_z , tel que $f(W_z) \cap W_z = \emptyset$. Ainsi par compacité de $\mathbf{T}$, il existe un nombre fini d'intervalles ouverts $(I_k)_{1 \leq k \leq m}$,

$$\mathbf{T} = \bigcup_{k=1}^m I_k,$$

tels que $f(j(I_k)) \cap j(I_k) = \emptyset$. Quitte à rétrécir ces intervalles on peut les supposer compacts et tels que leur intérieur recouvre encore $\mathbf{T}$.

En appliquant le lemme V.4.3 on trouve une C^1 perturbation ψ_1 de $f \circ j$, C^1 tangente aux bords de I_1 , et assez petite pour que si

$$\phi_1 = f^{-1} \circ (f \circ j + \psi_1) - j$$

[ϕ_1 continue à être C^1 tangente aux bords de $j(I_1)$] on ait $j_1 = j + \phi_1 \in \mathring{X}$, $f(j_1(I_k)) \cap I_k = \emptyset$, et $f(j_1(\mathring{I}_1))$ transverse à $j(\mathbf{T})$, donc transverse à $j_1(\mathbf{T})$ [car $f(j_1(\mathring{I}_1)) \cap j_1(I_1) = \emptyset$ et $j_1(\mathbf{T} - I_1) = j(\mathbf{T} - I_1)$]. Remarquer que l'on utilise que la composition est continue en topologie C^1 pour avoir ϕ_1 petit. De même par récurrence on trouve $\phi_2, \dots, \phi_m$ telles que $j_k = j + \phi_1 + \dots + \phi_k \in \mathring{X}$, $f(j_k(I_l)) \cap I_l = \emptyset$ pour $1 \leq l \leq m$, et $f(j_k(\mathring{I}_l))$ est transverse à $j_k(\mathbf{T})$ pour $1 \leq l \leq k$.

Il résulte que pour $i = j + \phi_1 + \dots + \phi_m$ on a $f(i(\mathbf{T}))$ est transverse à $i(\mathbf{T})$ puisque la transversalité est une propriété locale. En outre $\phi_1 + \dots + \phi_m$ est une perturbation C^1 arbitrairement petite ce qui achève la démonstration dans le cas $N=0$.

Remarque. — Il a fallu utiliser que f est sans point fixe autre que 0 du moins pour exclure le contre-exemple trivial $f = \text{id}$.

• Cas $N \geq 1$.

On considère $j \in \mathring{X}$ et on suppose, par hypothèse de récurrence, qu'on a le résultat pour $N-1$ et on le montre pour N . Ainsi si $j(\mathbf{T}) = \partial U_0$ et pour $0 \leq n \leq N-1$, $U_{n+1} = U_n \wedge f(U_n)$, on a ∂U_n et $\partial f(U_n)$ qui s'intersectent transversalement. On veut trouver une perturbation ϕ , C^1 arbitrairement petite, telle que pour la suite de domaines $(U'_n)_{n \geq 0}$ correspondante à $j + \phi$ on ait pour $0 \leq n \leq N$, ∂U_n et $\partial f(U_n)$ qui s'intersectent transversalement. Puisque l'hypothèse de récurrence est ouverte, on a un voisinage V de j tel que $V \subset \mathring{X}$ et si $j + \phi \in V$ on a les intersections transverses pour $0 \leq n \leq N-1$.

On voit facilement que ∂U_N est formé d'un nombre fini d'arcs C^1 ,

$$\partial U_N = \bigcup_{k=1}^m l_k,$$

et $f^{-N}(l_k) \in j(\mathbf{T}) = \partial U_0$ (noter que f^{-N} est bien définie dans un voisinage de U_N , c'est-à-dire pour tout z dans ce voisinage on a $f^{-k}(z) \in U$ pour $0 \leq k \leq N$). Mais puisque f est sans orbites périodiques, pour $z \in \partial U_N$ on a un voisinage W_z de z tel que les ouverts W_z , $f^{-1}(W_z)$, $\dots$, $f^{-N}(W_z)$ soient deux à deux disjoints. Ainsi par compacité de ∂U_N , quitte à rajouter des arcs l_k , on peut supposer que l'on a la propriété, notée $(*)$:

Pour $1 \leq k \leq n$, il existe un voisinage W_k de l_k tel que $f(W_k)$, W_k , $f^{-1}(W_k)$, $\dots$, $f^{-N}(W_k)$ soient deux à deux disjoints.

On note I_k le segment de $\mathbf{T}$ tel que

$$f^{-N}(l_k) = j(I_k).$$

Ainsi $l_k = f^N \circ j(I_k)$ et $f(l_k) = f^{N+1} \circ j(I_k)$. On peut prendre le voisinage V assez petit pour que si $j' = j + \phi \in V$ on ait $I'_k = f^N \circ j'(I_k) \subset W_k$, donc on a encore la propriété $(*)$ pour j' avec les mêmes ouverts W_k . Dans ce cas, si ϕ est à support dans I_k , la nouvelle suite de domaines $(U'_n)_{n \geq 0}$ est telle que pour $0 \leq n \leq N$, ∂U_n et $\partial U'_n$ coïncident en dehors de

$$\bigcup_{p=0}^n f^{-N+p}(W_k).$$

En particulier ∂U_N et $\partial U'_N$ coïncident en dehors de

$$\bigcup_{p=0}^N f^{-p}(W_k),$$

donc, puisque $f(W_k)$ est disjoint de l'ensemble précédent, $f(W_k) \cap \partial U_N = f(W_k) \cap \partial U'_N$.

