ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉRIC LEICHTNAM

Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 24, nº 2 (1991), p. 189-214

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_2_189_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 24, 1991, p. 189 à 214.

LE PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ SEMI-LINÉAIRE D'ORDRE DEUX

PAR ÉRIC LEICHTNAM

0. Introduction

Cet article a pour objet l'étude du problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux non caractéristique pour les opérateurs analytiques dont la partie principale est linéaire et à caractéristiques simples. Plus précisément, nous considérons le problème :

$$(0.1)\qquad \begin{cases} a(x, \mathrm{D})\, u - f(x, \mathrm{D}_x^\alpha u)_{|\alpha| \leqq 1} = 0 \\ \mathrm{D}_{x^0}^h u(x)\big|_{\mathrm{S}} = u_h(x'), \qquad 0 \leqq h \leqq 1 \end{cases}$$

où l'opérateur $a(x, \mathrm{D})$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre deux et à coefficients fonctions holomorphes de $x = (x^j)_{0 \leqq j \leqq n}$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, où l'hyperplan S d'équation : $x^0 = 0$ n'est pas caractéristique pour cet opérateur, où $f(x, \mathrm{D}_x^\alpha u)_{|\alpha| \leqq 1}$ désigne une fonction holomorphe de x dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et polynomiale en les dérivées *d'ordre* $\leqq 1$ de u. Posons $x' = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ et soit T l'hyperplan de S d'équation $x^0 = x^1 = 0$. Nous supposons que les données $u_h(x')$ $(0 \leqq h \leqq 1)$ et les dérivées partielles premières de $u_0(x')$ sont holomorphes et *bornées* sur le revêtement universel de $\mathrm{V} \setminus \mathrm{T}$ où V est un voisinage ouvert dans S de l'origine. En outre, nous étudierons le problème (0.1) avec les hypothèses suivantes. Soit $a_2(x, \xi)$ le polynôme caractéristique (homogène en ξ) de l'opérateur $a(x, \mathrm{D})$; nous supposerons que l'équation (de degré deux) en ξ_0 : $a_2(0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0) = 0$ admet deux racines distinctes. On sait alors construire (*voir* [4]) deux hypersurfaces caractéristiques $k^i(x) = 0$, $1 \leqq i \leqq 2$ issues de T. Le résultat principal de cet article est le :

THÉORÈME 0.1 (avec les hypothèses précédentes). — *Il existe un voisinage ouvert* Ω *de* $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ *tel que, pour tout point* m *de* $(\mathrm{S} \cap \Omega) \setminus \mathrm{T}$ *et pour tout choix de déterminations de* $u_0(x')$ *et* $u_1(x')$ *au point* m, *on peut prolonger le germe au point* m *de solution* u *du problème* (0.1) *le long de tout chemin de* Ω *ne rencontrant pas les deux hypersurfaces caractéristiques d'équation* $k^i(x) = 0$ $(1 \leqq i \leqq 2)$. *En outre, si le terme non linéaire* $f(x, \mathrm{D}_x^\alpha u)$ *ne dépend pas des dérivées partielles (premières) de* u, *alors le résultat précédent demeure valable sans aucune hypothèse sur les dérivées partielles premières de* $u_0(x')$. *Enfin* u *définit une fonction holomorphe bornée (ainsi que ses dérivées premières si les* $\partial^\alpha u_0$ $|\alpha| \leqq 1$

sont bornées) sur le revêtement universel de Ω privé de la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques.

Remarque 0.2. — 1. L'exemple du problème suivant (dans $\mathbf{C}^2$) :

$$\frac{du}{dx^0}=u^2$$

$$u(0, x^1)=\frac{1}{x^1}$$

dont la solution est $1/(x^1-x^0)$ montre qu'il est indispensable de supposer que les données de Cauchy du problème (0.1) sont bornées si l'on veut établir l'existence d'une solution du problème (0.1) holomorphe ramifiée autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques issues de T. Quand on étudie les équations non linéaires, il est quasiment indispensable de contrôler la croissance des solutions, dans cet esprit voir [1].

2. Si f est identiquement nul, alors le théorème 0.1 est un résultat de Wagschal [4]. Dans l'appendice (§ 6), nous redémontrerons ce résultat en précisant que la solution du problème linéaire [resp. et en plus ses dérivées partielles premières] sont bornées si les données de Cauchy sont bornées [resp. et en plus les dérivées partielles premières de $u_0(x')$ sont bornées].

3. Soient α et β deux nombres réels >0. Le problème suivant est un exemple simple de problème (0.1)

$$D^2_{x^0}u-(D^2_{x^1}u+\ldots+D^2_{x^n}u)=u^2$$

$$u(0, x')=\frac{x^{1^\alpha}}{1-\operatorname{Log}x^1},\qquad k^1(x)=-x^0+x^1$$

$$D_{x^0}u(0, x')=\frac{x^{1^\beta}}{1-\operatorname{Log}x^1},\qquad k^2(x)=x^0+x^1.$$

Maintenant nous allons expliquer pourquoi notre théorème 0.1 peut être vu comme un résultat de propagation de singularités microlocales analogues à ceux de [0]. Le conormal d'une hypersurface caractéristique de $a(x, D)$ est une lagrangienne invariante par le flot du champ hamiltonien de $a_2(x, \xi)$. L'hypothèse que l'équation (de degré deux) $a_2(0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0)=0$ admet deux racines distinctes permet alors de voir qu'il y a exactement *deux* hypersurfaces caractéristiques pour $a(x, D)$ issues de T; ce fait est microlocal. Soit X une variété holomorphe connexe et S une hypersurface $\mathbf{C}$-analytique (avec singularités) fermée de X; rappelons que dans le cadre de la théorie des faisceaux (*voir* [6]) on peut représenter une fonction holomorphe ramifiée autour de S à l'aide d'un morphisme $s\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_{X\setminus S})$ où $\mathscr{F}$ est un système local sur $X\setminus S$. Sur la base X les singularités de s sont incluses dans S, on peut préciser cette notion de singularité en considérant — dans T^*X — le micro-support (*voir* [7]) $SS(Rj*\mathscr{F})$ de $Rj*\mathscr{F}$ où $j: X\setminus S \hookrightarrow X$ désigne l'injection canonique. On démontre dans [6] que $SS(Rj*\mathscr{F})$ est inclus dans un sous-ensemble $\mathbf{C}$-analytique homogène fermé lagrangien (donc petit) de T^*X. Il y a là une analogie avec les distributions intégrales de Fourier d'autant plus qu'on observe des phénomènes d'étalement des singularités au-dessus de la partie singulière de S. Par conséquent pour avoir une meilleure vision (microlocale) des fonctions holomorphes ramifiées u autour de la réunion de deux hypersurfaces caractéristiques d'équation $k^i(x)=0$ $(1 \leqq i \leqq 2)$, il est naturel de raisonner dans le fibré cotangent de Ω et de considérer que les singularités de u vivent dans le conormal de $(k^1)^{-1}(0) \cup (k^2)^{-1}(0)$. Notre théorème 0.1 peut donc être vu comme un résultat de propagation de singularités microlocales un peu analogue aux théorèmes de propagation de singularités de Bony (*cf.* [0]) pour des ondes conormales. Cette vision microlocale du problème nous servira de motivation et de fil conducteur dans la démonstration du théorème 0.1. Maintenant nous allons décrire la stratégie de cette démonstration.

Si ω est un réel > 0, $\dot{\mathrm{D}}_\omega$ désigne le disque pointé de $\mathbf{C}$ de centre 0 et de rayon $\omega > 0$, le revêtement universel de $\dot{\mathrm{D}}_\omega$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_\omega = \{z \in \mathbf{C} / \operatorname{Re} z < \operatorname{Log} \omega\} &\to \dot{\mathrm{D}}_\omega \\ z &\mapsto e^z.\end{aligned}$$

Les fonctions holomorphes ramifiées autour de $(k^1)^{-1}(0) \cup (k^2)^{-1}(0)$ admettent (*voir* lemme 2.1) une représentation de la forme :

$$g(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x)$$

où $(t_1, t_2, x) \to g(t_1, t_2, x)$ est holomorphe sur un ouvert du type $\mathscr{R}_\omega^2 \times \Omega$.

