ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT PESCE

Déformations isospectrales sur certaines nilvariétés et finitude spectrale des variétés de Heisenberg

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 25, nº 5 (1992), p. 515-538

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_5_515_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 25, 1992, p. 515 à 538.

DÉFORMATIONS ISOSPECTRALES SUR CERTAINES NILVARIÉTÉS ET FINITUDE SPECTRALE DES VARIÉTÉS DE HEISENBERG

PAR Hubert PESCE

RÉSUMÉ. — On caractérise les déformations isospectrales sur les nilvariétés non singulières, puis on étudie le spectre des variétés de Heisenberg et on montre qu'il n'y a au plus qu'un nombre fini de classes d'isométrie de telles variétés qui sont isospectrales à une variété de Heisenberg donnée.

0. Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et soit Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur $C^\infty(M)$ [1]. Cet opérateur possède un spectre discret $\operatorname{Spec}(M, g)$. Une question naturelle est de savoir dans quelle mesure le spectre détermine la géométrie de la variété. En particulier, l'égalité $\operatorname{Spec}(M, g)=\operatorname{Spec}(M', g')$ implique-t-elle que (M, g) et (M', g') sont isométriques ?

Milnor a exhibé deux tores plats de dimension 16 isospectraux et non isométriques [14]. Depuis, d'autres exemples de variétés isospectrales non isométriques ont été fournis (tores plats [13]; variétés hyperboliques [19]; espaces lenticulaires [10]); ces exemples sont cependant sporadiques. A partir de 1983, C. Gordon et E. Wilson [5] puis T. Sunada [18] ont introduit des méthodes permettant de construire, dans un cadre plus général et de manière systématique, des variétés isospectrales.

Un autre problème classique est de savoir si une variété M peut admettre des déformations isospectrales, c'est-à-dire : existe-t-il une famille continue de métriques $\{g_t\}$ qui soient isospectrales et non deux à deux isométriques ? Le seul résultat d'ordre général est dû à V. Guillemin et D. Kazhdan [8, 9], puis a été généralisé par Min-Oo [16] sous la forme suivante : si (M, g) est à opérateur de courbure défini négatif, elle n'admet pas de déformation isospectrale (M *est spectralement rigide*).

On sait, d'autre part, que les tores plats [20] et les surfaces de Riemann à courbure -1 [21] sont spectralement rigides. Il y a même dans ces deux cas *finitude spectrale*.

Dans [5], C. Gordon et E. Wilson ont construit les premiers exemples de déformations isospectrales non triviales. Les variétés considérées sont de la forme $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ où G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, Γ un sous-groupe discret cocompact de G et $\mathbf{m}$ une métrique qui se relève sur G en une métrique invariante à gauche. On définit alors un sous-groupe de $\operatorname{Aut}(G)$: $\operatorname{AIA}(G)$, le groupe des automorphismes presque intérieurs, qui contient le groupe des automorphismes intérieurs de G, Inn(G). Si $\mathrm{Inn}(G) \neq \mathrm{AIA}(G)$, on peut construire des déformations isospectrales non triviales sur $\Gamma\backslash G$.

On peut se demander si la condition $\mathrm{Inn}(G) \neq \mathrm{AIA}(G)$ est nécessaire. Soit H_n le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$ ($n \geqq 1$); les groupes H_n sont les exemples les plus simples (hormis $\mathbb{R}^n$) de groupes de Lie nilpotents simplement connexes; on vérifie facilement que $\mathrm{AIA}(H_n) = \mathrm{Inn}(H_n)$. Dans [7], C. Gordon et E. Wilson étudient la géométrie spectrale des variétés de Heisenberg (nous appellerons *variété de Heisenberg* toute variété type $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m})$ où Γ est un sous-groupe discret cocompact de H_n et $\mathbf{m}$ une métrique qui se relève en une métrique invariante à gauche sur H_n). Ils démontrent que deux variétés de Heisenberg de dimension 3 ($n=1$) sont isospectrales si et seulement si elles sont isométriques. Si $n \geqq 2$, C. Gordon et E. Wilson donnent des exemples de couples de variétés de Heisenberg isospectrales et non isométriques (et même des couples non homéomorphes).

Le problème de la rigidité spectrale pour les variétés de Heisenberg, comme pour les nilvariétés plus générales restait posé. Le but de cet article est de démontrer, dans une première partie, que *les seules déformations isospectrales sur les nilvariétés non singulières sont celles construites par C. Gordon et E. Wilson* (Première Partie, Proposition III.1).

Une conséquence de ce résultat est qu'il n'existe pas de déformation isospectrale non triviale d'une variété de Heisenberg par des variétés de Heisenberg. Le but de la deuxième partie de cet article est de démontrer un résultat plus fort : la finitude spectrale des variétés de Heisenberg. On démontre tout d'abord qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-groupes discrets co-compacts Γ tels que la variété $\Gamma\backslash H_n$ admette une métrique à spectre donné (Deuxième Partie, Proposition II.5); on montre ensuite qu'*il existe au plus un nombre fini de classes d'isométrie de variétés de Heisenberg isospectrales à une variété de Heisenberg donnée* (Deuxième Partie, Proposition II.10).

Je remercie le referee pour ses suggestions concernant la structure de l'article.

PREMIÈRE PARTIE :
Déformations isospectrales des nilvariétés non singulières

Les seules déformations isospectrales non triviales, en dimension $\geqq 2$, connues à ce jour celles construites par D. Deturck, C. Gordon et E. Wilson ([3], [5]). On va en rappeler le principe et montrer que ce sont les seules possibles, lorsqu'on se restreint aux nilvariétés non singulières munies d'une métrique provenant d'une métrique invariante à gauche (Proposition III.1).

Par la suite G désignera toujours un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. On notera $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $G' = [G, G]$ (resp. $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) le groupe dérivé (resp. l'algèbre dérivée) et on utilisera les notations et conventions suivantes :

- Si $x \in G$, I_x désigne l'automorphisme intérieur défini par $I_x(y) = xyx^{-1}$ ($y \in G$); on notera Inn (G) le groupe des automorphismes intérieurs. Si $X \in \mathfrak{g}$, ad_X désigne la dérivation intérieure définie par $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ $(Y \in \mathfrak{g})$; on notera $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations intérieures et $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$.

• Soit $\mathrm{Aut}(G)$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$) le groupe des automorphismes de G (resp. $\mathfrak{g}$). L'application

$$\begin{gathered}\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\\ \varphi \mapsto \varphi_*\end{gathered}$$

(φ_* désigne la différentielle de φ en l'élément neutre) est un isomorphisme de groupes (puisque G est simplement connexe) et on identifiera ces deux groupes.

I. Les déformations isospectrales de D. Deturck, C. Gordon et E. Wilson

Ces déformations sont construites sur des variétés du type $\Gamma\backslash G$ où G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et Γ est un sous-groupe uniforme de G (*i.e.* Γ est un sous-groupe discret tel que $\Gamma\backslash G$ soit compact). Si $\mathbf{m}$ est une métrique invariante à gauche sur G et Γ un sous-groupe uniforme de G, Γ opère par translation à gauche sur G comme un groupe d'isométries de $(G, \mathbf{m})$ et il existe une métrique $\bar{\mathbf{m}}$ sur $\Gamma\backslash G$ telle que la projection $(G, \mathbf{m}) \to (\Gamma\backslash G, \bar{\mathbf{m}})$ soit un revêtement riemannien. On notera $\mathbf{m}$ et $\bar{\mathbf{m}}$ par la même lettre et *toutes les métriques sur* $\Gamma\backslash G$ *que l'on considèrera par la suite seront de ce type.*

Soit G un groupe nilpotent simplement connexe tel qu'il existe un sous groupe uniforme Γ (ceci est vrai si et seulement si il existe une base de $\mathfrak{g}$ telle que les constantes de structures relatives à cette base soient rationnelles [17]). Comme tout groupe nilpotent est unimodulaire, la représentation quasi-régulière R de G sur $L^2(\Gamma\backslash G)$ définie par $(R(x)f)(y) = f(yx)$ $(x, y \in G)$ est unitaire. Si $f \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ et $X \in \mathfrak{g}$, on pose $(R_*(X)f)(x) = (d/dt)(R(e^{tX})f)(x)|_{t=0}$ et on montre que si $\mathbf{m}$ est une métrique invariante à gauche, alors [3]

$$\Delta_{\mathbf{m}} f = -\sum_{i=1}^{n} R_*(X_i)^2 f \qquad (f \in C^\infty(\Gamma\backslash G)) \quad \text{où } \{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$$

est une base orthonormée quelconque de $\mathfrak{g}$ pour $\mathbf{m}$ ($n = \dim G$).

Ceci étant, C. Gordon et E. Wilson introduisent les notions suivantes [5] :

1. Définition. — *Soit* G *un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, un élément* φ *de* $\mathrm{Aut}(G)$ *est appelé un automorphisme presque intérieur si pour tout* λ *dans* $\mathfrak{g}^*$, *il existe* x *dans* G *tel que* $\lambda \circ \varphi_* = \lambda \circ (I_x)_*$. *Un élément* D *de* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *est appelé dérivation presque intérieure si pour tout* X *dans* $\mathfrak{g}$, *il existe* Y *dans* $\mathfrak{g}$ *tel que* $D(X) = [Y, X]$.

On notera $\mathrm{AIA}(G)$ (resp. $\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$) l'ensemble des automorphismes (resp. dérivations) presque intérieurs. On a alors le résultat suivant [5] :

2. Proposition. — *Soit* G *un groupe de Lie nilpotent simplement connexe,* $\mathrm{AIA}(G)$ *est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe dont l'algèbre de Lie est* $\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$ ($\mathrm{AIA}(G)$ *étant identifié à un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$).

On peut maintenant énoncer les résultats de C. Gordon et E. Wilson [5] dont la démonstration repose sur la théorie des orbites de Kirillov.

3. Proposition. — *Soient* G *un groupe de Lie nilpotent simplement connexe*, Γ *un sous-groupe uniforme de* G, $\mathbf{m}$ *une métrique invariante à gauche et* φ *dans* AIA (G), *alors les variétés* $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma\backslash G, \varphi^* \mathbf{m})$ *sont isospectrales.*

4. *Remarque.* — On montre facilement que si $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$, alors $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ et $(\Gamma\backslash G, \varphi^* \mathbf{m})$ sont isométriques. Si l'on veut obtenir des déformations isospectrales non triviales en utilisant la Proposition précédente, on doit supposer que $\mathrm{AIA}(G) \neq \mathrm{Inn}(G)$.

Avant de continuer, remarquons que, une base de $\mathfrak{g}$ étant fixée, *l'ensemble des métriques invariantes à gauche s'identifie à l'ensemble des matrices symétriques définies positives et sera muni par la suite de la topologie induite par cette identification* (topologie indépendante du choix de la base). Ceci étant dit, on peut énoncer [5] :

5. Proposition. — *Soient* G *un groupe de Lie nilpotent simplement connexe*, Γ *un sous-groupe uniforme de* G *et* $\mathbf{m}_0$ *une métrique invariante à gauche. Si* $\mathrm{AIA}(G) \neq \mathrm{Inn}(G)$, *il existe une famille continue de métriques invariantes à gauche* $\{\mathbf{m}_s\}_{s \in I}$ (I *est un intervalle contenant* 0) *de la forme* $\mathbf{m}_s = \varphi_s^* \mathbf{m}_0$ *où* $\varphi_s \in \mathrm{AIA}(G)$ *telle que pour* $s \neq t$, *les variétés* $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_s)$ *et* $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_t)$ *soient isospectrales et non isométriques.*

Deux questions naturelles se posent :

1) Dans le cas où $\mathrm{AIA}(G) = \mathrm{Inn}(G)$, existe-t-il des déformations isospectrales non triviales (par des métriques invariantes à gauche) ?

2) Dans le cas où $\mathrm{AIA}(G) \neq \mathrm{Inn}(G)$, existe-t-il des déformations isospectrales autres que celles construites à l'aide de la proposition précédente ?