Maintenant en appliquant le lemme V.4.3 on peut trouver une perturbation ψ_1 de $f^{N+1} \circ j$, C^1 tangente aux bords de I_1 , telle que si $j_1 = j + \phi_1 \in V$ avec

$$\phi_1 = f^{-(N+1)} \circ (f^{N+1} \circ j + \psi_1) - j,$$

(alors ϕ_1 est C^1 tangente aux bords de I_1) on ait pour la nouvelle suite de domaines $(U_n^{(1)})_{n \geq 0}$, pour $l_k^{(1)} = f^N \circ j_1(I_1)$,

$$f(l_1^{(1)}) = (f^{N+1} \circ j + \psi_1)(I_1)$$

soit transverse à $\partial U_N^{(1)}$. Puis par le même argument, on construit pour $1 \leq l \leq m$, $j_l = j + \phi_1 + \dots + \phi_l$ avec la suite de domaine $(U_n^{(l)})_{n \geq 0}$ et $l_k^{(l)} = f^N \circ j_l(I_k)$ tels que $f(l_k^{(l)})$ soit transverse à $\partial U_n^{(l)}$ pour $1 \leq k \leq l$. Il faut simplement s'assurer à chaque étape de choisir ψ_l assez petit pour conserver les transversalités de $f(l_k^{(l)})$ avec $\partial U_n^{(l)}$ pour $i \leq k \leq l-1$. Ainsi en posant $i = j_m = j + \phi_1 + \dots + \phi_m$ on obtient le résultat à l'ordre N . $\square$

Remarque. — Il faut utiliser que f est sans orbite périodique au moins pour exclure le contre-exemple où f est d'ordre fini, $f^q = \text{id}$.

Annexe 4 Quelques résultats d'arithmétique

a) DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE USUEL. — On rappelle tout d'abord le développement en fraction continue usuel (voir [L]). Si x est un nombre réel on note $[x]$ sa partie entière et $\{x\} = x - [x]$ sa partie décimale.

Soit $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. On pose $\tilde{\alpha}_0 = [\alpha] \in \mathbf{Z}$, $\tilde{\alpha}_0 = \{\alpha\}$, et pour $n \geq 1$,

$$\tilde{\alpha}_n = [\tilde{\alpha}_{n-1}^{-1}],$$

$$\tilde{\alpha}_n = \{\tilde{\alpha}_{n-1}^{-1}\}.$$

Puis

$$\tilde{q}_{-2} = \tilde{p}_{-1} = 1,$$

$$\tilde{q}_{-1} = \tilde{p}_{-2} = 0,$$

et pour $n \geq 0$,

$$\tilde{q}_n = \tilde{\alpha}_n \tilde{q}_{n-1} + \tilde{q}_{n-2},$$

$$\tilde{p}_n = \tilde{\alpha}_n \tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_{n-2}.$$

Ensuite on définit la suite $(\tilde{\beta}_n)_{n \geq -1}$ par $\tilde{\beta}_{-1} = 1$ et pour $n \geq 0$,

$$\tilde{\beta}_n = \prod_{i=0}^n \tilde{\alpha}_i.$$

On vérifie sans peine, pour $n \geq -2$,

$$\tilde{\beta}_n = (-1)^n (\tilde{q}_n \alpha - \tilde{p}_n),$$

$$\tilde{q}_{n+1} \tilde{\beta}_n + \tilde{q}_n \tilde{\beta}_{n+1} = 1.$$

On va maintenant établir le lien entre le développement en fraction continue usuel que l'on vient de rappeler ci-dessus et la variante introduite en [Y1] que l'on retrouve dans I.2.

On définit $k: \{-1\} \cap \mathbb{N} \rightarrow \{-1\} \cap \mathbb{N}$ strictement croissante par $k(-1) = -1$ et pour $n \geq -1$,

$$k(n+1) = \begin{cases} k(n)+2 & \text{si } \tilde{\alpha}_{k(n)+2} = 1 (\varepsilon_{n+1} = -1) \\ k(n)+1 & \text{si } \tilde{\alpha}_{k(n)+2} \geq 2 (\varepsilon_{n+1} = 1) \end{cases}.$$

On a alors

$$\beta_n = \tilde{\beta}_{k(n)}.$$

Établissons ceci par récurrence. Pour $n = -1$,

$$\beta_{-1} = 1 = \tilde{\beta}_{-1} = \tilde{\beta}_{k(-1)}.$$

Supposons le résultat jusqu'à l'ordre n . On a deux cas à considérer :

- Si $\tilde{\alpha}_{k(n)+2} \geq 2$ alors $0 < \tilde{\alpha}_{k(n)+1} < 1/2$ et

$$\tilde{\alpha}_{k(n+1)} = \tilde{\alpha}_{k(n)+1} = \{\tilde{\alpha}_{k(n)}^{-1}\} = \|\tilde{\alpha}_{k(n)}^{-1}\| = \|\alpha_n^{-1}\| = \alpha_{n+1},$$

donc le résultat se vérifie pour $n+1$.