Dans la définition 2.2, nous définissons – sur $\mathscr{R}_\omega^2$ – deux opérateurs d'intégration

$$\mathscr{D}_1^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_1} e^\theta u(\theta, t_2)\, d\theta, \qquad \mathscr{D}_2^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} e^\sigma u(t_1, \sigma)\, d\sigma.$$

Remarque 0.3. – Du point de vue microlocal, les singularités des fonctions $g(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x)$ vivent dans le conormal à la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques. Les opérateurs d'intégration $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ « sont petits » quand « on s'approche » du conormal à $x^0 = x^1 = 0$, ils permettront de contrôler l'étalement des singularités entraîné par les opérations non linéaires. $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ commutent.

Le théorème 2.4 montre que la solution du problème (0.1) possède la structure suivante :

$$(0.2) \qquad (v + \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h)(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x)$$

où les déterminations « initiales » de $\operatorname{Log} k^1$, $\operatorname{Log} k^2$ sont choisies de sorte que dans un petit voisinage de m dans S on ait $\operatorname{Log} k^1(0, x') = \operatorname{Log} k^2(0, x') = \operatorname{Log} x^1$, où $v(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x)$ désigne la solution (connue d'après le théorème 6.1) du problème linéaire [obtenu à partir du problème (0.1) en supprimant le terme non linéaire $f(x, \mathrm{D}_x^\alpha u)$], où $h(t_1, t_2, x)$ est une fonction inconnue holomorphe sur un ouvert du type $\mathscr{R}_{\omega_1}^2 \times \Omega_1$. On observe (et c'est crucial) que pour toute fonction $h(t_1, t_2, x)$ les deux premières traces « initiales » de $(\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h)$ $(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)$ suivant S sont identiquement nulles. Il s'agit alors de trouver une fonction $h(t, x)$ telle que l'expression (0.2) annule identiquement l'opérateur $a(x, \mathrm{D}) - f(x, \mathrm{D}^\alpha)$. Le lemme 2.5 établit la non-nullité d'un coefficient qui jouera alors le rôle de terme pivot et permettra de mettre en place un processus de résolution analogue à la méthode de l'optique géométrique.

Ceci nous conduit (après quelques calculs) à rechercher $h(t_1, t_2, x)$ comme solution de l'équation (2.5), le théorème 2.7 assure l'existence d'une telle solution. Pour contrôler les opérations non linéaires, nous avons besoin de savoir que la solution du problème linéaire et ses dérivées partielles premières sont bornées; ce fait est assuré par le théorème 6.1 dont la démonstration occupe l'appendice (§ 6). Nous obtenons l'existence d'une solution $h(t_1, t_2, x)$ de l'équation (2.5) après avoir appliqué le théorème du point fixe à un opérateur T_1 (introduit dans la section du paragraphe 5) dans un sous-espace fermé d'une algèbre de Banach B dont les éléments sont des *séries formelles* de la forme $\sum_{j \geqq 0} u_j(t_1, t_2, x) X^j$ *auxquelles* on impose des majorations (*voir* définition 3.8) qui intuitivement traduisent le fait que le *degré* d'annulation de $u_j(t_1, t_2, x)$ quand « on s'approche » du conormal à $x^0 = x^1 = 0$ *augmente* avec j. B est alors munie d'une graduation naturelle. Le point clef (lemme 4.2) est que les deux opérateurs d'intégration $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ opèrent sur B et que $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1}$ « se majore » exactement comme $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1}$ ou $\mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1}$. Dans la section du paragraphe 5, nous montrons l'existence d'une solution $h(t_1, t_2, x)$ de l'équation (2.5) pouvant s'écrire sous la forme $\sum_{j \geqq 0} u_j(t_1, t_2, x)$.

Dans [2], nous avons résolu le problème de Cauchy Ramifié *linéaire* général pour un opérateur différentiel linéaire à caractéristiques multiples de multiplicité constante avec un second membre quelconque holomorphe ramifié autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques. Les théorèmes (linéaires) de [2] et les résultats (non linéaires) de cet article sont donc complémentaires. Nous avons veillé à ce que cet article soit self-contained. Le plan de cet article est le suivant :

1. Notations

Nous rappelons quelques notations. Les coordonnées d'un point x de $\mathbf{C}^{n+1}$ seront notées $(x^j)_{0 \leqq j \leqq n}$. Si $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$ est un multi-indice à composantes entières, on appelle longueur de β l'entier $|\beta| = \sum_0^n |\beta_i|$. L'opérateur de dérivation par rapport à la variable x^j $(0 \leqq j \leqq n)$ sera noté D_{x^j} et, si $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$ est un multi-indice de dérivation, nous poserons :

$$D_x^\beta = D_{x^0}^{\beta_0} \times \ldots \times D_{x^n}^{\beta_n}.$$

On peut écrire $a(x, D)$ sous la forme :

$$a(x, D) = \sum_{|\beta| \leqq 2} a_\beta(x) D_x^\beta$$

les fonctions a_β étant holomorphes sur un polydisque ouvert U de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$. Par définition le polynôme caractéristique de $a(x, D)$ a pour expression :

$$a_2(x, \xi) = \sum_{|\beta|=2} a_\beta(x) \xi^\beta.$$

Maintenant nous rappelons comment sont définies dans [4] les hypersurfaces caractéristiques $k^i = 0$, $1 \leqq i \leqq 2$. Nous supposerons que l'équation en ξ_0 :

$$a_2(0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0) = 0$$

admet deux racines distinctes notées λ_1 et λ_2. Nous noterons k^i, $1 \leqq i \leqq 2$ la solution du problème de Cauchy du premier ordre :

$$\begin{array}{c} a_2(x, \operatorname{grad} k^i(x)) = 0 \\ k^i(x) = x^1 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0 \\ \hline \operatorname{grad} k^i(0) = (\lambda_i, 1, 0, \ldots, 0) \end{array}.$$

Ces fonctions k^i sont définies et holomorphes au voisinage de l'origine; nous pouvons évidemment les supposer définies et holomorphes dans U. En outre, nous pouvons supposer que $S \setminus T$ ne rencontre pas dans U les deux hypersurfaces caractéristiques.

2. Réduction du problème (0.1) au théorème 2.7

Dans cette section, nous énonçons (après quelques préparatifs) le théorème 2.4 qui entraîne le théorème (0.1). Puis nous montrons que ce théorème 2.4 est une conséquence du théorème 2.7 qui, lui, sera prouvé à la fin de la section du paragraphe 5.

DÉFINITION 2.0. — *Soit* $\omega > 0$. *On désigne par* $\mathscr{R}_\omega$ *le revêtement universel du disque pointé* $\dot{D}_\omega$:

$$\mathscr{R}_\omega = \{ z \in \mathbf{C} / \mathscr{R}e\, z < \operatorname{Log} \omega \} \to \dot{D}_\omega$$
$$z \mapsto e^z.$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^{n+1}$, nous noterons $\mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega^2 \times \Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathscr{R}_\omega^2 \times \Omega$.

Le lemme suivant donne la structure des fonctions holomorphes ramifiées autour de la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques.