On se propose de répondre à ces deux questions en se restreignant à une classe de groupe de Lie, les groupes de Lie nilpotents non singuliers [4], *qui ressemblent, en un certains sens, aux groupes de Heisenberg.*

6. *Remarque.* — D. Deturck et C. Gordon ont introduit le groupe des automorphismes presque intérieurs par rapport à Γ : $\mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ [3]. Ce groupe contient AIA (G) et les propositions précédentes restent vraies si l'on remplace AIA (G) par $\mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ [3]. Cependant, dans le cas où G est non singulier, on montre facilement que AIA (G) et $\mathrm{AIA}(G; \Gamma)$ sont égaux, et ceci pour tout Γ uniforme.

II. Groupes de Lie non singuliers

1. Définition. — *Une algèbre de Lie nilpotente de rang* 2 (i. e. $\mathfrak{g}'$ *est contenue dans le centre* $\mathfrak{z}$) *est dite non singulière si pour tout* $X \in \mathfrak{g} - \mathfrak{g}'$, $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$. *Un groupe de Lie nilpotent simplement connexe est dit non singulier si son algèbre de Lie est non singulière.*

2. *Remarque.* — Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie non singulière et non abélienne, alors $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z}$. En effet, si $X \in \mathfrak{z} - \mathfrak{g}'$, $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Avant de continuer, donnons quelques exemples :

- $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^n$ (en tant qu'algèbre de Lie abélienne)
- $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_n$ (algèbre de Heisenberg; *voir* la Deuxième Partie) : cela résulte simplement du fait que la forme symplectique est non dégénérée et que le centre est de dimension 1.
- $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X_1\oplus\mathbb{R}X_2\oplus\mathbb{R}X_3\oplus\mathbb{R}X_4\oplus\mathbb{R}Z_1\oplus\mathbb{R}Z_2\oplus\mathbb{R}Z_3$, les seuls crochets non nuls étant :

$$[X_1, X_2]=[X_3, X_4]=Z_1$$
$$[X_1, X_3]=[X_4, X_2]=Z_2$$
$$[X_1, X_4]=[X_2, X_3]=Z_3$$

On vérifie facilement que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie non singulière.

En fait, tous ces exemples appartiennent à une classe d'algèbres de Lie non singulières appelées algèbres de Lie associées aux modules de Clifford ([11], [12]). On peut, par ailleurs, se demander quelles sont les conditions d'existence d'algèbres de Lie non-singulières; on a alors le résultat suivant [12] :

3. Proposition. — *Il existe une algèbre de Lie non singulière de dimension n dont l'algèbre dérivée (qui est égale au centre, si l'algèbre est non abélienne) est de dimension m si et seulement si $m<\rho(n-m)$ où ρ est la fonction définie par :*

$$\rho((2k+1)2^{4a+b})=8a+2^b \qquad (0\leqq b\leqq 3).$$

L'intérêt des algèbres de Lie non singulières est que la structure de $\mathrm{AIA}(G)$ est particulièrement simple. En effet, on a le résultat suivant :

4. Proposition. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie non singulière, alors $\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', \mathfrak{g}')$ (en tant qu'espace vectoriel). De plus, $\mathrm{AID}(\mathfrak{g})=\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$ si et seulement si la dimension de $\mathfrak{g}'$ est 0 (cas de $\mathbb{R}^n$) ou 1 (cas de $\mathfrak{h}_n$).*

Preuve. — Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, la Proposition est évidente ($\mathrm{AID}(\mathfrak{g})=\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', \mathfrak{g}')=\{0\}$). Supposons donc que $\mathfrak{g}$ non abélienne. Il suffit de prouver que si V est un supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$, alors $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}')$ est isomorphe à $\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$. Si D est dans $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}')$, notons $\hat{D}$ l'unique endomorphisme de $\mathfrak{g}$ qui s'annule sur $\mathfrak{g}'$ et qui coïncide avec D sur V. Comme $\hat{D}(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{g}'$ et $\hat{D}(\mathfrak{g}')=\{0\}$, $\hat{D}$ est une dérivation (l'égalité $\hat{D}([X, Y])=[\hat{D}(X), Y]+[X, \hat{D}(Y)]$ étant trivialement vérifiée) et comme $\mathfrak{g}$ est non singulière, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, il existe Y dans $\mathfrak{g}$ tel que $\hat{D}(X)=[Y, X]$. L'application $D\mapsto\hat{D}$ est donc bien à valeurs dans $\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$ et il est clair que c'est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}')$ sur $\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$. Posons $n=\dim\mathfrak{g}$ et $m=\dim\mathfrak{g}'$, alors

$$\dim\mathrm{AID}(\mathfrak{g})=\dim\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}')=m(n-m) \qquad \text{et} \qquad \dim\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})=\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'=n-m$$

(puisque $\mathfrak{g}'$ est égale au centre). Comme $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})\subset\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})=\mathrm{AID}(\mathfrak{g})$ si et seulement si $m(n-m)=n-m$. Comme $n\neq m$, on a forcément $m=1$, ce qui correspond aux algèbres de Heisenberg $\mathfrak{h}_n$. ■

III. Déformations isospectrales des nilvariétés non singulières

On se propose de montrer que, dans ce cadre, les seules déformations isospectrales sont celles mentionnées dans le paragraphe I. Plus précisément, on a le résultat suivant :

1. PROPOSITION. — *Soient* G *un groupe de Lie nilpotent, simplement connexe,* **non singulier** *et* Γ *un sous-groupe uniforme de* G. *Soit* $\{\mathbf{m}_s\}_{s\in\mathrm{I}}$ *une famille continue de métriques invariantes à gauche sur* G *telle que les variétés* $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_s)$ *soient deux à deux isospectrales, alors il existe une famille continue* $\{\psi_s\}_{s\in\mathrm{I}}$ *d'éléments de* AIA(G) *telle que pour tout* s *dans* I, *on ait* $\mathbf{m}_s=\psi_s^*\,\mathbf{m}_{s_0}$ $(s_0\in\mathrm{I})$.

Avant de donner la preuve de cette Proposition, remarquons que nous avons la réponse aux questions posées précédemment.

2. COROLLAIRE. — *Soient* G *et* Γ *comme dans la Proposition précédente. Si la dimension de* G′ *est* 0 (*cas de* $\mathbb{R}^n$) *ou* 1 (*cas de* H_n), *il n'y a pas de déformations isospectrales non triviales par des métriques invariantes à gauche sur* $\Gamma\backslash G$. *Si la dimension de* G′ *est supérieure ou égale à* 2, *il existe des déformations isospectrales non triviales par des métriques invariantes à gauche sur* $\Gamma\backslash G$ *et elles sont toutes sous la forme décrite dans la Proposition précédente.*

Preuve. — C'est une simple conséquence des Propositions II.4 et III.1. ■

*Preuve de la Proposition III.*1. — Soient G et Γ comme dans l'énoncé. Choisissons un supplémentaire V de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$ et choisissons une base $\{A_1, \ldots, A_k\}$ $(k=\dim V)$ (resp. $B_1, \ldots, B_l\}$ $(l=\dim\mathfrak{g}')$) de V (resp. $\mathfrak{g}'$). Alors $\mathscr{B}=\{A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ et toutes les matrices utilisées par la suite seront relatives à cette base.

D'autre part, on sait que l'exponentielle réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G (nous noterons log son inverse) et que si X et Y sont dans $\mathfrak{g}$, $\exp(X)\exp(Y)=\exp(X+Y+(1/2)[X, Y])$. Soient p_0 et p_1 les projections sur V et $\mathfrak{g}'$. On a alors, pour X et Y dans $\mathfrak{g}$,

$$p_0(\log(\exp(X).\exp(Y)))=p_0(X)+p_0(Y)$$

$$p_1(\log(\exp(X).\exp(Y)))=p_1(X)+p_1(Y)+\frac{1}{2}[p_0(X), p_0(Y)].$$

Soit Γ un sous-groupe uniforme de G, posons $\mathscr{L}=p_0(\log\Gamma)$. On a alors le résultat suivant :

3. LEMME. — $\mathscr{L}$ *est un réseau de* V.

Preuve. — Il est clair que $\mathscr{L}$ est un sous-groupe de V puisque l'application $G\to V$ $x\mapsto p_0(\log x)$ est un homomorphisme de groupes.

(i) $\mathscr{L}$ *engendre* V. En effet, soit V_0 l'espace vectoriel engendré par $\mathscr{L}$. Supposons $V_0\neq V$ et choisissons X dans $V-V_0$. Puisque $\Gamma\backslash G$ est compact, il existe une suite $\{\gamma_n\}_{n>0}$ d'éléments de Γ telle que la suite $\{\gamma_n\exp(nX)\}_{n\geq 0}$ admette une sous-suite convergente. Ecrivons $\gamma_n=\exp(Y_n+Z_n)$ avec $Y_n\in\mathscr{L}$ et $Z_n\in\mathfrak{g}'$. Or

$p_0(\gamma_n \exp(n\mathrm{X})) = \mathrm{Y}_n + n\mathrm{X}$ et une telle suite n'admet aucune sous-suite convergente puisque $\mathrm{Y}_n \in \mathscr{L}$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{V} - \mathrm{V}_0$. On en déduit que $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0$, donc $\mathscr{L}$ engendre bien V.

(ii) *$\mathscr{L}$ est discret*. Supposons qu'il existe une suite $\{\mathrm{X}_n\}_{n \geqq 0}$ d'éléments deux à deux distincts de $\mathscr{L}$ qui soit convergente. Par définition de $\mathscr{L}$, il existe une suite $\{\mathrm{Z}_n\}_{n \geqq 0}$ d'éléments de $\mathfrak{g}'$ telle que pour tout $n \geqq 0$, $\exp(\mathrm{X}_n + \mathrm{Z}_n)$ soit dans Γ. Or, on sait que $\Gamma \cap \mathrm{G}'$ est un sous-groupe uniforme de G' [17]. Soit D un domaine fondamental pour l'action de $\Gamma \cap \mathrm{G}'$ sur G'; pour tout $n \geqq 0$, il existe $\mathrm{W}_n \in \log(\Gamma \cap \mathrm{G}')$ tel que $\exp(\mathrm{Z}_n + \mathrm{W}_n) \in \mathrm{D}$. Comme $\bar{\mathrm{D}}$ est compact, on peut extraire une sous-suite $\{\exp(\mathrm{Z}_{p_n} + \mathrm{W}_{p_n})\}_{n \geqq 0}$ qui soit convergente. Comme $\{\exp(\mathrm{X}_{p_n} + \mathrm{Z}_{p_n} + \mathrm{W}_{p_n})\}_{n \geqq 0}$ est une suite convergente d'éléments de Γ, elle est constante à partir d'un certain rang et il en est de même pour la suite $\{\mathrm{X}_{p_n}\}_{n \geqq 0}$ ce qui constitue une contradiction. $\mathscr{L}$ est donc discret. $\mathscr{L}$ est donc bien un réseau de V. ■

4. *Remarque*. — L'application $\Gamma \backslash \mathrm{G} \to \mathscr{L} \backslash \mathrm{V}$ $x \mapsto p_0(\log x)$ est une submersion dont les fibres sont difféomorphes au tore $\Gamma \cap \mathrm{G}' \backslash \mathrm{G}'$. On va essayer de faire apparaître des métriques invariantes à gauche qui seront telles que l'on ait une submersion riemanienne à fibres totalement géodésiques. Plus précisément, on a le résultat suivant :

5. LEMME. — *Soit* G *comme ci-dessus. Pour toute métrique invariante à gauche* $\mathbf{m}$, *il existe* $\varphi_{\mathbf{m}}$ *dans* AIA(G) *tel que* V *et* $\mathfrak{g}'$ *soient orthogonaux pour* $(\varphi_{\mathbf{m}})^* \mathbf{m}$. *De plus l'application* $\mathbf{m} \mapsto \varphi_{\mathbf{m}}$ *est continue.*

Preuve. — On va chercher $\varphi_{\mathbf{m}}$ de sorte que la matrice de $(\varphi_{\mathbf{m}})_*$ par rapport à la base $\mathscr{B}$ soit de la forme : $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline {}^t\mathrm{B}_{\mathbf{m}} & 1 \end{array}\right)$ où $\mathrm{B}_{\mathbf{m}}$ est une matrice à l colonnes et k lignes ($l = \dim \mathrm{V}$, $k = \dim \mathfrak{g}'$).