- Si $\tilde{\alpha}_{k(n)+2} = 1$ on a $1/2 < \tilde{\alpha}_{k(n)+1} < 1$ et puisque $\tilde{\alpha}_{k(n)+1} = \tilde{\alpha}_{k(n)}^{-1}$ on a

$$\|\tilde{\alpha}_{k(n)}^{-1}\| = 1 - \{\tilde{\alpha}_{k(n)}^{-1}\} = 1 - \tilde{\alpha}_{k(n)+1},$$

soit

$$\alpha_{n+1} = \|\alpha_n^{-1}\| = \|\tilde{\alpha}_{k(n)}^{-1}\| = 1 - \tilde{\alpha}_{k(n)+1}.$$

Mais

$$\tilde{\alpha}_{k(n)+2} = 1 \quad \text{donc} \quad \tilde{\alpha}_{k(n)+1}^{-1} = 1 + \tilde{\alpha}_{k(n)+2},$$

et

$$1 - \tilde{\alpha}_{k(n)+1} = \tilde{\alpha}_{k(n)+1} \tilde{\alpha}_{k(n)+2} \quad \text{donc} \quad \alpha_{n+1} = \tilde{\alpha}_{k(n)+1} \tilde{\alpha}_{k(n)+2}.$$

On obtient à nouveau le résultat à l'ordre $n+1$.

On a également pour $n \geq -1$,

$$p_n = \tilde{p}_{k(n)},$$

$$q_n = \tilde{q}_{k(n)}.$$

Remarquons que si $j \geq 0$ et $i = k(j)$ on a

- Si $k(j-1) = i-1$ alors

$$\tilde{\beta}_{i-1} = \beta_{j-1},$$

$$\tilde{\beta}_i = \beta_j.$$

- Si $k(j-1) = i-2$ alors

$$\tilde{\beta}_{i-2} = \beta_{j-1},$$

$$\tilde{\beta}_{i-1} = \beta_{j-1} - \beta_j,$$

$$\tilde{\beta}_i = \beta_j.$$

b) QUELQUES PROPOSITIONS. — On montre maintenant les résultats suivants,

PROPOSITION V.4.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log \tilde{q}_{n+1}}{\tilde{q}_n} < +\infty, \\ (2) \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \log q_{n+1}}{q_n} < +\infty, \\ (3) \quad & \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) < +\infty. \end{aligned}$$

PROPOSITION V.4.2. — *Les conditions suivantes sont équivalentes*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log \tilde{q}_{n+1}}{\tilde{q}_n} < +\infty, \\ (2) \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty, \\ (3) \quad & \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} < +\infty. \end{aligned}$$

On se limitera à démontrer la proposition V.4.1, la démonstration de V.4.2 étant semblable et plus facile. Notons que la suite (q_n) étant une sous-suite de $(\tilde{q}_n)$ la condition (1) entraînent la condition (2) dans les propositions.

Les conditions (1) et (3) sont équivalentes par le lemme V.4.1.

LEMME V.4.1. — *La fonction k étant définie comme précédemment, il existe une constante universelle C telle que*

$$\left| \sum_{i=1}^{k(n)} \tilde{q}_i^{-1} \log \log \tilde{q}_{i+1} - \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \log (e \alpha_i^{-1}) \right| \leq C.$$

Démonstration. — Pour $n \geq -2$ on a $1 = \tilde{q}_{n+1} \tilde{\beta}_n + \tilde{q}_n \tilde{\beta}_{n+1}$ donc $\tilde{\beta}_{i-1} = \tilde{q}_i^{-1} (1 - \tilde{q}_{i-1} \tilde{\beta}_i)$ et

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^k \tilde{q}_i^{-1} \log \log \tilde{q}_{i+1} - \sum_{i=1}^k \tilde{\beta}_{i-1} \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^k \tilde{q}_i^{-1} (\log \log \tilde{q}_{i+1} - \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1})) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^k \tilde{q}_i^{-1} \tilde{q}_{i-1} \tilde{\beta}_i \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1}) \right|. \end{aligned}$$

Or $\tilde{q}_{i+1} < \tilde{\beta}_i^{-1} < 2\tilde{q}_{i+1}$ donc

$$|\log \log \tilde{q}_{i+1} - \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1})| \leq C,$$

et

$$\tilde{q}_i^{-1} \tilde{q}_{i+1} < 1$$

d'où

$$(1) \quad \left| \sum_{i=1}^k \tilde{q}_i^{-1} \log \log \tilde{q}_{i+1} - \sum_{i=1}^k \tilde{\beta}_{i-1} \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1}) \right| \leq \left(\sum_{i=1}^k \tilde{q}_i^{-1} \right) C + \sum_{i=1}^k \tilde{\beta}_i \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1}) \leq C,$$

car pour $i \geq 2$, $\tilde{q}_i \geq 2^{i/2}$ et $\tilde{\beta}_i \leq 2^{i/2}$. Maintenant pour $j \geq 0$, $i = k(j)$, en utilisant les remarques précédentes,