LEMME 2.1. — *Soit* U *un voisinage ouvert de* $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ *comme dans le paragraphe* 1. *Alors il existe* $\omega > 0$ *et un polydisque ouvert* $\Omega\,(\subset \mathrm{U})$ *de centre* $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ *tels que* $\forall\, x \in \Omega$, $|k^i(x)| < \omega$ $(1 \leqq i \leqq 2)$, *pour tout point m de* $(\Omega \cap \mathrm{S}) \setminus \mathrm{T}$, *pour tout germe holomorphe f en m se prolongeant le long des chemins tracés dans* U *et ne rencontrant pas les deux hypersurfaces caractéristiques, il existe* $(t_1, t_2, x) \mapsto g(t_1, t_2, x) \in \mathscr{H}(\mathscr{R}^2_\omega \times \Omega)$ *telle que le prolongement ramifié* $\tilde{f}$ *de f le long des chemins tracés dans* Ω *et ne rencontrant pas les hypersurfaces caractéristiques coïncide avec* $g(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x)$. *Réciproquement, toute fonction du type* $x \mapsto g(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x)$ (*avec les notations précédentes*) *définit une fonction holomorphe sur le revêtement universel de* Ω *privé de la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques.*

Preuve. — Désignons par χ l'application suivante :

$$x \xrightarrow{\chi} y = (y^0 = k^1(x),\ y^1 = k^2(x),\ y^2 = x^2,\ \ldots,\ y^n = x^n).$$

Nous poserons $y'' = (y^2, \ldots, y^n)$, $x'' = (x^2, \ldots, x^n)$. Les résultats du paragraphe 1 et le théorème d'inversion locale montrent qu'il existe un voisinage ouvert U_1 (inclus dans U) de l'origine tel que χ induit un difféomorphisme holomorphe de U_1 sur l'ouvert $\chi(\mathrm{U}_1)$, $(\ni 0)$. Soit $\omega > 0$ tel que $\mathrm{D}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega$ soit inclus dans $\chi(\mathrm{U}_1)$. Soit Ω un polydisque ouvert de centre l'origine inclus dans U_1 et dans $\chi^{-1}(\mathrm{D}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega)$. Considérons un point m de $(\mathrm{S} \cap \Omega) \setminus \mathrm{T}$ et f un germe holomorphe en m vérifiant les conditions de l'énoncé. Il est clair que $\chi^{-1}(\dot{\mathrm{D}}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega)$ est inclus dans U_1 privé de la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques, donc le germe holomorphe $f \circ \chi^{-1}$ au point $\chi(m)$ se prolonge le long des chemins tracés dans $\dot{\mathrm{D}}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega$, or le revêtement universel de $\dot{\mathrm{D}}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{R}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega & \Rightarrow & \dot{\mathrm{D}}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega \\ (t_1, t_2, y'') & \mapsto & (e^{t_1}, e^{t_2}, y'') \end{array}$$

donc il existe $g \in \mathscr{H}(\mathscr{R}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega)$ telle que le prolongement ramifié de $f \circ \chi^{-1}$ coïncide avec $g(\operatorname{Log} y^0, \operatorname{Log} y^1, y'')$. Comme χ envoie Ω privé de la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques dans $\dot{\mathrm{D}}^2_\omega \times \mathrm{D}^{n-1}_\omega$, on constate que le prolongement ramifié $\tilde{f}$ de f coïncide avec $g(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x'')$. On obtient aisément la fin du lemme.

DÉFINITION 2.2. — *Soit* $\omega > 0$ *et* $(t_1, t_2) \to u((t_1, t_2)) \in \mathscr{H}(\mathscr{R}^2_\omega)$. *On pose alors :*

$$\forall\,(t_1, t_2) \in \mathscr{R}^2_\omega\ \ \mathscr{D}_1^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_1} e^{\theta} u(\theta, t_2)\, d\theta,$$

$$\mathscr{D}_2^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma} u(t_1, \sigma)\, d\sigma$$

$\mathscr{D}_1^{-1} u$ et $\mathscr{D}_2^{-1} u$ définissent des fonctions holomorphes sur $\mathscr{R}^2_\omega$. On pose $\mathscr{D}_i = e^{-t_i} \partial_{t_i}$, $1 \leqq i \leqq 2$.

LEMME 2.3 (avec les notations précédentes). — $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} = \mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1}$ *et* $\forall\, i \in \{1, 2\}$, $\mathscr{D}_i \circ \mathscr{D}_i^{-1} = \mathrm{Id}$.

Preuve. — Soit $u \in \mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega^2)$. Fixons $t_2 \in \mathscr{R}_\omega$, la fonction

$$t_1 \mapsto (\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} u)(t_1, t_2) - (\mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1} u)(t_1, t_2) = v(t_1, t_2)$$

s'annule pour $t_1 = t_2$. On observe que

$$(e^{-t_1} \partial_{t_1}) \circ (\mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1}) u = -(\mathscr{D}_1^{-1} u)(t_1, t_1) + \mathscr{D}_2^{-1} \circ (\mathscr{D}_1 \circ \mathscr{D}_1^{-1}) u = \mathscr{D}_2^{-1} u.$$

Donc $\mathscr{D}_1 v$ est identiquement nul. Donc $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ commutent. Ceci prouve le lemme.

Pour essayer de démontrer le théorème (0.1), on prend des déterminations de $u_0(x')$, $u_1(x')$ en un point m (proche de l'origine de $S \setminus T$), le théorème de Cauchy assure l'existence d'une solution du problème (0.1) dans un petit voisinage de m; nous devons alors prouver qu'on peut prolonger ce germe u le long de tout chemin issu de m tracé dans un voisinage de l'origine et ne rencontrant pas $(k^1)^{-1}(0) \cup (k^2)^{-1}(0)$.

Le théorème 6.1 de l'appendice montre qu'il existe $\omega > 0$, un voisinage Ω de l'origine et $(t, x) \mapsto v(t, x) \in \mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega^2 \times \Omega)$ *bornée* (ainsi que ses dérivées partielles premières) tels que $k^i(\Omega) \subset D_\omega$, $(1 \leqq i \leqq 2)$ et $x \mapsto v(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x)$ est la solution du problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} a(x, D)\, v(\operatorname{Log} k^1(x), \operatorname{Log} k^2(x), x) = 0 \\ D_{x^0}^h v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)|_S = u_h(x'), \qquad 0 \leqq h \leqq 1. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Nous chercherons la solution du problème (0.1) sous la forme :

$$x \mapsto v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x) + (\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h)(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)$$

où $(t, x) \to h(t, x)$ est une certaine fonction holomorphe sur un ensemble du type $\mathscr{R}_{\omega_1}^2 \times \Omega_1$. Rappelons (*voir* § 1) que dans un voisinage de l'origine $k^1(0, x') = k^2(0, x') = x^1$. Nous prouverons le théorème suivant dans la section du paragraphe 5; ce théorème entraîne le théorème (0.1).

THÉORÈME 2.4. — *Il existe $\omega_1 > 0$ et un polydisque ouvert Ω_1 de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ tels que l'assertion suivante soit vérifiée. Soit $m \in (S \cap \Omega_1) \setminus T$; considérons des déterminations de $u_0(x')$ et $u_1(x')$ au point m, choisissons les déterminations des deux logarithmes* $\operatorname{Log} k^1$, $\operatorname{Log} k^2$ *(c'est-à-dire le point base de $\mathscr{R}_{\omega_1}^2$) de sorte que dans un petit voisinage dans S de m, on ait* $\operatorname{Log} k^1(0, x') = \operatorname{Log} k^2(0, x')$. *Alors il existe $(t, x) \mapsto v(t, x)$ et $(t, x) \mapsto h(t, x)$ appartenant à $\mathscr{H}(\mathscr{R}_{\omega_1}^2 \times \Omega_1)$ telles que $\forall x \in \Omega_1$, $|k^i(x)| < \omega_1$ $(1 \leqq i \leqq 2)$, $x \to v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)$ est la solution du problème linéaire associé* (2.1) *et :*

$$(a(x, D) - f(x, D))[v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x) + (\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h)(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)] \equiv 0.$$

En outre, on peut supposer que les dérivées en x d'ordre $\leqq 1$ de $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h$, $\mathscr{D}_i^{-1} h$ $(1 \leqq i \leqq 2)$, $v(t, x)$ (et de $\mathscr{D}_i v(t, x)$, $1 \leqq i \leqq 2$, si les $\partial^\alpha u_0$ $|\alpha| \leqq 1$ sont bornées) sont bornées sur $\mathscr{R}_{\omega_1}^2 \times \Omega_1$.

Note : On verra dans la preuve que $(t, x) \mapsto v(t, x)$ est en fait défini sur un ensemble du type $\mathscr{R}_\omega^2 \times \Omega$ qui est *plus gros* que $\mathscr{R}_{\omega_1}^2 \times \Omega_1$.