Supposons que la matrice de $\mathbf{m}$ par rapport à cette base soit : $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \\ \hline {}^t\mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_3 \end{array}\right)$, un calcul facile montre que si l'on pose $\mathrm{B}_{\mathbf{m}} = -\mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3^{-1}$, la matrice de $(\varphi_{\mathbf{m}})^* \mathbf{m}$ sera $\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{m}'_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{m}_3 \end{array}\right)$ avec $\mathbf{m}'_1 = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3^{-1}\, {}^t\mathbf{m}_2$.

Il est donc clair que V et $\mathfrak{g}'$ sont orthogonaux pour $(\varphi_{\mathbf{m}})^* \mathbf{m}$. Il reste à vérifier que $\varphi_{\mathbf{m}} \in \mathrm{AIA}(\mathrm{G})$. Remarquons que $(\varphi_{\mathbf{m}})_* = \mathrm{Id} + \hat{\mathrm{D}}_{\mathbf{m}}$ où $\hat{\mathrm{D}}_{\mathbf{m}}$ est l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ dont la matrice est $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline {}^t\mathrm{B}_{\mathbf{m}} & 0 \end{array}\right)$. D'après la preuve de la Proposition II.4, il est clair que $\hat{\mathrm{D}}_{\mathbf{m}} \in \mathrm{AID}(\mathfrak{g})$; comme $(\varphi_{\mathbf{m}})_* = \exp(\hat{\mathrm{D}}_{\mathbf{m}})$, on en déduit que $\varphi_{\mathbf{m}}$ est dans AIA(G). La continuité de l'application $\mathbf{m} \mapsto \varphi_{\mathbf{m}}$ résulte de la continuité de l'application $\mathbf{m} \mapsto -\mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3^{-1}$. ■

Revenons au problème initial. Soient $\{\mathbf{m}_s\}_{s \in \mathrm{I}}$ une famille de métriques invariantes à gauche et $s_0 \in \mathrm{I}$ et supposons que pour $s \in \mathrm{I}$, les variétés $(\Gamma \backslash \mathrm{G}, \mathbf{m}_s)$ et $(\Gamma \backslash \mathrm{G}, \mathbf{m}_{s_0})$ soient isospectrales; notons Σ le spectre commun. Pour $s \in \mathrm{I}$, posons $\varphi_s = \varphi_{\mathbf{m}_s}$ où $\varphi_{\mathbf{m}_s}$ est l'élément de AIA(G) défini au lemme précédent et définissons $\mathbf{m}'_s = (\varphi_s)^* \mathbf{m}_s$. La famille $\{\mathbf{m}'_s\}_{s \in \mathrm{I}}$ est une famille continue de métriques invariantes à gauche (puisque l'application $s \mapsto \varphi_s$ l'est) et d'après la Proposotion I.3 les variétés $(\Gamma \backslash \mathrm{G}, \mathbf{m}'_s)$ et $(\Gamma \backslash \mathrm{G}, \mathbf{m}'_{s_0})$ sont isospectrales et ont Σ comme spectre commun. La matrice de $\mathbf{m}'_s$ par rapport à la base $\mathscr{B}$ est, avec des notations évidentes,

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{m}'_1(s) & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{m}_3(s) \end{array}\right)$$

avec $\mathbf{m}'_1(s) = \mathbf{m}_1(s) - \mathbf{m}_2(s)\,\mathbf{m}_3^{-1}(s)\,{}^t\mathbf{m}_2(s)$.

La projection $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}'(\mathbf{s})) \xrightarrow{p} (\mathscr{L}\backslash V, \mathbf{m}'_1(s))$ $x \mapsto p_0(\log x)$ est une submersion riemanienne, vu la forme de la métrique $\mathbf{m}'_s$. De plus, cette submersion est à fibres totalement géodésiques. Pour cela, il suffit de montrer que G' est totalement géodésique. Or, si U, V et W sont dans $\mathfrak{g}$ et si ∇^s désigne la connexion associée à $\mathbf{m}'_s$, on a :

$$2\,\mathbf{m}'_s(\nabla^s_U V, W) = \mathbf{m}'_s([U, V], W) - \mathbf{m}'_s([U, W], V) - \mathbf{m}'_s([V, W], U).$$

En particulier, si $U \in \mathfrak{g}'$ et $W \in \mathfrak{g}$, $\mathbf{m}'_s(\nabla^s_U U, W) = -\mathbf{m}'_s([U, W], U) = 0$. Ceci étant vrai pour tout W dans $\mathfrak{g}$, on en déduit que $\nabla^s_U U = 0$, donc G' est totalement géodésique.

Pour s dans I, choisissons une base orthonormée $\{X_1(s), \ldots, X_k(s)\}$ (resp. $\{Y_1(s), \ldots, Y_l(s)\}$) de V pour $\mathbf{m}'_1(s)$ (resp. de $\mathfrak{g}'$ pour $\mathbf{m}_3(s)$). Alors $\{X_1(s), \ldots, X_k(s), Y_1(s), \ldots, Y_l(s)\}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ pour $\mathbf{m}'_s$ et le Laplacien de $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}'_s)$ est

$$\Delta_{\mathbf{m}'_s} = -\sum_{i=1}^{k} R_*(X_i(s))^2 - \sum_{j=1}^{l} R_*(Y_j(s))^2.$$

Si $f \in C^\infty(\mathscr{L}\backslash V)$, alors $f \circ p \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ et, d'après ce qui précède,

$$\Delta_{\mathbf{m}'_s}(f \circ p) = (\Delta_{\mathbf{m}'_1(s)} f) \circ p$$

où $\Delta_{\mathbf{m}'_1(s)} = -\sum_{i=1}^{k} R_*(X_i(s))^2$ est le Laplacien de $(\mathscr{L}\backslash V, \mathbf{m}'_1(s))$.

On en déduit que pour tout s dans I, le spectre de $(\mathscr{L}\backslash V, \mathbf{m}'_1(s))$ est contenu dans Σ. Comme $(\mathscr{L}\backslash V, \mathbf{m}'_1(s))$ est un tore plat, on montre que l'application $s \mapsto \mathbf{m}'_1(s)$ est constante ([20], Théorème I).

On va montrer maintenant que l'application $s \mapsto \mathbf{m}_3(s)$ est constante. Pour cela, remarquons que $\mathfrak{g}'$ est une algèbre de Lie abélienne et que $\log\Gamma \cap \mathfrak{g}'$ est un réseau de $\mathfrak{g}'$. Posons $\Lambda = \{\lambda \in (\mathfrak{g}')^*$ tels que $\lambda(\log\Gamma \cap \mathfrak{g}') \subset \mathbb{Z}\}$ et soit $\mathscr{H}_\lambda = \{f \in L^2(\Gamma\backslash G)$ tels que $f(xz) = \exp(2\pi i \lambda(\log z)) f(x)$ pour $x \in G$ et $z \in G'\}$ pour $\lambda \in \Lambda$. On a alors le résultat suivant :

6. Lemme. — $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G) = \oplus_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{H}_\lambda$ *(somme hilbertienne). De plus, pour chaque* $\lambda \in \Lambda$, $\mathscr{H}_\lambda$ *est laissé stable par tout Laplacien associé à une métrique invariante à gauche.*

Preuve. — Soient $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G)$ et $x \in G$. Définissons $\varphi_x : \Gamma \cap G'\backslash G' \to \mathbb{C}$ par $\varphi_x(z) = f(xz)$. Comme φ_x est dans $L^2(\Gamma \cap G'\backslash G')$, on a la décomposition en série de

Fourier :

$$\varphi_x(z)=\sum_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda(x)\exp(2\pi i\lambda(\log z)) \quad \text{où} \quad C_\lambda(x)=\int_{\Gamma\cap G'\backslash G'} f(xw)\exp(-2\pi i\lambda(\log w))\,dw.$$

En particulier, en prenant pour z l'élément neutre de G, on obtient : $f(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda(x)$. Or C_λ est dans $\mathscr{H}_\lambda$, en effet : si $z\in G'$

$$C_\lambda(xz)=\int_{\Gamma\cap G'\backslash G'} f(xzw)\exp(-2\pi i\lambda(\log w))\,dw$$

$$C_\lambda(xz)=\int_{\Gamma\cap G'\backslash G'} f(xw)\exp(-2\pi i\lambda(\log w-\log z))\,dw$$

$$C_\lambda(xz)=C_\lambda(x)\exp(2\pi i\lambda(\log z)).$$

De plus, si $\lambda\neq\mu$, alors $\mathscr{H}_\lambda$ et $\mathscr{H}_\mu$ sont orthogonaux. En effet, si $f\in\mathscr{H}_\lambda$ et $g\in\mathscr{H}_\mu$; alors :

$$\int_{\Gamma\backslash G} f\bar{g}=\int_{\mathscr{L}\backslash V} f(x)\bar{g}(x)\left(\int_{\Gamma\cap G\backslash G'}\exp(2\pi i(\lambda-\mu)\log w)\,dw\right)dx=0.$$

La première partie du Lemme est donc démontrée.

Remarquons que si, L_z désigne la translation à gauche $x\mapsto xz$, f est dans $\mathscr{H}_\lambda$ si et seulement si pour tout $z\in G'$, $f\circ L_z=\exp(2\pi i\lambda(\log z))f$. Si Δ est le Laplacien associé à une métrique invariante à gauche, alors $\Delta(f\circ L_z)=(\Delta f)\circ L_z$ (puisque L_z est une isométrie), il en résulte que si f est dans $C^\infty(\Gamma\backslash G)\cap\mathscr{H}_\lambda$, alors

$$(\Delta f)\circ L_z=\exp(2\pi i\lambda(\log z))\,\Delta f, \qquad \text{donc} \quad \Delta f\in\mathscr{H}_\lambda. \quad \blacksquare$$

L'intérêt d'utiliser les espaces $\mathscr{H}_\lambda$ est que, en restriction à ces espaces, le Laplacien $\Delta_{\mathbf{m}'_s}$ a une expression plus simple. En effet, soit $\{X_1(s_0), \ldots, X_k(s_0)\}$ (resp. $\{Y_1(s), \ldots, Y_l(s)\}$) une base orthonormée de V (resp. g') pour $\mathbf{m}'_1(s)=\mathbf{m}'_1(s_0)$ (resp. $\mathbf{m}_3(s)$) et posons $\Delta_h=-\sum_{i=1}^{k} R_*(X_i(s_0))^2$. On a alors :

$$\Delta_{\mathbf{m}'_s}=\Delta_h-\sum_{i=1}^{l} R_*(Y_i(s))^2.$$

Soit $f\in C^\infty(\Gamma\ G)\cap\mathscr{H}_\lambda$,

$$R(\exp(tY_j(s)))f(x)=f(x\exp(tY_j(s)))=\exp(2\pi i\lambda(tY_j(s)))f(s),$$

on déduit que si $f\in C^\infty(\Gamma\backslash G)\cap\mathscr{H}_\lambda$, $R_*(Y_j(s))f=2\pi i\lambda(Y_j(s))f$. Donc, si l'on pose $\alpha(\lambda, s)=4\pi^2\sum_{j=1}^{l}\lambda(Y_j(s))^2$, pour tout f dans $\mathscr{H}_\lambda\cap C^\infty(\Gamma\backslash G)$, $\Delta_{\mathbf{m}'_s}f=\Delta_h f+\alpha(\lambda, s)f$.