- Si $k(j-1) = i-1$ alors $\tilde{\beta}_{i-1} \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1}) = \beta_{j-1} \log \log (e \beta_j^{-1})$.
- Si $k(j-1) = i-2$ alors

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{i-2} \log \log (e \tilde{\beta}_{i-1}^{-1}) + \tilde{\beta}_{i-1} \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1}) &= \beta_{j-1} \\ &\log \log (e (\beta_{j-1} - \beta_j)^{-1}) + (\beta_{j-1} - \beta_j) \log \log (e \beta_j^{-1}). \end{aligned}$$

A l'aide de $(\beta_{j-1} - \beta_j)^{-1} < 2\beta_{j-1}$ on déduit

$$(2) \quad \left| \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \log (e \beta_i^{-1}) - \sum_{i=0}^{k(n)} \tilde{\beta}_{i-1} \log \log (e \tilde{\beta}_i^{-1}) \right| \leq \sum_{j=0}^n \beta_j \log \log (e \beta_j^{-1}) + \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \log (2e \beta_{j-1}) \leq C.$$

Et finalement, puisque $\beta_i^{-1} = \alpha_i^{-1} \beta_{i-1}^{-1}$,

$$(3) \quad \left| \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \log (e \beta_i^{-1}) - \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \log (e \alpha_i^{-1}) \right| = \left| \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \left(1 + \frac{\log \beta_{i-1}^{-1}}{\log (e \alpha_i^{-1})} \right) \right| \leq \sum_{i=0}^n \beta_{i-1} \log \left(1 + \frac{\log \beta_{i-1}^{-1}}{\log (2e)} \right) \leq C.$$

Les inégalités (1), (2) et (3) donnent le lemme. $\square$

Pour finir la démonstration de la proposition V.4.1 il reste à montrer que les conditions (2) et (3) sont équivalentes. Ceci se démontre de la même façon (mais plus simplement) que la proposition suivante et sera laissé au soin du lecteur consciencieux.

PROPOSITION V.4.3. — Si $(n_k)_{k \geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs alors les deux conditions suivantes sont équivalentes,

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{n_k-1} \log \alpha_{n_k}^{-1} = +\infty,$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log q_{n_k+1}}{q_{n_k}} = +\infty.$$

On utilise dans la démonstration,

LEMME V.4.2.. — Pour $n \geq 0$, on a

$$\frac{2}{3} q_{n+1}^{-1} < \beta_n < 2 q_{n+1}^{-1}.$$

Démonstration. — En utilisant (voir II.2.a) pour $n \geq -2$,

$$q_{n+1} \beta_n + \varepsilon_{n+1} q_n \beta_{n+1} = 1,$$

le lemme découle. $\square$

Démonstration de la proposition V.4.3. — En utilisant $\alpha_{n_k} = \beta_{n_k} \beta_{n_k-1}^{-1}$ et le lemme V.4.2 on encadre

$$\log q_{n_k+1} - \log q_{n_k} - C \leq \log \alpha_{n_k}^{-1} \leq \log q_{n_k+1} + C.$$

Puis en utilisant à nouveau ce lemme et en sommant de 1 jusqu'à N on a,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N q_{n_k}^{-1} \log q_{n_k+1} - 2 \sum_{k=1}^N q_{n_k}^{-1} \log q_{n_k} - \sum_{k=1}^N q_{n_k}^{-1} &\leq \sum_{k=1}^N \beta_{n_k-1} \log \alpha_{n_k}^{-1} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^N q_{n_k}^{-1} \log q_{n_k+1} + C \sum_{k=1}^N q_{n_k}^{-1}. \end{aligned}$$

Alors en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q_n^{-1} \log q_n \leq C,$$

on a le résultat. $\square$

Rappelons que dans la partie I on a défini l'ensemble J des bonnes réduites. Démontrons maintenant les lemmes suivants énoncés dans cette section.

LEMME I.2.2.. — Si $\alpha \notin \mathcal{B}$ alors J est infini.

LEMME I.2.3.. — Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $C_0 > 0$, $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, des constantes universelles positives. Si $\alpha \notin \mathcal{B}'$ alors il existe $A(\alpha) \subset J$, $A(\alpha)$ infini, tel que si $n \in A(\alpha)$,

$$(i) \quad \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \geq C_0,$$

$$(ii) \quad (1-\varepsilon) \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} - C_1 \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) + C_2.$$

Démonstration du lemme I.2.2. — Sinon soit N son plus grand élément. Pour $n > N$ il existe $\phi(n) < n$ tel que

$$B_{n, \phi(n)} < \log \alpha_{\phi(n)}^{-1},$$

soit

$$\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} \leq \beta_{\phi(n)-1} \log \alpha_{\phi(n)}^{-1} + 18\pi \sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1},$$

donc

$$\sum_{j=\phi(n)+1}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} \leq 18\pi \sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1}.$$

Pour $n > N$, soit $p \geq 1$ tel que $\phi^p(n) \leq N$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=N+1}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} &\leq \sum_{j=\phi^p(n)+1}^n \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1}, \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sum_{j=\phi^{i+1}(n)+1}^{\phi^i(n)} \beta_{j-1} \log \alpha_j^{-1} \right), \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} 18\pi \left(\sum_{j=\phi^{i+1}(n)}^{\phi^i(n)} \beta_{j-1} \right), \\ &\leq 18\pi \times 2 \times \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1}, \\ &\leq 18\pi \times 2 \times 2 = 72\pi. \quad \square \end{aligned}$$