Preuve du théorème 0.1 *à partir du théorème* 2.4. — Reprenons les notations du théorème 2.4. Le lemme 2.3 affirme que $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} = \mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1}$ et permet de voir que :

$$\begin{aligned} & D_{x^0}[x \mapsto (\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h)(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)] \\ & \qquad = ((D_{x^0} k^1) \mathscr{D}_2^{-1} h + (D_{x^0} k^2) \mathscr{D}_1^{-1} h + \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} \circ D_{x^0} h)(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x). \end{aligned}$$

On observe que les opérateurs d'intégrations $\mathscr{D}_i^{-1}$, $1 \leqq i \leqq 2$ s'annulent identiquement sur la diagonale (t_1, t_1) ou (t_2, t_2). Rappelons que $x \mapsto v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)$ est la solution du problème linéaire noté (2.1). Par conséquent, le choix des déterminations de $\operatorname{Log} k^1$ et $\operatorname{Log} k^2$ montre que les deux premières traces suivant un petit voisinage dans S de m de la détermination « initiale » (*i.e.* avant tout prolongement) de $x \mapsto (v + \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h)(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)$ sont respectivement égales aux déterminations « initiales » de $u_0(x')$ et $u_1(x')$. Par conséquent, $x \mapsto (v + \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h)(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)$ définit une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $\Omega_1 \setminus ((k^1)^{-1}(0) \cup (k^2)^{-1}(0))$ qui est solution du problème (0.1).

Nous devons donc établir l'existence d'une fonction h vérifiant les conditions du théorème 2.4. Nous aurons besoin du lemme préliminaire suivant. Rappelons que les coefficients de $a(x, D)$ sont holomorphes sur U (*cf.* § 1).

LEMME 2.5. — *Il existe des fonctions holomorphes sur* U, $C_{\lambda, \gamma, \beta}(x)$, $\lambda, \gamma \in \{0, 1\}$, $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$ *telles que pour toute fonction* $(t, x) \mapsto \omega(t, x)$ *holomorphe sur un ouvert du type* $\mathscr{R}_\omega^2 \times \Omega$, *on ait*

$$(2.2) \quad a(x, D)(x \mapsto w(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)) = \sum_{\substack{\lambda+\gamma+|\beta| \leqq 2 \\ \lambda \neq 2 \\ \mu \neq 2}} C_{\lambda, \gamma, \beta}(x) (\mathscr{D}_1^\lambda \mathscr{D}_2^\gamma D_x^\beta w(t_1, t_2, x))\big|_{t_i = \operatorname{Log} k^i(x),\ 1 \leqq i \leqq 2}.$$

En outre, le coefficient $C_{1, 1, 0}(x)$ de $\mathscr{D}_1 \circ \mathscr{D}_2$ ne s'annule pas à l'origine.

Preuve. — Comme les hypersurfaces $k^i = 0$ sont caractéristiques pour l'opérateur $a(x, D)$, on obtient aisément la formule (2.2). Prouvons alors que le coefficient dans (2.2) de $\mathscr{D}_1 \circ \mathscr{D}_2$ ne s'annule pas à l'origine. Rappelons que $k^1(0, x') = k^2(0, x') = x^1$; par conséquent pour $1 \leqq i \leqq 2$ et $2 \leqq j \leqq n$ on a

$$D_{x^j} k^i(0) = 0, \qquad D_{x^1} k^i(0) = 1, \qquad D_{x^0} k^i(0) = \lambda_i$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$. Comme l'hyperplan $S : x^0 = 0$ est non caractéristique, il existe $(b, c, d) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ tels que :

$$a_2(0; \xi_0, \xi_1, 0, \ldots, 0) = b \xi_0^2 + c \xi_0 \xi_1 + d \xi_1^2.$$

La valeur en 0 du coefficient de $\mathscr{D}_1 \circ \mathscr{D}_2$ dans (2.2) est donc égale à :

$$(2.3) \qquad 2 b \lambda_1 \lambda_2 + c(\lambda_1 + \lambda_2) + 2 d.$$

Rappelons que λ_1 et λ_2 sont les deux racines *distinctes* du trinôme $a_2(0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0)$; (2.3) est égal à $4d-(c^2/b)$, donc n'est pas nul. Ceci prouve le lemme.

Pour clarifier la géométrie des ouverts utilisés, il est commode d'adopter dès maintenant la convention suivante qui sera valable pour les sections 2, 3, 4 et 5 de cet article.

Convention 2.6. — D'après le théorème 6.1 de l'appendice, il existe $M>0$, $\omega>0$ et un voisinage ouvert Ω de l'origine tels que $\forall x \in \Omega$, $|k^i(x)|<\omega$ $(1 \leqq i \leqq 2)$, pour tout point m de $(S \cap \Omega) \setminus T$; pour un choix quelconque des déterminations de $u_0(x')$, $u_1(x')$ au point m, on peut trouver $(t, x) \to u^i(t, x) \in \mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega \times \Omega)$ $(1 \leqq i \leqq 2)$ telles que $u^i(t, x)$ et $e^{-t}\partial_t u^i(t, x)$ $(1 \leqq i \leqq 2)$ sont bornées par M (ainsi que leurs dérivées premières en x) sur $\mathscr{R}_\omega \times \Omega$ et $x \mapsto u^1(\operatorname{Log} k^1(x), x)+u^2(\operatorname{Log} k^2(x), x)$ définit la solution du problème linéaire (2.1), le choix des déterminations des deux logarithmes $\operatorname{Log} k^1$, $\operatorname{Log} k^2$ étant effectué comme dans l'énoncé du théorème 2.4. Dans les sections 2, 3, 4 et 5, nous travaillons avec de tels M, ω, Ω et nous poserons $v(t_1, t_2, x)=u^1(t_1, x)+u^2(t_2, x)$. En outre nous supposerons que les coefficients des opérateurs du problème (0.1) et la fonction $x \mapsto 1/C_{1,1,0}(x)$ (*voir* lemme 2.5) sont holomorphes et bornés sur Ω.

Reprenons les notations du problème (0.1), rappelons que $(x, u_\alpha) \mapsto f(x, u_\alpha)$ est holomorphe en x et polynomiale en les variables u_α, $(|\alpha| \leqq 1)$. Reprenons la solution $x \mapsto v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)$ du problème linéaire (2.1) (voir convention 2.6). Comme $a(x, D)(v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)) \equiv 0$, les lemmes 2.3 et 2.5 permettent d'écrire l'identité suivante :

$$
\begin{aligned}
(2.4)\quad & (a(x, D)-f(x, D_x^\alpha))(v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)+\mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1} h(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)) \\
&= \sum C_{\lambda,\mu,\beta}(x)\mathscr{D}_1^\lambda\circ\mathscr{D}_2^\mu\circ\mathscr{D}_2^{-1}\circ\mathscr{D}_1^{-1}\circ D_x^\beta h(t_1, t_2, x)\big|_{t_i=\operatorname{Log} k^i(x)\ (1 \leqq i \leqq 2)} \\
&\quad + F(x, v(t, x), \mathscr{D}_1 v(t, x), \mathscr{D}_2 v(t, x), D_{x^l} v(t, x), \mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1} h(t, x), \\
&\quad \mathscr{D}_1^{-1} h(t, x), \mathscr{D}_2^{-1} h(t, x), \mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1}\circ D_{x^j} h(t, x))\big|_{t_i=\operatorname{Log} k^i(x)\ (1 \leqq i \leqq 2)\ 0 \leqq l,\, j \leqq n}
\end{aligned}
$$

où $F(x, Z)$ est holomorphe en x et polynomiale en les variables $Z \in \mathbf{C}^{2n+8}$.

