

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAWRENCE BREEN

## **Théorie de Schreier supérieure**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 25, n° 5 (1992), p. 465-514

<[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1992\\_4\\_25\\_5\\_465\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_5_465_0)>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## THÉORIE DE SCHREIER SUPÉRIEURE

PAR Lawrence BREEN

---

### Introduction

0.1. Ce travail a pour origine une question posée par G. Moore et N. Seiberg. A la fin de leur article [35], ces auteurs interprètent certaines équations polynomiales associées à des règles de fusion (en théorie conforme des champs) en termes de 3-cocycles en cohomologie d'un groupe  $K$  à valeurs dans le groupe abélien  $C^*$ . Ils demandent alors ce que peut être un 3-cocycle de  $K$  à valeurs dans un groupe (non nécessairement abélien)  $G$ , et quelle peut en être l'interprétation géométrique.

La réponse à la question analogue pour les 2-cocycles de  $K$  à valeurs dans  $G$  est bien connue. Considérons en effet les classes d'extensions de groupes

$$(0.1.1) \quad 1 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow 1.$$

Lorsque  $G=A$  est un groupe abélien, on sait depuis [15] que de telles extensions sont classifiées par le second groupe de cohomologie du groupe  $K$  à valeurs dans  $A$ , où  $A$  est muni de la structure de  $K$ -module définie par la conjugaison dans  $H$ . Ce groupe de cohomologie s'interprète comme le groupe de cohomologie de l'espace classifiant  $BK$  du groupe  $K$ , à valeurs dans le système local défini par la structure de  $K$ -module de  $A$ , et c'est pourquoi nous le désignerons toujours par  $H^2(BK, A)$ , plutôt que par la notation quelque peu ambiguë  $H^2(K, A)$ . Dans le cas où le groupe  $G$  n'est plus supposé abélien, la classification des extensions (0.1.1) remonte à Schreier [40], et les cocycles obtenus par celui-ci admettent une interprétation analogue ([9], [4] prop. 8.2) : on peut en effet considérer qu'ils prennent leurs valeurs dans le module croisé  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$  associé au groupe  $G$ , l'ensemble des classes d'extensions de  $K$  par  $G$  (0.1.1) étant alors en bijection avec l'ensemble de cohomologie réduite  $\bar{H}^1(BK, G \rightarrow \text{Aut}(G))$ . Comme il est expliqué dans [4], c'est cet ensemble (pointé par la classe de l'extension triviale) qui mérite d'être appelé l'ensemble de 2-cohomologie non-abélienne du groupe  $K$ , à valeurs dans le groupe  $G$ .

De manière plus générale, on peut chercher à classifier les extensions de groupes (0.1.1) dans un topos quelconque  $T$ . Ce problème a été entièrement résolu par voie géométrique par Grothendieck dans [18], et j'en ai donné dans [4] paragraphe 8, sous le nom de théorie de Schreier-Grothendieck, une description cohomologique. On trouve

que les classes d'extensions (0.1.1) sont classifiées par un ensemble d'(hyper-)cohomologie réduite noté à nouveau  $\bar{H}^1(\text{BK}, G \rightarrow \text{Aut}(G))$ . Le dévissage d'une classe d'hypercohomologie, élément de cet ensemble, en les classes de cohomologie usuelles qui la constituent rend alors compte de phénomènes qui apparaissent dans diverses situations connues, telle l'étude des extensions de groupes algébriques [42] ch. VII, [18] VIII § 7, ou topologiques [41].

Pour en revenir à la 3-cohomologie de  $K$  à valeurs dans un groupe  $G$ , on rappellera que l'interprétation géométrique en est connue depuis la thèse de M<sup>me</sup> Sinh [43] dans le cas de la cohomologie abélienne, c'est-à-dire dans le cas où  $G=A$  est un groupe abélien, muni d'une structure de  $K$ -module (*voir* également à ce propos [25] prop. 8) : on commence par observer que si  $\mathcal{C}$  est une gr-catégorie c'est-à-dire un groupoïde muni d'une loi de groupe, alors la loi de groupe en question induit une structure de groupe sur l'ensemble  $K=\pi_0(\mathcal{C})$  des classes d'isomorphisme d'objets de  $\mathcal{C}$ , et une structure de groupe abélien sur le groupe  $G=\pi_1(\mathcal{C}, I)$  des automorphismes de l'objet unité  $I$  [38]. La condition de cohérence de l'associativité de la loi de groupe, souvent appelée axiome du pentagone de MacLane, fournit alors un 3-cocycle de  $K$  à valeurs dans  $A$ , et celui-ci détermine un élément du groupe  $H^3(\text{BK}, A)$ , appelé l'invariant de Postnikov de  $\mathcal{C}$ . Cet invariant détermine à équivalence près la gr-catégorie  $\mathcal{C}$ , et c'est précisément lui qui est étudié dans l'article [35] cité plus haut. L'invariant en question est d'ailleurs mieux connu dans le cas (auquel on peut toujours se ramener) où les objets et les flèches de  $\mathcal{C}$  sont munis d'une structure de groupe (*voir* par exemple [38] I.1.5.1.2 ou [5]). Dans ce contexte, il est d'ailleurs généralisé par la théorie des extensions croisées de [22], [23], qui interprète de manière similaire les éléments des groupes de cohomologie abélienne supérieurs  $H^n(\text{BK}, A)$ .

Cet énoncé admet, tout comme le précédent, une variante faisceautique, valable dans un topos quelconque, et qui était certainement connue depuis longtemps de Grothendieck, mais pour laquelle il n'existe à ma connaissance aucune référence satisfaisante. Ici, la notion de gr-catégorie est remplacée par celle de gr-champ d'un topos  $T$  (dont on trouvera plus bas une définition détaillée). A un tel gr-champ  $\mathcal{C}$  sont associés, comme précédemment, un groupe  $\pi_0(\mathcal{C})$  (resp. un  $\pi_0(\mathcal{C})$ -module  $\pi_1(\mathcal{C})$ ) du topos  $T$ . On montre alors que les classes de gr-champs  $\mathcal{C}$  dont les invariants  $\pi_0(\mathcal{C})$  et  $\pi_1(\mathcal{C})$  sont respectivement munis d'isomorphismes avec un groupe  $K$  et un  $K$ -module  $A$  donnés de  $T$ , sont en bijection avec des éléments du groupe d'(hyper-)cohomologie  $H^3(\text{BK}, A)$ . Le dévissage de ce groupe en des groupes de cohomologie usuels fournit alors à nouveau une description détaillée de la différence entre la classification précédemment mentionnée des gr-catégories et sa variante faisceautique.

Ainsi, dans la première des deux situations mentionnées plus haut, c'est-à-dire la classification des extensions de groupes, on aboutit à un invariant élément d'un  $H^2$  d'un groupe  $K$  à valeurs dans un groupe éventuellement non abélien  $G$ , tandis que la seconde fournit un  $H^3$  de  $K$ , mais à valeurs dans un groupe abélien  $A$ . Le but de ce travail est de considérer un problème qui généralise les deux problèmes précédents, et dont la solution est donnée par un élément d'un ensemble  $H^3$  de cohomologie de  $K$  à valeurs dans un groupe non-abélien  $G$ . On commence pour cela par fixer une gr-catégorie  $\mathcal{C}$  et un groupe  $K$ , auquel est associé la gr-catégorie discrète  $\underline{K}$ , dont les objets sont les sections

de  $K$  et les seules flèches les flèches identité. On cherche alors à décrire les classes d'extensions (en un sens approprié) de gr-catégories

$$(0.1.2) \quad I \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \underline{K} \rightarrow I.$$

Dans le cas où  $\mathcal{G}$  est la catégorie discrète  $\underline{G}$  associée à un groupe  $G$ , on retrouve ici la théorie de Schreier, tandis que dans celui où la gr-catégorie  $\mathcal{G}$  n'a qu'un seul objet  $I$ , et consiste donc uniquement en le groupe abélien  $A = \text{Aut}(I)$  de ses flèches, (0.1.2) est la décomposition de Postnikov de la gr-catégorie  $\mathcal{H}$ . Lorsque  $\mathcal{G}$  est à nouveau supposé quelconque, on trouve que les extensions (0.1.2) sont classifiées par un groupe de cohomologie réduite  $\bar{H}^1(\text{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$  analogue à celui intervenu en théorie de Schreier, mais où le rôle antérieurement joué par le groupe  $G$  est maintenant dévolu à la gr-catégorie  $\mathcal{G}$ . En particulier, lorsque  $\mathcal{G}$  est la gr-catégorie décrite par le module croisé  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$ , le groupe de cohomologie ainsi obtenu ne dépend que de la donnée des groupes  $K$  et  $G$ , et il mérite alors de s'appeler le  $H^3$  du groupe  $K$  à valeurs dans le groupe non-abélien  $G$ . Cette discussion peut d'ailleurs être reprise dans le cadre plus général d'un topos quelconque  $T$ ,  $\mathcal{G}$  désignant dans ce cas un gr-champ donné de  $T$ , et  $\underline{K}$  le gr-champ discret associé à  $K$ . On cherche alors à classifier les extensions de gr-champs (0.1.2). Lorsque  $G$  est un groupe de  $T$ , et que  $\mathcal{G}$  est le gr-champ Bitors  $(G)$  des  $G$ -bitorseurs de  $T$ , on aboutit à un groupe d'hypercohomologie qui peut être appelé le  $H^3$  de  $K$  à valeurs dans  $G$ .

Une première tentative pour définir un tel  $H^3$  avait été effectuée dans le cadre ensembliste par Dedecker [11] (sans toutefois qu'on trouve chez lui d'interprétation géométrique de l'ensemble de cohomologie obtenu). Le résultat auquel nous parvenons ici s'exprime par des cocycles qui ont, comme on le verra en (2.4.3), la même allure générale que les siens, mais on n'a pas cherché à effectuer une comparaison systématique de ces deux formulations. Le lecteur curieux de connaître la définition explicite des 3-cocycles de  $K$  à valeurs dans  $G$  à laquelle nous parvenons, en trouvera la description la plus restrictive en (2.3.4.2)-(2.3.4.6), les 3-cobords correspondants étant donnés par (2.3.4.7)-(2.3.4.11). Signalons également que l'on doit à K-H. Ulbrich [47] une étude des extensions de catégories (0.1.2) dans le cas particulier où l'on suppose que la gr-catégorie  $\mathcal{G}$  est munie d'une donnée de commutativité cohérente compatible à la donnée d'associativité (il suffirait en fait de supposer que  $\mathcal{G}$  est tressée, au sens de [25]); les résultats obtenus ici sont consistents avec les siens. La condition de commutativité imposée par Ulbrich induit certaines simplifications dans l'allure générale des cocycles et cobords considérés, mais ne permet guère, en contrepartie, de qualifier l'ensemble de cohomologie obtenu de  $H^3$  non abélien. Pour en terminer avec ces comparaisons, signalons qu'il existe, lorsqu'on fait sur  $\mathcal{G}$  des hypothèses de commutativité, des versions plus restrictives du problème de classification des extensions de gr-catégories: on peut notamment supposer que l'extension (0.1.2) est centrale en un sens approprié. Dans ce cas, les 3-cocycles auxquels on parvient sont un cas particulier de ceux considérés ici. Ils coïncident, à des choix de conventions près, avec certains cocycles définis récemment par Bullejos et Cegarra dans [7].

On se place, dans les deux premiers chapitres de ce travail dans le cadre ensembliste, c'est-à-dire celui où l'on part d'un groupe abstrait  $K$  et d'une gr-catégorie  $\mathcal{G}$ . Ici, tout

s'exprime assez concrètement en termes de cocycles. Cependant, le prix à payer pour cette apparente simplicité est la nature très compliquée des cocycles obtenus, et on peut penser qu'il ne sera guère profitable d'aller plus loin dans cette direction. Dans le troisième chapitre, on étend ces résultats au cas général, c'est-à-dire à celui où l'on se donne un groupe  $K$  et un gr-champ  $\mathcal{G}$  d'un topos  $T$  et où on classe les extensions de gr-champs (0.1.2) correspondantes. On est donc ici en présence d'une situation beaucoup plus riche que dans le cas ensembliste, mais d'un niveau de complexité qui rend inadéquat le formalisme explicite des cocycles. L'approche géométrique adoptée, calquée sur la théorie de Schreier-Grothendieck mentionnée plus haut, est plus naturelle et en définitive plus simple que la description par les cocycles, une fois assimilés les concepts plus abstraits auxquels il est fait appel. Cependant, le lecteur qui se sent non concerné par ce niveau de généralité, et que l'invocation d'objets tels que les champs et les gerbes aura effrayé, est invité à sauter ce chapitre en première lecture, ainsi que le premier paragraphe du dernier chapitre.

Ce dernier chapitre est consacré à une étude assez succincte de diverses questions qui vont au-delà du problème de la classification des extensions (0.1.2). Au premier paragraphe est étudiée une question souvent évoquée par Grothendieck, celle de la définition d'objets géométriques représentant les classes de cohomologie non-abéliennes supérieures. Une définition est donnée ici d'une 2-G-gerbe, objet géométrique qui représente un 3-cocycle à valeurs dans un groupe non-abélien  $G$  d'un espace (ou d'un topos) quelconque, et non plus, comme au chapitre précédent, d'un espace de la forme  $BK$ . Il s'agit ici de mettre en évidence dans le cas  $n=2$  un procédé itératif permettant de comprendre, à partir d'une définition appropriée d'une  $(n-1)$ -gerbe, objet représentant la cohomologie non-abélienne de degré  $n$ , quelle peut être la définition d'une  $n$ -gerbe, et quelle en est la description par des cocycles. On notera cependant que l'objet obtenu ici n'est pas le plus général susceptible de représenter une classe de 3-cohomologie. En effet, une 2-G-gerbe est à la 3-cohomologie ce qu'une  $G$ -gerbe, au sens de [4] paragraphe 7, est à la 2-cohomologie. Or, on sait que déjà, dans le cas de la 2-cohomologie, on parvient aux classes les plus générales en considérant les gerbes de Giraud [18], et non plus seulement les  $G$ -gerbes. La définition de ces dernières impose en effet des conditions quelque peu restrictives sur les coefficients. Elle permet en revanche de disposer d'un formalisme cohomologique plus agréable que dans le cas des gerbes quelconques. Il a paru raisonnable d'aborder ici l'étude des 2-gerbes en se limitant, pour ces raisons, à celle des 2-G-gerbes.

Les deux derniers paragraphes de ce chapitre sont de nature quelque peu différente du reste de ce texte. On y donne quelques indications sur ce que peut être l'interprétation en topologie algébrique de la 2-cohomologie et même de la  $n$ -cohomologie non abélienne. On constatera que les objets décrits par les ensembles de cohomologie en question sont très naturels : il s'agit ici de classer les fibrations (localement homotopiquement triviales) au-dessus d'un espace  $Y$ , et dont les fibres sont homotopiquement équivalentes à un espace topologique connexe donné  $Z$  (dont seul un nombre fini de groupes d'homotopie est supposé non nul). Un tel problème a déjà été souvent étudié dans diverses situations, notamment lorsque l'espace  $Z$  est simplement connexe, mais c'est le cas où le groupe fondamental de  $Z$  est non trivial qui nous intéresse le plus ici. Ainsi, lorsque l'espace  $Z$

est un  $K(\pi, 1)$ , les fibrations en question définissent des  $\pi$ -gerbes sur  $Y$ , c'est-à-dire qu'elles sont classifiées par le  $H^2$  non-abélien de  $Y$  à valeurs dans  $\pi$ .

Les raisonnements de cette dernière partie ne sont parfois qu'esquissés, plutôt que rédigés de manière détaillée. Ceci tient d'une part à une volonté de ma part de ne pas allonger démesurément ce texte, déjà fort long, mais également au fait qu'il n'existe pas à l'heure actuelle de texte de fondements complet en topologie, auquel il aurait été possible de renvoyer le lecteur pour certaines questions qu'il n'a pas paru possible de les traiter ici. C'est notamment le cas pour ce qui concerne la théorie des  $A_\infty$ -espaces de Stasheff, et également pour la théorie des espaces topologiques au-dessus d'un espace topologique donné, et la catégorie homotopique associée. C'est pourquoi la partie de ce texte consacrée à la topologie doit être considérée comme une première approche, et non comme une étude définitive, de ces questions.

C'est un plaisir de remercier J. Lannes et J.-L. Loday pour des discussions concernant différentes questions abordées ici, ainsi que le referee pour sa lecture soigneuse de la première version de ce texte.

## 1. Catégories et lois de groupes

1.1. RAPPELS. — (1.1.1) On appelle catégorie monoïdale une catégorie  $\mathcal{C}$ , munie d'un foncteur «loi de composition»

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (X, Y) &\rightarrow XY \end{aligned}$$

satisfaisant à une contrainte d'associativité c'est-à-dire munie d'un isomorphisme fonctoriel

$$(1.1.1.1) \quad c_{X, Y, Z} : X(YZ) \xrightarrow{\sim} (XY)Z.$$

On convient qu'un produit itéré sans parenthèses dans  $\mathcal{C}$  s'effectue de la gauche vers la droite :  $XYZ = (XY)Z$ ,  $XYZW = ((XY)Z)W$ , etc... On suppose par ailleurs que  $\mathcal{C}$  possède un objet identité  $I$  satisfaisant à une contrainte d'unité compatible à l'associativité, c'est-à-dire que l'on dispose d'une paire isomorphismes fonctoriels

$$(1.1.1.2) \quad g_X : IX \xrightarrow{\sim} X, \quad d_X : XI \xrightarrow{\sim} X$$

tels que les diagrammes

$$(1.1.1.3) \quad \begin{array}{ccc} (XI)Y & \rightarrow & X(IY) \\ \searrow & & \swarrow \\ & XY & \end{array}$$

soient commutatifs, pour toute paire d'objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ . On exige enfin que la contrainte d'associativité soit cohérente, c'est-à-dire qu'elle satisfasse, pour tout quadruplet d'objets

$(X, Y, Z, W)$  de  $\mathcal{C}$ , à l'axiome dit du pentagone [1, 29], exprimé par la commutativité du diagramme suivant :

$$(1.1.1.4) \quad \begin{array}{ccccc} & X(Y(ZW)) & \longrightarrow & X((YZ)W) & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ (XY)(ZW) & & & & (X(YZ))W \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & (((XY)Z)W) & & & \end{array}$$

(1.1.2) On appelle foncteur additif (ou morphisme) entre deux catégories monoïdales un foncteur  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  muni d'une famille d'isomorphismes fonctoriels  $\lambda$

$$(1.1.2.1) \quad \lambda_{X,Y}: F(XY) \xrightarrow{\sim} F(X)F(Y)$$

et d'un isomorphisme

$$(1.1.2.2) \quad \mu: F(I_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\sim} I_{\mathcal{D}}$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$(1.1.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} F(X(YZ)) & \rightarrow & F(X)F(YZ) & \rightarrow & F(X)(F(Y)F(Z)) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ F((XY)Z) & \rightarrow & F(XY)F(Z) & \rightarrow & (F(X)F(Y))F(Z) \end{array}$$

$$(1.1.2.4) \quad \begin{array}{ccc} F(IX) & \rightarrow & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(I)F(X) & \rightarrow & IF(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(XI) & \rightarrow & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(X)F(I) & \rightarrow & F(XI) \end{array}$$

Un morphisme (ou transformation naturelle) de foncteurs additifs  $\mu: F \Rightarrow G$  consiste en la donnée, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , d'un morphisme  $\mu_X: F(X) \rightarrow G(X)$  dans  $\mathcal{D}$ , tel que les diagrammes

$$(1.1.2.5) \quad \begin{array}{ccc} F(XY) & \rightarrow & F(X)F(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(XY) & \rightarrow & G(X)G(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F(I) & \rightarrow & G(I) \\ \searrow & & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

commutent.

Soient par ailleurs  $F_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $F_2: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  une paire composable de tels foncteurs additifs. Alors, le foncteur composé  $F_2 \circ F_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  est muni d'une structure naturelle de foncteur additif. On prendra garde que, si  $F_3: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est un foncteur additif composable avec  $F_2$ , alors on n'a pas l'associativité stricte

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$$

mais seulement un morphisme cohérent de foncteurs additifs

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1) \Rightarrow (F_3 \circ F_2) \circ F_1.$$

(1.1.3) Une catégorie monoïdale  $\mathcal{C}$  est dite compacte si tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  possède un inverse à droite, c'est-à-dire qu'il existe un objet  $X^*$ , et un isomorphisme

$$(1.1.3.1) \quad e_X: X(X^*) \xrightarrow{\sim} I.$$

Désormais, les catégories monoïdales considérées seront supposées être des groupoïdes. Un groupoïde monoïdal compact s'appelle également une gr-catégorie. Dans une gr-catégorie, le choix d'une flèche (1.1.3.1) détermine un morphisme

$$\eta_X: I \xrightarrow{\sim} (X^*)X$$

tel que les deux flèches induites

$$\begin{aligned} X &\rightarrow XI \rightarrow X(X^*X) \rightarrow (XX^*)X \rightarrow IX \rightarrow X \\ X^* &\rightarrow IX^* \rightarrow (X^*X)X^* \rightarrow X^*(XX^*) \rightarrow X^*I \rightarrow X^* \end{aligned}$$

soient l'identité ([25], prop. 7). Dans la terminologie de [38], la paire  $e_X, \eta_X$  munit alors la catégorie  $\mathcal{C}$  d'une contrainte d'inverse compatible aux contraintes d'associativité et d'unité données. Il s'ensuit que l'application  $X \mapsto X^*$  est maintenant fonctorielle en  $X$  [38] I.2.5.0, et que l'on dispose [26], [48], [38] I.2.5.5.2 d'un isomorphisme fonctoriel

$$(1.1.3.2) \quad (XY)^* \xrightarrow{\sim} Y^*X^*.$$

On vérifie que ce dernier est compatible à l'associativité et à la contrainte d'unité, en ce sens que le foncteur  $X \mapsto X^*$  est (anti)-additif. On dispose donc notamment de compatibilités de l'inverse à l'identité exprimées par la commutativité des diagrammes

$$(1.1.3.3) \quad \begin{array}{ccc} (IY)^* \rightarrow Y^*I & & (XI)^* \rightarrow IX^* \\ \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ & Y^* & & X^* \end{array}$$

Par ailleurs, dans le cas où  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont des gr-catégories, la donnée d'un foncteur  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  satisfaisant à (1.1.2.1) détermine un morphisme (1.1.2.2). La donnée de ce dernier est donc redondante, et peut maintenant être omise, comme nous le ferons désormais, de la définition d'un foncteur additif.

(1.1.4) Dans le cas où les données d'associativité et d'unité sont strictes, c'est-à-dire que les contraintes d'associativité et d'unité sont les applications identité, le nerf  $G.$  de  $\mathcal{C}$  est un groupe simplicial. La structure homotopique de  $\mathcal{C}$  (c'est-à-dire de son nerf) est alors très simple. En effet, puisque  $\mathcal{C}$  est un groupoïde,  $G.$  satisfait à la condition d'extension de Kan, et il s'identifie par ailleurs à son second cosquelette  $\text{cosq}^2 \mathcal{C}$  [24] VII.2.6.2. Il en résulte que ses groupes d'homotopie supérieurs  $\pi_i(\mathcal{C}) = \pi_i(G., I)$  sont



nuls pour  $i \geq 2$ . Le complexe normalisé  $NG.$  de  $G$ . est alors le complexe de longueur 1

$$(1.1.4.1) \quad \delta: G'_1 \rightarrow G'_0$$

où on a posé  $G'_1 = \ker(d_1)$  (*resp.*  $G'_0 = G_0$ ),  $\delta$  étant la restriction de  $d_0$  à  $G'_1$ . Les groupes d'homotopie de  $\mathcal{C}$  sont les groupes d'homologie de  $NG$ , c'est-à-dire que l'on a

$$(1.1.4.2) \quad \begin{cases} \pi_1(\mathcal{C}) = \ker(\delta) \\ \pi_0(\mathcal{C}) = \operatorname{coker}(\delta). \end{cases}$$

En fait, le complexe normalisé (1.1.4.1) possède une structure plus riche qu'il n'y paraît de prime abord, puisque c'est ce qu'on appelle un module croisé :

DÉFINITION (1.1.5). — On appelle module croisé (gauche) un homomorphisme de groupes  $\delta: G \rightarrow H$ , muni d'une action à gauche de  $H$  sur  $G$

$$(h, g) \mapsto {}^h g$$

telle que

- (i)  $\delta({}^h g) = h \delta(g) h^{-1}$
- (ii)  $\delta(g')g = g' g g'^{-1}$ .