Démonstration du lemme I.2.3. — Il suffit de montrer (i). En effet il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$(1-\varepsilon) \log \alpha_j^{-1} + C(\varepsilon) \geq \log \log (e \alpha_j^{-1}).$$

Alors (ii) équivaut à, pour $n \in A(\alpha)$,

$$\beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \geq \frac{2\pi(C_1+C_2)}{1-\varepsilon} + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \log \log (e \alpha_j^{-1}) - \log \alpha_j^{-1} \right),$$

et ceci est vérifié dès que,

$$\beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \geq \frac{2\pi(C_1+C_2)}{1-\varepsilon} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1} \right) \frac{C(\varepsilon)}{1-\varepsilon},$$

donc dès que,

$$\beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \geq \frac{2\pi(C_1+C_2)}{1-\varepsilon} + 2 \frac{C(\varepsilon)}{1-\varepsilon}.$$

Donc il suffit de démontrer (i) avec

$$C_0 \geq \frac{2\pi(C_1 + C_2)}{1 - \varepsilon} + 2 \frac{C(\varepsilon)}{1 - \varepsilon}.$$

Montrons maintenant qu'il existe une infinité de bonnes réduites telles que,

$$\beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \geq C_0.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $N \geq 1$ tel que pour toute bonne réduite $n \geq N$ on ait,

$$\beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < C_0.$$

Comme auparavant on montre que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) < +\infty,$$

en découpant la somme

$$\sum_{j=N}^n \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}),$$

en distinguant le cas où n est une bonne réduite ou ne l'est pas.

Soit $n \geq N$. Si n est une bonne réduite alors

$$\beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < C_0,$$

ce qui donne,

$$\log \log (e \alpha_n^{-1}) \leq \log (C_0 \beta_{n-1}^{-1} + 1) \leq \log (e \beta_{n-1}^{-1}) + C,$$

d'où,

$$\beta_{n-1} \log \log (e \alpha_n^{-1}) \leq \beta_{n-1} \log (e \beta_{n-1}^{-1}) + C \beta_{n-1} \leq 2 \beta_{n-1} \log (e \beta_{n-1}^{-1}) + C \beta_{n-1}.$$

Si n n'est pas une bonne réduite, il existe $\phi(n) < n$ tel que

$$\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \log (e \alpha_j^{-1}) \leq \beta_{\phi(n)-1} \log \alpha_{\phi(n)}^{-1} + (18\pi + 1) \sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1}.$$

L'inégalité de concavité pour $x \mapsto \log x$ donne

$$\begin{aligned} \sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) &\leq \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right) \\ &\quad \times \left[\log \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \log (e \alpha_j^{-1}) \right) - \log \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right) \right] \end{aligned}$$

En posant

$$S_n = \beta_{\phi(n)-1}^{-1} \sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} = 1 + \frac{\beta_{\phi(n)}}{\beta_{\phi(n)-1}} + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{\phi(n)-1}},$$

on a $1 \leq S_n \leq 2$ et

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) \\ & \leq \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right) \left[\log \left(\beta_{\phi(n)-1} \log \alpha_{\phi(n)}^{-1} + (18\pi + 1) \sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right) - \log \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right) \right], \\ & \leq \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right) [\log \beta_{\phi(n)-1} + \log (\log \alpha_{\phi(n)}^{-1} + (18\pi + 1) S_n) - (\log \beta_{\phi(n)-1} + \log S_n)], \\ & \leq \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right) [\log \log (e \alpha_{\phi(n)}^{-1}) + C], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=\phi(n)+1}^n \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) & \leq \left(\sum_{j=\phi(n)+1}^n \beta_{j-1} \right) \log \log (e \alpha_{\phi(n)}^{-1}) + C \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right), \\ & \leq 2 \beta_{\phi(n)} \log \log (e \alpha_{\phi(n)}^{-1}) + C \left(\sum_{j=\phi(n)}^n \beta_{j-1} \right), \\ & \leq 2 \beta_{\phi(n)} \log \log (r \beta_{\phi(n)}^{-1}) + C \left(\sum_{j=\phi(n)+1}^n \beta_{j-1} \right) + C \beta_{\phi(n)}. \end{aligned}$$

Ainsi pour $n \geq N$,

$$\sum_{j=N}^n \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) \leq 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \log \log (e \beta_{j-1}^{-1}) + 2C \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \right) \leq C,$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_{j-1} \log \log (e \alpha_j^{-1}) \leq +\infty. \quad \square$$