Nous montrerons qu'il existe une fonction $h(t_1, t_2, x)$ holomorphe sur un ouvert du type $\mathscr{R}_{\omega_1}^2 \times \Omega_1$ telle que le membre de droite de l'identité (2.4) soit nul pour tout $(t_1, t_2, x) \in \mathscr{R}_{\omega_1}^2 \times \Omega_1$ *a fortiori* pour $t_1=\operatorname{Log} k^1(x)$, $t_2=\operatorname{Log} k^2(x)$). Le choix des déterminations des logarithmes $\operatorname{Log} k^1$, $\operatorname{Log} k^2$ effectué dans le théorème 2.4 montre alors que

$$
x \mapsto v(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)+(\mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1} h)(\operatorname{Log} k^1, \operatorname{Log} k^2, x)
$$

vérifie les conditions du théorème 2.4 et définit donc la solution du problème (0.1). Le lemme 2.5 et la convention 2.6 montrent qu'il existe des fonctions $b_\beta(x)$, $|\beta| \leqq 2$, $c_{\beta,i}(x)$, $i \in \{1, 2\}$, $|\beta| \leqq 1$ telles que le fait que le membre de droite de l'identité (2.4) soit nul pour tout (t_1, t_2, x) est équivalent à ce que pour tout (t_1, t_2, x) :

$$(2.5)\quad h(t, x)=\sum_{|\beta|\leqq 2} b_\beta(x)\mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1}\mathrm{D}_x^\beta h(t, x)$$

$$+\sum_{\substack{|\beta|\leqq 1\\ i\in\{1, 2\}}} c_{\beta, i}(x)\mathscr{D}_i^{-1}\mathrm{D}_x^\beta h(t, x)+w(t, x)+\sum_{(k, \mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n, m, s)\in\mathrm{I}} f_{k\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_n ms}(t, x)$$

$$(\mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1}h(t, x))^k\prod_{j=0}^{n}(\mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1}\mathrm{D}_{x^j}h(t, x))^{\mathrm{P}_j}\times(\mathscr{D}_1^{-1}h)^m(\mathscr{D}_2^{-1}h)^s$$

où I désigne une partie finie de $\mathbf{N}^{n+4}$ et où $k+\sum_0^n \mathrm{P}_j+m+s\geqq 1$. Les fonctions $w(t, x), f_{k\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_n ms}$ sont des combinaisons linéaires de produits (finis) de dérivées d'ordre $\leqq 1$ de $v(t, x)$, et de certaines fonctions holomorphes de x obtenues en divisant certains coefficients du polynôme de l'expression (2.4) par $-\mathrm{C}_{1, 1, 0}(x)$.

La convention 2.6 montre que les fonctions $w(t, x), f_{k\mathrm{P}_0\ldots\mathrm{P}_n ms}(t, x)$ sont holomorphes et bornées sur $\mathscr{R}_\omega^2\times\Omega$ par une constante ne dépendant que de M et des opérateurs $a(x, \mathrm{D})$, $f(x, \mathrm{D})$ du problème (0.1). Reprenons les notations du problème (0.1), si $f(x, \mathrm{D}^\alpha u)$ ne dépend pas des dérivées partielles de u; alors le théorème 6.1 de l'appendice montre qu'il est inutile de supposer que les dérivées partielles premières de $u_0(x')$ sont bornées.

THÉORÈME 2.7. — *Reprenons les notations de la convention* (2.6). *Il existe* $\omega_1\in]0, \omega[$ *et un polydisque ouvert* Ω_1 $(\subset\Omega)$ *de centre* $0\in\mathbf{C}^{n+1}$ *ne dépendant que de* M, $\omega>0$, Ω *et des opérateurs du problème* (0.1) *tels que pour chaque* $v(t, x)$ *on peut trouver une fonction* $(t, x)\mapsto h(t, x)$ *holomorphe sur* $\mathscr{R}_{\omega_1}^2\times\Omega_1$ *vérifiant l'égalité* (2.5). *En outre,* $\forall x\in\Omega_1$, $|k^i(x)|<\omega_1$, $1\leqq i\leqq 2$, *et on peut supposer que les dérivées en* x *d'ordre* $\leqq 1$ *de* $\mathscr{D}_1^{-1}\circ\mathscr{D}_2^{-1}h$, $\mathscr{D}_i^{-1}h$ $(1\leqq i\leqq 2)$ *sont bornées sur* $\mathscr{R}_{\omega_1}^2\times\Omega_1$.

Preuve du théorème 2.4 *à partir du théorème* 2.7. — Considérons le couple (ω_1, Ω_1) fourni par le théorème 2.7. Reprenons le problème linéaire (2.1) considéré dans le théorème 2.4 : il existe $(t, x)\mapsto v(t, x)\in\mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega^2\times\Omega)$ satisfaisant les conditions de la convention 2.6 et permettant de définir la solution de ce problème linéaire (2.1). Le théorème 2.7 fournit une fonction h holomorphe sur $\mathscr{R}_{\omega_1}^2\times\Omega_1$ vérifiant l'égalité (2.5). Ce qui a été écrit à propos des égalités (2.4) et (2.5) montre alors que le théorème 2.4 est prouvé.

Nous prouverons le théorème 2.7 dans la section du paragraphe 5 en appliquant le théorème du point fixe à des opérateurs et à des espaces complets bien choisis. Dans la section suivante, nous définissons et étudions les espaces complets en question.

3. Fonctions majorantes et espaces de Banach

DÉFINITION 3.0. — *Soit* $\omega>0$. *Soient* t_1, t_2 *deux points de* $\mathscr{R}_\omega$. *Considérons* $\gamma:[0, \mathrm{S}]\to\mathscr{R}_\omega$ *un chemin de classe* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux tracés dans* $\mathscr{R}_\omega$ *tel que* $\gamma(0)=t_1$,

$\gamma(S)=t_2$. *On pose alors* $L(\gamma, t_1, t_2)=\int_0^S |e^{\gamma(s)}|\,|\gamma'(s)|\,ds$. *Observons qu'on peut se ramener au cas où* $S=1$.

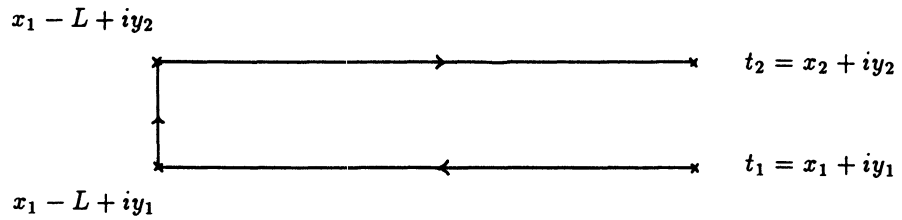
LEMME 3.1. — *Soient* $\omega>0$ *et deux points* t_1, t_2 *de* $\mathcal{R}_\omega$. *Alors il existe un chemin* γ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux tracés dans* $\mathcal{R}_\omega$ *joignant* t_1 *à* t_2 *et tel que*

$$L(\gamma, t_1, t_2) \leqq 3\max(|e^{t_1}|, |e^{t_2}|).$$

Preuve. — Posons $t_1=x_1+iy_1$ et $t_2=x_2+iy_2$ (les x_i, y_i sont réels). Comme t_1 et t_2 jouent des rôles symétriques, on peut se ramener au cas où $y_2 \geqq y_1$. Considérons un réel $L>0$ vérifiant

$$L>|x_2|+|x_1| \qquad \text{et} \qquad e^{x_1-L}|y_2-y_1| \leqq \max(e^{x_1}, e^{x_2}).$$

Nous allons définir un chemin γ paramétré par $s\in[0, y_2-y_1+x_2-x_1+2L]$ comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Pour $0\leqq s\leqq L$, on pose $\gamma(s)=x_1-s+iy_1$.

Pour $L\leqq s\leqq L+y_2-y_1$, on pose $\gamma(s)=x_1-L+i(y_1+s-L)$.

Pour $A=L+y_2-y_1\leqq s\leqq L+y_2-y_1+x_2-x_1+L=B$, on pose

$$\gamma(s)=x_1-L+s-L-y_2+y_1+iy_2.$$

(On observe que $x_1-L<x_2$.) On vérifie aisément les trois calculs suivants

$$\int_0^L |e^{\gamma(s)}\gamma'(s)|\,ds=e^{x_1}(1-e^{-L})$$

$$\int_L^{L+y_2-y_1} |e^{\gamma(s)}\gamma'(s)|\,ds=e^{x_1-L}|y_2-y_1|$$

$$\int_A^B |e^{\gamma(s)}\gamma'(s)|\,ds=e^{x_1-L}\int_0^{x_2-x_1+L} e^s\,ds=e^{x_2}-e^{x_1-L}.$$

On obtient alors immédiatement le lemme 3.1.