On définit les modules croisés droits de manière analogue (voir par exemple [4] déf. 3.2).

DÉFINITION (1.1.6). — Soient  $\delta: G \rightarrow H$  et  $\delta': G' \rightarrow H'$  une paire de modules croisés. On dit qu'une paire d'homomorphismes  $u: G \rightarrow G'$  et  $v: H \rightarrow H'$  définissent un morphisme de modules croisés  $(u, v): (G \rightarrow H) \rightarrow (G' \rightarrow H')$  lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & G' \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta' \\ H & \xrightarrow{v} & H' \end{array}$$

- (ii) L'homomorphisme  $u$  est  $v$ -équivariant.

En ce qui concerne le normalisé  $NG.$  d'un groupe simplicial décrit en (1.1.4.1), sa structure de module croisé est définie par conjugaison via l'opérateur face  $s_0: G_0 \rightarrow G_1$  :

$$g_0(g_1) = s_0(g_0) g_1 s_0(g_0)^{-1}.$$

La structure de module croisé de  $NG.$  détermine complètement, et ce de manière très économique, la structure homotopique de la gr-catégorie  $\mathcal{C}$  dont  $G.$  est le nerf. En effet, à tout module croisé  $\delta: G \rightarrow H$  est associée la catégorie  $\mathcal{C}$  pour laquelle  $\operatorname{ob}(\mathcal{C}) = H$  tandis que le groupe des flèches de  $\mathcal{C}$  est le produit semi-direct  $G \rtimes H$  (pour l'action à gauche donnée de  $H$  sur  $G$ ), un élément  $(g, h)$  de  $fl(\mathcal{C})$  ayant  $h$  (*resp.*  $\delta(g)h$ ) pour source (*resp.*

pour but). En particulier, si  $(g, h)$  et  $(g', h')$  sont des flèches composables (c'est-à-dire telles que  $h' = \delta(g)h$ ), alors la flèche composée est  $(g', h') \circ (g, h) = (g'g, h)$ .

*Exemples (1.1.7).* — (i) A tout groupe  $H$  est associé le module croisé  $1 \rightarrow H$ . La gr-catégorie correspondante est la catégorie discrète  $\underline{H}$  associée à  $H$ , dont le groupe des objets est  $H$  et dont les seules flèches sont les flèches identité. Ce module croisé, et la catégorie correspondante, seront également noté  $H[0]$ , ou bien encore  $\underline{H}$ .

(ii) A tout groupe abélien  $G$  est associé le module croisé  $G \rightarrow 1$ . La catégorie correspondante est la catégorie à un seul objet  $I$ , et dont le groupe des flèches  $\text{Aut}(I)$  est identifiée à  $G$ , la loi de composition des flèches et la loi  $\otimes$  coïncidant avec la loi de groupe de  $G$ . Ce module croisé, et la catégorie correspondante, sont notés  $G[1]$ . Cette catégorie est encore définie pour  $G$  un groupe quelconque, mais n'est munie d'une structure de gr-catégorie que si le groupe  $G$  est abélien.

(iii) A tout groupe  $G$  est associé le module croisé  $i_G: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ , où  $i_G$  est l'homomorphisme de conjugaison intérieure dans  $G$ , et où  $\text{Aut}(G)$  agit à gauche de manière évidente sur  $G$ .

*Remarque (1.1.8).* — *A priori*, les considérations précédentes ne valent que pour une catégorie dans laquelle la donnée d'associativité est stricte. Cependant, une construction classique, attribuée à Isbell (voir [32], prop. 4.2), montre que toute gr-catégorie est gr-équivalente à une catégorie dans laquelle les données d'associativité et d'unité sont strictes, ce qui permet d'étendre ce qui vient d'être dit au cas d'une gr-catégorie quelconque. La construction en question a néanmoins quelques défauts: tout d'abord, elle remplace la catégorie de départ par une catégorie beaucoup plus grosse, et dans laquelle les objets sont beaucoup moins maniables. Plus grave est le fait que cette construction n'est pas fonctorielle en la gr-catégorie considérée  $\mathcal{C}$ .

1.2. LA CATÉGORIE  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ . — (1.2.1) Soit  $\mathcal{G}$  une gr-catégorie. On note  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  la gr-catégorie des auto-équivalences de  $\mathcal{G}$ . Un objet de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  est un foncteur additif  $(F, \lambda): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  (1.1.2) qui est une équivalence de catégories, c'est-à-dire qui est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. La composée d'une paire de tels foncteurs additifs  $(F_1, \lambda_1)$  et  $(F_2, \lambda_2)$  est le foncteur additif  $(F_1 \circ F_2, \lambda_1 * \lambda_2)$ , où  $\lambda_1 * \lambda_2$  est la flèche (1.1.2.1) définie par  $\lambda_1 \circ F_1(\lambda_2)$ :

$$(F_1 \circ F_2)(XY) \rightarrow F_1(F_2(X)F_2(Y)) \rightarrow F_1F_2(X)F_1F_2(Y).$$

Comme on l'a dit plus haut, la loi de composition ainsi définie dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  n'est associative qu'à isomorphisme cohérent près. Elle fait de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  une gr-catégorie, d'élément neutre le foncteur identité et pour lequel on prend pour objet inverse  $F^*$  d'un foncteur  $F$  donné un foncteur quasi-inverse  $F^{-1}$  de  $F$ .

Soit par ailleurs  $G \in \text{ob}(\mathcal{G})$ . On note  $i_G$  le foncteur de conjugaison intérieure par  $G$  dans  $\mathcal{G}$ , défini, avec la convention de 1.1.1, par

$$(1.2.1.1) \quad \begin{cases} i_G: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \\ G_1 \mapsto GG_1G^*. \end{cases}$$

Ce foncteur est additif, l'isomorphisme  $\lambda$  (1.1.2.1) étant défini, comme il se doit, par la flèche suivante (dans lequel on a omis de préciser quelques isomorphismes d'associativité évidents):

$$G(G_1 G_2) G^* \simeq G(G_1 I G_2) G^* \simeq (GG_1 G^*)(GG_2 G^*).$$

Considérons alors le foncteur de conjugaison intérieure

$$(1.2.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}) \\ G \mapsto i_G. \end{array} \right.$$

Il résulte de (1.1.3.2) que  $i$  est un foncteur additif. En particulier, le choix d'un inverse  $G^*$  de  $G$  détermine un inverse privilégié de  $i_G$  dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ , à savoir  $i_G^*$ . On considèrera également le foncteur

$$(1.2.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} i': \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q^0(\mathcal{G}) \\ G \mapsto i'_G \end{array} \right.$$

à valeurs dans la gr-catégorie opposée à  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  (c'est-à-dire celle dont la loi de groupe est la loi opposée de celle de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ ), où  $i'_G$  est défini par

$$(1.2.1.4) \quad i'_G(G_1) = G^* G_1 G.$$

(1.2.2) On ne confondra pas  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  avec la sous-gr-catégorie  $\mathcal{A}ut(\mathcal{G})$ , dont les objets sont les automorphismes de  $\mathcal{G}$ . On entend par là les foncteurs additifs  $(F, \lambda): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  pour lesquels l'additivité de  $F$  est stricte, c'est-à-dire que l'isomorphisme  $\lambda$  (1.1.2.1) est l'application identique. On exige également dans ce cas que  $F$  admette un foncteur inverse strict  $F^*$  de  $F$ , c'est-à-dire tel que les composés  $F \circ F^*$  et  $F^* \circ F$  soient égaux (et non simplement isomorphes) au foncteur identité.

Dans le cas où  $\mathcal{G}$  est la gr-catégorie définie par un module croisé  $(G \rightarrow \Pi)$ , la gr-catégorie  $\mathcal{A}ut(\mathcal{G})$  peut être décrite de la manière suivante (voir [36]). Soit  $\mathcal{A}ut(G, \Pi)$  le groupe des automorphismes du module croisé  $\delta: G \rightarrow \Pi$  en question, c'est-à-dire le groupe dont les éléments consistent en des paires  $f = (u, v)$  d'automorphismes  $u: G \rightarrow G$  et  $v: \Pi \rightarrow \Pi$  satisfaisant aux conditions de la définition (1.1.6). A toute application  $\lambda: \Pi \rightarrow G$ , on associe la paire de flèches  $f = (u, v)$  définies par

$$(1.2.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(g) = \lambda(\delta(g))g \\ v(\pi) = \delta(\lambda(\pi))\pi \end{array} \right.$$

Considérons alors l'ensemble  $\text{Der}(\Pi, G)$  des applications  $\Pi \rightarrow G$  telles que

$$\lambda(\pi\pi') = \lambda(\pi) {}^\pi\lambda(\pi')$$

pour toute paire d'éléments  $\pi, \pi'$  de  $\Pi$ . On désigne par  $\text{Der}^*(\Pi, G)$  la partie de  $\text{Der}(\Pi, G)$  constituée d'éléments  $\lambda$  tels que la paire de flèches  $f = (u, v)$  associée à  $\lambda$  définisse un

élément de  $\text{Aut}(G, \Pi)$ , et par

$$(1.2.2.2) \quad d: \text{Der}^*(\Pi, G) \rightarrow \text{Aut}(G, \Pi)$$

l'application qui associe à  $\lambda$  la paire  $f=(u, v)$  définie par les formules (1.2.2.1). L'ensemble  $\text{Der}^*(\Pi, G)$  est muni d'une structure de groupe, pour laquelle la loi de composition est définie par la règle

$$(1.2.2.3) \quad (\lambda_1 * \lambda_2)(\pi) = \lambda_1(v_2(\pi)) \lambda_2(\pi)$$

pour toute paire d'éléments  $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Der}^*(\Pi, G)$ , où l'on a posé

$$d(\lambda_i) = f_i = (u_i, v_i)$$

pour  $i=1, 2$ . On constate alors que la flèche  $d$  est un homomorphisme de groupes. Mieux, le complexe (1.2.2.2) est un module croisé, l'action à gauche de  $\text{Aut}(G, \Pi)$  sur  $\text{Der}^*(\Pi, G)$  étant définie par la formule

$$(1.2.2.4) \quad ({}^f\lambda)(\pi) = u(\lambda(v^{-1}(\pi)))$$

pour tout  $\lambda \in \text{Der}^*(\Pi, G)$ ,  $f=(u, v) \in \text{Aut}(G, \Pi)$ . La gr-catégorie  $\mathcal{A}ut(\mathcal{G})$  est alors décrite par la proposition suivante :

PROPOSITION (1.2.3) [36], [6]. — *La gr-catégorie  $\mathcal{A}ut(\mathcal{G})$  est la gr-catégorie associée au module croisé (1.2.2.2).*

(1.2.4) Soit  $\mathcal{G}$  une gr-catégorie. Lorsque la loi de composition de  $\mathcal{G}$  est stricte, et que  $\mathcal{G}$  provient donc d'un module croisé  $\delta: G \rightarrow \Pi$ , le foncteur (1.2.1.2) se factorise par un foncteur strictement additif

$$(1.2.4.1) \quad i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}ut(\mathcal{G})$$

et l'action naturelle de  $\mathcal{A}ut(\mathcal{G})$  sur  $\mathcal{G}$  fait du morphisme (1.2.10) un « module croisé de modules croisés ». Le sens précis qu'il faut donner à ce terme est le suivant :

DÉFINITION (1.2.5) [28]. — *On appelle carré croisé un carré commutatif de groupes*

$$(1.2.5.1) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta'} & D \\ \delta \downarrow & & \downarrow d \\ \Pi & \xrightarrow{d'} & A \end{array}$$

dont les quatre arêtes, ainsi le complexe composé  $\kappa = d \circ \delta' = d' \circ \delta: G \rightarrow A$ , sont des modules croisés. On exige également que les morphismes de complexes de longueur un  $(\delta') \rightarrow (\kappa)$ ,  $(\kappa) \rightarrow (d)$ ,  $(\delta) \rightarrow (\kappa)$  et  $(\kappa) \rightarrow (d')$ , définis respectivement par les flèches  $d$ ,  $\delta'$ ,  $d'$  et  $\delta$  du diagramme (1.2.5.1) soient des morphismes de modules croisés. On se donne enfin une application

$$(1.2.5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} h: D \times \Pi \rightarrow G \\ \lambda, \pi \mapsto \{\lambda, \pi\} \end{array} \right.$$

telle que les conditions suivantes soient satisfaites pour tous  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in D$ ,  $\pi, \pi_1, \pi_2 \in \Pi$ ,  $a \in A$  et  $g \in G$

- (i)  $\delta' \{ \lambda, \pi \} = \lambda (d'(\pi) \lambda)^{-1}$  et  $\delta \{ \lambda, \pi \} = (d(\lambda) \pi)^{-1}$
- (ii)  $\{ \delta'(g), \pi \} = g (\pi g)^{-1}$  et  $\{ \lambda, \delta(g) \} = (\lambda g) g^{-1}$
- (iii)  $\{ \lambda_1 \lambda_2, \pi \} = \lambda_1 \{ \lambda_2, \pi \} \{ \lambda_1, \pi \}$  et  $\{ \lambda, \pi_1 \pi_2 \} = \{ \lambda, \pi_1 \} (\pi_1 \{ \lambda, \pi_2 \})$
- (iv)  $\{ {}^a \lambda, {}^a \pi \} = {}^a \{ \lambda, \pi \}$
- (v)  ${}^\lambda (\pi g) \{ \lambda, \pi \} = \{ \lambda, \pi \} {}^\pi (\lambda g)$ .

(1.2.6) De la même manière que le normalisé d'un groupe simplicial satisfaisant à certaines conditions est un module croisé, à partir duquel on peut reconstruire le groupe simplicial tout entier (voir [8]), on constate que le normalisé de tout groupe bisimplicial admettant les conditions en question horizontalement et verticalement sera un carré croisé. Inversement, la donnée d'un carré croisé quelconque détermine un groupe bisimplicial. Dans le cas du foncteur  $i$  (1.2.4.1) associé à la gr-catégorie  $\mathcal{G}$  définie par un module croisé  $(\delta: G \rightarrow \Pi)$ , la discussion précédente dit que le foncteur en question, muni de l'action naturelle de  $\mathcal{A}ut(\mathcal{G})$  sur  $\mathcal{G}$ , est décrit par le carré croisé suivant :

$$(1.2.6.1) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta'} & \text{Der}^*(\Pi, G) \\ \delta \downarrow & & \downarrow d \\ \Pi & \xrightarrow{d'} & \text{Aut}(G, \Pi) \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont définies, pour  $g \in G$ ,  $\pi, \pi' \in \Pi$ , par les formules

$$\delta'(g)(\pi) = g(\pi g)^{-1}$$

et

$$d'(\pi) = (u, v),$$

où  $u$  (resp.  $v$ ) est l'automorphisme de  $G$  (resp.  $\Pi$ ) défini par  $u(g) = {}^\pi g$  (resp.  $v(\pi') = \pi \pi' \pi^{-1}$ ). Enfin, l'application (1.2.5.2)  $\text{Der}^*(\Pi, G) \times \Pi \rightarrow G$  est définie par

$$(1.2.6.2) \quad \{ \lambda, \pi \} = \lambda(\pi).$$

En termes catégoriques, c'est l'application qui associe à une flèche  $(\lambda, u_1): u_1 \Rightarrow u_2$  de  $\mathcal{A}ut(\mathcal{G})$  (avec  $\lambda \in \text{Der}^*(\Pi, G)$  et  $u_2 = d(\lambda) u_1 \in \text{Aut}(G, \Pi)$ ), et à un objet  $\pi$  de  $\mathcal{G}$ , la flèche dans  $\mathcal{G}$

$$(1.2.6.3) \quad (\{ \lambda, \pi \}, u_1(\pi)): u_1(\pi) \rightarrow u_2(\pi)$$

définie en appliquant à l'objet  $\pi$  de  $\mathcal{G}$  la transformation naturelle  $(\lambda, u_1)$ .

## 2. Classification des extensions de gr-catégories

2.1. EXTENSION DE gr-CATÉGORIES. — (2.1.1) Soit  $p: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  un foncteur additif entre gr-catégories. Pour tout objet  $K$  de  $\mathcal{K}$ , on note  $\mathcal{H}_K$  la gr-catégorie fibre homotopique de  $\mathcal{H}$  au-dessus de  $K$ , dont les objets sont les paires  $(H, \varphi)$ , où  $H$  est un objet de  $\mathcal{H}$  et  $\varphi: p(H) \rightarrow K$  est un morphisme dans  $\mathcal{K}$ . On dira que le foncteur  $p$  satisfait à la propriété de relèvement des morphismes si pour tout objet  $H$  de  $\mathcal{H}$  et toute flèche  $\varphi: p(H) \rightarrow K$  de  $\mathcal{K}$ , il existe une flèche  $\tilde{\varphi}: H \rightarrow H'$  de  $\mathcal{H}$  telle que  $p(\tilde{\varphi}) = \varphi$ . Dans ce cas, la gr-catégorie  $\mathcal{H}_I$  est équivalente à la sous-gr-catégorie  $\ker(p)$  de  $\mathcal{H}$ , constituée des objets  $H$  de  $\mathcal{H}$  tels que  $p(H) = I$  (resp. des flèches  $f: H_1 \rightarrow H_2$  de  $\mathcal{H}$  telles que  $p(f) = 1_I$ ).

DÉFINITION (2.1.2). — Soient  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{K}$  une paire de gr-catégories. On appelle extension de  $\mathcal{K}$  par  $\mathcal{G}$  la donnée d'une gr-catégorie  $\mathcal{H}$ , munie d'un foncteur additif  $p: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ , qui est essentiellement surjectif et qui satisfait à la propriété de relèvement des morphismes, ainsi que d'une équivalence de gr-catégories  $r: \mathcal{G} \rightarrow \ker(p)$ .

Le cas qui nous intéresse principalement ici est celui où  $\mathcal{K} = \underline{K}$  est la gr-catégorie discrète définie en 1.1.7i. Une extension de  $\underline{K}$  par une gr-catégorie  $\mathcal{G}$  consiste donc en un foncteur  $p: \mathcal{H} \rightarrow \underline{K}$  surjectif sur les objets et d'une gr-équivalence  $r: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}_I$  de  $\mathcal{G}$  avec la sous-catégorie pleine  $\mathcal{H}_I = \ker(p)$  de  $\mathcal{H}$ , constituée des objets de  $\mathcal{H}$  qui s'envoient sur l'identité  $I$  de  $\mathcal{K}$ . Le foncteur composé  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}_I \hookrightarrow \mathcal{H}$  sera également parfois noté  $r$ . On représentera une extension  $(\mathcal{H}, p, r)$  par une suite exacte

$$(2.1.2.1) \quad I \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \underline{K} \rightarrow I.$$

Un morphisme entre deux telles extensions  $(\mathcal{H}, p, r)$  et  $(\mathcal{H}', p', r')$  consiste en la donnée d'un foncteur additif  $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & \mathcal{H}' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \underline{K} & \end{array}$$

commute, et d'une équivalence de foncteurs additifs  $\mu: h_1 \circ r \Rightarrow r'$ , où  $h_1: \mathcal{H}_I \rightarrow \mathcal{H}'_I$  est la restriction de  $h$  à la sous-catégorie  $\mathcal{H}_I$  de  $\mathcal{H}$ . Enfin, une transformation naturelle (ou morphisme) entre deux tels morphismes d'extensions  $(h, \mu)$  et  $(h', \mu'): (\mathcal{H}, p, r) \rightarrow (\mathcal{H}', p', r')$  est défini par la donnée d'un morphisme de foncteurs  $\varphi: h \Rightarrow h'$  tel que le morphisme induit  $p' \circ \varphi: p \Rightarrow p$  soit la transformation identité, et tel que le morphisme de foncteurs composé  $\mu' \circ (\varphi_1 \star r)$  coïncide avec  $\mu$ . On notera  $\text{EXT}(\underline{K}, \mathcal{G})$ , ou bien  $\text{EXT}(K[0], \mathcal{G})$ , la 2-catégorie des extensions de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$  ainsi définie.

Exemples (2.1.3). — (i) Soient  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{K}$  une paire de gr-catégories. Alors, la gr-catégorie produit  $\mathcal{G} \times \mathcal{K}$  munie de sa projection sur  $\mathcal{K}$  est une extension de  $\mathcal{K}$  par  $\mathcal{G}$  appelée l'extension triviale de  $\mathcal{K}$  par  $\mathcal{G}$ . En particulier, la 2-catégorie  $\text{EXT}(\underline{K}, \mathcal{G})$  associée à un groupe  $K$  est pointée par un objet distingué, qui est la classe de l'extension triviale  $\mathcal{G} \times \underline{K}$ .

(ii) A une suite exacte de groupes  $1 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow 1$  est associée l'extension de gr-catégories discrètes

$$I \rightarrow \underline{G} \rightarrow \underline{H} \rightarrow \underline{K} \rightarrow I.$$

(iii) Soit  $\mathcal{H}$  une gr-catégorie, et  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow \pi_0(\mathcal{H})[0]$  la projection canonique, qui associe à un objet  $H$  de  $\mathcal{H}$  sa classe d'isomorphisme. L'inclusion canonique  $\pi_1(\mathcal{H})[1] \rightarrow \mathcal{H}$  est une équivalence entre  $\pi_1(\mathcal{H})[1]$  et la composante connexe de l'identité de  $\mathcal{H}$ , d'où une suite exacte

$$I \rightarrow \pi_1(\mathcal{H})[1] \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \pi_0(\mathcal{H})[0] \rightarrow I.$$

Ce dévissage de  $\mathcal{H}$  est souvent appelé la décomposition de Postnikov de  $\mathcal{H}$ . Dans le cas où  $\mathcal{H}$  provient d'un module croisé  $\delta: G \rightarrow H$ , cette décomposition est la variante non-abélienne du dévissage usuel d'un complexe abélien de longueur 1 :

$$0 \rightarrow (\ker(\delta)[1]) \rightarrow (G \rightarrow H) \rightarrow \text{coker } \delta[0] \rightarrow 0.$$

## 2.2. INVARIANTS DE SCHREIER D'UNE EXTENSION. — (2.2.1) Soit

$$(2.2.1.1) \quad I \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \underline{K} \rightarrow I$$

une extension de gr-catégories  $(\mathcal{H}, p, r)$ . La sous-gr-catégorie  $\mathcal{H}_1$  de  $\mathcal{H}$  est « distinguée », en ce sens que, pour tout  $H \in \text{ob } \mathcal{H}$  et  $G \in \text{ob } \mathcal{H}_1$ , l'objet  $HGH^*$  appartient à la sous-catégorie  $\mathcal{H}_1$  de  $\mathcal{H}$ . On choisit une fois pour toutes un foncteur  $s: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{G}$  quasi-inverse de  $r: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}_1$ , ce qui permet de définir une fois pour toutes un élément, qui sera également noté  $HGH^*$ , dans  $\mathcal{G}$ . On définit ainsi une équivalence  $j_H \in \text{ob } \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  en posant

$$(2.2.1.2) \quad j_H(G) = HGH^*$$

et les mêmes considérations qu'en (1.2.1.1) montrent alors qu'on est en présence d'un foncteur additif

$$(2.2.1.3) \quad \begin{cases} j_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}) \\ H \mapsto j_H \end{cases}$$

Le foncteur additif composé  $j_{\mathcal{H}} \circ r$  est équivalent au foncteur  $i$  (1.2.1.2).

Supposons maintenant effectué le choix d'une section  $X$  du foncteur  $p$ , c'est-à-dire, pour tout  $k \in K$ , d'un objet  $X_k$  de  $\mathcal{H}$  tel que  $p(X_k) = k$ . Ce choix permet de démarrer une description à la Schreier de l'extension (2.2.1.1) en introduisant le foncteur

$$(2.2.1.4) \quad \begin{cases} j: \underline{K} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}) \\ k \mapsto j_{X_k} \end{cases}$$

L'action de  $j(k) = j_{X_k}$  sur un objet  $G$  de  $\mathcal{G}$  sera notée  $G \mapsto j^{(k)}G$ , ou bien même  $G \mapsto {}^kG$ , et on dispose donc d'un isomorphisme canonique

$$(2.2.1.5) \quad X_k G \rightarrow {}^kG X_k.$$

On prendra garde à ce propos qu'à la différence du foncteur  $j_{\mathcal{H}}$  (2.2.1.3), le foncteur  $j$  n'est pas additif, et il n'est donc pas vrai en général que  $^{(kk)'}G = {}^k({}^{k'}G)$ . Par convention, une expression telle que  $^{kk'}G$  signifiera toujours pour nous  ${}^k({}^{k'}G)$ .