Fixons λ dans Λ. Soit μ une valeur propre de $\Delta_{\mathbf{m}'_{s_0}}$ telle que $\mathscr{H}_\lambda$ contienne une fonction propre non nulle f correspondant à μ (une telle valeur propre existe toujours d'après le Lemme précédent). Pour un tel f, on a, si $s \in \mathrm{I}$,

$$\Delta_{\mathbf{m}'_s} f = \Delta_h f + \alpha(\lambda, s) f = \Delta_{\mathbf{m}'_{s_0}} f + (\alpha(\lambda, s) - \alpha(\lambda, s_0)) f.$$

On en déduit que $\Delta_{\mathbf{m}'_s} f = (\mu + \alpha(\lambda, s) - \alpha(\lambda, s_0)) f$. Donc l'application $\mathrm{I} \to \mathbb{R}$ $s \mapsto \mu + \alpha(\lambda, s) - \alpha(\lambda, s_0)$ est continue, à valeurs dans Σ, qui est discret, donc constante. On en déduit que pour s dans I, $\alpha(\lambda, s_0) = \alpha(\lambda, s)$. Ceci étant vrai pour tout λ dans Λ, les tores plats $(\Gamma \cap \mathrm{G}' \backslash \mathrm{G}', \mathbf{m}_3(s))$ et $(\Gamma \cap \mathrm{G}' \backslash \mathrm{G}', \mathbf{m}_3(s_0))$ sont isospectraux. Comme l'application $s \mapsto \mathbf{m}_3(s)$ est continue, elle est constante ([20], Théorème I).

Nous pouvons maintenant conclure. Nous avons montré que pour tout s dans I, $\mathbf{m}'_s = \mathbf{m}'_{s_0}$. Or $\mathbf{m}'_s = \varphi_s^* \mathbf{m}_{s_0}$ avec $\varphi_s \in \mathrm{AIA}(\mathrm{G})$, il en résulte que $\mathbf{m}_s = (\varphi_{s_0} \varphi_s^{-1})^* \mathbf{m}_{s_0}$. Si l'on pose $\psi_s = \varphi_{s_0} \varphi_s^{-1}$, alors $\mathbf{m}_s = \psi_s^* \mathbf{m}_{s_0}$ et $\psi_s \in \mathrm{AIA}(\mathrm{G})$. La Proposition est donc démontrée. ■

7. *Remarque*. — Nous avons montré que lors d'une déformation isospectrale (par des métriques invariantes à gauche), la restriction de la métrique à $\mathfrak{g}'$ est constante.

DEUXIÈME PARTIE : Finitude spectrale des variétés de Heisenberg

I. Classification et spectre des variétés de Heisenberg

Les résultats et notations de cette partie sont tirés de [7]; ils seront utilisés dans la seconde partie.

A. Notations. — Le groupe de Heisenberg est défini par :

$$\mathrm{H}_n = \left\{ \gamma(x, y, s) = \begin{pmatrix} 1 & {}^t x & s \\ 0 & \mathrm{I}_n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

(x et y sont considérés comme des vecteurs colonne de $\mathbb{R}^n$).

On vérifie facilement que H_n est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n+2, \mathbb{R})$ difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n+1}$ dont la loi de groupe est donné par :

$$\gamma(x, y, s) \,.\, \gamma(x', y', s') = \gamma(x + x', y + y', s + s' + \langle x, y' \rangle)$$

où $\langle \,.\,, \,.\, \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit facilement la formule du commutateur :

$$[\gamma(x, y, s), \gamma(x', y', s')] = \gamma(0, 0, \mathrm{A}((x, y), (x', y')))$$

où A désigne la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ est

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que le centre de H_n est $Z_n=\{\gamma(0, 0, s); s\in\mathbb{R}\}$, puisque A est non dégénérée; H_n est donc nilpotent de rang 2.

D'autre part, l'algèbre de Lie de H_n est définie par :

$$\mathfrak{h}_n=\left\{ X(x, y, s)=\begin{pmatrix} 0 & {}^t x & s \\ 0 & O_n & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x, y)\in\mathbb{R}^{2n}, s\in\mathscr{R} \right\}.$$

L'exponentielle réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{h}_n$ sur H_n et on vérifie que $\exp(X(x, y, s))=\gamma(x, y, s+(1/2)\langle x, y\rangle)$. Le crochet de Lie est donné par :

$$[X(x, y, s), X(x', y', s')]=X(0, 0, A((x, y), (x', y'))).$$

Il en résulte que le centre de $\mathfrak{h}_n$ est $\mathfrak{z}_n=\{X(0, 0, s); s\in\mathbb{R}\}$. Par la suite, nous identifierons $\mathbb{R}^{2n}$ avec le sous-espace $\{X(x, y, 0); (x, y)\in\mathbb{R}^{2n}\}$ de $\mathfrak{h}_n$. On a alors la décomposition $\mathfrak{h}_n=\mathbb{R}^{2n}\oplus\mathfrak{z}_n$. Notons $Z=X(0, 0, 1)$, on a alors, pour tout X, Y dans $\mathbb{R}^{2n}$: $[X, Y]=A(X, Y)Z$.

B. Automorphismes de H_n. — Notons $\mathrm{Aut}(H_n)$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_n)$) le groupe des automorphismes de H_n (resp. $\mathfrak{h}_n$). L'application :

$$\begin{gathered}\mathrm{Aut}(H_n)\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_n)\\ \varphi\mapsto\varphi_*\end{gathered}$$

(φ_* désigne l'application tangente à φ en l'identité) est un isomorphisme de groupes, puisque H_n est simplement connexe. Par la suite, nous identifierons ces deux groupes. Notons :

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})=\{\beta\in\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid {}^t\beta J\beta=\varepsilon J, \varepsilon=\pm 1\}$$

$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2n+1, \mathbb{R})$ par l'injection : $\beta\mapsto\left(\begin{array}{c|c}\beta & 0\\ \hline 0 & \varepsilon\end{array}\right)$.

Avec cette identification, il est clair que $\widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_n)$. On vérifie facilement que tout élément de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_n)$ s'écrit sous la forme $\alpha\beta$ où $\beta\in\widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$ et :

$$\alpha=\left(\begin{array}{c|c} a I_{2n} & 0 \\ \hline {}^t w & a^2 \end{array}\right) \quad \text{où} \quad a\in\mathbb{R}-\{0\} \quad \text{et} \quad w\in\mathbb{R}^{2n}.$$

1. *Remarque*. — Les automorphismes intérieurs de H_n correspondent au cas où $a=1$ et $\beta=\mathrm{id}$.

C. Classification des sous-groupes discrets cocompacts. — Notons $\mathscr{D}_n=\{r=(r_1, \ldots, r_n)\in(\mathbb{N}^*)^n \mid \forall i\in\{1, \ldots, n-1\}\ r_i \text{ divise } r_{i+1}\}$. Si $r\in\mathscr{D}_n$, notons δ_r la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $r_1, r_2, \ldots, r_n, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ fois}}$.

Soit $\Gamma_r=\{\gamma(x, y, s) \mid \binom{x}{y}\in\delta_r . \mathbb{Z}^{2n}, s\in\mathbb{Z}\}$. On vérifie facilement que Γ_r est un sous-groupe discret et que Γ_r H_n est compact. En fait, tous les sous-groupes discrets cocompacts sont de ce type. Plus précisément, on a le résultat suivant ([7], p. 255) :

1. Proposition. — *Soit* Γ *un sous-groupe discret cocompact de* H_n. *Alors il existe* φ *dans* $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_n)$ *et* r *dans* $\mathscr{D}_n$ *tels que* $\varphi(\Gamma)=\Gamma_r$. *De plus, si* $r\neq s$, Γ_r *et* Γ_s *sont non isomorphes en tant que groupes abstraits* (*en particulier, les variétés* $\Gamma_r\backslash\mathrm{H}_n$ *et* $\Gamma_s\backslash\mathrm{H}_n$ *ne sont pas homéomorphes*.

D. Géométrie riemannienne sur H_n. — *Dans tout ce travail, nous nous intéresserons uniquement aux métriques invariantes à gauche sur* H_n. Notons $\mathscr{M}_n$ l'ensemble de ces métriques. Soit $\mathbf{m}$ dans $\mathscr{M}_n$, $\mathbf{m}$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur $\mathfrak{h}_n$. Soit $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$; comme $\mathfrak{h}_n=\mathbb{R}^{2n}\oplus\mathbb{R}\mathrm{Z}$, $\mathscr{B}=\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{Z}\}$ est une base de $\mathscr{H}_n$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, on peut identifier l'ensemble des produits scalaires sur $\mathfrak{h}_n$, et donc $\mathscr{M}_n$, avec $\mathrm{S}^+_{2n+1}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques définies positives. $\mathscr{M}_n$ sera muni de la topologie induite par cette identification.

Si Γ est discret et cocompact et si $\mathbf{m}$ est dans $\mathscr{M}_n$, alors Γ opère par multiplication à gauche comme un groupe d'isométries de $(\mathrm{H}_n, \mathbf{m})$. La métrique $\mathbf{m}$ induit donc une métrique $\bar{\mathbf{m}}$ sur $\Gamma\backslash\mathrm{H}_n$ telle que la projection $(\mathrm{H}_n, \mathbf{m})\to(\Gamma\backslash\mathrm{H}_n, \bar{\mathbf{m}})$ soit un revêtement riemannien. *Nous nous intéresserons uniquement aux métriques sur* $\Gamma\backslash\mathrm{H}_n$ *provenant d'une métrique invariante à gauche sur* H_n, c'est-à-dire aux *variétés de Heisenberg* (et nous identifierons les deux métriques $\mathbf{m}$ et $\bar{\mathbf{m}}$).

La proposition suivante permet de se ramener au cas où $\Gamma=\Gamma_r$.

1. Proposition. — *Soient* Γ *un sous-groupe discret cocompact de* H_n et $\mathbf{m}$ dans $\mathscr{M}_n$. *Il existe* r *dans* $\mathscr{D}_n$ *et* $\mathbf{m}'$ *dans* $\mathscr{M}_n$ *tels que* $(\Gamma\backslash\mathrm{H}_n, \mathbf{m})$ *soit isométrique à* $(\Gamma_r\backslash\mathrm{H}_n, \mathbf{m}')$.

Preuve. — Soit φ dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_n)$ tel que $\varphi(\Gamma)=\Gamma_r$ (Proposition I.C.1). Il est clair que φ induit une isométrie de $(\Gamma\backslash\mathrm{H}_n, \mathbf{m})$ sur $(\Gamma_r\backslash\mathrm{H}_n, \mathbf{m}')$ avec $\mathbf{m}'=(\varphi^{-1})^*\mathbf{m}$. Il suffit donc de vérifier que $\mathbf{m}'\in\mathscr{M}_n$. Désignons par L_x la translation à gauche par x ($x\in\mathrm{H}_n$). On a alors :

$$\mathrm{L}_x^*\mathbf{m}'=\mathrm{L}_x^*(\varphi^{-1})^*\mathbf{m}=(\varphi^{-1}\circ\mathrm{L}_x)^*\mathbf{m}.$$

Comme

$$\varphi^{-1}\circ\mathrm{L}_x=\mathrm{L}_{\varphi^{-1}(x)}\circ\varphi^{-1},\ \mathrm{L}_x^*\mathbf{m}'=(\varphi^{-1})^*(\mathrm{L}_{\varphi^{-1}(x)})^*\mathbf{m}.$$

Or $\mathbf{m}\in\mathscr{M}_n$, donc $\mathrm{L}^*_{\varphi^{-1}(x)}\mathbf{m}=\mathbf{m}$, on en déduit que $\mathrm{L}_x^*\mathbf{m}'=\mathbf{m}'$. La métrique $\mathbf{m}'$ est donc bien invariante à gauche. ■

2. *Remarque.* — Soit $\{\mathbf{m}_s\}_{s\in\mathrm{I}}$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$) une famille continue de métriques (*i.e.* $s\mapsto\mathbf{m}_s$ est continue). Si l'on pose $\mathbf{m}'_s=(\varphi^{-1})^*\mathbf{m}_s$ où φ est dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_n)$, la famille $\{\mathbf{m}'_s\}_{s\in\mathrm{I}}$ est aussi continue, car $\mathbf{m}'_s={}^t(\varphi_*^{-1})\,\mathbf{m}_s\,(\varphi_*^{-1})$ sur $\mathfrak{h}_n$.