DÉFINITION 3.2. — *Soient* $p\in\mathbf{N}$ *et* $\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^p} u_\alpha x^\alpha=u$ *et* $\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^p} v_\alpha x^\alpha=v$ *deux séries formelles à coefficients complexes. Nous écrivons* $u\ll v$ *pour exprimer* $\forall\,\alpha\in\mathbf{N}^p$, $|u_\alpha|\leqq v_\alpha$.

Maintenant nous rappelons les définitions et propriétés de certaines fonctions majorantes. On sait (*voir* [5]) qu'il existe $C > 0$ tel que la fonction définie par :

$$\varphi(z) = C \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{(p+1)^2}$$

vérifie $\varphi^2 \ll \varphi$. Pour $R > 0$, posons

$$\theta_R(x) = \prod_{j=0}^{n} \varphi\left(\frac{x^j}{R}\right).$$

On a alors $\theta_R^2 \ll \theta_R$. Pour $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$, nous poserons

$$\frac{1}{1-(x/R)} = \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{1-(x^j/R)}.$$

Avec cette convention, on peut alors écrire, pour $R' > R$ et $0 \leqq j \leqq n$:

$$(3.1) \qquad D_{x^j} \theta_R \ll \frac{1}{R} \frac{\theta_R}{1-(x/R)}, \quad \frac{1}{1-(x/R')} \ll C(R, R')\, \theta_R$$

où la constante $\geqq 0$, $C(R, R')$ ne dépend que de R/R'.

En utilisant les inégalités précédentes et les inégalités de Cauchy, on obtient immédiatement le

LEMME 3.3. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe et bornée par* K *sur le polydisque centré en* 0 *de rayon* $R' > R$. *Alors on a :*

$$f(x) \ll KC(R, R')\, \theta_R(x).$$

DÉFINITION 3.4. — *Pour $j \in \mathbf{N}$, on pose*

$$\Phi_j^R(x) = \frac{R^{-j} j!\, \theta_R(x)}{(1-(x/R))^j}.$$

Les propriétés numérotées (3.1) permettent alors d'obtenir immédiatement le lemme suivant :

LEMME 3.5. — *Soient $j \in \mathbf{N}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et $R > 0$; alors on a :*

$$D_{x^i} \Phi_j^R(x) \ll \Phi_{j+1}^R(x).$$

Nous désignons par $\Delta(0, R)$ le polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et de rayon $R > 0$. Pour définir les algèbres de Banach adaptées à la démonstration du théorème 2.7, il paraît commode d'introduire les espaces suivants.

DÉFINITION 3.6. — *Soient $j \in \mathbf{N}$, $R > 0$ et $\omega > 0$. On désigne alors par $A(j, R, \omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes $u(t, x)$ sur $\mathscr{R}_\omega^2 \times \Delta(0, R)$ telles que $\exists C > 0$, pour tout*

$t=(t_1, t_2)\in\mathscr{R}_\omega^2$, *pour tout chemin* γ *de classe* C^1 *par morceaux tracé dans* $\mathscr{R}_\omega$ *joignant* t_1 *à* t_2, *on a* (*avec les notations de la définition* 3.0)

$$u(t, x) \ll C\frac{L^j(\gamma, t)}{j!}\Phi_j^R(x). \tag{3.2}$$

Note. — 1. Dans la définition précédente, on peut remplacer $L(\gamma, t_1, t_2)$ par $L(\tilde{\gamma}, t_2, t_1)$ où $\tilde{\gamma}$ est n'importe quel chemin tracé dans $\mathscr{R}_\omega$ de classe C^1 par morceaux joignant t_2 à t_1.

2. Pour tout $j \geqq 1$ et $t_1\in\mathscr{R}_\omega$, les fonctions $x\mapsto u(t_1, t_1, x)$ sont identiquement nulles.

Nous nous contenterons d'esquisser la preuve du lemme suivant :

LEMME 3.7. — *En désignant par* $\|u\|_{A(j, R, \omega)}$ *la plus petite constante* $\geqq 0\,C$ *vérifiant l'inégalité* (3.2), *on définit une norme sur* $A(j, R, \omega)$ *et* $A(j, R, \omega)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. — Posons $\Phi_j^R = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{n+1}} a_\alpha x^\alpha$ et considérons une suite de Cauchy $(u^p(t, x))_{p\in\mathbf{N}}$ de $A(j, R, \omega)$. Écrivons $u^p(t, x)=\sum_\alpha u_\alpha^p(t)\,x^\alpha$. Fixons $\alpha\in\mathbf{N}^{n+1}$, $t=(t_1, t_2)\in\mathscr{R}_\omega^2$ et γ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux tracés dans $\mathscr{R}_\omega$ joignant t_1 à t_2. On a alors

$$\forall p, q\in\mathbf{N},\quad |u_\alpha^p(t)-u_\alpha^q(t)| \leqq \frac{L^j(\gamma, t_1, t_2)}{j!}\|u^p-u^q\|_{A(j, R, \omega)}\,a_\alpha.$$

La suite $(u_\alpha^p(t))$ est donc convergente; on note $u_\alpha(t)$ sa limite $\in\mathbb{C}$. Il est clair que pour tout t de $\mathscr{R}_\omega^2$, $x\mapsto\sum_\alpha u_\alpha(t)\,x^\alpha=u(t, x)$ définit une fonction holomorphe sur $\Delta(0, R)$. Par ailleurs, on vérifie aisément que la suite $(u^p(t, x))_{p\in\mathbf{N}}$ est bornée sur les compacts de $\mathscr{R}_\omega^2\times\Delta(0, R)$ et converge simplement sur $\mathscr{R}_\omega^2\times\Delta(0, R)$ vers $u(t, x)$. On termine alors facilement la démonstration du lemme.

Nous allons définir les algèbres de Banach qui nous permettront de prouver le théorème 2.7.

DÉFINITION 3.8. — *Soient* $R > 0$, $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$. *On désigne par* $B(R, \omega, \varepsilon)$ *l'ensemble des séries formelles de la forme* $U=\sum_{j\geqq 0} u_j(t, x)\,X^j$ *telles que pour chaque* $j\geqq 0$, $u_j\in A(j, R, \omega)$ (voir *déf.* 3.6) *et*

$$\|U\|_{R, \varepsilon}=\sum_{j\geqq 0}\varepsilon^j\,\|u_j\|_{A(j, R, \omega)} < +\infty.$$

Remarque 3.9. — En utilisant le lemme 3.7, on vérifie aisément que $(B(R, \omega, \varepsilon), \|\ \|_{R, \varepsilon})$ est un espace de Banach.

LEMME 3.10. — *Reprenons les notations de la définition* 3.8. *Soit*

$$U(t_1, t_2, x)=\sum_{j\geqq 0} u_j(t_1, t_2, x)\,X^j\in B(R, \omega, \varepsilon).$$

Alors pour tout couple (ω_1, R_1) *vérifiant*

$$0 < \omega_1 \leqq \min\left(\omega, \frac{R\varepsilon}{62^{n+1}}\right)$$

$$0 < R_1 \leqq \left(\frac{R}{2}\right)$$

la série de fonctions holomorphes $\sum_{j \geqq 0} u_j(t, x)$ *converge normalement sur les compacts de* $\mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Delta(0, R_1)$ et la somme est bornée sur $\mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Delta(0, R_1)$.

Preuve. — Considérons un couple (ω_1, R_1) vérifiant les deux inégalités du lemme. Soit $t = (t_1, t_2) \in \mathscr{R}^2_{\omega_1}$. Le lemme 3.1 montre qu'il existe un chemin γ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux tracé dans $\mathscr{R}_{\omega_1}$ joignant t_1 à t_2 et tel que $L(\gamma, t_1, t_2) \leqq 3\omega_1$.