Pour toute paire d'éléments  $k, l$  de  $K$ , il existe alors un objet  $Z^{k,l}$  de  $\mathcal{G}$ , et un isomorphisme

$$(2.2.1.6) \quad \lambda_{k,l}: X_k X_l \simeq Z_{k,l} X_{kl}$$

dans  $\mathcal{H}$ . On observera cependant que la paire  $(Z_{k,l}, \lambda_{k,l})$  en question n'est pas du tout unique: ainsi  $Z_{k,l}$  peut être remplacé par un quelconque objet isomorphe de  $\mathcal{G}$ ,  $\lambda_{k,l}$  étant modifié en conséquence. On pourrait également laisser  $Z_{k,l}$  inchangé, mais composer  $\lambda_{k,l}$  avec un quelconque automorphisme de sa source ou de son but. Quoiqu'il en soit, à la flèche  $\lambda_{k,l}$  de  $\mathcal{H}$  est associée par (2.2.1.3) une transformation naturelle entre auto-équivalences de  $\mathcal{G}$

$$(2.2.1.7) \quad j_{X_k X_l} \Rightarrow j_{Z_{k,l} X_{kl}}$$

ou bien encore, en tenant compte de ce que le foncteur  $j_{\mathcal{H}}$  (2.2.1.3) est additif et compatible à  $i$ , une transformation naturelle, également notée  $\lambda_{k,l}$ :

$$j_{X_k} \circ j_{X_l} \Rightarrow j_{X_k X_l} \Rightarrow j_{Z_{k,l} X_{kl}} \Rightarrow i_{Z_{k,l}} \circ j_{X_{kl}}.$$

On est donc, en définitive, en présence d'un élément

$$(2.2.1.8) \quad \underline{\lambda}_{k,l}: j(k)j(l) \Rightarrow i_{Z_{k,l}} \circ j(kl)$$

de  $fl(\mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ , que l'on se permettra de noter  $\lambda_{k,l}$  lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible avec la flèche (2.2.1.6).

A tout triplet  $(k, l, m)$  de  $K$  est associé la contrainte d'associativité (1.1.1.1)

$c_{k,l,m}: X_k(X_l X_m) \simeq (X_k X_l) X_m$ . Considérons le morphisme  $\underline{a}(k, l, m)$  défini par la flèche verticale droite du diagramme commutatif suivant:

$$(2.2.1.9) \quad \begin{array}{ccc} X_k(X_l X_m) & \xrightarrow{X_k \lambda_{l,m}} X_k Z_{l,m} X_{lm} & \xrightarrow{(2.2.1.5)} {}^k Z_{l,m} X_k X_{lm} \xrightarrow{{}^k Z_{l,m} \lambda_{k,lm}} {}^k Z_{l,m} Z_{k,lm} X_{klm} \\ \downarrow c_{k,l,m} & & \downarrow \underline{a}_{k,l,m} \\ (X_k X_l) X_m & \xrightarrow{\lambda_{k,l} X_m} Z_{k,l} X_{kl} X_m & \xrightarrow{Z_{k,l} \lambda_{kl,m}} Z_{k,l} Z_{kl,m} X_{klm} \end{array}$$

La flèche  $\underline{a}_{k,l,m}$  provient par multiplication à droite dans  $\mathcal{H}$  par  $X_{klm}$  d'une flèche  $a_{k,l,m}$

$$(2.2.1.10) \quad a_{k,l,m}: {}^k Z_{l,m} Z_{k,lm} \simeq Z_{k,l} Z_{kl,m}$$

de  $\mathcal{G}$ , et réciproquement la donnée d'une quelconque famille de flèches (2.2.1.10) détermine, les isomorphismes (2.2.1.5) étant fixés, une contrainte d'associativité de la



loi de composition de  $\mathcal{H}$ . Appliquons maintenant le foncteur  $j_{\mathcal{H}}$  (2.2.1.3) au diagramme (2.2.1.9). Par additivité du foncteur en question, la flèche  $j(c_{k,l,m})$  de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  s'identifie à la flèche  $c_{j(k), j(l), j(m)}: j_{X_k} \circ (j_{X_l} \circ j_{X_m}) \Rightarrow (j_{X_k} \circ j_{X_l}) \circ j_{X_m}$  définie par la gr-structure de la catégorie  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ . Au diagramme (2.2.1.9) correspond donc le diagramme suivant dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ , qui exprime la compatibilité de la flèche déduite de (2.2.1.9) à  $c_{j(k), j(l), j(m)}$ :

$$(2.2.1.11) \quad \begin{array}{ccc} j(k)((j(l)j(m))) & \rightarrow & i_{k_{Z_l, m} Z_{k, lm}} j(klm) \\ \downarrow c_{j(k), j(l), j(m)} & & \downarrow i_{a_{k, l, m}} j(klm) \\ (j(k)j(l))j(m) & \rightarrow & i_{Z_{k, l} Z_{kl, m}} j(klm) \end{array}$$

Enfin, si on accole, pour tout quadruplet  $(k, l, m, n) \in K^4$ , cinq diagrammes (2.2.1.9) aux cinq arêtes du pentagone (1.1.1.4) qui exprime la cohérence de la contrainte d'associativité  $c_{k, l, m}$ , on obtient le diagramme suivant, qui exprime la cohérence en question en termes des flèches  $a_{k, l, m}$  (2.2.1.10):

$$(2.2.1.12) \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{stZ_{u,v} \quad sZ_{t,uv} \quad Z_{s,tuv}} \\ \downarrow \scriptstyle s a_{t,u,v} \quad Z_{s,tuv} \quad \downarrow \\ sZ_{t,u} \quad sZ_{tu,v} \quad Z_{s,tuv} \\ \downarrow \scriptstyle sZ_{t,u} \quad a_{s,tu,v} \quad \downarrow \\ sZ_{t,u} \quad Z_{s,tu} \quad Z_{stu,v} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{stZ_{u,v} \quad a_{s,t,uv}} \\ \downarrow \scriptstyle \{ \lambda_{s,t}, Z_{u,v} \} \quad Z_{s,t} \quad Z_{st,u,v} \\ Z_{s,t} \quad (st)Z_{u,v} \quad Z_{st,u,v} \quad Z_{s,t} \\ \downarrow \scriptstyle (Z_{s,t} \quad a_{st,u,v}) \quad Z_{s,t} \\ Z_{s,t} \quad Z_{st,u} \quad Z_{stu,v} \end{array} \\ & \xrightarrow{\quad a_{s,t,u} \quad Z_{stu,v} \quad} & \end{array}$$

La flèche  $\{ \lambda_{s,t}, Z_{u,v} \}$  de ce digramme doit être comprise comme étant la flèche

$$\{ \lambda_{s,t}, Z_{u,v} \}: stZ_{u,v} \rightarrow i_{Z_{s,t}}^{(st)} Z_{u,v}$$

de  $\mathcal{G}$  obtenue en appliquant la transformation naturelle  $\lambda_{s,t}$  (2.2.1.8) à l'objet  $Z_{u,v}$  de  $\mathcal{G}$ .

Dans le cas de la décomposition de Postnikov (2.1.3.iii) d'une gr-catégorie  $\mathcal{G}$ , la flèche  $a_{k,l,m}$  (2.2.1.10) n'est autre que l'invariant de Postnikov de  $\mathcal{H}$ , élément du groupe  $\text{Aut}(I) = \pi_1(\mathcal{G})$ , et le diagramme (2.2.1.12) se réduit à un pentagone, dont la commutativité exprime le fait bien connu que l'invariant en question est un 3-cocycle de  $\pi_0(\mathcal{G})$  à valeurs dans le  $\pi_0(\mathcal{G})$ -module  $\pi_1(\mathcal{G})$  ([43] I, prop. 10). Par analogie avec ceci, on a dans le cas général la définition suivante:

**DÉFINITION (2.2.2).** — On appelle 1-cocycle de  $K$  à valeurs dans le « carré croisé »  $i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  la donnée, pour tout  $k \in K$ , d'un objet  $j(k)$  de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ , pour tout  $(k, l) \in K^2$ , d'un objet  $Z_{k,l}$  de  $\mathcal{G}$  et d'une flèche  $\lambda_{k,l}$  (2.2.1.8) de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ , enfin, pour tout  $(k, l, m) \in K^3$ , d'une flèche  $a_{k,l,m}$  (2.2.1.10) de  $\mathcal{G}$ , auxquels on impose que les diagrammes (2.2.1.11) de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  et (2.2.1.12) de  $\mathcal{G}$  correspondants soient commutatifs.

On notera  $Z^1(K, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$  l'ensemble de ces 1-cocycles. Cet ensemble possède un élément distingué, qui est le cocycle pour lequel les objets de  $\mathcal{G}$  et de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  sont, pour tout  $k, l, m$ , les objets unité, (resp. les flèches identité). La discussion précédente est alors

résumée par l'assertion qu'à une extension (2.2.1.1) d'un groupe  $K$  par une gr-catégorie  $\mathcal{G}$  est associée, une fois effectué le choix d'objets  $X_k$  de  $\mathcal{H}$  et  $Z_{k,l}$  de  $\mathcal{H}$  ainsi que de flèches  $\lambda_{k,l}$  (2.2.1.6) de  $\mathcal{H}$ , un 1-cocycle  $(j(k), Z_{k,l}, \lambda_{k,l}, a_{k,l,m})$  de  $K$  à valeurs dans  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  qui la décrit. Lorsque l'extension  $\mathcal{H}$  considérée est la gr-catégorie produit  $\mathcal{G} \times \underline{K}$ , et que l'on effectue des choix appropriés, alors le cocycle en question est le cocycle trivial.

Il est par ailleurs loisible de choisir comme objet  $X_e$  de  $\mathcal{H}$  l'objet identité  $I_{\mathcal{H}}$  de la gr-catégorie  $\mathcal{H}$ . Dans ce cas, l'équivalence  $j(e)$  de  $\mathcal{G}$  correspondante est équivalente à l'application identique  $1_{\mathcal{G}} \in \mathcal{E}q(\mathcal{G})$ . On peut alors prendre pour objet  $Z_{e,e}$  (resp. flèche  $\lambda_{e,e}$ ) l'objet identité  $I = I_{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G}$  (resp. la flèche identité  $1_{\mathcal{G}}$ ). Puisque la contrainte d'associativité (1.1.1.1) dans  $\mathcal{H}$  est supposée compatible avec la contrainte d'unité, on peut enfin supposer que la flèche  $a_{e,e,e}$  (2.2.1.10) est l'application identité. Le 1-cocycle obtenu de cette manière est donc ce qu'on appellera un cocycle réduit :

**DÉFINITION (2.2.3).** — On dit qu'un 1-cocycle  $(j(k), Z_{k,l}, \lambda_{k,l}, a_{k,l,m})$ , de  $\underline{K}$  à valeurs dans le « carré croisé »  $i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  est réduit lorsque le quadruplet  $(j(e), Z_{e,e}, \lambda_{e,e}, a_{e,e,e})$  est égal au quadruplet trivial.

(2.2.4) Le choix d'une autre famille de paires d'objets  $X'_k, Z'_{k,l}$  et de flèches  $\lambda'_{k,l}$  détermine un autre 1-cocycle  $(j'(k), Z'_{k,l}, \lambda'_{k,l}, a'_{k,l,m})$  de  $\underline{K}$  à valeurs dans  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  et il importe de comprendre dans quelle mesure celui-ci diffère du cocycle précédent. Puisque  $p(X_k) = p(X'_k)$ , on peut choisir un objet  $Z_k$  de  $\mathcal{G}$  et un morphisme

$$(2.2.4.1) \quad \lambda_k: X_k \rightarrow Z_k X'_k$$

dans  $\mathcal{H}$ . Celui-ci détermine par (2.2.1.3) une flèche dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ , qui sera notée  $\underline{\lambda}_k$  (ou bien même  $\lambda_k$ ) :

$$(2.2.4.2) \quad \underline{\lambda}_k: j(k) \rightarrow i_{Z_k} j'(k).$$

Soit par ailleurs

$$(2.2.4.3) \quad a_{k,l}: Z_{k,l} Z_{kl} \rightarrow Z_k^{j'(k)} Z_l Z'_{k,l}$$

la flèche de  $\mathcal{G}$  telle que la flèche induite par multiplication à droite par  $X'_{kl}$ , c'est-à-dire

$$(2.2.4.4) \quad \underline{a}_{k,l} = a_{k,l} X'_{kl}: Z_{k,l} Z_{kl} X'_{kl} \rightarrow Z_k^{j'(k)} Z_l Z'_{k,l} X'_{kl},$$

soit caractérisée par la commutativité du diagramme suivant dans  $\mathcal{H}$  :

$$(2.2.4.5) \quad \begin{array}{ccccc} X_k X_l & \xrightarrow{\lambda_k \lambda_l} & Z_k X'_k Z_l X'_l & \rightarrow & Z_k^{j'(k)} Z_l X'_k X'_l \\ \downarrow \lambda_{k,l} & & & & \downarrow Z_k^{j'(k)} Z_l \lambda'_{k,l} \\ Z_{k,l} X_{kl} & \xrightarrow{Z_{k,l} \lambda_{kl}} & Z_{k,l} Z_{kl} X'_{kl} & \xrightarrow{a_{k,l}} & Z_k^{j'(k)} Z_l Z'_{k,l} X'_{kl} \end{array}$$

De même qu'on a déduit le diagramme (2.2.1.11) dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  du diagramme (2.2.1.9) dans  $\mathcal{H}$ , on peut appliquer le foncteur  $j_{\mathcal{H}}$  (2.2.1.3) au diagramme (2.2.4.5). On obtient alors le diagramme suivant dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ , qui donne une compatibilité entre les flèches  $\underline{\lambda}_k$  (2.2.4.2) et la flèche  $i_{a_{k,l}}$ , image de (2.2.4.3) par le foncteur de conjugaison intérieure

(1.2.1.2):

$$\begin{array}{ccc}
 j(k)j(l) & \xrightarrow{\lambda_k \lambda_l} & i_{(Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(l)})} j'(k) j'(l) \\
 \lambda_{k,l} \downarrow & & \downarrow i_{(Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(l)})} \lambda'_{k,l} \\
 i_{Z_k,l} j(kl) & \xrightarrow{i_{Z_k,l} \lambda_{kl}} i_{Z_k,l} Z_{kl} j'(kl) & \xrightarrow{i_{a_{k,l}} j'(kl)} i_{Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(l)}} j'(kl)
 \end{array}
 \quad (2.2.4.6)$$

On dispose par ailleurs du diagramme commutatif suivant, qui compare la contrainte d'associativité  $c_{k,l,m}: X_k(X_l X_m) \simeq (X_k X_l) X_m$  pour les objets  $X_k$  à la contrainte correspondante  $c'_{k,l,m}: X'_k(X'_l X'_m) \simeq (X'_k X'_l) X'_m$  pour les  $X'_k$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X_k(X_l X_m) & \xrightarrow{c_{k,l,m}} & (X_k X_l) X_m \\
 \lambda_k (\lambda_l \lambda_m) \downarrow & & \downarrow (\lambda_k \lambda_l) \lambda_m \\
 Z_k X'_k(Z_l X'_l Z_m X'_m) & & (Z_k X'_k Z_l X'_l) Z_m X'_m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z_k X'_k(Z_l^{j'(l)} Z_m X'_l X'_m) & & (Z_k^{j'(k)} Z_l X'_k X'_l) Z_m X'_m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k) j'(l)} Z_m X'_k(X'_l X'_m) & \xrightarrow{Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k) j'(l)} Z_m c'_{k,l,m}} & Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k) j'(l)} Z_m (X'_k X'_l) X'_m
 \end{array}
 \quad (2.2.4.7)$$

Ici les isomorphismes verticaux non précisés ici sont induits par les données d'associativité dans  $\mathcal{G}$  et par des isomorphismes de type (2.2.1.5). La relation exprimée par ce diagramme entre les flèches  $c_{k,l,m}$  et  $c'_{k,l,m}$  peut être traduite par une relation similaire entre les flèches  $a_{k,l,m}$  et  $a'_{k,l,m}$  correspondantes, en considérant le cube suivant, dont la face supérieure est le carré (2.2.4.7).

$$\begin{array}{ccc}
 X_k(X_l X_m) & \xrightarrow{\quad} & (X_k X_l) X_m \\
 \swarrow & & \swarrow \\
 Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k) j'(l)} Z_m X'_k(X'_l X'_m) & \xrightarrow{\quad} & Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k) j'(l)} Z_m (X'_k X'_l) X'_m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 {}^k Z_{l,m} Z_{k,lm} X_{klm} & \xrightarrow{a_{k,l,m}} & Z_{k,l} Z_{kl,m} X_{klm} \\
 \swarrow \alpha & & \swarrow \beta \\
 Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k) j'(l)} Z_m^{j'(k)} Z'_{l,m} Z'_{k,lm} X'_{klm} & \xrightarrow{\gamma} & Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k) j'(l)} Z_m Z'_{k,l} Z'_{kl,m} X'_{klm}
 \end{array}
 \quad (2.2.4.8)$$

Les faces avant et arrière sont construites à partir de diagrammes commutatifs de type (2.2.1.9) associés à  $c_{k,l,m}$  et à  $c'_{k,l,m}$  tandis que les faces gauches et droites sont constituées, pour l'essentiel, de diagrammes de type (2.2.4.5). On déduit de la commutativité des carrés en question que celle du carré supérieur de (2.2.4.8) équivaut à celle du carré inférieur. Les flèches (2.2.4.1) permettent de remplacer la flèche  $\underline{a}_{k,l,m}$  du carré inférieur en question par la flèche

$$(2.2.4.9) \quad {}^k Z_{l,m} Z_{k,lm} Z_{klm} X'_{klm} \xrightarrow{a_{k,l,m} Z_{klm} X'_{klm}} Z_{k,l} Z_{kl,m} Z_{klm} X'_{klm}.$$

Le carré alors obtenu provient, par multiplication à droite par  $X'_{klm}$ , du carré dans  $\mathcal{G}$  suivant :

$$(2.2.4.10) \quad \begin{array}{ccc} {}^k Z_{l,m} Z_{k,lm} Z_{klm} & \xrightarrow{a_{k,l,m} Z_{klm}} & Z_{k,l} Z_{kl,m} Z_{klm} \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta' \\ Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k)j'(l)} Z_m^{j'(k)} Z'_{l,m} Z'_{kl,m} & \xrightarrow{\gamma'} & Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k)j'(l)} Z_m^{j'(k)} Z'_{k,l} Z'_{kl,m} \end{array}$$

Ici, la flèche  $\gamma'$  est  $Z_k^{j'(k)} Z_l^{j'(k)j'(l)} Z_m^{j'(k)} a'_{k,l,m}$ , tandis que les flèches  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont définies par les formules suivantes (on se permet à nouveau de négliger ici des contraintes d'associativité dans  $\mathcal{G}$  et des isomorphismes de commutativité tordue (2.2.1.5)) :

$$(2.2.4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = (Z_k^{j'(k)} a_{l,m} Z'_{k,lm}) \circ (\{\lambda_k, Z_{l,m}\} Z_k^{j'(k)} Z_{lm} Z'_{k,lm}) \circ ({}^k Z_{l,m} a_{k,lm}) \\ \beta' = (Z_k^{j'(k)} Z_l \{\lambda'_{k,l}, Z_m\} Z'_{k,l} Z'_{kl,m})^{-1} \circ (a_{k,l}^{j'(kl)} Z_m Z'_{kl,m}) \circ (Z_{k,l} a_{kl,m}) \end{array} \right.$$

(les flèches  $\{\lambda_k, Z_{l,m}\}$  et  $\{\lambda'_{k,l}, Z_m\}$  qui figurent dans ces formules sont à interpréter de la même manière que la flèche analogue de (2.2.1.12)).

La discussion précédente justifie la définition suivante :

**DÉFINITION (2.2.5).** — On dit qu'une paire de 1-cocycles  $(j(k), Z_{k,l}, \lambda_{k,l}, a_{k,l,m})$  et  $(j'(k), Z'_{k,l}, \lambda'_{k,l}, a'_{k,l,m})$  sont cohomologues s'il existe, pour tout  $k \in K$ , un objet  $Z_k$  de  $\mathcal{G}$ , une flèche  $\lambda_k$  (2.2.4.2) de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ , enfin pour tout  $k, l \in K$ , une flèche  $a_{k,l}$  (2.2.4.3) de  $\mathcal{G}$  tel que les diagrammes (2.2.4.6) et (2.2.4.10) commutent. On pose alors  $(j(k), Z_{k,l}, \lambda_{k,l}, a_{k,l,m}) \sim (j'(k), Z'_{k,l}, \lambda'_{k,l}, a'_{k,l,m})$ . On appelle un tel triplet  $(Z_k, \lambda_k, a_{k,l})$  un 1-cobord de  $K$  à valeurs dans le « carré croisé »  $i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$ . Dans le cas où les deux 1-cocycles en question sont réduits, on dira que le cobord  $(Z_k, \lambda_k, a_{k,l})$  est réduit si  $(Z_e, \lambda_e, a_e)$  est le cobord trivial  $(I, 1_{\mathcal{G}}, c)$ ,  $c$  étant le morphisme canonique défini par la contrainte d'unité dans  $\mathcal{G}$ .

La classification des extensions (2.2.1.1), telle qu'on l'a décrite ci-dessus, est alors résumée par la proposition suivante

**PROPOSITION (2.2.6).** — L'ensemble  $\text{Ext}(\underline{K}, \mathcal{G})$  des classes d'équivalence d'extensions de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$  est en bijection avec l'ensemble  $H^1(\underline{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ , quotient de l'ensemble des 1-cocycles de  $K$  à valeurs dans  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  par la relation d'équivalence définie par les

1-cobords. Cet ensemble est également en bijection avec l'ensemble de cohomologie réduite correspondante.

(2.2.7) Il aurait une autre manière, mais moins explicite et faisant appel à des techniques topologiques plus poussées, de définir l'ensemble  $H^1(\text{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ . Nous renvoyons à 4.2, 4.3 ci-dessous pour ce point de vue plus conceptuel. Contentons-nous ici de donner un sens précis à la notion de « carré croisé » c'est-à-dire de « module croisé de gr-catégorie » figurant dans les définitions (2.2.3)-(2.2.6).

DÉFINITION (2.2.8). — On appelle module croisé de gr-catégories la donnée d'une paire  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{A}$  de gr-catégories, et d'un foncteur additif  $\underline{d}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ , et d'une action (gauche) de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{G}$  par des équivalences (c'est-à-dire d'un foncteur additif  $j: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$ ), ainsi que d'un morphisme de foncteurs additifs  $\varphi$

$$(2.2.8.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\underline{d}} & \mathcal{A} \\ & \searrow \varphi & \downarrow j \\ & & \mathcal{E}q(\mathcal{G}) \end{array}$$

*(Note: A diagonal arrow labeled 'i' also points from G to Eq(G) in the original diagram.)*

On exige enfin que le foncteur  $\underline{d}$  soit  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ -équivariant pour l'action naturelle de  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$  sur  $\mathcal{G}$ , dans le sens expliqué en [4] 6.1.5-6.1.6 [voir également (3.1.9.3) ci-dessous].

Outre l'exemple canonique du module croisé de catégories  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  associé à une gr-catégorie  $\mathcal{G}$ , on dispose notamment, pour chaque extension  $(\mathcal{H}, p, r)$  (2.2.1.1) de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$ , du module croisé de gr-catégories  $r: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , l'action de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{G}$  étant définie par (2.2.1.3).

(2.2.9) On calque de la même manière la définition d'un morphisme  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_0, \psi)$  entre deux modules croisés de gr-catégories  $\underline{d}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $\underline{d}': \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{A}'$  sur la définition correspondant pour les modules croisés ordinaires. Un tel morphisme consiste donc en une paire de foncteurs additifs  $\varphi_1: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  et  $\varphi_0: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  tel que le carré ainsi constitué commute au morphisme de foncteurs additifs  $\psi: \underline{d}' \circ \varphi_1 \Rightarrow \varphi_0 \circ \underline{d}$  près. On exige enfin que  $\varphi_1$  soit  $\varphi_0$ -équivariant en un sens analogue à (3.1.9.3) que l'on laisse au lecteur le soin de préciser.