Nous supposerons donc maintenant que Γ est de la forme Γ_r. Pour décrire les classes d'isométrie, nous avons besoin du résultat suivant ([7], p. 242).

3. PROPOSITION. — *Les variétés* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m}')$ *sont isométriques si et seulement si, il existe u dans* H_n *et* φ *dans* $\mathrm{Aut}(H_n)$ *tels que :*

i 1. $\varphi^* \mathbf{m} = \mathbf{m}'$

i 2. $\varphi(\Gamma_r) = u \Gamma_r u^{-1}$.

Preuve. — Soient φ et u comme dans l'énoncé. Posons $\psi = L_{u^{-1}} \varphi$, alors ψ induit une isométrie de $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m}')$ sur $(\Gamma_r\, H_n, \mathbf{m})$. En effet, $\psi^* \mathbf{m} = \varphi^* L^*_{u^{-1}} \mathbf{m} = \varphi^* \mathbf{m} = \mathbf{m}'$. D'autre part, soient γ dans Γ_r et x dans H_n, $\psi(\gamma x) = u^{-1} \varphi(\gamma) \varphi(x)$. D'après 2), il existe γ' dans Γ_r tel que $\varphi(\gamma) = u \gamma' u^{-1}$, donc $\psi(\gamma x) = \gamma' \psi(x)$. L'application ψ induit donc un difféomorphisme de $\Gamma_r\backslash H_n$.

La réciproque, plus difficile, est démontrée dans [6] et utilise la classification des isométries de $(H_n, \mathbf{m})$. ■

Nous allons maintenant imposer une normalisation :

4. LEMME. — *Pour tout* $\mathbf{m}$ *dans* $\mathcal{M}_n$, *il existe* $\mathbf{m}'$ *dans* $\mathcal{M}_n$ *telle que* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m}')$ *soient isométriques et* $\mathbb{R}^{2n}$ *soit orthogonal à* $\mathfrak{z}_n$ *pour la métrique* $\mathbf{m}'$.

Preuve. — Soit $\mathbf{m}$ dans $S^+_{2n+1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{m} = (m_{ij})_{i,\, j \leqq 2n+1}$. Notons $w(\mathbf{m})$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont la i-ième composante est $w_i = -m_{i,\, 2n+1}(m_{2n+1,\, 2n+1})^{-1}$. Posons

$$\varphi_{\mathbf{m}} = \left(\begin{array}{c|c} I_{2n} & 0 \\ \hline {}^t w(\mathbf{m}) & 1 \end{array}\right).$$

Soit $\mathbf{m}' = \varphi^*_{\mathbf{m}} \mathbf{m}$. On a $\mathbf{m}'(X_i, Z) = \mathbf{m}(X_i + w_i Z, Z) = 0$, de même $\mathbf{m}'(Y_i, Z) = 0$. Comme $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathfrak{z}_n$ sont orthogonaux pour $\mathbf{m}'$. Or, d'après la Remarque I.B.1, $\varphi_{\mathbf{m}}$ est un automorphisme intérieur. Il en résulte que $\varphi_{\mathbf{m}}$ induit bien une isométrie de $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m}')$ sur $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$. ■

5. *Remarque.* — Si $\{\mathbf{m}_s\}_{s \in I}$ est une famille continue de métriques, l'application $s \mapsto \varphi_{\mathbf{m}_s}$ est clairement continue, donc si l'on pose $\mathbf{m}'_s = \varphi^*_{\mathbf{m}_s} \mathbf{m}_s$, la famille $\{\mathbf{m}'_s\}_{s \in I}$ est continue.

On a donc montré que dans chaque classe d'isométrie, il y a un élément $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$ où $\mathbf{m}$ est une métrique dont la matrice par rapport à la base $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{h}_n$ est de la forme :

$$(*) \qquad \mathbf{m} = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right) \quad \text{où} \quad h \in S^+_{2n}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g \in \mathbb{R}^{+*}.$$

6. PROPOSITION. — *Soient* $\mathbf{m}$ *et* $\mathbf{m}'$ *deux métriques de la forme* (*), *alors* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m}')$ *sont isométriques si et seulement si il existe* β *dans* $\delta_r \mathrm{GL}(2n, \mathbb{Z}) \delta_r^{-1} \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ *tel que* $\mathbf{m}' = \beta^* \mathbf{m}$.

Preuve. — Rappelons que $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m}')$ sont isométriques si et seulement si il existe φ dans $\mathrm{Aut}(H_n)$ et u dans H_n tels que :

i 1. $\varphi^* \mathbf{m} = \mathbf{m}'$

i 2. $\varphi(\Gamma_r) = u \Gamma_r u^{-1}$.

Supposons donc $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m}')$ isométriques. Écrivons φ, $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$ de la forme suivante :

$$\mathbf{m} = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right) \qquad \mathbf{m}' = \left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline 0 & g' \end{array}\right) \qquad \varphi = \left(\begin{array}{c|c} a\beta & 0 \\ \hline {}^t w \beta & a^2 \varepsilon \end{array}\right)$$

avec $\beta \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ et $w \in \mathbb{R}^{2n}$.

La condition *i* 1 est équivalente :

(i) $h' = a^2 ({}^t \beta h \beta) + g ({}^t \beta w^t w \beta)$

(ii) $g' = a^4 g$

(iii) $0 = a^2 \varepsilon g ({}^t \beta w)$.

On en déduit que $w = 0$ et $h' = a^2 ({}^t \beta h \beta)$.

Imposons la condition *i* 2. Posons π_1 (resp. π_2) $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ (resp. $(x_1, x_2) \mapsto x_2$). Soit $\gamma = \gamma(\delta_r^x, s)$ dans Γ_r où $x \in \mathbb{Z}^{2n}$ et $s \in \mathbb{Z}$ (on a identifié $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). Un calcul facile montre :

$$\varphi(\gamma) = \gamma\left(a \beta \delta_r x,\ a^2 \left[\varepsilon\left(s - \frac{1}{2}\langle \pi_1 \delta_r x, \pi_2 \delta_r x \rangle\right) + \frac{1}{2}\langle \pi_1 \beta \delta_r x, \pi_2 \beta \delta_r x \rangle\right]\right).$$

Soit $u = \gamma(u_0, s_0)$. Dans *i* 2, on doit avoir $u^{-1} \varphi(\gamma) u \in \Gamma_r$, ce qui conduit aux conditions :

(*a*) $\forall x \in \mathbb{Z}^{2n}$, $a \beta \delta_r x \in \delta_r \mathbb{Z}^{2n}$.

(*b*) $\forall x \in \mathbb{Z}^{2n}$, $\forall s \in \mathbb{Z}$:

$$a^2 \left[\varepsilon\left(s - \frac{1}{2}\langle \pi_1 \delta_r x, \pi_2 \delta_r x \rangle\right) + \frac{1}{2}\langle \pi_1 \beta \delta_r x, \pi_2 \beta \delta_r x \rangle\right] + a \mathrm{A}(\beta \delta_r x, u_0)$$

est dans $\mathbb{Z}$.

En faisant $x = 0$ et $s = 1$ dans *b*), on obtient $a^2 \in \mathbb{Z}$. En appliquant le même raisonnement à φ^{-1}, on obtient $a^{-2} \in \mathbb{Z}$, donc $a = \pm 1$. Quitte à changer β en $-\beta$, on peut supposer $a = 1$. On en déduit que $\varphi \in \widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$. Or, d'après *a*), φ est un isomorphisme du réseau $\delta_r . \mathbb{Z}^{2n}$, donc $\varphi \in \delta_r \mathrm{GL}(2n, \mathbb{Z}) \delta_r^{-1}$. Il en résulte que $\varphi \in \widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})} \cap \delta_r \mathrm{GL}(2n, \mathbb{Z}) \delta_r^{-1}$.

Réciproquement, supposons φ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})} \cap \delta_r \mathrm{GL}(2n, \mathbb{Z}) \delta_r^{-1}$. La condition (*a*) est automatiquement vérifiée. Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir u_0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ tel que la condition (*b*) soit vérifiée. Comme $a = 1$ et $s \in \mathbb{Z}$, la condition (*b*) est équivalente à :

(*b'*) $\forall x \in \mathbb{Z}^{2n}$, $\rho(x) + \mathrm{A}(\beta \delta_r x, u_0) \in \mathbb{Z}$

où l'on a posé $\rho(x) = \frac{1}{2}[\langle \pi_1 \beta \delta_r x, \pi_2 \beta \delta_r x \rangle - \varepsilon \langle \pi_1 \delta_r x, \pi_2 \delta_r x \rangle]$.

Or (b') exprime le fait que : $\forall \gamma \in \Gamma_r$, $\varphi(\gamma) \in u \Gamma_r u^{-1}$. Mais il est clair qu'il suffit de vérifier cette condition sur les générateurs de Γ_r, c'est-à-dire qu'il suffit de vérifier que :

(b'') $\forall x \in \{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$, $\rho(x) + A(\beta\delta_r x, u_0) \in \mathbb{Z}$. Comme la forme symplectique A est non dégénérée, il existe $u_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$A(\beta\delta_r X_i, u_0) = -\rho(X_i) \qquad \text{et} \qquad A(\beta\delta_r Y_i, u_0) = -\rho(Y_i) \quad \text{pour } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pour un tel u_0, la condition (b'') sera donc vérifiée. La proposition est donc démontrée. ■

Posons

$$\mathscr{I}_n = \{(r, \mathbf{m}) \mid r \in \mathscr{D}_n, \mathbf{m} \in \mathscr{M}_n \text{ et } \mathbf{m} \text{ est de la forme } (*)\}.$$

Définissons sur $\mathscr{I}_n$ la relation d'équivalence suivante :

$$(r, \mathbf{m}) \sim (r', \mathbf{m}') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ r = r' \\ \text{et} \\ 2)\ \mathbf{m}' = \beta^* \mathbf{m} \text{ où } \beta \in \widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})} \cap \delta_r \mathrm{GL}(2n, \mathbb{Z}) \delta_r^{-1} \end{cases}$$

Nous venons de prouver ([7], p. 257) :

7. PROPOSITION. — *L'ensemble des classes d'isométrie de variété de Heisenberg s'identifie à* $\mathscr{I}_n/\sim$.

E. SPECTRE D'UNE VARIÉTÉ DE HEISENBERG. — D'après ce qui précède, il suffit de calculer le spectre de $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m})$ dans le cas où $\mathbf{m}$ est une métrique de la forme (*). Pour cela, introduisons la représentantion quasi-régulière R de H_n sur $L^2(\Gamma_r \backslash H_n)$ définie par : $\forall x, y \in H_n$, $(R(x)f)(y) = f(yx)$. (Cette représentation est unitaire, car H_n est unimodulaire.)

Si f est dans $C^\infty(\Gamma_r \backslash H_n)$ et X dans $\mathfrak{h}_n$, on pose :

$$(R_*(X).f)(x) = \frac{d}{dt}(R(e^{tX})f)(x)\big|_{t=0}.$$

Un calcul facile et le fait que H_n est unimodulaire montrent que

$$\forall f \in C^\infty(\Gamma_r \backslash H_n) \quad \Delta_{\mathbf{m}} f = -\sum_{i=1}^{2n+1} R_*(U_i)^2.f$$

où $\{U_i\}_{1 \leq i \leq 2n+1}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{h}_n$ pour $\mathbf{m}$. En utilisant la théorie des orbites de Kirillov, on peut classifier les représentations irréductibles unitaires de H_n et obtenir une expression explicite du spectre de $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m})$.