Considérons $U(t, x) = \sum u_j(t, x) X^j \in B(R, \omega, \varepsilon)$. Les définitions 3.4 et 3.8 montrent alors que, pour tout $j \geqq 0$ et tout $t = (t_1, t_2) \in \mathscr{R}^2_{\omega_1}$, on a

$$|u_j(t, x)| \leqq \varepsilon^{-j} \| U \|_{R, \varepsilon} \frac{(3\omega_1)^j}{j!} \frac{R^{-j} j!}{\prod_{i=0}^{n} (1 - |x^i|/R)^j} |\theta_R(x)|$$

si $(t, x) \in \mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Delta(0, R_1) \subset \mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Delta(0, R/2)$, alors on a

$$|u_j(t, x)| \leqq \| U \|_{R, \varepsilon} \left(\frac{3\omega_1 2^{n+1}}{\varepsilon R}\right)^j |\theta_R(x)|.$$

On obtient alors immédiatement le lemme.

4. Opérations sur les espaces $B(R, \omega, \varepsilon)$

LEMME 4.1. — *Soient* $k \in \mathbf{N}^*$ *et* $U^i = \sum_{j \geqq 0} u^i_j(t, x) X^j \in B(R, \omega, \varepsilon)$, $1 \leqq i \leqq k$. *Soient* $C > 0$ *et* $(t, x) \mapsto f(t, x)$ *une fonction holomorphe sur* $\mathscr{R}^2_\omega \times \Delta(0, R)$ *telle que* $\forall t \in \mathscr{R}^2_\omega$, $f(t, x) \ll C\theta_R(x)$. *Alors* $U = f(t, x) U^1 \times U^2 \times \ldots \times U^k \in B(R, \omega, \varepsilon)$ *et :*

$$\| U \|_{R, \varepsilon} \leqq C \prod_{i=1}^{k} \| U^i \|_{R, \varepsilon}.$$

Si $f(t, x)$ est la fonction constante égale à 1, alors on a :

$$\| U \|_{R, \varepsilon} \leqq \prod_{i=1}^{k} \| U^i \|_{R, \varepsilon}.$$

Preuve. — Le cas $k=1$ est trivial. Nous traiterons le cas $k=2$, le cas général s'en déduisant par récurrence. On a donc

$$f(t, x)\,\mathrm{U}=\sum_{j \geqq 0}\ \sum_{j_1+j_2=j} f(t, x)\,(u_{j_1}^1 \times u_{j_2}^2)(t, x)\,\mathrm{X}^j$$

où, en posant $\mathrm{C}_j^i=\| u_j^i \|_{\mathrm{A}(j, \mathrm{R}, \omega)}$ (*voir* déf. 3.8), on peut écrire :

$$u_{j_1}^1(t, x) \ll \mathrm{C}_{j_1}^1 \frac{\mathrm{L}^{j_1}(\gamma, t)}{j_1!} \Phi_{j_1}^{\mathrm{R}}(x)$$

$$u_{j_2}^2(t, x) \ll \mathrm{C}_{j_2}^2 \frac{\mathrm{L}^{j_2}(\gamma, t)}{j_2!} \Phi_{j_2}^{\mathrm{R}}(x);$$

comme $\theta_{\mathrm{R}}^2 \ll \theta_{\mathrm{R}}$, on observe que :

$$\frac{\Phi_{j_1}^{\mathrm{R}}}{j_1!} \times \frac{\Phi_{j_2}^{\mathrm{R}}}{j_2!} \ll \frac{\Phi_{j_1+j_2}^{\mathrm{R}}}{(j_1+j_2)!}.$$

En utilisant une nouvelle fois l'inégalité $\theta_{\mathrm{R}}^2 \ll \theta_{\mathrm{R}}$, on en déduit que :

$$\sum_{j_1+j_2=j} f(t, x)\,(u_{j_1}^1 \times u_{j_2}^2)(t, x) \ll \mathrm{C} \frac{\mathrm{L}^j(\gamma, t_1, t_2)}{j!} \Big(\sum_{j_1+j_2=j} \mathrm{C}_{j_1}^1 \mathrm{C}_{j_2}^2\Big) \Phi_j^{\mathrm{R}}(x).$$

On obtient alors facilement le lemme.

LEMME 4.2. — *Supposons* $0<\mathrm{R}<1$. *Soit* $\mathrm{U}=\sum_{j \geqq 0} u_j(t, x)\,\mathrm{X}^j \in \mathrm{B}(\mathrm{R}, \omega, \varepsilon)$. *Pour* $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$, $|\beta| \leqq 2$, *on pose : (avec les notations de la déf.* 2.2)

$$\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} \mathrm{D}_x^\beta \mathrm{U}=\sum_{j \geqq 2} \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} \mathrm{D}_x^\beta u_{j-2}(t, x)\,\mathrm{X}^j.$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, $\delta \in \mathbf{N}^{n+1}$, $|\delta| \leqq 1$, *on pose :*

$$\mathscr{D}_i^{-1} \circ \mathrm{D}_x^\delta \mathrm{U}=\sum_{j \geqq 1} \mathscr{D}_i^{-1} \circ \mathrm{D}_x^\delta u_{j-1}(t, x)\,\mathrm{X}^j.$$

Alors $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} \mathrm{D}_x^\beta \mathrm{U}$ et $\mathscr{D}_i^{-1} \circ \mathrm{D}_x^\delta \mathrm{U}$ *appartiennent à* $\mathrm{B}(\mathrm{R}, \omega, \varepsilon)$ *et on a*

$$\| \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} \mathrm{D}_x^\beta \mathrm{U} \|_{\mathrm{R}, \varepsilon} \leqq \varepsilon^2 \| \mathrm{U} \|_{\mathrm{R}, \varepsilon}$$

$$\| \mathscr{D}_i^{-1} \circ \mathrm{D}_x^\delta \mathrm{U} \|_{\mathrm{R}, \varepsilon} \leqq \varepsilon \| \mathrm{U} \|_{\mathrm{R}, \varepsilon}.$$

Preuve. — Traitons le cas de $\mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathrm{D}_x^\delta \mathrm{U}$. Soit $t=(t_1, t_2) \in \mathscr{R}_\omega^2$. Soit γ un chemin de classe C^1 par morceaux $\gamma : [0, 1] \to \mathscr{R}_\omega$ tel que $\gamma(0)=t_1$ et $\gamma(1)=t_2$. Soit $j \in \mathbf{N}$; comme $0<\mathrm{R}<1$, on a $\Phi_{j+|\delta|}^{\mathrm{R}} \ll \Phi_{j+1}^{\mathrm{R}}$ et donc :

$$\mathrm{D}_x^\delta u_j(t, x) \ll \mathrm{C}_j \frac{\mathrm{L}^j(\gamma, t_1, t_2)}{j!} \Phi_{j+1}^{\mathrm{R}}(x) \tag{4.1}$$

où $C_j = \| u_j \|_{A(j, R, \omega)}$. La formule intégrale de Cauchy permet d'écrire :

$$(\mathscr{D}_2^{-1} D_x^\delta u_j)(t_1, t_2, x) = \int_0^1 e^{\gamma(s)} \gamma'(s) D_x^\delta u_j(t_1, \gamma(s), x)\, ds.$$

Posons $L(s) = \int_0^s | e^{\gamma(\theta)} \gamma'(\theta) |\, d\theta$, $0 \leqq s \leqq 1$. La restriction de γ au segment $[0, s]$ définit évidemment un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant t_1 à $\gamma(s)$. L'inégalité (4.1) et la définition de $B(R, \omega, \varepsilon)$ permettent alors d'écrire :

$$(\mathscr{D}_2^{-1} D_x^\delta u_j)(t, x) \ll \int_0^1 | e^{\gamma(s)} \gamma'(s) | \frac{L^j(s)}{j!} C_j\, ds\, \Phi_{j+1}^R(x) = C_j \frac{L^{j+1}(\gamma, t_1, t_2)}{(j+1)!} \Phi_{j+1}^R(x).$$

On constate alors que $\mathscr{D}_2^{-1} D_x^\delta U \in B(R, \omega, \varepsilon)$ et que :

$$\| \mathscr{D}_2^{-1} D_x^\delta U \|_{R, \varepsilon} \leqq \sum_{j \geqq 0} C_j \varepsilon^{j+1} = \varepsilon \| U \|_{R, \varepsilon}.$$

Pour étudier $\mathscr{D}_1^{-1} \circ D_x^\delta$, on travaille avec des chemins $\tilde{\gamma}$ tels que $\tilde{\gamma}(0) = t_2$ et $\tilde{\gamma}(1) = t_1$ (*cf.* note de la déf. 3.6). L'étude de $\mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1} \circ D_x^\beta$ est alors immédiate.