2.3. EXTENSIONS STRICTES. — (2.3.1) Il est un cas dans lequel la théorie de Schreier qui vient d'être développée admet une description plus simple, ou du moins plus concrète. C'est celui où la gr-catégorie  $\mathcal{G}$  a des données d'associativité et d'unité strictes, et est donc associée à un module croisé  $(G \rightarrow \Pi)$ . On peut alors chercher à classer les extensions (2.2.1.1) pour lesquelles la gr-catégorie intermédiaire  $\mathcal{H}$  est également stricte. De manière précise, on pose :

DÉFINITION (2.3.2). — Soit  $K$  un groupe et  $\mathcal{G}$  une gr-catégorie stricte, associée à un module croisé  $(G \rightarrow \Pi)$ . On dira qu'une extension (2.2.1.1)  $(\mathcal{H}, p, r)$  de  $K$  par  $\mathcal{G}$  est stricte si la gr-catégorie  $\mathcal{H}$ , ainsi que les morphismes  $p$  et  $r$  sont stricts. On supposera également fixé le foncteur  $s: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{G}$  quasi-inverse de  $r$ . On appellera morphisme entre l'extension  $(\mathcal{H}, p, r)$  et une extension  $(\mathcal{H}', p', r')$  un foncteur strict  $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  tel que  $h \circ r = r'$  (resp.  $s \circ h = s'$ ) et  $p' \circ h = p$ .

En d'autres termes, on cherche maintenant à décrire les classes de suites exactes de groupes simpliciaux

$$(2.3.2.1) \quad 1 \rightarrow G. \rightarrow H. \rightarrow K[0] \rightarrow 1$$

où le nerf  $G.$  de  $\mathcal{G}$  (resp.  $H.$  de  $\mathcal{H}$ ) est, comme il a été expliqué en (1.1.4), un groupe simplicial qui est une tour de Postnikov à deux étages, tandis que  $K[0]$  est le groupe simplicial constant défini par  $K$ . Les flèches  $p.: H. \rightarrow K[0]$  et  $r.: G. \rightarrow H.$  sont maintenant des homomorphismes de groupes simpliciaux. L'exactitude de la suite (2.3.2.1) a pour signification que la composante de degré zéro de l'homomorphisme  $p.$  est surjective et que, si on note  $\ker(p.)$  le sous-groupe simplicial de  $H.$  dont la  $i$ -ième composante est le noyau de la  $i$ -ième composante  $p_i: H_i \rightarrow K$  de  $p$ , alors on dispose d'une équivalence d'homotopie de groupes simpliciaux

$$(2.3.2.2) \quad r.: G. \rightarrow \ker(p.).$$

Ceci signifie que l'on se donne un homomorphisme de groupes simpliciaux  $s: \ker(p.) \rightarrow G$  inverse de  $r.$ , à des homotopies qui respectent la structure de groupe près. Un morphisme de la suite (2.3.2.1) vers une suite

$$1 \rightarrow G. \rightarrow H.' \rightarrow K[0] \rightarrow 1$$

consiste alors en un homomorphisme

$$(2.3.2.3) \quad h.: H. \rightarrow H.'$$

tel que  $h \circ r = r'$  (resp.  $s \circ h = s'$ ) et  $p' \circ h = p$ . On peut considérer (2.3.2.1) comme étant décrite par la suite exacte des modules croisés déduite par normalisation de chacun de ses termes. Ainsi,  $(G \rightarrow \Pi)$  étant le module croisé associé à  $G.$  et  $(L \rightarrow M)$  celui associé à  $H.$ , la suite exacte (2.3.2.1) induit une suite de modules croisés

$$(2.3.2.4) \quad 1 \rightarrow (G \rightarrow \Pi) \rightarrow (G \rightarrow M) \rightarrow (1 \rightarrow K) \rightarrow 1.$$

On prendra cependant garde que cette suite de complexes de longueur 1 n'est pas exacte au sens le plus naïf, puisque la suite des composantes de degré 0 de

$$(2.3.2.5) \quad 1 \rightarrow \Pi \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 1$$

n'est en général pas une suite exacte de groupes, ce qui aurait été le cas si l'on avait exigé que l'homomorphisme  $r.$  (2.3.2.2) soit un isomorphisme plutôt qu'une équivalence d'homotopie. Dans ce dernier cas, la théorie de Schreier usuelle de l'extension (2.3.2.5) aurait suffi pour classer les extensions (2.3.2.1).

Revenons au cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui où  $r.$  est une équivalence d'homotopie. Nous pouvons alors reprendre dans le cadre strict la discussion de 2.2, et associer à tout objet  $m$  de  $\mathcal{H}$  la flèche  $j_m: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  définie, pour tout objet  $\pi$  de  $\mathcal{G}$  par

$$(2.3.2.6) \quad j_m(\pi) = s(mr(\pi)m^{-1}).$$

On obtient ainsi un foncteur additif

$$(2.3.2.7) \quad \begin{aligned} j_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} &\rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}) \\ m &\mapsto j_m \end{aligned}$$

prenant ses valeurs dans la gr-catégorie  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  plutôt que dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ . A cette différence près, la situation est identique à celle considérée en 2.2, avec la simplification supplémentaire que le foncteur  $i: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$  est un vrai « module croisé de module croisé », c'est-à-dire qu'il correspond à un carré croisé usuel (1.2.5). On a donc, par analogie avec les définitions (2.2.2) et (2.2.6):

**DÉFINITION (2.3.3).** — On appelle 1-cocycle de  $\mathbf{K}$  à valeurs dans le carré croisé  $i: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$  la donnée, pour tout  $k \in \mathbf{K}$ , d'un objet  $j(k)$  de  $\text{Aut}(\mathcal{G})$ , pour tout  $(k, l) \in \mathbf{K}^2$  d'un objet  $Z_{k,l}$  de  $\mathcal{G}$  et d'une flèche  $\lambda_{k,l}$  (2.2.1.8) de  $\text{Aut}(\mathcal{G})$ , enfin pour tout  $(k, l, m) \in \mathbf{K}^3$ , d'une flèche  $a_{k,l,m}$  (2.2.1.10) de  $\mathcal{G}$  tels que les diagrammes (2.2.1.11) de  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  et (2.2.1.12) de  $\mathcal{G}$  soient commutatifs. On dit par ailleurs que deux tels quadruplets sont cohomologues s'il existe, pour tout  $k \in \mathbf{K}$ , un objet  $Z_k$  de  $\mathcal{G}$  et une flèche  $\lambda_k$  (2.2.4.2) de  $\text{Aut}(\mathcal{G})$ , et pour tout  $(k, l) \in \mathbf{K}^2$ , une flèche  $a_{k,l}$  (2.2.4.3) de  $\mathcal{G}$  tels que les diagrammes (2.2.4.6) de  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  et (2.2.4.10) de  $\mathcal{G}$  commutent. L'ensemble des classes d'équivalence de 1-cocycles pour la relation d'équivalence en question est noté  $H^1(\mathbf{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}))$ .

La cohomologie réduite à valeurs dans  $\mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$  est définie de la même manière qu'en (2.2.3-2.2.5). L'analogue de la proposition (2.2.6) est l'énoncé suivant:

**PROPOSITION (2.3.4).** — Soit  $\mathbf{K}$  un groupe et  $\mathcal{G}$  une gr-catégorie stricte, associée à un module croisé  $(\mathbf{G} \rightarrow \Pi)$ . Alors, l'ensemble des classes d'extensions strictes de  $\mathbf{K}$  par  $\mathcal{G}$ , pointé par l'extension triviale, est en bijection avec l'ensemble pointé  $H^1(\mathbf{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}))$ , et également avec l'ensemble de cohomologie réduite correspondant.  $\bar{H}^1(\mathbf{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}))$ .

Puisque  $i: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$  est un foncteur additif strict entre des vrais modules croisés, tous les objets et flèches dans l'une ou l'autre de ces catégories peuvent être décrits, par le procédé rappelé en (1.1.6), en termes des éléments du carré croisé (1.2.6.1) associé à  $i$ . Les cocycles et cobords à valeurs dans  $\mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$  deviennent alors des cocycles et cobords, en un sens plus ordinaire, à valeurs dans le carré croisé (1.2.6.1). Ceci permet, dans le cas strict, d'éviter le recours à des diagrammes commutatifs compliqués, mais au prix de définitions de 1-cocycles et 1-cobords elles-mêmes compliquées, et à vrai dire bien peu intuitives. Voici le résultat de cette traduction: pour l'exprimer, on commencera par noter de la manière suivante le diagramme (1.2.6.1):

$$(2.3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} & \delta' & \\ G & \xrightarrow{\quad} & D \\ \delta \downarrow & & \downarrow d \\ \Pi & \xrightarrow[d']{\quad} & A \end{array}$$

Au quadruplet de flèches  $(j(k), Z_{k,l}, \lambda_{k,l}, a_{k,l,m})$  définissant un 1-cocycle (2.3.3) de  $K$  à valeurs dans  $\mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})$  correspond maintenant un quadruplet de flèches  $(x, z, \lambda, a)$ :

$$(2.3.4.2) \quad \begin{cases} x: K \rightarrow A \\ z: K \times K \rightarrow \Pi \\ \lambda: K \times K \rightarrow D \\ a: K \times K \times K \rightarrow G. \end{cases}$$

A la flèche (2.2.1.8) correspond l'égalité

$$(2.3.4.3) \quad d(\lambda(k, l)) x(k) x(l) = d'(z(k, l)) x(kl)$$

dans  $A$ . De même, la flèche (2.2.1.10) dit que l'égalité

$$(2.3.4.4) \quad \delta(a(k, l, m))^{x(k)} z(l, m) z(k, lm) = z(k, l) z(kl, m)$$

est satisfaite dans  $\Pi$ . La commutativité du diagramme (2.2.1.11) s'exprime maintenant, compte tenu de la définition en (2.2.1.9) des flèches horizontales qui le constituent, par l'égalité

$$(2.3.4.5) \quad \delta'(a(k, l, m))^{kz(l, m)} \lambda(k, lm) {}^{k\lambda}(l, m) = {}^{z(k, l)} \lambda(kl, m) \lambda(k, l).$$

dans  $D$  (où, dans l'expression  ${}^{kz(l, m)} \lambda(k, lm)$ , l'action de l'élément  ${}^{kz}(l, m)$  de  $\Pi$  sur l'élément  $\lambda(k, lm)$  de  $D$  s'effectue à travers  $d'$ , l'action de  $A$  sur  $D$  étant donnée par la structure de module croisé de  $d$ ). En d'autres termes (2.3.4.4) dit que  $\delta(a(k, l, m))$  est l'obstruction à ce que  $z(k, l)$  soit un 2-cocycle de  $K$  à valeurs dans  $\Pi$  (abstraction faite de ce que la fonction  $x$  ne permet pas de définir une vraie action de  $K$  sur  $\Pi$ ). De la même manière, (2.3.4.5) dit que  $\delta'(a(k, l, m))$  est l'obstruction à ce que  $\lambda(k, l)$  soit une sorte de 2-cocycle tordu.

Enfin, la commutativité de (2.2.1.12) s'exprime par l'égalité suivante dans  $G$ , qui est, à l'exception du facteur  $\{\lambda(k, l), z(m, n)\}$ , une condition de 3-cocycle tordue pour la cochaîne  $a$ , à valeurs dans le groupe non abélien  $G$ :

$$(2.3.4.6) \quad a(k, l, m) {}^{kz(l, m)} a(k, lm, n) {}^{ka}(l, m, n) \\ = {}^{z(k, l)} a(kl, m, n) \{\lambda(k, l), z(m, n)\} {}^{k(lz(m, n))} a(k, l, mn).$$

Traduisons maintenant de manière analogue les conditions de cobord: soit  $(x', z', \lambda', a')$  un second quadruplet (2.3.4.2), satisfaisant à nouveau aux conditions (2.3.4.3)-(2.3.4.6). Pour simplifier les formules, nous nous placerons en cohomologie réduite, et supposerons donc que chacune des paires de quadruplets consiste en des cocycles réduits, c'est-à-dire qui sont triviaux lorsqu'ils sont évalués en  $k=l=m=e$ . Dire que deux tels quadruplets sont cohomologues au sens de la cohomologie réduite signifie alors que l'on se donne un triplet d'applications réduites

$$(2.3.4.7) \quad \begin{cases} z: K \rightarrow \Pi \\ \lambda: K \rightarrow D \\ a: K \times K \rightarrow G \end{cases}$$



Les relations (2.2.4.2) et (2.2.4.3) disent respectivement que

$$(2.3.4.8) \quad d(\lambda(k))x(k) = d'(z(k))x'(k)$$

et que

$$(2.3.4.9) \quad \delta(a(k, l))z(k, l)z(kl) = z(k)^{x'(k)}z(l)z'(k, l),$$

tandis que la commutativité du diagramme (2.2.4.6) affirme que la relation

$$(2.3.4.10) \quad \delta'(a(k, l))^{z(k, l)}\lambda(kl)\lambda(k, l) = (z(k)^{j'(k)}z(l))\lambda'(k, l)\lambda(k)^{x(k)}\lambda(l)$$

est satisfaite. En d'autres termes, la relation (2.3.4.9) exprime le fait que  $\delta(a(k, l))$  est l'obstruction à ce que les «2-cocycles»  $z(k, l)$  et  $z'(k, l)$  soient cohomologues, et, de manière plus tordue,  $\delta'(a(k, l))$  celle à ce que les «2-cocycles»  $\lambda(k, l)$  et  $\lambda'(k, l)$  le soient. Enfin, le lecteur retrouvera dans la formule suivante, qui exprime la commutativité du diagramme (2.2.4.10), c'est-à-dire le fait que les «3-cocycles non abéliens»  $a(k, l, m)$  et  $a'(k, l, m)$  soient cohomologues, les définitions compliquées des flèches  $\alpha'$ ,  $\beta'$  et  $\gamma'$  qui le constituent :

$$(2.3.4.11) \quad z(k)^{x'(k)}z(l)^{x'(l)}z(m)^{a'(k, l, m)}a'(k, l, m)z(k)^{x'(k)}a(l, m)\{\lambda(k), z(l, m)\}^{x(k)}z(l, m)a(k, lm) \\ = z(k)^{x'(k)}z(l)^{x'(l)}\{\lambda'(k, l), z(m)\}^{-1}a(k, l)^{z(k, l)}a(kl, m)a(k, l, m).$$

En définitive, on a obtenu la proposition suivante :

**PROPOSITION (2.3.5).** — *La donnée d'un 1-cocycle de K à valeurs dans le carré croisé (2.3.4.1) équivaut à celle d'un quadruplet d'applications (2.3.4.2) satisfaisant aux conditions (2.3.4.3)-(2.3.4.6). Deux 1-cocycles réduits  $(x, z, \lambda, a)$  et  $(x', z', \lambda', a')$  sont cohomologues s'il existe un triplet d'applications (2.3.4.7) qui satisfasse aux conditions (2.3.4.8)-(2.3.4.11).*

**Remarques (2.3.6).** — (i) L'exemple le plus simple de 3-cocycle de K à valeurs dans G est le suivant : soit Z le sous-groupe de G constitué des éléments de G qui sont fixés par tout automorphisme de G. Ces éléments sont donc notamment fixés par les automorphismes intérieurs de G, et constituent donc un sous groupe du centre ZG de G. A tout 3-cocycle  $a$  de K à valeurs dans le groupe abélien Z et à toute action de K sur le module croisé  $\delta: (G \rightarrow \text{Aut}(G))$  (définie par un homomorphisme  $x: K \rightarrow A$ ), correspond le 1-cocycle  $(x, 1, 1, a)$  à valeurs dans le carré croisé (2.3.4.1) associé au module croisé  $\delta$ . En effet, les relations  $\delta(a(k, l, m)) = 1$  et  $\delta'(a(k, l, m)) = 1$ , auxquelles se réduisent dans ce cas les identités (2.3.4.4) et (2.3.4.5), sont satisfaites puisque  $a$  est à valeurs dans Z, comme il résulte des définitions de  $\delta$  et  $\delta'$  données en 1.1.7 et 1.2.6. En particulier, en prenant pour  $x$  l'application triviale, on définit ainsi un morphisme sur les cocycles, d'où se déduit par passage au quotient une application

$$(2.3.6.1) \quad \begin{cases} H^3(BK, Z) \rightarrow H^1(BK, \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})) \\ a \mapsto (1, 1, 1, a). \end{cases}$$

où  $\mathcal{G}$  désigne le module croisé  $\delta$ . Celle-ci est l'analogue, au cran suivant, de l'application

$$(2.3.6.2) \quad \bar{H}^2(\mathbf{BK}, \mathbf{ZG}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{K}, \mathbf{G})$$

en théorie de Schreier, qui associe par « pushout » à une extension centrale de  $\mathbf{K}$  par le centre  $\mathbf{ZG}$  de  $\mathbf{G}$  une extension de  $\mathbf{K}$  par  $\mathbf{G}$  (voir par exemple [2], prop. 1.1). En fait, comme il est bien connu, l'application (2.3.6.2) se prolonge en une suite exacte

$$0 \rightarrow \bar{H}^2(\mathbf{BK}, \mathbf{ZG}) \rightarrow \text{Ext}(\mathbf{BK}, \mathbf{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{K}, \text{Out}(\mathbf{G})),$$

qui s'obtient, comme on l'a notamment expliqué dans [4] paragraphe 8, par dévissage des coefficients  $\mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{G})$  de l'ensemble  $\text{Ext}(\mathbf{BK}, \mathbf{G}) = \bar{H}^1(\mathbf{BK}, \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{G}))$ . Pour en revenir au cas des extensions de  $\mathbf{K}$  par  $\mathcal{G}$  qui nous concerne ici, on constate que le carré croisé (2.3.4.1) possède trois groupes d'homotopie non triviaux, d'où une filtration à trois crans, et non plus deux comme en théorie de Schreier usuelle, de l'ensemble des extensions de  $\mathbf{K}$  par  $\mathcal{G}$ . Le premier cran de la filtration en question est mis en évidence par la flèche (2.3.6.1). Nous n'explicitons pas ici le prochain cran de cette filtration, dont la description est un peu plus compliquée, pour passer directement au dernier cran : on dispose d'une application (en général non surjective)

$$(2.3.6.3) \quad \begin{cases} H^1(\mathbf{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G})) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{K}, \bar{\mathbf{A}}) \\ (x, z, \lambda, a) \mapsto \tilde{x} \end{cases}$$

qui associe au 1-cocycle considéré l'homomorphisme de  $\mathbf{K}$  à valeurs dans le quotient de  $\mathbf{A}$  par le sous-groupe distingué engendré par les images de  $d$  et de  $d'$ , c'est-à-dire dans le groupe des classes d'isomorphie d'automorphismes extérieurs de  $\mathcal{G}$ . La flèche (2.3.6.3) est l'analogue au niveau supérieur de l'application qui associe à une extension de groupes son « noyau abstrait ». On terminera cette discussion en faisant observer qu'elle peut être intégralement reprise, *mutatis mutandis*, dans le cas où  $\mathcal{G}$  est un module croisé quelconque.

(ii) On a montré dans [4] que l'ensemble des  $\mathbf{G}$ -gerbes sur un schéma  $\mathbf{X}$ , c'est-à-dire le  $H^2$  de  $\mathbf{X}$  à valeurs dans un groupe non-abélien  $\mathbf{G}$ , n'était en fait qu'un  $H^1$ , mais dont les coefficients n'étaient pas le groupe  $\mathbf{G}$  lui-même, mais l'objet plus compliqué qu'est le module croisé  $\delta: \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{G})$ . On se heurte en effet, lorsqu'on cherche à définir un tel  $H^2$  au fait que l'ensemble  $H^1(\mathbf{X}, \mathbf{G})$  correspondant (qui classifie, on le sait, les  $\mathbf{G}$ -torseurs sur  $\mathbf{X}$ ) ne peut être muni, dans le cas où  $\mathbf{G}$  est non-abélien, d'une structure naturelle de groupe, par absence de produit contracté de deux  $\mathbf{G}$ -torseurs droits  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$ . Un tel produit ne peut, à l'évidence, être défini que si l'on dispose également sur au moins l'un des deux toreseurs d'une action à gauche de  $\mathbf{G}$ , ce qui amène à remplacer l'ensemble  $H^1(\mathbf{X}, \mathbf{G})$  par le groupe  $H^0(\mathbf{X}, \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{G}))$  des  $\mathbf{G}$ -bitorseurs sur  $\mathbf{X}$ . La structure de groupe en question permet alors de définir un ensemble  $H^1(\mathbf{X}, \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{G}))$ , celui des  $\mathbf{G}$ -gerbes sur  $\mathbf{X}$ , qui est comme on l'a dit le  $H^2$  à valeurs dans  $\mathbf{G}$ . Le prix à payer, lorsque l'on considère de la cohomologie à valeurs dans  $\mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{G})$ , où dans un module croisé quelconque  $\mathbf{G} \rightarrow \Pi$ , ou encore dans une gr-catégorie  $\mathcal{G}$ , plutôt que dans un groupe  $\mathbf{G}$ , se situe au niveau de la fonctorialité : on ne peut plus espérer associer à un homomorphisme de groupes  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  une application entre les ensembles  $H^2(\mathbf{X}, -)$  correspondant, et seule la donnée d'un morphisme de modules croisés

$(G \rightarrow \text{Aut}(G)) \rightarrow (H \rightarrow \text{Aut}(H))$  permet d'envoyer l'ensemble des  $G$ -gerbes de  $X$  vers l'ensemble des  $H$ -gerbes.

On peut constater que ce même phénomène de complication des coefficients à lieu, mais à un cran supérieur, lorsque l'on cherche à définir, comme ci-dessus, le  $H^3$  non-abélien : on a vu apparaître dans le cas qui vient d'être examiné où  $X = BK$  (mais il en est de même dans le cas où  $X$  est quelconque, voir 2.4.4), non plus des modules croisés mais des carrés croisés comme coefficients. Ce phénomène avait déjà été remarqué par Dedekker (voir 2.4.3) et également, dans un cadre très général par J.E. Roberts [39]. La raison en est essentiellement la même que dans le cas rappelé ci-dessus : on ne peut espérer mettre sur le  $H^2$  non abélien une structure de groupe, puisqu'il s'interprète (voir [4], prop. 6.2) comme un ensemble de toseurs sous une gr-catégorie. Il convient donc, pour pouvoir passer au  $H^3$ , de remplacer cet ensemble par le groupe des bitorseurs, en un sens approprié, sous la gr-catégorie en question, c'est-à-dire à remplacer, comme on le verra en 4.1 dans une situation plus générale, le module croisé de coefficients  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$ , par le carré croisé (2.3.4.1) associé à ce module croisé, ou même par le « carré croisé »  $i: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  considéré en 2.2.3. La fonctorialité du  $H^3$  en question en est compliquée d'autant : pour obtenir un morphisme entre les ensembles  $H^3(X, -)$  correspondants, il ne suffit plus de se donner un homomorphisme entre deux groupes  $G$  et  $H$ , ou même entre les modules croisés qui leur sont associés. Ainsi, dans le cas strict, seule la donnée d'un morphisme (au sens de [28]) entre les carrés croisés (2.3.4.1) associés à  $G$  et à  $H$  permet d'envoyer un cocycle (2.3.4.2) associé au groupe  $G$  vers le cocycle correspondant associé à  $H$ . Nous serons amenés à reprendre cette discussion sur la nature des coefficients d'une théorie de cohomologie non-abélienne en 4.3.

2.4. VARIANTES. — (2.4.1) Toute la discussion précédente garde un sens si l'on remplace le module croisé de gr-catégorie  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  par un module croisé quelconque de gr-cat  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  [au sens de (2.2.8)]. Ainsi, dans le cas strict, si l'on remplace le carré croisé (1.2.6.1) par un carré croisé quelconque (1.2.5.1), alors les conditions de cocycle et de cobord de la proposition (2.3.5) gardent un sens, et on obtient donc de cette manière une définition de l'ensemble de 1-cohomologie d'un groupe  $K$  à valeurs dans un carré croisé quelconque. Les objets géométriques dont les classes d'équivalences sont classifiées par l'ensemble de cohomologie  $H^1(BK, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A})$  sont les suivants, dont la définition est calquée sur celle des  $\pi$ -extensions de [9] (appelés les  $(G, \Pi)$ -extensions dans [4] 8.11).