Avant de passer à la description du spectre, démontrons un résultat qui nous sera utile par la suite.

1. Lemme. — *Soient h et h' dans* $S_{2n}^{+}(\mathbb{R})$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $h^{-1}J$ et $h'^{-1}J$ *ont mêmes valeurs propres* :

(ii) $\exists\, \beta \in \widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$ *tel que* $h' = {}^t\beta\, h\, \beta$.

Preuve. — Si h est dans $S_{2n}^{+}(\mathbb{R})$, notons $h^{1/2}$ l'unique élément de $S_{2n}^{+}(\mathbb{R})$ tel que $(h^{1/2})^2 = h$. Les matrices $h^{-1}J$ et $h^{1/2}(h^{-1}J)h^{-1/2}$ ont mêmes valeurs propres. Or, $h^{-1/2}Jh^{-1/2}$ est antisymétrique par rapport à la structure euclidienne standard de $\mathbb{R}^{2n}$, il existe donc O_1 dans $O(2n)$ tel que :

$$h^{-1/2}Jh^{-1/2} = O_1^{-1}\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_n \end{pmatrix} O_1$$

où $D_k = \begin{pmatrix} 0 & d_k \\ -d_k & 0 \end{pmatrix}$ $(d_k > 0)$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

On en déduit que les valeurs propres de $h^{-1}J$ sont de la forme $\pm i d_k$ $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : d'après ce qui précède, il existe O dans $O(2n)$ tel que $h'^{-1/2}Jh'^{-1/2} = O^{-1}h^{-1/2}Jh^{-1/2}O$. Il en résulte que $\alpha = h'^{-1/2}O^{-1}h^{-1/2}$ est dans $\widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$. Or, $h'^{-1/2} = \alpha h^{1/2} O$, donc $h' = \alpha h\, {}^t\alpha = {}^t({}^t\alpha)\, h\, {}^t\alpha$. Comme ${}^t\alpha$ est dans $\widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$, on a bien $h' = {}^t\beta\, h\, \beta$ avec $\beta = {}^t\alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : supposons que $h' = {}^t\beta\, h\, \beta$ avec β dans $\widetilde{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})}$. On a : $h'^{-1}J = \beta^{-1}h^{-1\,t}\beta^{-1}J = -\beta^{-1}(h^{-1}J)(J^t\beta^{-1})J$. Or, $\beta^{-1}J^t\beta^{-1} = \varepsilon J$, donc $J^t\beta^{-1} = \varepsilon\beta J$. On en déduit : $h'^{-1}J = -\beta^{-1}(h^{-1}J)(\varepsilon\beta J)J$, donc $h'^{-1}J = \varepsilon\beta^{-1}(h^{-1}J)\beta$. Comme $h^{-1}J$ et $-h^{-1}J$ ont mêmes valeurs propres, on en déduit le résultat voulu. ■

Nous pouvons maintenant donner l'expression du spectre $\Sigma(r, \mathbf{m})$ de $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m})$ où $\mathbf{m}$ est une métrique de la forme (*) :

$$\mathbf{m} = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right)$$

Notons $\{\pm i d_k\}_{k=1, \ldots, n}$ les valeurs propres de $h^{-1}J$. Le spectre se décompose en deux parties :

a. Définissons la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^{2n}$: $\forall x \in \mathbb{R}^{2n}$, $q(x) = {}^t x(\delta_r h \delta_r)^{-1}x$ et posons $\Sigma_1(r, \mathbf{m}) = \{4\pi^2 q(x),\ x \in \mathbb{Z}^{2n}\}$.

b. Posons $\mu(c, k) = \dfrac{4\pi^2 c^2}{g} + 2\pi c \sum_{i=1}^{n}(2k_i + 1)d_i$ où $c \in \mathbb{N}^*$ et $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Soit $\Sigma_2(r, \mathbf{m})$ l'ensemble des $\mu(c, k)$, chacun étant compté avec la multiplicité $2c^n|\Gamma_r|$ où $|\Gamma_r| = \det \delta_r$. Le spectre de $(\Gamma_r\ H_n, \mathbf{m})$ est alors la réunion $\Sigma_1(r, \mathbf{m}) \cup \Sigma_2(r, \mathbf{m})$ où les valeurs propres sont comptées avec multiplicité, c'est-à-dire que si λ apparaît avec multiplicité p dans $\Sigma_1(r, \mathbf{m})$ et avec multiplicité q dans $\Sigma_2(r, \mathbf{m})$, elle est comptée avec multiplicité $p+q$ dans $\Sigma(r, \mathbf{m})$.

2. *Remarque* :

• La variété $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m})$ est un fibré en cercle au-dessus du tore $(\delta_r \mathbb{Z}^{2n} \backslash \mathbb{R}^{2n}, h)$ à fibres totalement géodésiques. La partie $\Sigma_1(r, \mathbf{m})$ correspond au spectre de la base et les fonctions propres associées à ces valeurs propres sont constantes sur les fibres, c'est-à-dire qu'elles remontent les fonctions propres du tore de base.

• D'après le lemme précédent, les nombres d_i qui apparaissent dans $\Sigma_2(r, \mathbf{m})$ ne dépendent que de la classe d'isométrie et non du choix particulier d'une métrique.

II. Rigidité et finitude spectrale des variétés de Heisenberg

Dans [7], il est démontré que deux variétés $(\Gamma_r \backslash H_1, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_s \backslash H_1, \mathbf{m}')$ sont isospectrales si et seulement si elles sont isométriques. Une question naturelle est de savoir si ce qui se passe en dimension supérieure. Dès que $n \geqq 2$, la situation n'est plus du tout la même ([7], p. 262-263) :

1. Proposition. — *Si* $|\Gamma_r| = |\Gamma_s|$, *il existe deux métriques* $\mathbf{m}$ *et* $\mathbf{m}'$ *telles que* $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma_s \backslash H_n, \mathbf{m}')$ *soient isospectrales et non isométriques.*

2. *Remarque.* — Si l'on choisit $r \neq s$ tels que $|\Gamma_r| = |\Gamma_s|$, on obtient des variétés de Heisenberg isospectrales et non homéomorphes. Nous verrons cependant que le spectre détermine la topologie à ambiguïté finie près (*i.e.* un nombre fini de $r \in \mathscr{D}_n$).

A priori, le spectre apparaît, dans le cadre des variétés de Heisenberg, comme invariant riemannien assez souple. On a cependant le résultat suivant (« rigidité spectrale »), qui a été démontré dans la Première Partie (Corollaire III.2), mais dont on donne ici une preuve différente basée sur le calcul du spectre.

3. Proposition. — *Soient* $\{\mathbf{m}_s\}_{s \in \mathrm{I}}$ (I *est intervalle de* $\mathbb{R}$) *une famille continue de métriques et* Γ *un sous-groupe discret cocompact de* H_n. *On suppose que quels que soient* s *et* t *dans* I, *les variétés* $(\Gamma \backslash H_n, \mathbf{m}_s)$ *et* $(\Gamma \backslash H_n, \mathbf{m}_t)$ *sont isospectrales ; alors quels que soient* s *et* t *dans* I, $(\Gamma \backslash H_n, \mathbf{m}_s)$ *et* $(\Gamma \backslash H_n, \mathbf{m}_t)$ *sont isométriques.*

Preuve. — Soient $\{\mathbf{m}_s\}_{s \in \mathrm{I}}$ et Γ comme ci-dessus. D'après la Proposition I.C.1, il existe $r \in \mathscr{D}_n$ et φ dans $\mathrm{Aut}(H_n)$ tels que $\varphi(\Gamma) = \Gamma_r$ et $(\Gamma \backslash H_n, \mathbf{m}_s)$ soit isométrique à $(\Gamma_r \backslash H_n, (\varphi^{-1})^* \mathbf{m}_s)$. Posons $\mathbf{m}'_s = (\varphi^{-1})^* \mathbf{m}_s$; d'après la Remarque I.D.2, la famille $\{\mathbf{m}'_s\}_{s \in \mathrm{I}}$ est continue. Mais, d'après le Lemme I.D.4, $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m}'_s)$ est isométrique à $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m}''_s)$ où $\mathbf{m}''_s = (\varphi_{\mathbf{m}'_s})^* \mathbf{m}'_s$ (avec les mêmes notations que dans ce lemme), où $\mathbf{m}''_s$ est une métrique de la forme (*) :

$$\mathbf{m}''_s = \left(\begin{array}{c|c} h_s & 0 \\ \hline 0 & g_s \end{array} \right)$$

D'après la Remarque I.D.5, les applications $h_s : \mathrm{I} \to S^+_{2n}(\mathbb{R})$ et $g_s : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^+$ sont continues. Pour tout s dans I, définissons sur $\mathbb{R}^{2n}$ la forme quadratique q_s par : $\forall x \in \mathbb{R}^{2n}$, $q_s(x) = {}^t x (\delta_r h_s \delta_r)^{-1} x$. Soit Σ le spectre commun aux $(\Gamma_r \backslash H_n, \mathbf{m}''_s)$. Par hypothèse : $\forall s \in \mathrm{I}$, $\Sigma_1(r, \mathbf{m}''_s) \subset \Sigma$. Fixons x dans $\mathbb{Z}^{2n}$; l'application $s \mapsto 4\pi^2 q_s(x)$ est définie sur I, continue et à valeurs dans Σ, qui est un ensemble discret, cette application est donc constante. Soit s_0 un élément fixé de I, on a donc : pour tout s dans I, et pour tout x dans $\mathbb{Z}^{2n}$, $q_s(x)=q_{s_0}(x)$. Par homogénéité, on en déduit que pour tout x dans $\mathbb{Q}^{2n}$ et pour tout s dans I : $q_s(x)=q_{s_0}(x)$. Comme $\mathbb{Q}^{2n}$ est dense dans $\mathbb{R}^{2n}$, on en déduit que $q_s=q_{s_0}$ pour tout s dans I. On en déduit que la fonction $s\mapsto h_s$ est constante.

D'autre part, on sait que deux variétés isospectrales ont même volume [1]. Un calcul facile montre que $\mathrm{Vol}((\Gamma_r\ \mathrm{H}_n, \mathbf{m}))=|\Gamma_r|\sqrt{\det \mathbf{m}}$. On en déduit que pour tout s dans I : $|\Gamma_r|\sqrt{\det h_s}\sqrt{g_s}=|\Gamma_r|\sqrt{\det h_{s_0}}\sqrt{g_{s_0}}$. D'après ce qui précède, on a forcément $g_s=g_{s_0}$. Finalement, la famille $\{\mathbf{m}_s''\}_{s\in\mathrm{I}}$ est constante. Comme pour tout s dans I $(\Gamma_r\ \mathrm{H}_n, \mathbf{m}_s'')$ est isométrique à $(\Gamma\backslash\mathrm{H}_n, \mathbf{m}_s)$, on en déduit le résultat voulu. ■

4. *Remarque*. – Nous avons utilisé le fait que deux variétés isospectrales ont même volume. Ceci n'est qu'une des conséquences du développement de Minakshisundaram-Pleijel [1]. Rappelons que si (M, g) est une variété riemannienne compacte et que si l'on note $\mathrm{Spec}(\mathrm{M}, g)=\{0=\lambda_0<\lambda_1\leqq\ldots\}$ son spectre, alors la série $\mathrm{Z}(t)=\sum_{t=0}^{+\infty} e^{-\lambda_k t}$ est convergente pour $t>0$ et admet un développement asymptotique quand $t\to 0^+$ du type :

$$\mathrm{Z}(t)\sim(4\pi t)^{-n/2}(a_0+a_1 t+\ldots+a_k t^k+\ldots)$$

où n désigne la dimension de la variété. Les valeurs a_0, a_1, a_2 sont connues :

- $a_0=\mathrm{Vol}(\mathrm{M}, g)$
- $a_1=(1/6)\int_{\mathrm{M}}\tau\, dv_g$
- $a_2=(1/360)\int_{\mathrm{M}}(2|\mathrm{R}|^2-2|\rho|^2+5\tau^2)\, dv_g$

où τ désigne la courbe scalaire, R le tenseur de courbure et ρ le tenseur de courbure de Ricci.