Annexe 5

Existence d'une condition optimale pour les difféomorphismes du cercle

On notera $D^{\omega}(\mathbf{R})$ l'ensemble des difféomorphismes $\mathbf{R}$ -analytiques de $\mathbf{R}$ commutant à la translation T , et $D^{\omega}(T^1)$ l'ensemble des difféomorphismes $\mathbf{R}$ -analytiques de T^1 . A $F \in D^{\omega}(\mathbf{R})$ de nombre de rotation $\rho(F) = \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, on associe l'action de $\mathbf{Z}^2$ sur $\mathbf{R}$, $\pi_F: \mathbf{Z}^2 \rightarrow D^{\omega}(\mathbf{R})$ telle que $\pi_F(q, p) = F^q \circ T^p$. Comme $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ cette action est libre. On dira que deux actions $\pi: \mathbf{Z}^2 \rightarrow D^{\omega}(\mathbf{R})$ et $\pi': \mathbf{Z}^2 \rightarrow D^{\omega}(\mathbf{R})$ sont conjuguées s'il existe $h \in D^{\omega}(\mathbf{R})$ tel que pour $(q, p) \in \mathbf{Z}^2$, $\pi'(q, p) = h^{-1} \circ \pi(q, p) \circ h$. Si $R_{\alpha}: z \mapsto z + \alpha$ alors $\pi_{R_{\alpha}}$ et π_F sont conjuguées si et seulement si F et R_{α} le sont. Si on se donne une action $\pi: \mathbf{Z}^2 \rightarrow D^{\omega}(\mathbf{R})$ libre et on fixe une base (e_1, e_2) de $\mathbf{Z}^2$, le quotient de $\mathbf{R}$ par l'action de $\pi(e_2)$ est une variété analytique orientée isomorphe à T^1 par le théorème d'uniformisation

de Kœbé. On peut ainsi associer à l'action de e_1 une classe de conjugaison dans $D^0(T^1)$ de nombre de rotation irrationnel. Cette classe de conjugaison contient R_α si et seulement si π et π_{R_α} sont conjuguées. Mais que l'action π soit conjuguée à π_{R_α} est une propriété intrinsèque indépendante du choix d'une base de Z^2 . Or quand on fait un changement de base

$$\begin{cases} e'_1 = ae_1 + be_2 \\ e'_2 = ce_1 + de_2 \end{cases}$$

avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, Z)$, on change le nombre de rotation de α en $(a\alpha + b)/(c\alpha + d)$. Ceci démontre la remarque fondamentale : l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ pour lesquels tout $F \in D^0(\mathbf{R})$ tel que $\rho(F) = \alpha$ est conjugué à R_α dans $D^0(T^1)$ est invariant sous l'action de $PGL(2, Z)$.

Clairement la propriété d'accumulation de $T^1 \subset \mathbf{C}/Z$ par des orbites périodiques de F est invariante par conjugaison analytique. On va voir que ceci définit une propriété intrinsèque de l'action π_F . Soit $\pi : Z^2 \rightarrow D^0(\mathbf{R})$ une action libre. On dira que π admet une suite d'orbites périodiques qui accumulent $\mathbf{R}$ si on a une base (e_1, e_2) de Z^2 telle que pour tout voisinage connexe V de $\mathbf{R}$ où $\pi(e_1)$, $\pi(e_1)^{-1}$, $\pi(e_2)$, et $\pi(e_2)^{-1}$ se prolongent analytiquement de façon injective, il existe une suite de points dans V , $\{x_0, x_1, \dots, x_q\}$ avec $x_q = x_0$ et pour $0 \leq i < n$, $x_{i+1} = (\pi(e_{\varepsilon_i}))^{\delta_i}(x_i)$, où $\varepsilon_i = 1, 2$ et $\delta_i = \pm 1$. Ceci équivaut à dire que tout élément de la classe de conjugaison définie par $\pi(e_1)$ lorsqu'on quotiente $\mathbf{R}$ par l'action de $\pi(e_1)$ a une suite d'orbites périodiques accumulant $\mathbf{R}$. Soit (e'_1, e'_2) une autre base de Z^2 avec

$$\begin{cases} e_1 = ae'_1 + be'_2 \\ e_2 = ce'_1 + de'_2 \end{cases}$$

avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, Z)$.

On prend un voisinage connexe de $\mathbf{R}$, V , assez proche de $\mathbf{R}$ de façon que $\pi(e_1)$, $\pi(e_1)^{-1}$, $\pi(e_2)$, $\pi(e_2)^{-1}$, $\pi(e'_1)$, $\pi(e'_1)^{-1}$, $\pi(e'_2)$, et $\pi(e'_2)^{-1}$, se prolongent tous analytiquement de façon univalente sur ce voisinage. On considère un voisinage de $\mathbf{R}$, $V' \subset V$, tel que pour $0 \leq |i|, |j| \leq \text{Max}(|a|, |b|, |c|, |d|)$ et pour $z \in V'$, $\pi(e_1)^i \pi(e_2)^j(z) \in V$. En prenant une suite dans $V' \{x_0, x_1, \dots, x_q\}$ pour la base (e_1, e_2) et en utilisant $\pi(e_1) = \pi(e'_1)^a \pi(e'_2)^b$ et $\pi(e_2) = \pi(e'_1)^c \pi(e'_2)^d$, on construit immédiatement une suite $\{x'_0, x'_1, \dots, x'_q\}$ dans V pour la base (e'_1, e'_2) avec les propriétés requises.