DÉFINITION (2.4.2). — Soit  $K$  un groupe (resp.  $\underline{d}': \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  un module croisé de gr-catégories). On appelle  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -extension de  $\underline{K}$  la donnée d'une extension  $(\mathcal{H}, p, r)$  de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$ , d'un foncteur additif  $t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}$  et d'un morphisme de foncteurs additifs  $\varphi: t \circ r \Rightarrow \underline{d}'$ . On exige enfin que

$$(1_{\mathcal{G}}, t): (\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}) \rightarrow (\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A})$$

soit un morphisme de modules croisés de gr-catégories, au sens mentionné en (2.2.9), c'est-à-dire que  $1_{\mathcal{G}}$  soit  $t$ -équivariant en un sens cohérent, l'action à gauche de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{G}$  qui intervient dans la définition du module croisé  $(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H})$  étant donnée par la conjugaison intérieure (2.2.1.3) dans  $\mathcal{H}$ .

La démonstration d'une telle proposition sera en effet la même que celle de (2.3.5), mais prendra pour point de départ la « théorie de Schreier pour les  $\pi$ -extensions », telle qu'elle est donnée dans [10], plutôt que pour les extensions de groupes ordinaires (voir également à ce sujet [4] prop. 8.12). La condition de cohérence de l'action équivariante mentionnée dans l'énoncé précédent est du même type que celle explicitée ci-dessous en (3.1.9.3) dans une situation analogue.

Mentionnons également l'interprétation cohomologique correspondante des  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -extensions dans le cas strict : on considère alors un carré croisé (1.2.5.1) et on note  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{A}$  les gr-catégories strictes définies par les flèches verticales de celui-ci. Les flèches horizontales définissent alors un foncteur additif strict  $\underline{d}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  et on dispose en outre d'une action stricte de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{G}$  qui fait de  $\underline{d}$  un module croisé strict de gr-catégories. Les raisonnements précédents montrent alors que l'ensemble des classes d'équivalences strictes de  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -extension strictes de  $\underline{K}$  est en bijection avec l'ensemble de 1-cohomologie de BK à valeurs dans le carré croisé (1.2.5.1).

(2.4.3) Dedecker avait déjà proposé dans [11] une définition d'un ensemble de 3-cohomologie d'un groupe K à valeurs dans un groupe non-abélien G (sans toutefois en suggérer d'interprétation de type géométrique). Sa définition se révèle être de nature très proche de la nôtre, la différence la plus notable étant qu'il a recours à un ensemble de coefficients un peu trop restrictif. Ses coefficients, qu'il appelle des groupes super-croisés sont définis de manière quelque peu asymétrique dans *loc. cit.* déf. 4.1. On constate cependant aisément qu'un groupe super-croisé  $(H, \rho, \Pi, \Phi; \Lambda, E, \Psi, \kappa, \theta, \Delta)$  n'est guère autre chose qu'un carré croisé

$$(2.4.3.1) \quad \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \rightarrow & \Pi \end{array}$$

mais dans lequel le module croisé  $\Lambda \rightarrow \Pi$  est d'un type très particulier, puisqu'il est défini par l'inclusion dans  $\Pi$  d'un sous-groupe distingué  $\Lambda$ . Cette hypothèse restrictive est en fait inutile à la définition de l'ensemble de cohomologie à valeurs dans (2.4.3.1), et elle en rend certains aspects moins compréhensibles, en brisant une partie de la symétrie du carré commutatif (2.4.3.1). A ceci près, la construction de Dedecker est proche de la notre, comme on le constatera en comparant respectivement nos conditions (2.3.4.3), (2.3.4.5) et (2.3.4.6) à ses conditions (3.20.II), (3.20.V) et (3.20.I).

(2.4.4) La définition d'un 1-cocycle à laquelle on est parvenu n'a guère utilisé de propriétés particulières de l'espace classifiant BK du groupe K, si ce n'est d'être un ensemble simplicial. Aussi demeurent-elles valables lorsque l'on remplace BK par un ensemble simplicial quelconque X. Ainsi, si l'on se place dans le cadre strict, on pourra définir un 1-cocycle de X, à valeurs dans le carré croisé (1.2.5.1) comme étant un quadruplet d'applications

$$(2.4.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x: X_1 \rightarrow A \\ z: X_2 \rightarrow \Pi \\ \lambda: X_2 \rightarrow D \\ a: X_3 \rightarrow G \end{array} \right.$$

satisfaisant aux conditions analogues à (2.3.4.3)-(2.3.4.6), tandis que des cobords (réduits) consistent en des triplets

$$(2.4.4.2) \quad \begin{cases} z: X_1 \rightarrow \Pi \\ \lambda: X_1 \rightarrow D \\ a: X_2 \rightarrow G \end{cases}$$

analogues à (2.3.4.7), et qui satisfont aux conditions qui généralisent (2.3.4.8)-(2.3.4.11). On obtient donc par ce procédé, la définition explicite d'un ensemble  $H^1(X, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A})$  et sa variante stricte. En particulier, si l'on part du carré croisé (1.2.6.1), on obtient ainsi la définition du « $H^3$  non-abélien» d'un ensemble simplicial quelconque  $X$ , à valeurs dans un groupe non-abélien  $G$ .

*Remarque (2.4.5).* — On peut également décrire le groupe  $H^0(X, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$  [resp. le groupe abélien  $H^{-1}(X, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ ]. En ce qui concerne le groupe  $H^0(X, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ , la manière la plus simple de l'appréhender est d'observer qu'un 0-cocycle à valeurs dans le module croisé de gr-catégories consiste en un 1-cocycle à valeurs dans  $\mathcal{G}$  muni d'une trivialisation de son image à valeurs dans  $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$ . La description d'un 1-cocycle à valeurs dans un module croisé  $(G \rightarrow \Pi)$  est bien connue [9] (3.1)-(3.2), [4]: avec les conventions choisies ici, et si l'on suppose, pour rendre les formules plus familières, que  $X$ , est le nerf d'un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)$  de l'objet final de  $T$ , alors un tel 1-cocycle consiste en des 1-cochaînes

$$(2.4.5.1) \quad \begin{cases} f_i: U_i \rightarrow \Pi \\ \varphi_{ij}: U_{ij} \rightarrow G \end{cases}$$

telles que

$$(2.4.5.2) \quad \begin{cases} f_i = \delta(\varphi_{ij})f_j \\ \varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk} \end{cases}$$

Deux telles paires  $(\varphi_{ij}, f_j)$  et  $(\varphi'_{ij}, f'_j)$  sont cohomologues s'il existe une cochaîne  $h_i: U_i \rightarrow G$  telle que

$$(2.4.5.3) \quad \begin{cases} f'_i = \delta(h_i)f_i \\ \varphi'_{ij} = h_i\varphi_{ij}h_j^{-1} \end{cases}$$

Un 0-cocycle à valeurs dans un module croisé de catégories tel que  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  [ou plutôt, pour simplifier l'écriture, dans un carré croisé (1.2.5.1)] consiste donc en un triplet  $(\varphi_{ij}, f_j, \lambda_i)$  où  $\lambda_i: U_i \rightarrow D$ , qui satisfait aux conditions de cocycle (2.4.5.2) et à la condition

$$(2.4.5.4) \quad \lambda_i = \delta'(\varphi_{ij})\lambda_j.$$

Le triplet  $(\varphi_{ij}, f_j, \lambda_i)$  est cohomologue au triplet  $(\varphi'_{ij}, f'_j, \lambda'_i)$  lorsque la cochaîne  $h_i$  satisfait, outre (2.4.5.3), à la condition

$$(2.4.5.5) \quad \lambda'_i = \delta'(h_i)\lambda_i.$$

En ce qui concerne enfin le groupe abélien  $H^{-1}(X, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ , les équations (2.4.5.3) et (2.4.5.5) nous montrent qu'il s'identifie au groupe des sections  $h_i$  qui se recollent, et qui prennent leurs valeurs dans le groupe  $Z$  défini en (2.3.6), c'est-à-dire au groupe  $H^0(e, Z)$  des sections de  $Z$  sur l'objet final  $e$  de  $T$ .

(2.4.6) La théorie de Schreier usuelle a pour variante, lorsque le noyau de l'extension de groupes considérée est un groupe abélien, la théorie des extensions centrales. De la même manière, on peut étudier, lorsque la gr-catégorie  $\mathcal{G}$  est munie de données de commutativité, les extensions de gr-catégories (2.1.2) pour lesquelles le foncteur (2.2.1.3) est équivalent au foncteur constant de valeur  $1_{\mathcal{G}}$ . La condition minimale à imposer ici à  $\mathcal{G}$  est d'être une catégorie tressée, c'est-à-dire munie d'une donnée de commutativité fonctorielle

$$(2.4.6.1) \quad s_{X,Y} : XY \xrightarrow{\sim} YX$$

satisfaisant aux conditions d'hexagone de [25]. On dispose alors, pour tout  $p, q \in K$ , d'isomorphismes fonctoriels  $\gamma_{p,q} : X_p X_q \rightarrow X_q X_p$  déduits de (2.4.6.1) et de diagrammes commutatifs

$$(2.4.6.2) \quad \begin{array}{ccccc} & X_p(X_q X_r) & \xrightarrow{\gamma_{q,r}} & X_p(X_r X_q) & \\ c_{p,q,r} \swarrow & & & & \searrow c_{p,r,q} \\ (X_p X_q) X_r & & & & (X_p X_r) X_q \\ & \searrow & & \swarrow \gamma_{p,r} & \\ & X_r(X_p X_q) & \xrightarrow{c_{r,p,q}} & (X_r X_p) X_q & \end{array}$$

$$(2.4.6.3) \quad \begin{array}{ccccc} & (X_p X_q) X_r & \xrightarrow{\gamma_{p,q}} & (X_q X_p) X_r & \\ c_{p,q,r}^{-1} \swarrow & & & & \searrow c_{q,p,r}^{-1} \\ X_p(X_q X_r) & & & & X_q(X_p X_r) \\ & \searrow & & \swarrow \gamma_{p,r} & \\ & (X_q X_r) X_p & \xrightarrow{c_{q,r,p}^{-1}} & X_q(X_r X_p) & \end{array}$$

qui expriment la compatibilité de (2.4.6.1) avec la donnée d'associativité (1.1.1.1). Le 1-cocycle  $(j(k), Z_{k,l}, \lambda_{k,l}, a_{k,l,m})$  de la définition (2.2.2) est maintenant de la forme  $(1, Z_{k,l}, 1, a_{k,l,m})$ . Bien que ceci ne soit pas la seule possibilité, il est alors raisonnable de ne considérer que des cobords de la forme  $(1, 1, a_{k,l})$ . On retrouve alors le calcul, dû à Ulbrich<sup>(1)</sup> [47] paragraphe 1.2 d'une extension (2.1.2.1) à noyau muni d'une donnée de commutativité en termes de paires  $(Z_{k,l}, a_{k,l,m})$  modulo des cobords  $a_{k,l}$ . En effet, notre condition de cocycles (2.2.1.12) se réduit, sous ces hypothèses simplificatrices, à

<sup>(1)</sup> Cet auteur appelle catégorie de Picard (resp. catégorie de Picard symétrique) ce que nous nommons une gr-catégorie (resp. une catégorie de Picard).

sa condition de 3-cocycle. On prendra cependant garde que la condition de commutativité dans  $\mathcal{G}$  imposée par Ulbrich est inutilement restrictive : il suppose en effet que  $\mathcal{G}$  est une catégorie de Picard, c'est-à-dire que la donnée de commutativité (2.4.6.1) satisfasse également à la condition

$$(2.4.6.4) \quad s_{X,Y} \circ s_{Y,X} = 1,$$

auquel cas les deux conditions d'hexagone (2.4.6.2) et (2.4.6.3) se réduisent en une seule. On peut vérifier qu'en fait la condition (2.4.6.4) n'apparaît nulle part à ce niveau de la discussion. Elle deviendrait par contre indispensable si l'on souhaitait munir, comme c'est le cas dans [47], l'ensemble des classes d'extensions étudiées d'une structure de groupe. En tout état de cause l'ensemble de cohomologie ainsi obtenu, qui classifie les extensions « centrales » de noyau tressé  $\mathcal{G}$  mérite d'être noté  $H^2(\text{BK}, \mathcal{G})$ .

(2.4.7) Lorsque le groupe  $K$  est abélien, la catégorie  $\mathcal{G}$  étant à nouveau supposée tressée, on peut également chercher à classer les extensions (centrales) de gr-catégories (2.1.2.1), avec  $\mathcal{H}$  maintenant supposée également tressée, et qui respectent la structure tressée, c'est-à-dire pour lesquels les foncteurs  $p$  et  $r$  sont compatibles à la donnée de commutativité (2.4.6.1). Ceci impose à  $\mathcal{G}$ , compte tenu de la trivialité imposée au foncteur (2.2.1.3), d'être de Picard. A l'isomorphisme (2.4.6.4) est associée une flèche

$$(2.4.7.1) \quad \sigma_{p,q} : Z_{p,q} \rightarrow Z_{q,p}$$

dans  $\mathcal{G}$  telle que la flèche induite  $\underline{\sigma}_{p,q} = \sigma_{p,q} X_{p,q}$  rende commutatif le diagramme suivant dans  $\mathcal{H}$  :

$$(2.4.7.2) \quad \begin{array}{ccc} X_p X_q & \xrightarrow{\gamma_{p,q}} & X_q X_p \\ \lambda_{p,q} \downarrow & & \downarrow \lambda_{q,p} \\ Z_{p,q} X_{pq} & \xrightarrow{\underline{\sigma}_{p,q}} & Z_{q,p} X_{pq} \end{array}$$

La commutativité des hexagones (2.4.6.2) et (2.4.6.3) de  $\mathcal{H}$  s'exprime maintenant dans  $\mathcal{G}$  par la commutativité des diagrammes

$$(2.4.7.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & Z_{q,r} Z_{p,qr} & \xrightarrow{\sigma_{q,r} Z_{p,qr}} & Z_{r,q} Z_{p,qr} \\ & \nearrow a_{p,q,r} & & & \searrow a_{p,r,q} \\ Z_{p,q} Z_{r,pq} & & & & Z_{p,r} Z_{pr,q} \\ & \searrow Z_{p,q} \sigma_{pq,r} & & & \nearrow \sigma_{p,r} Z_{pr,q} \\ & & Z_{p,q} Z_{pq,r} & \xrightarrow{a_{r,p,q}} & Z_{r,p} Z_{pr,q} \end{array}$$

$$(2.4.7.4) \quad \begin{array}{ccccc} & Z_{p,q} & Z_{pq,r} & \xrightarrow{\sigma_{p,q} Z_{pq,r}} & Z_{q,p} & Z_{pq,r} \\ & \nwarrow a_{p,q,r}^{-1} & & & \searrow a_{q,p,r}^{-1} & \\ Z_{q,r} & Z_{p,qr} & & & & Z_{p,r} & Z_{q,pr} \\ & \searrow Z_{q,r} \sigma_{p,qr} & & & \swarrow \sigma_{p,r} Z_{q,pr} & & \\ & Z_{q,r} & Z_{qr,p} & \xrightarrow{a_{q,r,p}^{-1}} & Z_{r,p} & Z_{q,rp} & \end{array}$$

En définitive, on a donc ici associé à l'extension tressée  $\mathcal{H}$  de  $\underline{K}$  par la catégorie de Picard  $\mathcal{G}$  un triplet  $(Z_{p,q}, a_{p,q,r}, \sigma_{p,q})$ , avec  $Z_{p,q} \in \text{ob}(\mathcal{G})$  et  $a_{p,q,r}$  (2.2.1.10) et  $\sigma_{p,q}$  (2.4.7.1)  $\in \text{fl}(\mathcal{G})$ , où la flèche  $a_{p,q,r}$  satisfait à la condition déduite du pentagone (2.2.1.12) (simplifiée ici par le fait l'action de  $\underline{K}$  sur  $\mathcal{G}$  est triviale). On suppose enfin que les deux hexagones de type (2.4.7.3) et (2.4.7.4) sont commutatifs. Un triplet satisfaisant aux conditions qui viennent d'être énoncées admet encore une interprétation comme le 1-cocycle d'un espace approprié à valeurs dans  $\mathcal{G}$ : on trouve que le groupe de cohomologie en question s'interprète comme le groupe de cohomologie  $H^3(K(K, 2), \mathcal{G})$ , groupe de cohomologie à valeurs dans  $\mathcal{G}$  de l'objet (simplicial) d'Eilenberg-MacLane  $K(K, 2)$  associé à  $K$  (c'est parce que  $\mathcal{G}$  est muni d'une structure de catégorie de Picard que la définition d'un tel  $H^3$  est autorisée). Dans le cas où  $\mathcal{G} = \underline{G}$  est la catégorie discrète associée au groupe abélien  $G$ , un tel 1-cocycle se réduit à la donnée de  $Z_{p,q}$ , qui est (dans la terminologie classique) le 2-cocycle symétrique de  $K$  à valeurs dans  $G$  décrivant une extension abélienne de  $K$  par  $G$ . Le théorème des coefficients universels montre que ce dernier peut s'interpréter comme un cocycle représentant la classe de cohomologie abélienne usuelle  $H^3(K(K, 2), G)$ . De même, lorsque  $\mathcal{G} = G[1]$  est une catégorie à un seul objet (1.1.7.ii), le triplet  $(Z_{p,q}, a_{p,q,r}, \sigma_{p,q})$  est réduit à la paire de flèches  $a_{p,q,r}, \sigma_{p,q}$ , qui toutes deux prennent leurs valeurs dans le groupe abélien  $G$ . On est ici en présence de ce que l'on peut appeler l'invariant de Postnikov associée à la catégorie tressée  $\mathcal{H}$ . Celui-ci s'interprète comme le représentant d'un élément du groupe de cohomologie abélienne (usuelle)  $H^4(K(K, 2), G)$  comme on le vérifie en examinant la forme explicite que prennent les cochaînes de  $K(K, 2)$  dans la description explicite qu'en ont donné Eilenberg-MacLane [16] (voir également [25]).

(2.4.8) Pour en terminer avec cette discussion des conditions de commutativité dans les extensions de gr-catégories, il convient d'examiner sous quelles conditions la catégorie  $\mathcal{H}$  est, elle aussi, de Picard. On constate aisément qu'à la condition (2.4.6.4) correspond la condition

$$(2.4.8.1) \quad \sigma_{q,p} \circ \sigma_{p,q} = 1_{Z_{p,q}}$$

dans  $\mathcal{G}$ . La classe d'un triplet  $(Z_{p,q}, a_{p,q,r}, \sigma_{p,q})$  satisfaisant à la condition supplémentaire (2.4.8.1) représente un élément de  $H^4(K(K, 3), \mathcal{G})$ , d'où une classification des extensions de Picard  $\mathcal{H}$  d'un groupe abélien  $\underline{K}$  par une catégorie de Picard  $\mathcal{G}$ . En particulier, pour  $\mathcal{G} = G[1]$ , on retrouve ainsi l'invariant de Postnikov d'une catégorie de Picard  $\mathcal{H}$  associée aux groupes abéliens  $K$  et  $G$ , tel qu'il a été introduit par M<sup>me</sup> Sinh [42] I.2 prop. 4, qui s'interprète comme un élément du groupe de cohomologie abélienne usuel



$H^5(K(K, 3), G)$ . On observera enfin que les foncteurs d'oubli de structure entre les différents ensembles de classes d'extensions qui viennent d'être décrits sont reliés entre eux, au niveau cohomologique, par les morphismes dits de suspension

$$H^4(K(K, 3), \mathcal{G}) \rightarrow H^3(K(K, 2), \mathcal{G}) \rightarrow H^2(BK, \mathcal{G})$$

entre les ensembles de cohomologie mentionnés en (2.4.6), (2.4.7) et (2.4.8) qui leur correspondent.

(2.4.9) Passons maintenant au cas des extensions strictes. Pour ne pas alourdir cette discussion, nous n'examinerons dans ce cadre que le premier problème commutatif étudié ci-dessus, c'est-à-dire le problème de la classification des extensions (2.2.1.1) qui sont «centrales». Si  $\mathcal{G}$  est une gr-catégorie définie par un module croisé  $(G \rightarrow \Pi)$ , la condition de commutativité (2.4.6.1) dans  $\mathcal{G}$  équivaut à la donnée d'une application

$$(2.4.9.1) \quad \{ , \} : \Pi \times \Pi \rightarrow G$$

relevant le commutateur de  $\Pi$ , et satisfaisant à certaines identités pour lesquelles on renvoie à [8] (2.11). On appellera un module croisé muni de cette structure supplémentaire un module tressé. La donnée d'un tel objet équivaut (voir *loc. cit.* 2.12) à celle d'un carré croisé d'un type particulier, à savoir le carré

$$(2.4.9.2) \quad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\delta} & M \\ \delta \downarrow & & \downarrow 1_M \\ M & \xrightarrow{1_M} & M \end{array}$$

l'application (1.2.5.2) étant ici définie par (2.4.9.1). La donnée d'une paire de flèches

$$(2.4.9.3) \quad \begin{cases} z: K \times K \rightarrow \Pi \\ a: K \times K \times K \rightarrow G \end{cases}$$

définira alors un 1-cocycle  $(1, z, z, a)$  à valeurs dans le carré croisé (2.4.9.2) dès lors que les versions suivantes de (2.3.4.4) et (2.3.4.6) (dans laquelle  $z = \lambda$  et  $x = 1$ ) sont satisfaites

$$(2.4.9.4) \quad \begin{aligned} d(a(k, l, m)) z(l, m) z(k, lm) &= z(k, l) z(kl, m) \\ a(k, l, m) z^{(l, m)} a(k, lm, n) a(l, m, n) &= z^{(k, l)} a(kl, m, n) \{ z(k, l), z(m, n) \}^{z(m, n)} a(k, l, mn). \end{aligned}$$

On tombe donc ici, à l'ordre des facteurs près, sur les 1-cocycles à valeurs dans un module tressé de Bullejos-Cegarra [7]. En ce qui concerne les cobords, on pourrait alors les décrire par les triplets  $(z, \lambda, a)$  (2.3.4.7) tels que  $z = \lambda$ , c'est-à-dire par les paires  $(z, a)$  satisfaisant aux conditions (2.3.4.9) et (2.3.4.11). On devrait alors retrouver, à l'ordre des facteurs près compte tenu d'un choix de conventions différentes, les conditions de cobord CH1 et CH2 de *loc. cit.*, mais la traduction n'est pas évidente à effectuer. En particulier, en prenant pour cobords les paires  $(1, a)$ , on remarquera que deux paires  $(z, a)$  et  $(z', a')$  sont cohomologues lorsqu'il existe des applications  $a$  telles que les formes

simplifiées suivantes de (2.3.4.9) et (2.3.4.11) soient satisfaites

$$(2.4.9.10) \quad \begin{cases} \delta(a(k, l))z(k, l) = z'(k, l) \\ a'(k, l, m)a(l, m)^{z(l, m)}a(k, lm) = a(k, l)^{z(k, l)}a(kl, m)a(k, l, m). \end{cases}$$

### 3. Faisceautisation

3.1. CLASSIFICATION DES  $\mathcal{G}$ -BITORSEURS. — Soit  $T$  un topos. On renvoie à [18, 4] pour la définition d'un champ  $\mathcal{C}$  de  $T$ . La définition suivante est calquée sur celle d'une gr-catégorie

DÉFINITION 3.1.1. — On appelle *gr-préchamp* (resp. *gr-champ*) de  $T$  un *préchamp* (resp. un *champ*) en groupoïdes  $\mathcal{E}$  de  $T$ , muni d'une loi de composition

$$(3.1.1.1) \quad \otimes : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

astreinte à une donnée d'associativité cohérente, d'une section objet neutre  $I$  de  $\mathcal{G}$  compatibles à la condition d'associativité, enfin d'une loi d'inverse

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

$$X \mapsto X^*$$

et d'un morphisme de foncteurs (1.1.3.1). Un morphisme de gr-champs  $\pi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  est un morphisme de champs qui respecte la loi de composition (c'est-à-dire qui est un foncteur additif).

En d'autres termes, si le topos  $T$  considéré est associé à un site  $S$ , alors, pour tout objet  $U$  de  $S$ , la catégorie fibre  $\mathcal{G}_U$  est munie, fonctoriellement en  $U$ , d'une structure de gr-catégorie.