Appliquons ce résultat au cas $(\Gamma_r\backslash\mathrm{H}_n, \mathbf{m})$ où $\mathbf{m}$ est une métrique de la forme (*) : $\mathbf{m}=\left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & g\end{array}\right)$. Notons $\{\pm i d_k\}_{k=1,\ldots,n}$ les valeurs propres de $h^{-1}\mathrm{J}$. En utilisant les calculs de courbures faits dans [15], on obtient :

- $\tau=-(3/2)\,g\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)$
- $|\mathrm{R}|^2=(3/4)\,g^2\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^4\right)+(3/2)\,g^2\left(\sum_{i\neq j} d_i^2 d_j^2\right)$
- $|\rho|^2=(3/4)\,g^2\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^4\right)+(1/4)\,g^2\left(\sum_{i\neq j} d_i^2 d_j^2\right)$.

Comme τ, $|\mathrm{R}|^2$, $|\rho|^2$ sont constants et que le volume est déterminé par le spectre, τ et $2|\mathrm{R}|^2-2|\rho|^2+5\tau^2$ le sont aussi.

Dans la proposition précédente, on s'intéressait aux déformations isospectrales sur une variété fixe. Or, d'après la Proposition II.1, il existe des variétés de Heisenberg isospectrales non homéomorphes. Nous avons cependant le résultat suivant :

5. PROPOSITION. — *Soit* $(\Gamma_{r_0}\ H_n,\ \mathbf{m}_0)$ *une variété de Heisenberg. L'ensemble des r dans* $\mathscr{D}_n$ *pour lesquels il existe une métrique* $\mathbf{m}$ *telle que* $(\Gamma_{r_0}\ H_n,\ \mathbf{m}_0)$ *et* $(\Gamma_r\ H_n,\ \mathbf{m})$ *soient isospectrales est fini.*

Preuve. — Notons $\Sigma=\Sigma(r_0,\ \mathbf{m}_0)$. Nous allons montrer qu'il existe une constante $M=M(n,\ \Sigma)$ telle que si $\Sigma(r,\ \mathbf{m})=\Sigma$, alors $|\Gamma_r|\leqq M$, ce qui montrera le résultat car $|\Gamma_r|$ est un entier et $\#\{s\in\mathscr{D}_n \| \Gamma_s| = |\Gamma_r|\}<+\infty$.

Soit r dans $\mathscr{D}_n$ tel qu'il existe $\mathbf{m}$ (on peut toujours supposer $\mathbf{m}$ de la forme (*)) tel que $\Sigma(r,\ \mathbf{m})=\Sigma$ avec $\mathbf{m}=\left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & g\end{array}\right)$. Notons $\{\pm i d_k\}_{k=1,\ \ldots,\ n}$ les valeurs propres de h^{-1} J.

$$\Sigma_1(r,\ \mathbf{m})=\{4\pi^{2t}x(\delta_r h\,\delta_r)^{-1}x,\ x\in\mathbb{Z}^{2n}\}.$$

Or, $4\pi^{2t}x(\delta_r h\,\delta_r)^{-1}x=\|2\pi(\delta_r h^{1/2})^{-1}x\|^2$ où $\|\ .\ \|$ désigne la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Nous allons utiliser un résultat, dû à Hermite, issu de la théorie de la réduction des formes quadratiques [2] :

6. LEMME. — *Soit* A *dans* $GL(p,\ \mathbb{R})$, *alors*

$$\min_{x\in\mathbb{Z}^p-\{0\}}\|A.x\|\leqq\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(p-1)/2}|\det A|^{1/p}.$$

Notons $\lambda_1=\min(\Sigma-\{0\})$; on a $\lambda_1\leqq\min_{x\in\mathbb{Z}^{2n}-\{0\}}\|2\pi(\delta_r h^{1/2})^{-1}x\|^2$, d'où $\lambda_1\leqq c_{2n}|\det(2\pi(\delta_r h^{1/2})^{-1})|^{1/n}$ où $c_{2n}=(4/3)^{n-(1/2)}$. On en déduit que :

$$|\Gamma_r|\sqrt{\det h}=\det(\delta_r h^{1/2})\leqq\left(\frac{4\pi^2 c_{2n}}{\lambda_1}\right)^n.$$

Posons $K_1=(4\pi^2 c_{2n}\lambda_1^{-1})^n$. D'après la remarque 4, le spectre détermine le volume et la courbure scalaire : $V=|\Gamma_r|\sqrt{\det h}\sqrt{g}$, $\tau=-(3/2)g\left(\sum_{i=1}^n d_i^2\right)$. Il en résulte que $\sqrt{g}\geqq VK_1^{-1}$. Or :

$$|\tau|=\frac{3}{2}g\left(\sum_{i=1}^n d_i^2\right)\geqq\frac{3}{2}V^2K_1^{-2}\left(\sum_{i=1}^n d_i^2\right).$$

On en déduit : $\sqrt{\det h}=\left(\prod_{i=1}^n d_i\right)^{-1}\geqq\left(\left(\frac{2}{3}|\tau|\right)^{-1/2}VK_1^{-1}\right)^n$. Finalement :

$$|\Gamma_r|=V\sqrt{g^{-1}}\sqrt{\det h^{-1}}\leqq K_1\left(\left(\frac{2}{3}|\tau|\right)^{-1/2}VK_1^{-1}\right)^{-n}=M(n,\ \Sigma).$$

La proposition est donc démontrée. ■

7. *Remarque*. — Soit $\alpha>0$, on sait que $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_s\backslash H_n, \mathbf{m}_1)$ sont isospectrales (resp. isométriques) si et seulement si $(\Gamma_r\backslash H_n, \alpha\,\mathbf{m})$ et $(\Gamma_s\backslash H_n, \alpha\,\mathbf{m}_1)$ le sont. Le nombre $M=M(n, \Sigma)$ doit donc être invariant par dilatation. Posons $\mathbf{m}'=\alpha\,\mathbf{m}$; avec des notations évidentes, on a : $\lambda_1'=\lambda_1\,\alpha^{-1}$, donc $K_1'=K_1\,\alpha^n$. De même $\tau'=\alpha^{-1}\,\tau$ et $V'=\alpha^{n+(1/2)}\,V$. On en déduit :

$$M'=(K_1\,\alpha^n)\left(\left(\frac{2}{3}|\tau|\alpha^{-1}\right)^{-1/2}\alpha^{n+(1/2)}\,V\,\alpha^{-n}\,K_1\right)^{-n}=M.$$

Le majorant obtenu est donc invariant par multiplication de la métrique par un scalaire.

Nous venons de voir qu'il n'existe qu'un nombre fini de variétés topologiques du type Γ_r H_n qui supportent des métriques, provenant de métriques invariantes à gauche sur H_n, ayant un spectre donné. Pour comprendre le problème de l'isospectralité des variétés de Heisenberg, on peut donc se restreindre au cas où la topologie de la variété est fixée. On a alors le résultat suivant :

8. Proposition. — *Soient* r *dans* $\mathscr{D}_n$ *et* $\mathbf{m}_0$ *dans* $\mathscr{M}_n$. *Il existe* $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_N$ *dans* $\mathscr{M}_n$ *telles que* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m}_0)$ *et* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$ *sont isospectrales si et seulement si il existe* i *dans* $\{0, 1, \ldots, N\}$ *tel que* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma_r\backslash H_n, \mathbf{m}_i)$ *soient isométriques.*

Preuve. — Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $\{\mathbf{m}_p\}_{p\geqq 0}$ de métriques isospectrales non deux à deux isométriques. Notons Σ leur spectre commun. On peut toujours supposer $\mathbf{m}_p$ de la forme (*) : $\mathbf{m}_p=\left(\begin{array}{c|c} h_p & 0 \\ \hline 0 & g_p\end{array}\right)$. Nous noterons $\{\pm i d_k^{(p)}\}_{k=1,\ldots,n}$ les valeurs propres de $h_p^{-1}\,J$.

9. Lemme. — *Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que :* $\forall p\in\mathbb{N}$, $\Sigma_1(r, \mathbf{m}_p)=\Sigma_1(r, \mathbf{m}_0)$ et $\Sigma_2(r, \mathbf{m}_p)=\Sigma_2(r, \mathbf{m}_0)$.

Preuve. — Nous reprenons les notations de la proposition précédente. Nous avons vu qu'il existe des constantes K_1 et K_2 telles que :

(i) $|\Gamma_r|\sqrt{\det h_p}\leqq K_1$

(ii) $d_i^{(p)}\leqq K_2$

(iii) $g_p\geqq V^2\,K_1^{-2}$.

D'après (i) : $\sqrt{\det h_p}=\left(\prod_{i=1}^{n} d_i^{(p)}\right)^{-1}\leqq K_1\,|\Gamma_r|^{-1}$. On en déduit :

$$|\Gamma_r|\,K_1^{-1}\leqq\prod_{i=1}^{n} d_i^{(p)}\leqq\min_{p,\,i} d_i^{(p)}\times K_2^{n-1}.$$

Il existe donc une constante $K_3>0$ telle que :

$$\forall i\in\{1, \ldots, n\},\quad \forall p\in\mathbb{N}:\quad 0<K_3\leqq d_i^{(p)}\leqq K_2.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer les suites $\{d_i^{(p)}\}_{p \geqq 0}$ convergentes, notons $d_i = \lim_{p \to +\infty} d_i^{(p)}$ avec $d_i > 0$. Comme $\sqrt{g_p} = \mathrm{V} \,|\, \Gamma_r \,|^{-1} \left(\prod_{i=1}^{n} d_i^{(p)} \right)$, la suite $\{g_p\}_{p \geqq 0}$ est convergente et $\lim_{p \to +\infty} g_p = g$ avec $g > 0$.

Notons $\{\varepsilon_i\}_{i=1, \ldots, n}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. Rappelons que $\Sigma_2(r, \mathbf{m}_p)$ est ensemble des

$$\mu_p(c, k) = \frac{4\pi^2 c^2}{g_p} + 2\pi c \sum_{i=1}^{n} (2k_i + c)\, d_i^{(p)}$$

avec la multiplicité $2c^n \,|\, \Gamma_r \,|$.