Donc l'action π admet une suite d'orbites périodiques accumulant $\mathbf{R}$ indépendamment de la base de Z^2 choisie pour vérifier cette propriété. En conséquence l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ tels que tout $F \in D^0(\mathbf{R})$ non linéarisable de nombre de rotation α ait une suite d'orbites périodiques accumulant $\mathbf{R}$, est invariant sous l'action de $PGL(2, Z)$. En conclusion,

PROPOSITION V.5.1. — *Il existe une condition diophantienne $\mathcal{H}' \subset \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, invariante sous l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{Z})$, telle si $\alpha \in \mathcal{H}'$ est un difféomorphisme du cercle analytique de nombre de rotation α non-linéarisable; alors f a une suite d'orbites périodiques qui accumulent le cercle.*

Remarque. — Le théorème 1 nous dit que $\mathcal{H}' \neq \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

Annexe 6

Quelques estimations

Les estimations exposées dans cet annexe sont utilisées dans la partie II.3. Ce sont les estimations (62) et (63) de [Y 3] se trouvant dans la partie 7 de ce texte. Ce texte n'étant pas diffusé et par souci de complétude on reproduit ces estimations dans ce qui suit. On part de $F \in \mathcal{S}(\alpha, \Delta)$ avec $\Delta \geq 1$. Posons $\Delta_0 = \Delta - 0,065$; soit z_0 un point de partie imaginaire égale à Δ_0 . D'après le théorème de Grötzsch (voir [Ah1], p. 47), on a :

$$(1) \quad \mathrm{Im} F(z_0) \geq \Delta_0 - \frac{1}{2\pi} \log 4.$$

Par ailleurs, il existe au moins un point z_1 de partie imaginaire Δ qui n'appartient pas à $F(B_\Delta)$; on a alors :

$$(2) \quad \inf_{p \in \mathbf{Z}} |z_0 - z_1 - p| < [(1/2)^2 + (0,3)^2]^{1/2} < 0,6.$$

Posons $u_0 = \exp(-2\pi i z_0)$, $r_0 = \exp(2\pi \Delta) - \exp(2\pi \Delta_0)$; comme $\Delta \geq 1$, le disque D de centre u_0 et de rayon r_0 est contenu dans l'anneau $\{\exp(-2\pi \Delta) < |u| < \exp(2\pi \Delta)\}$. La fonction $f(u) = F(-(1/2\pi i) \log u)$ (où l'on prend la détermination du logarithme qui vaut $-2\pi i z_0$ en u_0) est univalente sur D ; son image $f(D)$ est contenue dans $F(B_\Delta)$, et on a :

$$(3) \quad |Df(u_0)| = \frac{1}{2\pi} \exp(-2\pi \Delta_0) |DF(z_0)|.$$

D'après la relation (2) et le théorème de Kœbé, on a donc :

$$(4) \quad |DF(z_0)| \leq 2\pi \times 4 \times (0,6) \frac{\exp 2\pi \Delta_0}{r_0} = c_0.$$

Écrivons maintenant F sous la forme :

$$F(z) = z + \sum_{m \in \mathbf{Z}} a_m e^{2\pi i m z},$$

où les coefficients de Fourier a_m vérifiant $\bar{a}_m = a_{-m}$ pour $m \in \mathbf{Z}$.

D'après la formule de Cauchy et (4), on a :

$$(5) \quad |2\pi m a_m| \leq \exp(-2\pi m \Delta_0) c_0, \quad m \geq 1;$$

Soit z un point vérifiant $|\operatorname{Im} z| = t < \Delta_0$; en posant $v = \exp 2\pi(t - \Delta_0)$, on a :

$$(6) \quad |F(z) - z - a_0| \leq 2 \sum_{m \geq 1} |a_m| \exp(2\pi m t) \\ \leq \frac{c_0}{\pi} \sum_{m \geq 1} \frac{v^m}{m} = \frac{c_0}{\pi} |\log(1-v)|;$$

$$(7) \quad |DF(z) - 1| \leq 4\pi \sum_{m \geq 1} m |a_m| \exp(2\pi m t) \leq 2c_0 \sum_{m \geq 1} v^m = \frac{2c_0 v}{1-v}.$$

Prenons $t < \Delta_0 - 0,115$, de sorte que $v < 1/2$ et $|\log(1-v)| < 1,4v$; on a :

$$c_0 v = 2,4(2\pi) r_0^{-1} \exp 2\pi t \\ = 2,4(2\pi) \frac{\exp 2\pi(t - \Delta)}{1 - \exp 2\pi(\Delta_0 - \Delta)} \\ < 14,4\pi \exp 2\pi(t - \Delta),$$

car $\exp 2\pi(0,065) < 2/3$; les estimations (6) et (7) prennent donc, pour $|\operatorname{Im} z| = t < \Delta - 0,18$, la forme suivante :

$$|F(z) - z - a_0| \leq 21 \exp 2\pi(t - \Delta), \\ |DF(z) - 1| < 181 \exp 2\pi(t - \Delta).$$

En remarquant que la première inégalité entraîne

$$|a_0 - \alpha| < 21 \exp(-2\pi\Delta),$$

on obtient les estimations utilisées en II.3 (Attention ! t ne désigne pas la même quantité qu'ici).