Exemple 3.1.2. — Soit  $G \rightarrow \Pi$  un module croisé de  $T$ . Les sections de ce module croisé sur un ouvert donné  $U$  de  $S$  forment un module croisé usuel, et définissent donc comme il a été dit en 1.1 une gr-catégorie  $\mathcal{G}_U$ . Il revient au même de dire que  $G \rightarrow \Pi$  définit un gr-préchamp  $\mathcal{P}\mathcal{G}$  de  $T$ . Il lui correspond donc par faisceautisation un gr-champ associé  $\mathcal{G}$ , qu'on appellera le gr-champ associé au module croisé  $G \rightarrow \Pi$ . Les objets (resp. les flèches) de  $\mathcal{G}$  sont donc localement définis par des sections de  $\Pi$  (resp. de  $G \times \Pi$ ). Passons en revue plusieurs cas particuliers de cette construction :

(i) A tout groupe  $K$  de  $T$  est associé le préchamp discret dont les objets sont les sections de  $K$ . Ce préchamp est en fait un champ et sera noté  $\underline{K}$ .

(ii) Soit  $G$  un groupe abélien de  $T$ . Le gr-champ associé au module croisé  $G[1]$  est le gr-champ des  $G$ -torseurs de  $T$ , la loi de composition étant le produit contracté des toseurs [12].

(iii) La proposition 2.4 de [4] dit que le gr-champ associé au module croisé droit  $G \rightarrow \text{Aut}^0(G)$  est le gr-champ *opposé* (c'est-à-dire dont la loi de composition est la loi opposée) au gr-champ *Bitors*( $G$ ) des  $G$ -bitorseurs de  $T$ . Elle se démontre en interprétant

un  $G$ -bitorseur comme un  $G$ -torseur gauche  $P$  muni d'un morphisme  $G$ -équivariant

$$(3.1.2.1) \quad j: P \rightarrow \text{Aut}(G)$$

qui décrit l'action à droite de  $G$  sur  $P$ .

(iv) On pourrait tout aussi bien considérer le  $G$ -bitorseur  $P$  comme un  $G$ -torseur droit de  $T$ , muni d'un morphisme  $G$ -équivariant [pour l'action à droite de  $G$  par translation dans le groupe  $\text{Aut}^0(G)$  à travers  $i': G \rightarrow \text{Aut}^0(G)$ ]

$$(3.1.2.2) \quad j': P \rightarrow \text{Aut}^0(G)$$

qui décrit l'action à gauche de  $G$  sur  $P$ . On en déduit, par un raisonnement tout à fait analogue à celui de *loc. cit.* une autre interprétation de  $\text{Bitors}(G)$  comme étant le gr-champ opposé au gr-champ défini par le module croisé gauche  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$ .

(3.1.3) Soit  $K$  un groupe de  $T$  et  $\underline{K}$  le gr-champ associé. On considère un morphisme de gr-champs  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow \underline{K}$ , constitué, pour tout objet  $U$  du site, par un morphisme de gr-catégories  $\pi_U: \mathcal{H}_U \rightarrow \underline{K}(U)$ . Pour toute section  $k$  de  $K$ , on note  $\mathcal{H}_k$  le sous-champ plein de  $\mathcal{H}$  constitué des objets  $H$  de  $\mathcal{H}$  tels que  $\pi(H) = k$ . En particulier,  $\mathcal{H}_I = \ker(\pi)$  s'appelle le gr-champ noyau de  $\pi$ . C'est donc un sous-gr-champ plein de  $\mathcal{H}$ .

DÉFINITION 3.1.4. — Soit  $K$  un groupe (resp.  $\mathcal{G}$  un gr-champ) d'un topos  $T$ . On dit qu'un triplet  $(\mathcal{H}, \pi, \rho)$  fait de  $\mathcal{H}$  une extension de  $\underline{K}$  par un gr-champ donné  $\mathcal{G}$  si

(i)  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow \underline{K}$  est un morphisme de gr-champs essentiellement surjectif (c'est-à-dire que  $\text{ob}(\pi): \text{ob}(\mathcal{H}) \rightarrow K$  est un épimorphisme de  $T$ ).

(ii)  $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \ker(\pi)$  est une équivalence de gr-champs. On notera alors également  $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  la composée de  $\rho$  et de l'inclusion naturelle de  $\ker(\pi)$  dans  $\mathcal{H}$ .

(3.1.5) Les morphismes d'extensions (resp. les transformations naturelles entre de tels morphismes) sont définies comme en (2.1.2), et le lecteur amateur de faisceautisations observera que les extensions de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$  et leurs morphismes (resp. transformations naturelles) se recollent bien, et forment donc un 2-champ, que l'on pourra noter  $\text{EXT}(\underline{K}, \mathcal{G})$ . La suite de ce paragraphe sera consacré à décrire les objets et les 1-flèches de ce 2-champ, de manière tout à fait analogue à ce qui a été fait par Grothendieck [19] dans le cas du champ  $\text{EXT}(K, G)$  des extensions de  $K$  par un groupe  $G$  de  $T$ , c'est-à-dire dans le cas de la théorie de Schreier ordinaire dans un topos (pour laquelle on pourra également se reporter à [4] paragraphe 8). Cette théorie de Schreier ordinaire dans un topos est d'ailleurs un cas particulier de celle qui va être étudiée ici, à savoir celle où  $\mathcal{G} = \underline{G}$  est le gr-champ discret associé à un groupe  $G$  de  $T$ . Rappelons que le point de vue de [19] consistait à associer à une extension  $E$  de  $K$  par  $G$ , le  $G$ -bitorseur sur  $K$  défini par  $E$ , en oubliant la loi de composition complète sur  $E$  pour ne garder que la multiplication des éléments de  $E$  à gauche ou à droite par des éléments provenant du sous-groupe  $G$ . L'étape ultérieure consistait alors à exprimer en termes de ce bitorseur les données supplémentaires nécessaires pour disposer sur  $E$  d'une loi de composition complète, compatible avec la loi de multiplication partielle donnée par la structure de bitorseur.

Pour en revenir à la situation qui nous intéresse, soit  $(\mathcal{H}, \pi, \rho)$  un objet de  $\text{EXT}(\underline{K}, \mathcal{G})$ . La première étape de la théorie de Schreier supérieure étudiée ici consiste à examiner l'objet de type bitorseur déduit de  $\mathcal{H}$  par oubli de sa structure complète de gr-champ, et c'est à elle que sera consacrée la suite de ce paragraphe, la seconde étape, celle où l'on reconstruit la loi de groupe de  $\mathcal{H}$  étant renvoyée à 3.2. On observe tout d'abord que le foncteur  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow \underline{K}$  fait alors de  $\mathcal{H}$  un champ du topos  $T_K$  localisé de  $T$  au-dessus de l'objet  $K$ , que l'on notera  $\mathcal{H}_K$  et dont la fibre au-dessus d'une section  $k: U \rightarrow K$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{H}_U$  constituée des objets qui s'envoient vers  $k$ . La loi de composition dans  $\mathcal{H}$  munit  $\mathcal{H}_K$ , via  $\rho$ , d'une multiplication à droite par la gr-catégorie  $\mathcal{G}_K$ , image inverse de  $\mathcal{G}$  dans  $T_K$ , et qui fait de  $\mathcal{H}_K$  un torseur à droite de  $T_K$ , au sens de [4]. déf. 6.1, sous le gr-champ  $\mathcal{G}_K$ . La classe d'équivalence de  $\mathcal{H}_K$  définit donc par [4] prop. 6.2 un élément de l'ensemble de cohomologie non-abélienne  $H^1(K, \mathcal{G})$ , élément qui décrit l'obstruction à l'existence d'une section du foncteur  $\pi$ . En particulier, lorsque  $\mathcal{G} = \text{Bitors}^0(G)$  est le gr-champ opposé au gr-champ des  $G$ -bitorseurs de  $T$ , la proposition 7.3 de [4] affirme (avec des conventions légèrement différentes de celles choisies ici) que  $\mathcal{H}_K$  équivaut au champ des  $G_K$ -gerbes de  $T_K$ , et définit une classe dans l'ensemble de cohomologie non-abélienne  $H^1(K, G \rightarrow \text{Aut}(G))$ , c'est-à-dire comme on l'a rappelé en 2.3.6 (ii), dans le  $H^2$  non-abélien à valeurs dans  $G$ .

*Exemple 3.1.6.* — La décomposition de Postnikov d'un gr-champ  $\mathcal{H}$  d'invariants  $\pi_i = \pi_i(\mathcal{H})$  pour  $i=0,1$  fait de  $\mathcal{H}_{\pi_0}$  une  $\pi_1$ -gerbe de  $T_{\pi_0}$  qui décrit une classe dans le groupe de cohomologie abélienne  $H^2(\pi_0, \pi_1)$ . Celle-ci mesure l'obstruction à l'existence d'une section dans  $T$  à la projection canonique  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow \pi_0$ , c'est-à-dire à la possibilité de choisir pour toute section  $x$  de  $\pi_0$  un objet  $X$  de  $\mathcal{H}$  dont la classe dans  $\pi_0$  est  $x$ .

(3.1.7) Si l'on revient à la situation générale décrite en (3.1.4), on constate que  $\mathcal{H}_K$  est muni d'une structure plus riche que celle de simple  $\mathcal{G}$ -torseur droit, puisque la loi multiplication dans  $\mathcal{H}_K$  permet également de définir, via  $\rho$ , une action à gauche de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{H}_K$ . C'est pourquoi il convient d'introduire la définition suivante, calquée sur celle d'un bitorseur usuel sous un groupe  $G$ .

**DÉFINITION 3.1.8.** — Soit  $\mathcal{G}$  un gr-champ d'un topos  $T$ . On appelle  $\mathcal{G}$ -bitorseur de  $T$  la donnée d'un champ  $\mathcal{C}$  de  $T$ , muni d'une paire de lois de composition

$$(3.1.8.1) \quad \begin{cases} \mathcal{G} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} & \mathcal{C} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C} \\ (G, C) \mapsto GC & (C, G) \mapsto CG \end{cases}$$

qui font respectivement de  $\mathcal{C}$  un  $\mathcal{G}$ -torseur à gauche et un  $\mathcal{G}$ -torseur à droite, et qui sont compatibles entre elles au sens suivant : pour toute paire d'objets  $G$  et  $G'$  de  $\mathcal{G}$ , et pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ , il existe un isomorphisme fonctoriel

$$(3.1.8.2) \quad b_{G, C, G'} : G(CG') \xrightarrow{\sim} (GC)G'$$

tel que les diagrammes suivants commutent :

$$(3.1.8.3) \quad \begin{array}{ccc} (G_1 G_2)(CG') & \longrightarrow & ((G_1 G_2) C) G' \\ \swarrow & & \searrow \\ (G_1 (G_2 (CG'))) & & (G_1 (G_2 C)) G' \\ & \searrow & \swarrow \\ & G_1 ((G_2 C) G') & \end{array}$$

$$(3.1.8.4) \quad \begin{array}{ccc} G(C(G'_1 G'_2)) & \longrightarrow & G((CG'_1) G'_2) \\ \swarrow & & \searrow \\ (GC)(G'_1 G'_2) & & (G(CG'_1)) G'_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & ((GC) G'_1) G'_2 & \end{array}$$

On définit de manière tout à fait analogue, pour une paire de gr-champs  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  de  $T$ , le concept de  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ -bitorseur de  $T$ . La proposition suivante, qui permet de donner une description cohomologique des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs, est calquée sur le lemme 2.5 de [4], rappelé ci-dessus en 3.1.2 (iv). Elle se démontre par une chasse au diagramme que l'on omettra.

PROPOSITION 3.1.9. — Soit  $\mathcal{G}$  un gr-champ de  $T$ . La donnée d'un  $\mathcal{G}$ -bitorseur de  $T$  équivaut à celle d'un  $\mathcal{G}$ -torseur à droite  $\mathcal{H}$  de  $T$ , muni d'un foncteur  $\mathcal{G}$ -équivariant

$$(3.1.9.1) \quad j' : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}q^0(\mathcal{G})$$

pour l'action à droite de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{E}q^0(\mathcal{G})$  par translation à droite à travers le foncteur de conjugaison intérieure  $i' : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q^0(\mathcal{G})$  (1.2.1.3).

La condition d'équivariance satisfaite par le foncteur  $j'$  signifie que l'on dispose, pour tout objet  $G$  de  $\mathcal{G}$  (resp.  $H$  de  $\mathcal{H}$ ) d'un isomorphisme fonctoriel

$$(3.1.9.2) \quad c_{H, G} : j'(HG) \rightarrow j'(H) i'(G)$$

tel que le diagramme suivant commute

$$(3.1.9.3) \quad \begin{array}{ccccc} j'(H(G_1 G_2)) & \rightarrow & j'(H) i'(G_1 G_2) & \rightarrow & j'(H) (i'(G_1) i'(G_2)) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ j'((HG_1) G_2) & \rightarrow & j'(HG_1) i'(G_2) & \rightarrow & (j'(H) i'(G_1)) i'(G_2) \end{array}$$

Il est commode de lui adjoindre la condition de compatibilité aux conditions unité suivante, qui avait été malencontreusement omise dans [3] paragraphe 6

$$(3.1.9.4) \quad \begin{array}{ccc} j'(HI) & \rightarrow & j'(H) i'(I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j'(H) & \rightarrow & j'(H) I \end{array}$$

Remarque 3.1.10. — On trouvera dans *loc. cit.* 6.7 une brève discussion de ce qu'est un produit contracté  $\wedge$  de catégories munies d'actions d'un groupe. Celle-ci peut être

prolongée par faisceautisation au cas des champs et permet donc de définir le produit contracté  $\mathcal{D} \wedge \mathcal{D}'$  d'une catégorie  $\mathcal{D}$  sur laquelle une gr-catégorie  $\mathcal{G}$  agit à droite par une catégorie  $\mathcal{D}'$  sur laquelle  $\mathcal{G}$  agit à gauche. Cette construction définit donc notamment une loi de composition

$$(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2$$

dans  $\text{Bitors}(\mathcal{G})$ . Par ailleurs, la construction de [18], III 1.5.5.1 se prolonge à la situation examinée ici, et permet d'associer à un  $\mathcal{G}$ -bitorseur  $\mathcal{H}$  le  $\mathcal{G}$ -bitorseur opposé  $\mathcal{H}^0$ .

(3.1.11) On affirmera en 4.1.11 que la proposition 3.1.9 donne une description du 2-gr-champ des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs (pour les lois de composition et d'inverse qui viennent d'être définies). Contentons nous ici de remarquer que le foncteur  $j'$  (3.1.9.1) fournit une section du  $\mathcal{E}q^0(\mathcal{G})$ -torseur droit  $\mathcal{H} \wedge \mathcal{E}q^0(\mathcal{G})$  déduit de  $\mathcal{H}$  par «extension par  $i'$ » du gr-champ structural  $\mathcal{G}$ . Il en résulte, une fois examinée la compatibilité de cette description à la gr-structure de  $\text{Bitors}(\mathcal{G})$ , la généralisation suivante de la proposition 4.3 de [4]:

**PROPOSITION 3.1.12.** — *Le groupe des classes d'équivalence de  $\mathcal{G}$ -bitorseurs de  $T$  est anti-isomorphe au groupe de cohomologie  $H^0(e, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ .*

Ici, le groupe d'hypercohomologie  $H^0(e, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$  de l'objet final  $e$  du topos  $T$  s'interprète, en termes concrets, comme la limite des groupes de cohomologie  $H^0(X., \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$  définis en 2.4.5,  $X.$  parcourant une famille d'hyper-recouvrements de  $e$ .

(3.1.13) Rendons cette description encore plus explicite dans le cas du gr-champ  $\mathcal{G} = \text{Bitors}(G)$  défini par un groupe  $G$  de  $T$ . Commençons pour cela par observer que la donnée d'un torseur à droite (resp. à gauche) sous un gr-champ  $\mathcal{G}$  équivaut à celle d'un torseur à gauche (resp. à droite) sous le gr-champ  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0$  opposé à  $\mathcal{G}$ . Ainsi, puisque la définition d'un  $\mathcal{G}$ -bitorseur est symétrique en les actions données de  $\mathcal{G}$  à gauche et à droite, la donnée d'un  $\mathcal{G}$ -bitorseur équivaut à celle d'un  $\mathcal{G}$ -bitorseur (ce qu'on ne confondra pas avec le passage, signalé en 3.1.10, d'un  $\mathcal{G}$ -bitorseur  $\mathcal{H}$  au  $\mathcal{G}$ -bitorseur opposé  $\mathcal{H}^0$ ). Compte tenu de la description, rappelée en 3.1.2.iv, de  $\mathcal{G}$ , on obtient donc de cette manière le corollaire suivant de la proposition 3.1.12.

**COROLLAIRE 3.1.14.** — *Soit  $G$  un groupe d'un topos  $T$ . Alors le groupe des classes d'équivalence des  $\text{Bitors}(G)$ -bitorseurs de  $T$  est anti-isomorphe au groupe de cohomologie  $H^0(e, (G \rightarrow \text{Aut}(G)) \rightarrow \mathcal{E}q(G \rightarrow \text{Aut}(G)))$ .*

Quant à l'ensemble  $H^1(e, (G \rightarrow \text{Aut}(G)) \rightarrow \mathcal{E}q(G \rightarrow \text{Aut}(G)))$ , c'est en (4.1.11) qu'on en trouvera une interprétation.

**3.2. THÉORÈME DE SCHREIER.** — (3.2.1) Nous sommes maintenant en mesure de terminer la description à la Schreier promise d'une extension donnée  $(\mathcal{H}, \pi, \rho)$  de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$ . On vient de voir que la multiplication à gauche et à droite des objets de  $\mathcal{H}$  par des objets de  $\mathcal{G}$  faisait du champ  $\mathcal{H}$  un  $\mathcal{G}$ -bitorseur, dont la fibre  $e^* \mathcal{H}$  au-dessus de l'élément neutre  $e$  de  $\underline{K}$  est trivialisée (c'est-à-dire munie d'une équivalence avec le  $\mathcal{G}$ -torseur trivial) en vertu de l'existence d'un objet unité  $I$  dans la gr-catégorie  $\mathcal{H}$ . La donnée d'une loi de composition dans  $\mathcal{H}$  pour laquelle  $\pi$  est additive équivaut à la

donnée d'un foncteur

$$(3.2.1.1) \quad n: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

au-dessus de la loi de composition  $m: \underline{K} \times \underline{K} \rightarrow \underline{K}$ , et les axiomes d'associativité de la loi de composition dans  $\mathcal{H}$  nous disent que le foncteur  $n$  est  $\mathcal{G}$ -équivalent à gauche et à droite, au sens expliqué en (3.1.9.3). Mieux, l'existence, pour tout  $G \in \text{ob}(\mathcal{G})$ , et tout  $H_1$  et  $H_2 \in \text{ob}(\mathcal{H})$  de la donnée d'associativité

$$c_{H_1, G, H_2}: H_1(GH_2) \rightarrow (H_1 G)H_2,$$

[cas particulier de (1.1.1.1)], munie de la condition de cohérence (1.1.1.4) et de la donnée d'unité (1.1.1.2), nous dit que le foncteur (3.2.1.1) se factorise par un morphisme de  $\mathcal{G}$ -bitorseurs sur  $\underline{K} \times \underline{K}$  ( $p_i$  désignant la  $i$ -ième projection de  $\underline{K} \times \underline{K}$  sur  $\underline{K}$ ):

$$(3.2.1.2) \quad \mu: p_1^* \mathcal{H} \wedge p_2^* \mathcal{H} \rightarrow m^* \mathcal{H}$$

tel que  $\mu(I, I) = I$ . La donnée d'associativité  $c_{H_1, H_2, H_3}$  (1.1.1.1) définit alors la 2-flèche  $\varphi$  du diagramme suivant (dans laquelle une expression telle que  $m_{ij}$  désigne la loi  $m$  sur les facteurs  $i$  et  $j$  de  $\underline{K}^3$ ):

$$(3.2.1.3) \quad \begin{array}{ccc} p_1^* \mathcal{H} \wedge p_2^* \mathcal{H} \wedge p_3^* \mathcal{H} & \rightarrow & p_1^* \mathcal{H} \wedge m_{23}^* \mathcal{H} \\ \downarrow & & \swarrow \varphi \quad \downarrow \\ m_{12}^* \mathcal{H} \wedge p_3^* \mathcal{H} & \rightarrow & m_{123}^* \mathcal{H} \end{array}$$

et la compatibilité (1.1.1.3) des contraintes d'associativité et d'unité dit notamment que la 2-flèche  $(e \times e \times e)^* \varphi$  obtenue par passage inverse par  $e \rightarrow \underline{K}$  à partir de  $\varphi$  est, une fois faite diverses identifications, la 2-flèche identique. Enfin, l'axiome du pentagone dans  $\mathcal{H}$  s'énonce ici comme la condition de compatibilité suivante entre des 2-flèches images inverses de  $\varphi$  par les applications indiquées  $\underline{K}^4 \rightarrow \underline{K}^3$ :

$$(3.2.1.4) \quad p_{123}^* \varphi \circ m_{23}^* \varphi \circ p_{234}^* \varphi = m_{12}^* \varphi \circ m_{34}^* \varphi.$$

On a ainsi démontré la moitié du théorème de Schreier supérieur dans un topos  $T$ , qui s'énonce ainsi.

**THÉORÈME 3.2.2.** — Soient  $K$  un groupe d'un topos  $T$ , et  $\mathcal{G}$  un gr-champ de  $T$ . Alors, la donnée d'une extension  $\mathcal{H}$  de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$  équivaut à celle d'un  $\mathcal{G}$ -bitorseur  $\mathcal{H}$  et d'une trivialisat ion  $I$  de son image inverse  $e^* \mathcal{H}$  au-dessus de l'élément neutre  $e$  de  $\underline{K}$ , ainsi que d'un morphisme de  $\mathcal{G}$ -bitorseurs  $\mu$  (3.2.1.2) au-dessus de  $\underline{K} \times \underline{K}$  dont la restriction à  $e \times e$  est compatible, en un sens évident, au choix de la trivialisat ion  $I$ , enfin, d'une 2-flèche  $\varphi$  (3.2.1.3) dont la restriction au-dessus de  $e \times e \times e$  est l'identité, et qui satisfait à la relation (3.2.1.4).

La démonstration complète du théorème s'obtient en constatant que l'on n'a, dans la description donnée d'un bitorseur  $\mathcal{H}$  muni de structures additionnelles, rien oublié de ce qui fait de  $\mathcal{H}$  un gr-champ, extension de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$ . Ainsi, la contrainte d'unité (1.1.1.2) s'obtient dans  $\mathcal{H}$  en remarquant tout d'abord que, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{H}$ , la restriction à  $\underline{K} \times e$  de la flèche (3.2.1.2) dit notamment qu'il existe un objet  $Y$  de  $\mathcal{H}$ , muni d'un

isomorphisme  $YI \simeq X$ . Or, la restriction à  $\underline{K} \times e \times e$  de la 2-flèche (3.2.1.3) détermine alors, pour tout  $Y$ , un morphisme d'associativité

$$Y(II) \simeq (YI)I$$

et donc, puisque  $II=I$  par hypothèse, un isomorphisme entre  $X$  et  $XI$ . On obtient de la même manière l'autre contrainte (1.1.1.2). On laisse au lecteur le soin de vérifier que la condition de cohérence (3.2.1.3) a notamment pour conséquence la condition de compatibilité de ces contraintes à l'associativité (1.1.1.3).

Il nous reste à construire une loi d'inverse dans  $\mathcal{H}$ , ce qu'on peut obtenir en raisonnant comme dans [19] 1.1.5 : l'image inverse de  $\mu$  par le morphisme anti-diagonal

$$\Delta: \underline{K} \rightarrow \underline{K} \times \underline{K} \\ k \rightarrow (k^{-1}, k)$$

définit un isomorphisme entre la  $\mathcal{G}$ -gerbes  $i^* \mathcal{H} \wedge \mathcal{H}$  et la  $\mathcal{G}$ -gerbe triviale, ou bien, ce qui revient au même, un isomorphisme de  $\mathcal{G}$ -gerbes entre  $i^* \mathcal{H}$  et la  $\mathcal{G}$ -gerbe  $\mathcal{H}^0$  opposée à  $\mathcal{H}$ , et donc un morphisme de  $\mathcal{G}$ -gerbes  $i_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^0$  qui relève la loi d'inverse  $i$  de  $\underline{K}$ . De la 2-flèche  $\varphi$  (3.2.1.3) résulte alors un isomorphisme  $i_{\mathcal{H}}(H_1 H_2) \simeq i_{\mathcal{H}}(H_2) i_{\mathcal{H}}(H_1)$  et l'identité (3.2.1.4) dit que le foncteur  $i_{\mathcal{H}}$  est (anti)-additif.