Les suites $\{\mu_p(1, 0)\}_{p \geqq 0}$ et $\{\mu_p(1, \varepsilon_i)\}_{p \geqq 0}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) sont convergentes et à valeurs dans Σ qui est discret, elles sont donc toutes constantes à partir d'un certain rang. Donc, quitte à supprimer un nombre fini de termes de la suite $\{\mathbf{m}_p\}_{p \geqq 0}$, on peut supposer ces $(n+1)$ suites constantes. Donc : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mu_p(1, 0) = \mu_0(1, 0)$, $\mu_p(1, \varepsilon_i) = \mu_0(1, \varepsilon_i)$. En soustrayant ces égalités, on obtient : $4\pi d_i^{(p)} = 4\pi d_i^{(0)}$. Donc : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$: $d_i^{(p)} = d_i^{(0)}$. Comme

$$|\, \Gamma_p \,| \sqrt{\det h_p} \sqrt{g_p} = |\, \Gamma_r \,| \sqrt{\det h_0} \sqrt{g_0},$$

on en déduit que $g_p = g_0$ pour tout p dans $\mathbb{N}$. Il en résulte que $\Sigma_2(r, \mathbf{m}_p) = \Sigma_2(r, \mathbf{m}_0)$, puis $\Sigma_1(r, \mathbf{m}_p) = \Sigma_1(r, \mathbf{m}_0)$ car

$$\Sigma_1(r, \mathbf{m}_p) \cup \Sigma_2(r, \mathbf{m}_p) = \Sigma_1(r, \mathbf{m}_0) \cup \Sigma_2(r, \mathbf{m}_0).$$

Le lemme est donc démontré. ■

Tirons les conséquences du lemme :

A) $\Sigma_1(r, \mathbf{m}_p) = \Sigma_1(r, \mathbf{m}_0)$, donc les tores plats

$$((\delta_r h_0^{1/2})^{-1} \mathbb{Z}^{2n}, g_{\mathrm{can}}) \qquad \text{et} \qquad ((\delta_r h_p^{1/2})^{-1} \mathbb{Z}^{2n}, g_{\mathrm{can}}),$$

où $g_{\mathrm{can}} = \sum_{i=1}^{2n} dx_i^2$, ont même spectre des longueurs, ce qui est équivalent à dire qu'ils sont isospectraux (d'après la formule de Poisson [1]). D'après le théorème de Kneser [20], il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isométrie de tores plats isospectraux. Donc, il existe des éléments $h^1, \ldots, h^m$ dans la suite $\{h_p\}_{p \geqq 0}$ tels que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists\, \mathrm{O}_p \in \mathrm{O}(2n)$, $\exists\, i(p) \in \{1, \ldots, m\}$, $\exists\, \varphi \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{Z})$ tels que :

$$(a) \qquad (\delta_r h_p^{1/2})^{-1} = \mathrm{O}_p (\delta_r (h^{i(p)})^{1/2})^{-1} \varphi_p$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que :

1) $\forall p \in \mathbb{N}$, $h^{i(p)} = h_0 \in \{h^1, \ldots, h^m\}$

2) la suite $\{\mathrm{O}_p\}_{p \geqq 0}$ est convergente : $\lim_{p \to +\infty} \mathrm{O}_p = \mathrm{O}$ où $\mathrm{O} \in \mathrm{O}(2n)$.

B) Dans le lemme II.9, nous avons démontré que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $d_i^{(p)} = d_i^{(0)}$. Donc, d'après la démonstration du lemme I.E.1, il existe une suite $\{O'_p\}_{p \geqq 0}$ d'éléments de $O(2n)$ telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$$(b) \qquad h_p^{-1/2} \, J \, h_p^{-1/2} = O'^{-1}_p (h_0^{-1/2} \, J \, h_0^{-1/2}) \, O'_p$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{O'_p\}_{p \geqq 0}$ est convergente. Notons $O' = \lim\limits_{p \to +\infty} O'_p$ où $O' \in O(2n)$.

Remarquons que :

$$(a\,1) \qquad (a) \Leftrightarrow h_p^{1/2} = (\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \delta_r) \, h_0^{1/2} \, O_p^{-1}$$

$$(a\,2) \qquad (a) \Leftrightarrow h_p^{1/2} = O_p \, h_0^{1/2} \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \delta_r)$$

Multiplions (b) par $(a\,1)$ à gauche et par $(a\,2)$ à droite, on obtient :

$$J = (\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \delta_r) \, {}^t A_p \, J \, A_p \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \delta_r)$$

où $A_p = h_0^{-1/2} \, O'_p \, O_p \, h_0^{1/2}$. On a donc

$$(\delta_r^{-1} \varphi_p \delta_r) \, J \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_p \delta_r) = {}^t A_p \, J \, A_p.$$

Or la suite $\{{}^t A_p \, J \, A_p\}_{p \geqq 0}$ est convergente (puisque la suite $\{A_p\}_{p \geqq 0}$ l'est) et à valeurs $\delta_r^{-1} \, GL(2n, \mathbb{Z}) \, \delta_r^{-1}$ qui est un ensemble discret. Cette suite est donc constante à partir d'un certain rang. Il existe donc p_0 dans $\mathbb{N}$ tel que si $p \geqq p_0$, on ait :

$$(\delta_r^{-1} \varphi_p \delta_r) \, J \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_p \delta_r) = (\delta_r^{-1} \varphi_{p_0} \delta_r) \, J \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_{p_0} \delta_r).$$

Donc $\sigma_p = {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_p \delta_r)^t (\delta_r^{-1} \varphi_{p_0} \delta_r)^{-1}$ est dans $\widetilde{Sp(n, \mathbb{R})}$. Or $\sigma_p = \delta_r \, {}^t\varphi_p \, {}^t\varphi_{p_0}^{-1} \, \delta_r^{-1}$ est dans $\delta_r \, GL(2n, \mathbb{Z}) \, \delta_r^{-1}$. D'après $(a\,1)$ et $(a\,2)$:

$$h_p = (\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \delta_r) \, h_0 \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \delta_r)$$
$$h_{p_0} = (\delta_r^{-1} \varphi_{p_0}^{-1} \delta_r) \, h_0 \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_{p_0}^{-1} \delta_r).$$

On en déduit que : $h_p = (\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \varphi_{p_0} \delta_r) \, h_{p_0} \, {}^t(\delta_r^{-1} \varphi_p^{-1} \varphi_{p_0} \delta_r)$. Finalement : $h_p = {}^t\sigma_p^{-1} \, h_{p_0} \, \sigma_p^{-1}$. Comme $\sigma_p^{-1} \in \widetilde{Sp(n, \mathbb{R})} \cap \delta_r \, GL(2n, \mathbb{Z}) \, \delta_r^{-1}$, on a une contradiction avec l'hypothèse puisque les métriques $\{\mathbf{m}_p\}_{p \geqq 0}$ étaient supposées non deux à deux isométriques. ■

En combinant les deux propositions précédentes, on obtient :

10. Proposition. — *Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isométrie de variétés de Heisenberg* (i. e. *d'éléments de* $\mathcal{I}_n/\sim$) *deux à deux isospectrales.*

11. *Remarque.* — Durant la preuve précédente, nous avons démontré que, quitte à extraire une sous-suite, les métriques étaient « séparément isospectrales » (*i.e.* $\Sigma_1(r, \mathbf{m}) = \Sigma_1(r, \mathbf{m}')$ et $\Sigma_2(r, \mathbf{m}) = \Sigma_2(r, \mathbf{m}')$). On peut penser que ceci est tout le temps vrai. On peut le vérifier pour les « petites dimensions ».

12. PROPOSITION. — *Supposons* $n=1, 2$. *Les variétés* $(\Gamma_r \ H_n, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma_r \ H_n, \mathbf{m}')$ *sont isospectrales si et seulement si* $\Sigma_1(r, \mathbf{m})=\Sigma_1(r, \mathbf{m}')$ *et* $\Sigma_2(r, \mathbf{m})=\Sigma_2(r, \mathbf{m}')$.

Preuve. — Nous reprenons les notations de la remarque II.4. On suppose que $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$ sont de la forme (*) :

$$\mathbf{m}=\left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & g \end{array}\right) \qquad \mathbf{m}'=\left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline 0 & g' \end{array}\right).$$

Notons $\{\pm i d_k\}_{k=1, \ldots, n}$ (resp. $\{\pm i d'_k\}_{k=1, \ldots, n}$) les valeurs propres de $h^{-1}\mathrm{J}$ (resp. $h'^{-1}\mathrm{J}$).

$n=1$: en écrivant l'égalité des deux premiers termes du développement de Minakshisundaram-Pleijel, on obtient :

$$\sqrt{g}\, d_1^{-1}=\sqrt{g'}\, d_1'^{-1}, \qquad g d_1^2=g' d_1'^2.$$

On a donc forcément $g=g'$ et $d_1=d'_1$. Il en résulte que $\Sigma_2(r, \mathbf{m})=\Sigma_2(r, \mathbf{m}')$, puis $\Sigma_1(r, \mathbf{m})=\Sigma_1(r, \mathbf{m}')$.

$n=2$: en écrivant l'égalité des trois premiers termes du développement de Minakshisundaram-Pleijel, on obtient :

$$\sqrt{g}\, d_1^{-1} d_2^{-1}=\sqrt{g'}\, d_1'^{-1} d_2'^{-1}, \qquad g(d_1^2+d_2^2)=g'(d_1'^2+d_2'^2), \qquad d_1^2 d_2^2=d_1'^2 d_2'^2.$$

Il en résulte que l'on a forcément $d_1=d'_1$, $d_2=d'_2$, $g=g'$. On en déduit que $\Sigma_2(r, \mathbf{m})=\Sigma_2(r, \mathbf{m}')$, puis $\Sigma_1(r, \mathbf{m})=\Sigma_1(r, \mathbf{m}')$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemanienne* (*Lecture Notes in Math.*, Springer, 194, 1971).

[2] A. BOREL, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Actualités scientifiques et industrielles, 1341.

[3] D. DETURCK et C. S. GORDON, *Isospectral Deformations II: Trace Formulas, Metrics and Potentials* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **40**, 1987, p. 367-387).

[4] P. EBERLEIN, *Geometry of 2-Step Nilpotent Groups with a Left Invariant Metric*, Preprint de l'Université de Caroline du Nord.

[5] C. S. GORDON et E. N. WILSON, *Isospectral Deformations of Compact Solvmanifolds* (*J. Differential Geom.*, vol. **19**, 1984, p. 241-256).

[6] C. S. GORDON et E. N. WILSON, *Isometry Groups of Solvmanifolds* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **307**, 1988, p. 245-256).

[7] C. S. GORDON et E. N. WILSON, *The Spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg Manifolds* (*Michigan Math. J.*, vol. **33**, 1986, p. 253-271).

[8] V. GUILLEMIN et D. KAZHDAN, *Some Inverse Spectral Results for Negatively Curved n-Manifolds* (*Proc. Symp. Pure Math.*, *Geometry of the Laplace Operator*, Amer. Math. Soc., vol. **36**, 1980, p. 153-180).

[9] V. GUILLEMIN et D. KAZHDAN, *Some Inverse Spectral Results for Negatively Curved 2-Manifolds* (*Topology*, vol. **19**, 1980, p. 153-180).

[10] IKEDA, *Isospectral Problem for Spherical Space Forms*, in *Spectra of Riemannian Manifolds*, M. BERGER, S. MURAKANI et T. OCHIAI éd.; Kaigai Publication, 1983, p. 57-63.

[11] A. KAPLAN, *Riemannian Nilmanifolds Attached to Clifford Modules* (*Geom. Dedicata*, vol. **11**, 1981, p. 127-136).
[12] A. KAPLAN, *Fundamental Solutions for a Class of Hypoelliptic PDE Generated by Composition of Quadratics Forms* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **258**, n° 1, mars 1980).
[13] Y. KITAOKA, *Positive Definite Quadratic Form with Same Representation Numbers* (*Arch. Math.*, vol. **28**, 1977, p. 495-497).
[14] J. MILNOR, *Eigenvalues of the Laplace Operator on Certain Manifolds* (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. **51**, 1964, p. 542).
[15] J. MILNOR, *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups* (*Advances in mathematics*, vol. **21**, 1976, p. 293-329).
[16] M. MIN-OO, *Spectral Rigidity for Manifolds with Negative Curvature Operator* (*Contemp. Math. Nonlinear Problems in Geometry*, vol. **51**, 1986, p. 99-103).
[17] M. S. RAGHUNATHAN, *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1972.
[18] T. SUNADA, *Riemannian Covering and Isospectral Manifolds* (*Ann. of Math.*, vol. **121**, 1985, p. 169-186).
[19] M.-F. VIGNERAS, *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques* (*Ann. of Math.*, vol. **112**, 1980, p. 21-32).
[20] S. WOLPERT, *The Eigenvalues Spectrum as Moduli for Flat Tori* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **244**, 1978, p. 313-321).
[21] S. WOLPERT, *The Length Spectrum as Moduli for Compact Riemann Surfaces* (*Ann. of Math.*, vol. **109**, 1979, p. 323-351).

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1991,
révisé le 22 octobre 1991.)

H. PESCE,
Institut Fourier,
B.P. 74,
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex,
France.