BIBLIOGRAPHIE

- [Ah1] L. V. AHLFORS, *Lectures on quasiconformal mappings*, Wadsworth Inc., Belmont, California, 1987.
- [Ah2] L. V. AHLFORS, *Conformal invariants*, McGraw-Hill, 1973, p. 56.
- [Ar1] V. I. ARNOLD, *Small denominators I; on the mapping of a circle into itself*, [(*Izvestija Akad. Nauk., serie Math.*, vol. 25, I, 1961, p. 21-86); (*Translations Amer. Math. Soc.*, 2nd series, vol. 46, p. 213-284)].
- [Ar2] V. I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, (MIR, 1980, p. 120); (*Grundlehren*, vol. 250, Springer-Verlag, p. 121)].
- [Br] A. D. BRJUNO, *Analytical form of differential equations* (*Transactions Moscow Math. Soc.*, vol. 25, 1971, p. 131-288; vol. 26, 1972, p. 199-239).
- [Ca] C. CAMACHO, Local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$ (*Astérisque*, vol. 59-60, 1978, p. 83-94).
- [Ch] T. M. CHERRY, *A singular case of iteration of an analytic functions: a contribution to the small divisor problem* (*Nonlinear problems of engineering*; W. F. AMES éd., Academic Press, New York, 1964, p. 29-50).
- [Cr1] H. CREMER, *Über die Häufigkeit der Nichtzentren* (*Math. Ann.*, vol. 115, 1938, p. 573-580).
- [Cr2] H. CREMER, *Zum Zentrumproblem* (*Math. Ann.*, vol. 98, 1928, p. 151-153).

- [D] A. DOUADY, *Disques de Siegel et anneaux de Herman* (Sém. Bourbaki n° 677, 1986-87, vol. 152-153, p. 151).
- [DH] A. DOUADY et J. H. HUBBARD, On the dynamics of polynomial like mappings, (*Ann. Sc. E.N.S.*, 4^e série, vol. 18, 1985, p. 287-343).
- [Du] P. L. DUREN, *Univalent functions (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 259, Springer-Verlag, 1983.*
- [E] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes et leurs applications*, I, II, III (*Publications mathématiques d'Orsay*, 81-05, 81-06, 85-05).
- [He] M. R. HERMAN, Recent results and some open questions on Siegel's linéarisation theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of $\mathbb{C}^n$ near a fixed point, *Proceedings VIIIth Int. Conf. Math. Phys.*, World Scientific Publishers, Singapour, 1987.
- [Hi] M. W. HIRSCH, *Differential topology*, GTM, vol. 33, Springer-Verlag, 1976.
- [Ko] G. KOENIGS, *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (*Ann. Sc. E.N.S.* (3^e série) vol. 1, 1884, supplém. p. 1-14).
- [La] S. LANG, *Introduction to diophantine approximations*, Addison-Wesley series in mathematics, 1966.
- [Le] O. LEHTO, *Univalent functions and Teichmüller spaces (Graduate texts in mathematics, vol. 109, Springer-Verlag, 1986).*
- [MSS] R. MAÑÉ, P. SAD et D. SULLIVAN, On the dynamics of rational maps, (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, vol. 16, 1983, p. 193-217).
- [N] V. I. NAISHUL, *Topological invariants of analytic and area preserving mappings and their application to analytic differential equations in $\mathbb{C}^2$ and $\mathbb{CP}^2$* (*Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 42, 1983, p. 239-250).
- [Pf] T. M. PFEIFFER, *On the conformal mapping of curvilinear angles. The functional equation $\phi[f(x)] = a_1 \phi(x)$* , *Math. Ann.*, 1917.
- [Po] H. POINCARÉ, *Œuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1928-1956, t. I, vol. XXXVI-CXXIX.
- [PM] R. PÉREZ-MARCO, *Sur la structure des germes holomorphes non linéarisables* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 312, 1991, p. 533-536).
- [Sa] P. SAD, A note on non-linearizable analytic functions (*Bol. Soc. Bras. Mat.*, vol. 11, 1, 1980, p. 533-536).
- [Si] C. L. SIEGEL, *Iterations of analytic functions* (*Ann. Math.*, vol. 43, 1942, p. 807-812).
- [ST] D. SULLIVAN et W. THURSTON, Extending holomorphic motions (*Acta Mathematica*, vol. 157, 1986, p. 243-257).
- [Su] D. SULLIVAN, *Quasi-conformal homeomorphisms II, III: topological conjugacy classes of analytic endomorphisms*, préprint I.H.E.S., 1983.
- [To] P. TORTRAT, *Aspects potentialistes de l'itération des polynômes* (Séminaire de Théorie du potentiel, Paris, vol. 8, LNM 1235, p. 195-209).
- [V] S. M. VORONIN, *Classification analytique des germes d'applications conformes $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tangentes à l'identité*, (*Functional Analysis*, vol. 15/1, 1981, p. 1-17).
- [Y1] J.-C. YOCOZ, *Théorème de Siegel, polynômes quadratiques et nombres de Brjuno* [préprint, 1987 (à paraître dans *Astérisque*)].
- [Y2] J.-C. YOCOZ, *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$* , (*C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 306, série I, 1988, p. 55-58).
- [Y3] J.-C. YOCOZ, *Conjugaison des difféomorphismes analytiques du cercle* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 23 septembre 1991,
révisé le 2 octobre 1992.)

R. PÉREZ-MARCO,
Université de Paris-Sud, Bâtiment n° 425,
CNRS URA 1169
91040 Orsay, France.