(3.2.3) La description qui vient d'être donnée d'un objet de  $\text{Ext}(\underline{K}, \mathcal{G})$  ne fait intervenir que des objets, flèches et 2-flèches entre des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs. Or, ces derniers ont été décrits par la proposition 3.1.9, puis en termes cohomologiques par la proposition 3.1.12. La description cohomologique suivante des classes d'objets de  $\text{Ext}(\underline{K}, \mathcal{G})$  résulte maintenant formellement du théorème 3.2.2 et de la proposition 3.1.12 (ou plutôt de la description du 2-gr-champ des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs, auquel il est fait allusion en 3.1.11).

**COROLLAIRE 3.2.4.** — *Les notations étant celles du théorème 3.2.2, l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de  $\underline{K}$  par  $\mathcal{G}$  est en bijection avec l'ensemble de cohomologie réduite  $\bar{H}^1(\text{BK}, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ .*

Dans le cas du topos ponctuel, on retrouve la proposition 2.2.6.

(3.2.5) La discussion précédente peut être étendue au cas où le module croisé de gr-champs  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$  est remplacé par un module croisé de gr-champs quelconque  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$ . La notion de  $\mathcal{G}$ -bitorseur doit alors être remplacée par celle de  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -torseur, calquée sur la définition de [4], paragraphe 4 :

**DÉFINITION 3.2.6.** — *Soit  $\delta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  un module croisé de gr-champs. On appelle  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -torseur de  $T$  la donnée d'un  $\mathcal{G}$  torseur droit  $\mathcal{H}$  de  $T$  et d'un morphisme de champs  $\mathcal{G}$ -équivariant (au sens de 3.1.9.3)  $t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}^0$ ,  $\mathcal{G}$  agissant à droite sur le gr-champ  $\mathcal{A}^0$  opposé à  $\mathcal{A}$  à travers la flèche composée*

$$(3.2.6.1) \quad \delta' = i \circ \delta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0.$$

( $i$  désignant la loi d'inverse de  $\mathcal{A}$ ).

Soit alors  $\mathcal{H}$  une  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -extension de  $\underline{K}$ . A une telle  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -extension correspond, par oubli de la multiplication dans  $\mathcal{H}$ , un  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -bitorseur de  $T_K$  et la théorie de Schreier



dit ici comment reconstruire la  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -extension à partir du  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -torseur en question. En termes cohomologiques, on trouve alors, par le même raisonnement que précédemment, la généralisation suivante de l'énoncé mentionné en (2.4.1) au cas des topos :

**PROPOSITION (3.2.7).** — *Soit  $K$  un groupe d'un topos  $T$  (resp.  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}$  un module croisé de gr-champs de  $T$ ). Alors, l'ensemble des classes de  $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ -extensions de  $\underline{K}$  est en bijection avec l'ensemble de cohomologie réduite  $\bar{H}^1(BK, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A})$ .*

#### 4. Cohomologie en degrés supérieurs

**4.1. INTERPRÉTATION COHOMOLOGIQUE DES 2-GERBES.** — (4.1.1) Le théorème (3.2.2) et sa variante (3.2.7) nous ont donné une interprétation cohomologique de certaines classes d'extensions, comme éléments d'un  $H^3$  de l'espace classifiant  $BK$  d'un groupe  $K$  à valeurs dans un groupe non abélien  $G$  (resp. comme  $H^1$  de  $BK$  à valeurs dans un carré croisé approprié). Nous esquissons ici la définition de l'objet géométrique représentant une classe de 3-cohomologie d'un espace quelconque à valeurs dans  $G$ .

**DÉFINITION 4.1.2.** — *Soit  $\mathcal{C}$  une 2-catégorie fibrée sur un site  $S$  ([20]). On dit que  $\mathcal{C}$  est fibrée en 2-groupoïdes si toute 2-flèche de  $\mathcal{C}$  est inversible.*

On dira qu'un 2-groupoïde est un 2-champ si les objets, flèches et 2-flèches de  $\mathcal{C}$  se recollent. En ce qui concerne les objets, ceci a la signification suivante. Pour toute famille couvrante  $\mathcal{U}$  de l'objet final  $e$  de  $T$ , et pour toute famille d'objets  $x_U \in \mathcal{C}_U$  (indexées par  $U \in \mathcal{U}$ ), on appelle « donnée de 2-descente » pour les  $x_U$  la donnée de 1-flèches

$$(4.1.2.1) \quad \varphi_{UV} : x_V \rightarrow x_U$$

au-dessus de  $U \cap V$ , et de 2-flèches

$$(4.1.2.2) \quad \psi_{UVW} : \varphi_{UV} \varphi_{VW} \Rightarrow \varphi_{UW}.$$

L'existence des 2-flèches en question signifie que les flèches (4.1.2.1) ne sont plus des données de descente usuelles pour les objets  $x_U$ . On impose ici plutôt que les 2-flèches (4.1.2.2) satisfassent à la condition (6.2.7)-(6.2.8) de [4] au-dessus de chaque ouvert  $U \cap V \cap W \cap X$ , c'est-à-dire à la condition

$$(4.1.2.3) \quad \psi_{UWX} \circ (\psi_{UVW} * \varphi_{WX}) = \psi_{UVX} \circ (\varphi_{UV} * \psi_{VWX}).$$

On dira alors que la donnée de 2-descente est effective s'il existe un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , défini sur l'objet final  $e$  du site, dont la restriction à chaque ouvert  $U$  du recouvrement est isomorphe à l'objet  $x_U$  considéré (voir également [14] à ce propos).

**DÉFINITION 4.1.3.** — *Soit  $T$  le topos associé à un site  $S$ . On appelle 2-champ de  $T$  une 2-catégorie fibrée en groupoïdes sur  $S$  pour laquelle toute donnée de 2-descente est effective, et pour laquelle, pour toute paire d'objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}_U$ , la catégorie  $\text{Hom}(x, y)$  des flèches de  $x$  vers  $y$  est un champ de  $T_U$ .*

La condition énoncée sur les Hom est une manière très ramassée d'affirmer que dans le 2-champ  $\mathcal{C}$ , les flèches et 2-flèches se recollent. Par analogie avec la définition usuelle des gerbes, on pose maintenant :

DÉFINITION 4.1.4. — On appelle 2-gerbe de T un 2-champ  $\mathcal{C}$  tel que

- (i) Pour tout objet U du site S, deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}_U$  sont localement isomorphes.
- (ii) Toute flèche  $f : x \rightarrow y$  de  $\mathcal{C}_U$  possède localement un inverse à gauche  $g : y \rightarrow x$  (à une 2-flèche  $u : 1_x \Rightarrow g f$  près).
- (iii) Il existe un morphisme couvrant  $V \rightarrow e$  pour lequel la 2-catégorie  $\mathcal{C}_V$  est non vide.

Exemple 4.1.5. — Soit  $\mathcal{G}$  un gr-champ de T. Alors le 2-champ  $Tors(\mathcal{G})$  des  $\mathcal{G}$ -torseurs (à droite) de T est une 2-gerbe de T, appelée la 2- $\mathcal{G}$ -gerbe triviale.

La 3-cohomologie du topos T, consiste alors, sous sa forme la plus générale en l'ensemble des classes d'équivalence de 2-gerbes de T. Dans le cas de la 2-cohomologie, on a vu qu'il était souvent profitable de fixer un groupe G de T, et de considérer l'ensemble des G-gerbes plutôt que l'ensemble de toutes les gerbes de T. Ici, la notion correspondante est celle de 2- $\mathcal{G}$ -gerbe :

DÉFINITION 4.1.6. — Soit  $\mathcal{G}$  un gr-champ du topos T associé à un site S. Les notations étant celles de (4.1.4), on appelle 2- $\mathcal{G}$ -gerbe de T la donnée d'une 2-gerbe  $\mathcal{G}$ , et d'un objet  $z$  de  $\mathcal{G}_V$ , muni d'une équivalence de gr-champs

$$\varphi_z : \mathcal{G}_V \rightarrow \text{Aut}(z).$$

(4.1.7) Il nous reste à donner une description cohomologique des 2- $\mathcal{G}$ -gerbes. Il convient pour cela de dire tout d'abord ce qu'est un 2-gr-champ. Pour l'énoncer, on rappelle que les 2-catégories, forment un 3-catégorie (2-cat)<sup>(2)</sup> : on dispose donc de morphismes (ou 2-foncteurs) entre des 2-catégories, de 2-morphismes (ou transformations naturelles entre les morphismes), enfin de 3-morphismes entre les transformations naturelles.

DÉFINITION 4.1.8. — On appelle 2-champ monoïdal d'un topos T un 2-champ  $\mathcal{C}$  muni d'un 2-foncteur  $m : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , d'un morphisme de 2-foncteurs  $\mu$

$$(4.1.8.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ \downarrow & \searrow \mu & \downarrow \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \end{array}$$

exprimant une donnée d'associativité (1.1.1.1) pour la 2-flèche  $m$ . On se donne également un morphisme  $v$  entre les 2-morphismes déduits de  $\mu$ , exprimant le défaut à ce que l'axiome du pentagone (1.1.1.4) soit satisfait dans  $\mathcal{C}$ . Enfin, on requiert que les données de

(<sup>2</sup>) On néglige ici les questions de nature logique liées au choix d'univers.

*pentagone*  $v$  soient cohérentes, en ce sens que l'axiome de cohérence des pentagones de Stasheff [44] (défini, dans sa terminologie, par le complexe cellulaire  $K_5$ ) soit satisfait <sup>(3)</sup>.

Pour définir complètement un 2-gr-champ, il conviendrait d'expliciter ce qu'est une condition d'unité supérieure, et sa compatibilité à l'associativité. Une telle condition peut s'obtenir à partir de la condition (3) du théorème 5 de [44]. Elle est d'ailleurs redondante, s'il faut en croire le lemme 7 de *loc. cit.* On appellera alors 2-gr-champ un 2-champ monoïdal muni d'une telle condition d'unité supérieure, et pour lequel tout objet admet un inverse pour la loi de composition  $m$ ,

*Exemple 4.1.9.* — Soit  $\mathcal{G}$  un gr-champ de  $T$ . Alors la 2-catégorie des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs de  $T$  (3.1.8) est un 2-gr-champ de  $T$  pour le produit contracté et la loi d'inverse définis en 3.1.10. La proposition (3.1.9) [voir également (3.1.12)] affirme que le 2-gr-champ  $\mathbb{G}$  des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs de  $T$  est le 2-gr-champ opposé au 2-gr-champ associé (en un sens approprié) au module croisé de gr-champs  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$ .

On introduit alors, par analogie avec la notion de torseur sous un gr-champ, celle de torseur sous un 2-gr-champ :

**DÉFINITION 4.1.10.** — On appelle *torseur sous un 2-gr-champ*  $\mathcal{G}$  la donnée d'un 2-champ  $\mathcal{P}$ , d'un 2-foncteur :  $\mathcal{P} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ , d'un morphisme de 2-foncteurs  $\mu$  :

$$(4.1.10.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P} \times \mathcal{G} \\ \downarrow & \searrow \mu & \downarrow \\ \mathcal{P} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P} \end{array}$$

ainsi qu'un morphisme  $v$  entre les morphismes déduits de  $\mu$  exprimant l'obstruction à ce que l'axiome du pentagone de [4] 6.1.3 (où plutôt son symétrique pour les  $\mathcal{G}$  torseurs droits) soit satisfait. On exige enfin que  $v$  satisfasse à la condition de cohérence des pentagones mentionnée en (4.1.8).

Il convient sans doute d'ajouter à ces conditions des conditions de compatibilité à l'identité similaires à celles de *loc. cit.* 6.1.4.

La théorie dite «de Morita» de [18] IV 5.2.5.3 (voir également [4] 7.2, [34]) affirme que le gr-champ  $\mathcal{G}$  est le gr-champ opposé au gr-champ  $\mathcal{E}q(\text{Tors}(\mathcal{G}), \text{Tors}(\mathcal{G}))$  des auto-équivalences de  $\text{Tors}(\mathcal{G})$ . Par un «théorème de Morita» supérieur, on disposera de même d'une équivalence entre le 2-gr-champ opposé au 2-gr-champ  $\mathbb{G}$  des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs de  $T$  et le 2-gr-champ  $\mathcal{E}q(\text{Tors}(\mathcal{G}), \text{Tors}(\mathcal{G}))$ , et donc, par composition des équivalences, d'une action à droite de  $\mathbb{G}$  sur le 2-champ  $\mathcal{E}q(\text{Tors}(\mathcal{G}), \mathcal{G})$  qui fait de ce 2-champ une  $\mathbb{G}$ -gerbe. Ceci permet d'énoncer la généralisation suivante de [4] 7.3. Certaines des définitions précédentes ayant été quelque peu imprécises, et toutes les vérifications nécessaires n'ayant pas été effectuées, nous formulons cet énoncé sous la forme d'une conjecture.

<sup>(3)</sup> Cet axiome, qui fait intervenir 6 pentagones et 3 carrés, est reproduit p.423 des «Selected works» de MacLane [29].

CONJECTURE (4.1.11). — Soit  $\mathcal{G}$  un gr-champ de  $T$ , et  $\mathbb{G}$  le 2-gr-champ des  $\mathcal{G}$ -bitorseurs  $T$ . Alors le 3-foncteur

$$\mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}q(\text{Tors}(\mathcal{G}), \mathcal{C})$$

est une équivalence entre le 3-champ des 2- $\mathcal{G}$ -gerbes de  $T$  et celui des  $\mathbb{G}$ -torseurs de  $T$ .

C'est cet énoncé qui nous donne la description cohomologique souhaitée des 2- $\mathcal{G}$ -gerbes. En effet, il résulte de (4.1.9) que les classes d'équivalence de  $\mathbb{G}$ -torseurs sont en bijection avec l'ensemble  $H^1(e, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G}))$ . En particulier, si  $G$  est un groupe de  $T$ , et  $\mathcal{G}$  le gr-champ opposé au gr-champ des  $G$ -bitorseurs de  $T$ , on trouve que les classes de 2- $\mathcal{G}$ -gerbes de  $T$  sont classifiées par l'ensemble  $H^1(e, (G \rightarrow \text{Aut}(G)) \rightarrow \mathcal{E}q(G \rightarrow \text{Aut}(G)))$ , c'est-à-dire par le  $H^3$  à valeurs dans le groupe non abélien  $G$ .

4.2. PERSPECTIVES TOPOLOGIQUES: GERBES ET FIBRATIONS. — (4.2.1) Soit  $X$  un espace topologique connexe. On note  $X^X$  le monoïde des applications continues de  $X$  vers lui-même, et  $\mathcal{E}(X)$  le sous-monoïde des équivalences d'homotopie de  $X$  avec lui-même, muni de la loi de composition définie par composition des équivalences. Dans la terminologie de [33],  $\mathcal{E}(X)$  est un monoïde topologique de type groupe («grouplike»), et l'ensemble  $\pi_0(\mathcal{E}(X))$  des composantes connexes de  $\mathcal{E}(X)$  s'identifie au groupe des classes d'équivalence d'homotopie de  $X$ . Les espaces  $\mathcal{E}(X)$  sont des objets très étudiés: ainsi trouvera-t-on dans l'ouvrage [37], qui leur est entièrement consacré, un panorama des connaissances actuelles dans ce domaine.

Le choix d'un point  $x$  de  $X$  détermine une fibration

$$(4.2.1.1) \quad \mathcal{E}(X, x) \rightarrow \mathcal{E}(X) \rightarrow X$$

[la flèche  $ev_x: \mathcal{E}(X) \rightarrow X$  étant définie par l'évaluation en  $x$ ], dont la fibre est le sous-monoïde des équivalences pointées de  $X$ . On déduit de la fibration (4.2.1.1) la suite exacte homotopique

$$(4.2.1.2) \quad \Omega X \rightarrow \mathcal{E}(X, x) \rightarrow \mathcal{E}(X)$$

les flèches de cette dernière étant compatibles aux structures de monoïde (ou plutôt, dans le cas de  $\Omega X$ , de  $A_\infty$ -espace au sens de [44]). En passant aux classifiants, (4.2.1.2) détermine une fibration d'espaces pointés

$$(4.2.1.3) \quad X \rightarrow B(\mathcal{E}(X, x)) \rightarrow B(\mathcal{E}(X)).$$

On montre (voir par exemple [13] prop. 4.1, [33] cor. 9.5) que, pour tout espace raisonnable  $Y$  (par exemple qui a le type d'homotopie d'un CW complexe), l'ensemble  $[Y, B(\mathcal{E}(X))]_{pt}$  des classes d'homotopie d'applications pointées continues de  $Y$  vers  $B(\mathcal{E}(X))$  s'identifie à l'ensemble des classes de fibrations sur  $Y$  de fibres homotopiquement équivalentes à  $X$ , pointé par la fibration triviale. On se place dorénavant dans un contexte, tel celui de [3] cor. 2.4 dans lequel une telle fibration est toujours localement homotopiquement triviale, en renvoyant à [46] pour une discussion détaillée des problèmes liés à la classification des fibrations.

Soit maintenant  $\pi$  un groupe, et, pour tout entier  $n \geq 1$ , prenons pour  $X$  un modèle (pointé) de l'espace d'Eilenberg-MacLane  $K(\pi, n)$ . La structure de l'espace  $\mathcal{E}(X, x)$  est alors très simple : en effet le foncteur  $\pi_n(-, x)$  détermine un isomorphisme

$$\pi_0(\mathcal{E}(X, x)) \rightarrow \text{Aut}(\pi),$$

dont l'inverse s'obtient dès qu'on dispose d'une construction fonctorielle en  $\pi$  de l'espace  $K(\pi, n)$ . Or on sait (voir [2] cor. A3) que la composante de l'identité de  $\mathcal{E}(X, x)$  est contractile et il en résulte donc que le monoïde  $\mathcal{E}(X, x)$  est en fait homotopiquement équivalent au groupe discret  $\text{Aut}(\pi)$ , cette équivalence étant compatible aux lois de composition. Il résulte alors de (4.2.1.1) que l'espace topologique  $\mathcal{E}(X)$  est une tour de Postnikov à deux étages, dont les groupes d'homotopie, concentrés en degrés 0 et  $n$  sont respectivement  $\text{Aut}(\pi)$  et  $\pi$ . Quant à la structure de groupe de  $\mathcal{E}(X)$ , c'est, pour  $n > 1$ , celle du produit : on montre en effet ([31], prop. 25.2) qu'il existe une équivalence d'homotopie, respectant les lois de composition

$$\mathcal{E}(X) \approx K(\pi, n) \times \text{Aut}(\pi).$$

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui où  $n = 1$ , la structure de groupe de  $\mathcal{E}(X)$  n'est plus la structure produit : elle est en effet déterminée par la fibration (4.2.1.2), qui prend ici la forme

$$(4.2.1.4) \quad \pi \rightarrow \text{Aut}(\pi) \rightarrow \mathcal{E}(B\pi).$$

Une façon commode de décrire la structure de groupe en question est de dire que  $\mathcal{E}(B\pi)$  est homotopiquement équivalent, par une équivalence qui respecte les structures de monoïde, au groupe simplicial (ou bien, si on le préfère, au groupe topologique qui en est la réalisation géométrique) défini par le module croisé  $\pi \rightarrow \text{Aut}(\pi)$ .  $\mathcal{E}(B\pi)$  est donc une tour de Postnikov à deux étages, dont les groupes d'homotopie, concentrés en degrés 0 et 1, sont respectivement le groupe  $\text{Out}(\pi)$  des automorphismes extérieurs de  $\pi$  et le centre  $Z\pi$  de  $\pi$ , et qui admet comme décomposition de Postnikov, compatible aux structures de groupe, la fibration

$$B(Z\pi) \rightarrow \mathcal{E}(B\pi) \rightarrow \text{Out}(\pi)$$

La fibration (4.2.1.3)

$$(4.2.1.5) \quad B\pi \rightarrow B\text{Aut}(\pi) \rightarrow B(\mathcal{E}(B\pi)),$$

déduite de (4.2.1.4), est dans ce cas celle de [28] cor. 1.5 (pour  $n = 1$ ), [21] th. 2.1. Considérons maintenant, pour un espace pointé  $Y$ , la suite exacte longue de classes d'homotopie pointées associée à (4.2.1.5) :

$$(4.2.1.6) \quad [Y, \mathcal{E}(B\pi)] \rightarrow [Y, B\pi] \rightarrow [Y, B\text{Aut}(\pi)] \rightarrow [Y, B(\mathcal{E}(B\pi))].$$

On a vu plus haut que le dernier terme de cette suite est l'ensemble pointé  $L(Y, B\pi)$  des classes d'homotopie de fibrations pointées  $W \rightarrow Y$ , de fibres homotopiquement équivalentes à  $B\pi$ . De même le terme précédent  $[Y, B\text{Aut}(\pi)]$  de (4.2.1.6) s'interprète (comme

l'affirme le corollaire de la proposition 4.1 de [13]), comme l'ensemble qui classifie les fibrations  $W \rightarrow Y$  du type mentionné, et qui possèdent une section continue  $s: Y \rightarrow W$ . En effet, à une fibration de ce type munie d'une section  $s$  correspond alors le groupe  $G$  au-dessus de  $Y$  (au sens de [27] déf. II.1), dont la fibre en un point  $y \in Y$  est le groupe  $\pi_1(W_y, s(y))$ . Le  $Y$ -groupe  $G$  est localement isomorphe au  $Y$ -groupe trivial  $\pi_Y = \pi \times Y$ , et la correspondance bien connue  $G \mapsto \text{Isom}_Y(\pi_Y, G)$  met alors en bijection l'ensemble des classes de groupes de ce type et l'ensemble  $[Y, B \text{Aut}(\pi)]$  des  $\text{Aut}(\pi)$ -fibrés principaux sur  $Y$ . Inversement, à la donnée d'un  $Y$ -groupe  $G$  localement isomorphe à  $\pi_Y$  correspond la fibration  $W \rightarrow Y$  définie par  $W = B_Y(G)$ , c'est-à-dire celle dont la fibre en  $y$  est l'espace classifiant pointé  $BG_y$  de la fibre  $G_y$  de  $G$  en  $y$ .

La suite exacte (4.2.1.6) est à rapprocher de la suite exacte (4.3.16) de [4]. Cette dernière nous permet de constater que l'ensemble pointé noté  $L(Y, B\pi)$  ci-dessus est l'analogue, dans ce cadre topologique, de ce que j'ai appelé dans *loc. cit.* l'ensemble des classes de  $\pi_Y$ -gerbes sur  $Y$ , et il doit donc être considéré comme le  $H^2$  de l'espace  $Y$ , à valeurs dans le groupe non-abélien  $\pi$ . On trouvera d'ailleurs dans [46], p.262 quelques brefs commentaires de Stasheff sur le fait qu'il y a lieu, lorsque l'on souhaite décrire par des cocycles une fibration sur  $Y$  de fibres homotopiquement équivalentes à un espace  $X$  donné, de ne pas se limiter à des 1-cocycles, mais plutôt d'introduire des cocycles d'ordre supérieur.

(4.2.2) L'analogie mentionnée avec [4] suggère qu'on dispose d'une situation similaire à celle qui vient d'être examinée, mais sensiblement plus riche, si l'on part non plus du groupe  $\pi_Y$  constant sur  $Y$ , mais d'un  $Y$ -groupe  $\pi \rightarrow Y$  fibré sur  $Y$ <sup>(4)</sup>. Comme on vient de le dire, la construction habituelle de l'espace classifiant d'un groupe détermine dans cette situation relative un espace classifiant relatif  $B_Y(\pi)$ , fibré au-dessus de  $Y$ , pointé par la section distinguée  $x: Y \rightarrow B_Y(\pi)$  de la projection canonique (voir [27], II.4). On note alors respectivement  $\mathcal{E}_Y(B_Y(\pi))$  (resp.  $\mathcal{E}_Y(B_Y(\pi), x)$ ) le monoïde d'équivalences d'homotopie de  $B_Y(\pi)$  au-dessus de  $Y$  (resp. d'équivalences d'homotopie de  $B_Y(\pi)$  au-dessus de  $Y$  pointées par  $x$ ). On dispose alors de la variante relative suivante de (4.2.1.5):

$$(4.2.2.1) \quad B_Y(\pi) \rightarrow B_Y(\text{Aut}_Y(\pi)) \rightarrow B_Y(\mathcal{E}_Y(B_Y(\pi), x)),$$

qui doit être vue comme une  $Y$ -fibration. Cette dernière induit une fibration des espaces de sections sur  $Y$ . La suite exacte d'homotopie associée est la variante paramétrée suivante de (4.2.1.5):

$$(4.2.2.2) \quad \Gamma(Y, (\mathcal{E}_Y(B_Y(\pi))) \rightarrow \Gamma(Y, B_Y(\pi)) \rightarrow \Gamma(Y, B \text{Aut}_Y(\pi)) \rightarrow L_Y(Y, B_Y(\pi))$$

dans laquelle  $\Gamma(Y, -)$  désigne le foncteur des sections continues au-dessus de  $Y$ , et qui a pour dernier terme l'ensemble des classes d'homotopie de fibrations (pointées) sur  $Y$  qui sont, localement sur  $Y$ , homotopiquement équivalentes au  $Y$ -espace  $B_Y(\pi)$ .

---

(<sup>4</sup>) On n'a pas cherché à préciser ici dans quelle catégorie d'espaces topologiques relatifs on doit se placer, pour que les diverses constructions homotopiques utilisées (notamment les suites exactes longues d'homotopie paramétrées) soient permises. Ce point de vue paramétré est notamment adopté dans l'ouvrage [27], dont l'esprit est assez proche du nôtre et dont nous adopterons la terminologie.

*Remarque 4.2.3.* — On n'a considéré dans [4] que les gerbes associées à un groupe donné  $G$ , c'est-à-dire les  $G$ -gerbes et donc des classes quelque peu restreintes de cohomologie de degré 2. Or il existe, comme on l'a déjà rappelé, une forme plus générale de la 2-cohomologie, à savoir celle introduite par Giraud dans laquelle les objets que l'on classe sont l'ensemble de toutes les gerbes plutôt que celui des  $G$ -gerbes. Du point de vue topologique, ceci correspond à la situation dans laquelle on ne se donne plus un groupe  $\pi \rightarrow Y$  sur  $Y$  tout entier, mais plutôt un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $Y$  par des ouverts  $U_\alpha$  et, pour tout  $\alpha$ , un groupe relatif  $\pi_\alpha \rightarrow U_\alpha$  défini sur  $U_\alpha$ . On associe en effet à une fibration

$$(4.2.3.1) \quad p: Z \rightarrow Y$$

et à une famille de sections  $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow Z$  de  $p$  au-dessus des ouverts  $U_\alpha$  de  $\mathcal{U}$  une telle famille de  $U_\alpha$ -groupes  $\pi_\alpha = \pi_{1, U_\alpha}(Z_\alpha, s_\alpha)$  constituée des groupes d'homotopie au-dessus de  $U_\alpha$  de  $U_\alpha$ -lacets  $S^1 \times U_\alpha \rightarrow Z_\alpha$ , à valeurs dans la restriction  $Z_\alpha$  de  $Z$  au-dessus de  $U_\alpha$ , pointés par  $s_\alpha$ . L'ensemble  $L_Y(Y, B_Y(\pi))$  considéré plus haut doit ici être remplacé par l'ensemble  $L_Y(Y, ((B_{U_\alpha}(\pi_\alpha))_\alpha))$  des classes d'homotopie au-dessus de  $Y$  de fibrations (4.2.3.1) dont la restriction  $Z_\alpha \rightarrow U_\alpha$  au-dessus de  $U_\alpha$  est homotopiquement équivalente au-dessus de  $U_\alpha$  à  $B_{U_\alpha}(\pi_\alpha)$  [et qui sont donc localement des «  $K_{U_\alpha}(\pi_\alpha, 1)$  »]. C'est ce dernier ensemble qui constitue, pour un espace topologique raisonnable  $Y$  (et un recouvrement de  $Y$  par une famille d'ouverts  $U_\alpha$ ), l'ensemble de cohomologie de degré 2 de  $Y$  à valeurs dans la famille des  $U_\alpha$ -groupes  $\pi_\alpha$ .

4.3. VERS LA COHOMOLOGIE SUPÉRIEURE. — (4.3.1) Il est maintenant assez facile de comprendre ce que peuvent être les groupes de cohomologie supérieure. On aura en effet compris à la lecture du paragraphe 3 que le procédé qui permet de passer d'un groupe  $G$  au gr-champ  $\mathcal{G} = \text{Bitors}(G)$  [dont l'opposé est le gr-champ associé au module croisé  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ], enfin de  $\mathcal{G}$  au 2-gr-champ  $G = \text{Bitors}(\mathcal{G})$  (dont l'opposé est le 2-gr-champ associé au « carré croisé »  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$ ) est un procédé itératif, qui nous a permis de définir les ensembles de cohomologie de degré 1, 2, 3 à valeurs dans  $G$  comme les classes de toseurs sous les groupes  $G$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $G$  respectivement. Il n'y a pas d'obstruction sérieuse à prolonger indéfiniment cette construction, si ce n'est l'éternel problème de formuler agréablement ce qu'est une  $n$ -catégorie. On dispose en effet, pour définir les structures de groupes supérieures et les toseurs sous ceux-ci, des conditions  $A_n$  de Stasheff à tous les niveaux. De même, dans le cadre strict (le seul où l'on puisse raisonnablement écrire des cocycles) on connaît, par [28], [17], la définition des  $n$ -cubes croisés, analogues supérieurs des modules et carrés croisés.

Les difficultés  $n$ -catégoriques mentionnées n'ont pas cours dans le contexte topologique considéré en 4.2. Plaçons-nous, pour faciliter la discussion, dans le cas d'un groupe  $\pi$  constant et non plus paramétré par un espace  $Y$ . Posons alors  $\pi = \pi \langle 0 \rangle$  et

$$\pi \langle 1 \rangle = \mathcal{E}q(B\pi).$$

On a vu que  $\pi \langle 1 \rangle$  est un monoïde de type groupe et que le  $H^2$  d'un espace pointé  $Y$  à valeurs dans  $\pi$  est l'ensemble pointé défini par

$$(4.3.1.1) \quad \langle H^2(Y, \pi) \rangle = [Y, B(\pi \langle 1 \rangle)]_{pt}.$$

c'est-à-dire l'ensemble des classes d'homotopie de fibrations sur  $Y$  de fibre homotopiquement équivalente à  $B\pi$ . On définit alors par récurrence sur  $n$  le monoïde de type groupe  $\pi\langle n \rangle$  en posant

$$(4.3.1.2) \quad \pi\langle n \rangle = \mathcal{E}q(B(\pi\langle n-1 \rangle)).$$

La fibration (4.2.1.1) associée à l'espace pointé  $X = B(\pi\langle n-1 \rangle)$  peut s'écrire ici

$$(4.3.1.3) \quad \text{Aut}(\pi\langle n-1 \rangle) \rightarrow \pi\langle n \rangle \rightarrow B(\pi\langle n-1 \rangle)$$

puisque le foncteur «espaces de lacets»  $\Omega$  définit une équivalence (d'inverse le foncteur classifiant  $B$ ) entre le monoïde  $\mathcal{E}q((B(\pi\langle n-1 \rangle), x))$  et le  $A_\infty$ -espace  $\text{Aut}(\pi\langle n-1 \rangle)$  des auto-équivalences  $A_\infty$  de  $\pi\langle n-1 \rangle$ <sup>(5)</sup>. Elle induit donc une fibration (4.2.1.2)

$$(4.3.1.4) \quad \pi\langle n-1 \rangle \rightarrow \text{Aut}(\pi\langle n-1 \rangle) \rightarrow \pi\langle n \rangle$$

analogue à (4.2.1.4). On définit la cohomologie de degré  $n+1$  d'un espace pointé  $Y$ , à valeurs dans un groupe  $\pi$  par la formule

$$(4.3.1.5) \quad \langle H^{n+1}(Y, \pi) \rangle = [Y, B(\pi\langle n \rangle)]_{pr}.$$

La définition (4.3.1.2) montre donc que l'ensemble de cohomologie non-abélienne de degré  $n+1$  (4.3.1.5) classe les fibrations sur  $Y$  dont la fibre est homotopiquement équivalente à l'espace  $B(\pi\langle n-1 \rangle)$ . Par ailleurs la formule (4.3.1.5) met bien en évidence le fait que, si la définition de cette cohomologie ne dépend que du groupe  $\pi$ , ses vrais coefficients consistent cependant (comme l'avait déjà observé Dedecker dans son contexte pour  $n=2, 3$  et comme nous l'avons dit plus haut, voir 2.3.6ii, 2.4.3) en les objets plus compliqués que sont les  $\pi\langle n \rangle$ . Ce sont donc ces derniers, plutôt que le groupe  $\pi$  lui-même, qui en déterminent la fonctorialité.

*Remarque 4.3.2.* — (i) Les formules (4.3.1.1) et (4.3.1.5) gardent un sens lorsque  $\pi$  est un groupe topologique, ou même un  $A_\infty$ -espace, et permettent de définir la cohomologie à valeurs dans un tel groupe  $\pi$ . Ainsi, à toute suite exacte de groupes topologiques

$$(4.3.2.1) \quad 1 \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow 1$$

est associée la fibration  $BH \rightarrow BK$ , dont la fibre est homotopiquement équivalente à  $BG$ . Celle-ci définit donc un invariant, élément de  $\langle H^2(BK, G) \rangle$ . La théorie de Schreier supérieure affirme ici que l'élément en question détermine une extension (d'espaces  $A_\infty$ ) équivalente à l'extension (4.3.2.1). Cette dernière s'obtient en appliquant à la fibration pointée  $BH \rightarrow BK$  considérée le foncteur «espaces de lacets»  $\Omega$ . Dans le cas où (4.3.2.1) est une extension de groupes abstraits, on retombe ici sur l'interprétation topologique donnée dans [2] de la théorie de Schreier usuelle.

---

<sup>(5)</sup> On ne confondra pas le  $A_\infty$ -espace des  $A_\infty$ -auto-équivalences d'un monoïde topologique  $\Pi$ , qui équivaut au groupe des auto-équivalences pointées de  $B\Pi$ , avec le groupe des automorphismes continus de  $\Pi$ .



(ii) La fibration (4.3.1.4) exprime  $\pi \langle n \rangle$  en termes de  $\pi \langle n-1 \rangle$ . Il serait intéressant d'expliciter la flèche  $\pi \langle n-1 \rangle \rightarrow \text{Aut}(\pi \langle n-1 \rangle)$  comme étant le  $A_\infty$ -morphisme défini par la conjugaison intérieure dans  $\pi \langle n-1 \rangle$  (pour un choix d'une loi d'inverse cohérente pour le monoïde de type groupe  $\pi \langle n-1 \rangle$ ). L'action naturelle de  $\text{Aut}(\pi \langle n-1 \rangle)$  sur  $\pi \langle n-1 \rangle$  ferait alors du complexe  $\pi \langle n-1 \rangle \rightarrow \text{Aut}(\pi \langle n-1 \rangle)$  un module croisé de  $A_\infty$ -espaces (et non de groupes), et on obtiendrait finalement de cette manière par itération une description de  $\pi \langle n \rangle$  comme «  $n$ -cube croisé » (en un sens  $A_\infty$ ).

(4.3.3) Il existe d'autres formules, plus abéliennes, qui permettent également d'associer à un espace  $Y$  et à un groupe  $G$  un objet de cohomologie : la première d'entre elles est celle qui, en degré 1, associe à  $Y$  et à  $G$  le groupe  $H^0(Y, \mathcal{G})$  des  $G$ -bitorseurs sur  $Y$  plutôt que l'ensemble  $H^1(Y, G)$  des  $G$ -torseurs sur  $Y$ . En degré  $n$ , c'est celle qui associe à  $Y$  et à  $\pi$  le groupe

$$H^0(Y, \pi \langle n \rangle) = [Y, \pi \langle n \rangle]_{pt}$$

La suite de cohomologie déduite de la fibration (4.3.1.3) définit alors une flèche

$$(4.3.3.1) \quad H^0(Y, \pi \langle n \rangle) \rightarrow H^1(Y, \pi \langle n-1 \rangle)$$

qui envoie l'objet en question vers le «  $H^n(Y, \pi)$  » de (4.3.1.5). On dispose en fait de toute une série de variantes de plus en plus abéliennes de la cohomologie de degré  $n$ , définies pour  $i \geq 0$  variable par la formule générale

$$(4.3.3.2) \quad H^{-i}(Y, \pi \langle n+i \rangle) = [Y, \Omega^i \pi \langle n+i \rangle]_{pt}$$

et qui s'envoient les unes vers les autres par des flèches déduites de (4.3.1.4). Ainsi en degré 0 on dispose, outre le groupe  $H^0(Y, G)$  et le groupe abélien  $H^{-1}(Y, \mathcal{G})$  (ce dernier étant égal par [4] 2.16 au groupe  $H^0(Y, ZG)$  des sections de  $Y$  à valeurs dans le centre  $ZG$  de  $G$ ), du groupe abélien  $H^{-2}(Y, \mathbb{G})$ , qui s'identifie au groupe  $H^0(Y, Z)$  des sections de  $Y$  à valeurs dans le sous-groupe  $Z$  de  $ZG$  défini en (2.3.6.i).

(4.3.4) La discussion précédente ne portait que sur les  $n$ -cubes croisés construits par itération à partir d'un groupe donné  $\pi$ . On peut tout aussi bien, à l'instar de ce qui a été fait en (2.4.2), définir la cohomologie à valeurs dans  $n$ -cube croisé quelconque  $\Pi$  (et même de type  $A_\infty$  plutôt qu'un  $n$ -cube strict), en posant

$$(4.3.4.1) \quad H^1(Y, \Pi) = [Y, B \Pi]_{pt}$$

mais cette définition est vraiment trop générale pour être vraiment intéressante. En effet, d'après [28], tous les espaces connexes  $Z$  pour lesquels  $\pi_i(Z)$  est nul lorsque  $i > n+1$  peuvent s'écrire, dans la catégorie homotopique, sous la forme  $Z = B \Pi$  pour un  $n$ -cube croisé  $\Pi$  approprié<sup>(6)</sup>. Il est sans doute plus raisonnable (quoiqu'à peine moins général) de considérer la cohomologie non abélienne d'un espace  $Y$  comme étant l'étude des fibrations de base  $Y$  et dont les fibres sont homotopiquement équivalentes à un espace

<sup>(6)</sup> On observera cependant que c'est essentiellement la définition de Roberts [39], pour lequel il n'y a même pas lieu de faire d'hypothèse de connexité sur  $Z$ .

connexe  $W$  fixé, qui n'a qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non-nuls, c'est-à-dire comme celle des ensembles  $H^1(Y, \mathcal{E}(W)) = [Y, B\mathcal{E}(W)]_{pt}$ . Puisqu'un tel  $W$  est de la forme  $W = B\Pi$  pour un  $(n-1)$ -cube croisé approprié  $\Pi$ , la fibration de type (4.3.1.4)

$$(4.3.4.2) \quad \Pi \rightarrow \text{Aut}(\Pi) \rightarrow \mathcal{E}(W)$$

associée à  $\Pi$  (dans laquelle  $\text{Aut}(\Pi) = \mathcal{E}(B\Pi, pt)$  désigne à nouveau les auto-équivalences  $A_\infty$  de  $\Pi$ ) fournit une description de  $\mathcal{E}(W)$  comme le module croisé de  $n-1$ -cubes croisés (au sens  $A_\infty$ )

$$(4.3.4.3) \quad \Pi \langle 1 \rangle = (\Pi \rightarrow \text{Aut}(\Pi)).$$

En d'autres termes,  $\Pi \langle 1 \rangle$  peut être considéré comme un  $n$ -cube croisé  $A_\infty$  d'un type particulier, et ce seront les ensembles de la forme  $H^1(Y, \Pi \langle 1 \rangle)$  qui constitueront les ensembles de cohomologie généraux de degré  $n+1$ . La situation la plus riche est celle où l'espace  $W$  n'est pas simplement connexe et où on ne peut donc en général pas espérer réduire le  $n$ -cube croisé (4.3.4.3) à un  $(n-1)$ -cube. On se rapproche, à mesure que  $n$  tend vers l'infini, de la situation la plus générale, dans laquelle on ne suppose plus que les groupes d'homotopie de  $W$  sont presque tous nuls.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BENABOU, *Catégories avec multiplication* (C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 256, 1963, p. 1887-1890).
- [2] A. J. BERRICK, *Group Extensions and their Trivialisations* (L'Enseignement Math., vol. 31, 1985, p. 151-172).
- [3] P. BOOTH, P. HEATH, C. MORGAN et R. PICCININI, *H-Spaces of Self-Equivalences of Fibrations and Bundles* (Proc. London, Math. Soc., vol. 49, 1984, p. 111-127).
- [4] L. BREEN, *Bitorseurs et cohomologie non-abélienne*, dans *The Grothendieck Festschrift I* (Progress in Mathematics, vol. 86, 1990, p. 401-476, Birkhäuser).
- [5] K. S. BROWN, *Cohomology of Groups* (Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, 1982).
- [6] R. BROWN et N. D. GILBERT, *Algebraic Models of 3-Types and Automorphism Structures for Crossed Modules* (Proc. London Math. Soc., vol. 59, 1989, p. 51-73).
- [7] M. BULLEJOS et A. CEGARRA, *A 3-Dimensional Non-Abelian Cohomology of Groups with Applications to Homotopy Classification of Continuous Maps* (Canad. J. Math., vol. 43, (2), 1991, p. 1-32).
- [8] D. CONDUCHÉ, *Modules croisés généralisés de longueur 2* (J. Pure Applied Alg., vol. 34, 1984, p. 155-178).
- [9] P. DEDECKER, *Les foncteurs  $\text{Ext}_n$ ,  $H_n^2$  et  $H_n^2$  non abélien* (C. R. Acad. Sci. Paris., vol. 258, 1964, p. 4891-4894).
- [10] P. DEDECKER, *Algèbre homologique non-abélienne* (Colloque de Topologie Algébrique, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Bruxelles, 1964).
- [11] P. DEDECKER, *Three Dimensional Non Abelian Cohomology Groups*, dans *Category Theory, Homology Theory and their Applications II* (Lecture Notes in Math., vol. 92, 1969, p. 32-64, Springer-Verlag).
- [12] P. DELIGNE, *La formule de dualité globale*, exposé XVIII de SGA 4 (Lecture Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, 1973).
- [13] M. DROR et A. ZABRODSKY, *Unipotency and Nilpotency in Homotopy Equivalences* (Topology, vol. 18, 1979, p. 187-197).
- [14] J. DUSKIN, *An Outline of a Theory of Higher Dimensional Descent* (Bull. de la Soc. Math. de Belgique (série A), vol. 41, 1989, p. 249-277).
- [15] S. EILENBERG et S. MACLANE, *Cohomology theory in abstract groups I* (Ann. of Math., vol. 47, 1948, p. 51-78).
- [16] S. EILENBERG et S. MACLANE, *On the Groups  $H(\Pi, n)I, II$*  (Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 55-106 et vol. 60, 1954, p. 49-139).
- [17] G. ELLIS et R. STEINER, *Higher Dimensional Crossed Modules and the Homotopy Groups of  $(n+1)$ -ads* (J. Pure Appl. Algebra, vol. 46, 1987, p. 117-136).
- [18] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 179, Springer-Verlag, 1971).

- [19] A. GROTHENDIECK, *Biextensions de faisceaux de groupes*, exposé VII de SGA7I, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (Lecture notes in Math.*, vol. 288, Springer-Verlag, 1972).
- [20] M. HAKIM, *Topos annelé et schémas relatifs (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete*, vol. 64, Springer Verlag, 1972).
- [21] R. O. HILL Jr., *Moore-Postnikov Towers for Fibrations in which  $\pi_1$  (fiber) is Non-Abelian (Pacific J. Math.*, vol. 62, 1976, p. 141-148).
- [22] D. F. HOLT, *An Interpretation of the Cohomology Groups  $H^n(G, A)$  (J. Algebra*, vol. 60, 1979, p. 307-320).
- [23] J. HUEBSCHMANN, *Crossed  $n$ -fold Extensions of Groups and Cohomology (Comment. Math. Helvetici*, vol. 55, 1980, p. 302-314).
- [24] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations I, II (Lecture notes in Math.*, vol. 239, 283, Springer-Verlag, 1971, 1972).
- [25] A. JOYAL et R. STREET, *Braided Monoidal Categories*, Preprint.
- [26] G. M. KELLEY et M. LAPLAZA, *Coherence for Compact Closed Categories (Lecture notes in Math.*, vol. 281, Springer-Verlag, 1972).
- [27] A. LEGRAND, *Homotopie des espaces de sections (Lecture notes in Math.*, vol. 941, Springer-Verlag, 1982).
- [28] J.-L. LODAY, *Spaces with Finitely Many Non Trivial Homotopy Groups (J. Pure and Appl. Alg.*, vol. 24, 1982, p. 179-202).
- [29] S. MACLANE, *Natural Associativity and Commutativity (Rice University Studies*, vol. 49, 1963, p. 28-46), reproduit dans les *Selected Papers*, I. KAPLANSKY éd., Springer Verlag, 1979.
- [30] S. MACLANE, *Categories for the Working Mathematician (Graduate texts in Mathematics*, vol. 5, Springer-Verlag, 1972).
- [31] J. P. MAY, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand, 1967.
- [32] J. P. MAY,  *$E_\infty$ -Spaces, Group Completions and Permutative Categories*, dans *New Developments in Topology*, G. SEGAL éd., (London Math. Soc. Lecture note series, vol. 11, 1974, p. 61-93, Cambridge University Press).
- [33] J. P. MAY, *Classifying Spaces and Fibrations (Memoirs of the A.M.S.*, vol. 155, 1975).
- [34] I. MOERDIJK, *Morita Equivalence for Continuous Groups (Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 103, 1988, p. 97-115).
- [35] G. MOORE et N. SEIBERG, *Classical and Quantum Field Theory*, (Comm. Math. Phys., vol. 123, 1989, p. 177-254).
- [36] K. NORRIE, *Actions and Automorphisms of Crossed Modules (Bull. S.M.F.*, vol. 118, 1989, p. 101-119).
- [37] R. A. PICCINNINI éd., *Groups of Self-Equivalences and Related Topics (Lecture notes in Math.*, vol. 1425, Springer-Verlag, 1990).
- [38] N. SAAVEDRA RIVANO, *Catégories tannakiennes (Lecture notes in Math.*, vol. 265, Springer-Verlag, 1972).
- [39] J. E. ROBERTS, *Mathematical Aspects of Local Cohomology (Colloquium on Operator Algebras and their Applications to Mathematical Physics, Colloque International C.N.R.S.*, vol. 274, Marseille, 1977).
- [40] O. SCHREIER, *Über die Erweiterung von Gruppen I (Monatsh. Math. Phys.*, vol. 34, 1926, p. 165-180); *II. (Abh. Math. Sem. Hamburg*, vol. 4, 1926, p. 321-346).
- [41] G. SEGAL, *Cohomology of Topological Groups (Symposia Mat. IV*, 1970, p. 377-387, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Bologna).
- [42] J.-P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classe (Actualités scientifiques et Industrielles*, Hermann, 1959).
- [43] HOANG XUAN SINH, *Gr-catégories (thèse de doctorat, Université Paris-VII*, 1975).
- [44] J. STASHEFF, *Homotopy Associativity of  $H$ -Spaces I (Trans. A.M.S.*, vol. 108, 1963, p. 275-292).
- [45] J. STASHEFF,  *$H$ -Spaces from a Homotopy Point of View (Lecture Notes in Math.*, vol. 161, Springer-Verlag, 1970).
- [46] J. STASHEFF,  *$H$ -Spaces and Classifying Spaces: Foundations and Recent Developments*, dans *Algebraic Topology (Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 22, 1971, p. 247-272, A.M.S.).
- [47] K. ULBRICH, *Group Cohomology for Picard Categories (J. Alg.*, vol. 91, 1984, p. 464-498).
- [48] D. YETTER, *Category Theoretic Representations of Knotted Graphs in  $S^3$  [Advances in Mathematics (à paraître)]*.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1991,  
révisé le 10 octobre 1991.)

Lawrence BREEN,  
U.R.A. 742  
Institut Galilée  
Université Paris-Nord  
F-93430 Villetaneuse