5. Preuve du théorème 2.7

Reprenons les notations utilisées dans la convention (2.6) et l'égalité (2.5). Ce qui a été dit avant l'énoncé du théorème 2.7 et le lemme 3.3 montrent qu'il existe $C > 0$, $R \in]0, 1[$ ne dépendant que de M, Ω et des opérateurs $a(x, D)$, $f(x, D)$ du problème (0.1) tels que pour tout t de $\mathscr{R}_\omega^2$ chacune des fonctions de x suivantes, $b_\beta(x)$, $C_{\beta, i}(x)$, $w(t, x)$, $f_{k\, P_0 \ldots P_n\, ms}(t, x)$ est majorée — au sens $\ll$ — par $C\, \theta_R(x)$. Dans cette section, nous fixons de tels C, ω, R. Rappelons que si $f(x, D_x^\alpha u)$ [*voir* problème (0.1)] ne dépend pas des dérivées partielles de u, alors il est inutile de supposer que les dérivées partielles premières de $u_0(x')$ sont bornées.

Nous allons travailler dans le sous-espace affine *fermé* (donc complet) $E(R, \omega, \varepsilon)$ de $B(R, \omega, \varepsilon)$ constitué des $\sum_{j \geqq 0} u_j(t_1, t_2, x) X^j$ tels que $u_0(t, x) = w(t, x)$. On conserve les notations de l'égalité (2.5) et du paragraphe 4.

Si $U = \sum_{j \geqq 0} u_j(t, x) X^j \in E(R, \omega, \varepsilon)$, on pose

$$(5.1)\quad T_1(U) = \sum_{|\beta| \leqq 2} b_\beta(x) \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} D_x^\beta U + \sum_{\substack{|\beta| \leqq 1 \\ i \in \{1, 2\}}} C_{\beta, i}(x) \mathscr{D}_i^{-1} \circ D_x^\beta U$$
$$+ w(t, x) X^0 + \sum_{(k, P_0, \ldots, P_n, m, s) \in I} f_{k, P_0, \ldots, P_n, m, s}(t, x) (\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} U)^k$$
$$\times \prod_{i=0}^{n} (\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} D_{x^i} U)^{P_i} \times (\mathscr{D}_1^{-1} U)^m (\mathscr{D}_2^{-1} U)^s.$$

Comme $k+\sum_{0}^{n} P_i+m+s \geqq 1$, les lemmes 4.1 et 4.2 permettent d'obtenir immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1. — *Il existe un polynôme* $P(Y) \in \mathbf{R}[Y]$ *à coefficients* $\geqq 0$ *tel que* $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, T_1 *envoie* $E(R, \omega, \varepsilon)$ *dans lui-même et :*

$$\forall U \in E(R, \omega, \varepsilon), \quad \| T_1(U) - w(t, x) X^0 \|_{R, \varepsilon} \leqq \varepsilon P(\| U \|_{R, \varepsilon}).$$

$P(Y)$ *ne dépend que de* C *et des opérateurs* $a(x, D)$, $f(x, D)$ *du problème* (0.1).

En utilisant la formule suivante :

$$X_1 X_2 \ldots X_N - Y_1 Y_2 \ldots Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_1 \ldots X_{i-1} (X_i - Y_i) Y_{i+1} \ldots Y_N$$

et en utilisant les lemmes 4.1 et 4.2, on obtient immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 5.2. — *Il existe un polynôme* $Q(Y) \in \mathbf{R}[Y]$ *à coefficients* $\geqq 0$ *tel que* $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, T_1 *envoie* $E(R, \omega, \varepsilon)$ *dans lui-même et* $\forall U, V \in E(R, \omega, \varepsilon)$, *on a*

$$\| T_1(U) - T_1(V) \|_{R, \varepsilon} \leqq \varepsilon \| U - V \|_{R, \varepsilon} Q(\| U \|_{R, \varepsilon} + \| V \|_{R, \varepsilon})$$

$Q(Y)$ *ne dépend que de* C *et des opérateurs* $a(x, D)$, $f(x, D)$ *du problème* (0.1).

Soit $U \in E(R, \omega, \varepsilon)$; comme $w(t, x) \ll C\theta_R(x)$, on observe que

$$\| U \|_{R, \varepsilon} \leqq C + \| U - w(t, x) X^0 \|_{R, \varepsilon}.$$

Les propositions 5.1 et 5.2 permettent alors d'obtenir immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.3. — *Il existe* $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ *tel que* $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, T_1 *envoie la boule unité fermée* B *de centre* $w(t, x) X^0$ *de* $E(R, \omega, \varepsilon)$ *dans elle-même et* $T_{1\,|B}$ *est 1/2-lipschitzienne.* ε_0 *ne dépend que de* C *et des opérateurs* $a(x, D)$, $f(x, D)$ *du problème* (0.1).

Maintenant, nous pouvons prouver le théorème 2.7. Rappelons que nous travaillons toujours sous les conditions de la convention 2.6. Reprenons les notations du corollaire 5.3; considérons un réel $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$; d'après le théorème du point fixe, il existe $U = \sum_{j \geqq 0} u_j(t, x) X^j \in E(R, \omega, \varepsilon)$ vérifiant $T_1(U) = U$. Considérons alors un couple (ω_1, R_1) vérifiant les conditions du lemme 3.10 relativement à (R, ω, ε) et tel que $\forall x \in \Delta(0, R_1)$, $|k^i(x)| < \omega_1$, $1 \leqq i \leqq 2$. Posons $\Omega'_1 = \Delta(0, R_1)$. D'après le corollaire 5.3 et ce qui a été dit au début de la section du paragraphe 5 (ω_1, Ω'_1) ne dépend que de M, $\omega > 0$, Ω et des opérateurs du problème (0.1). D'après le lemme 3.10, la somme $h(t, x)$ de la série $\sum_{j \geqq 0} u_j(t, x)$ est holomorphe sur $\mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Omega'_1$. La clause relative à la convergence normale dans le lemme 3.10 permet d'écrire pour tout (t, x) de $\mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Omega'_1$:

$$\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} D_x^\beta h(t, x) = \sum_{j \geqq 2} \mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} D_x^\beta u_{j-2}(t, x), \qquad |\beta| \leqq 2$$

$$\mathscr{D}_i^{-1} D_x^\delta h(t, x) = \sum_{j \geqq 1} \mathscr{D}_i^{-1} D_x^\delta u_{j-1}(t, x), \qquad 1 \leqq i \leqq 2, \quad |\delta| \leqq 1.$$

En utilisant la définition de T_1 et — une nouvelle fois — le lemme 3.10, on vérifie immédiatement que $(t, x) \to h(t, x)$ vérifie l'égalité (2.5) en tout point de $\mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Omega'_1$.

Posons $\Omega_1 = \Delta(0, (1/2) R_1)$. Les résultats des sections des paragraphes 3 et 4 montrent alors que les fonctions $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} h$, $\mathscr{D}_i^{-1} h (1 \leqq i \leqq 2)$ et leurs dérivées premières en x sont bornées sur $\mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Omega_1$. Ceci prouve le théorème 2.7.

6. Appendice

L'objet de cette section est de démontrer le théorème 6.1 qui précise un résultat de [4]. Après quelques calculs, nous montrerons que le théorème 6.1 est entraîné par le théorème 6.3. Pour montrer que les dérivées partielles premières de la solution du problème linéaire (2.1) ou (6.1) sont bornées, nous utiliserons l'unicité de la solution du problème (6.10) considéré dans le théorème 6.3.

THÉORÈME 6.1. — *Reprenons les notations de l'introduction du paragraphe* 0. *Soit* V *un voisinage ouvert dans* S *de l'origine. Si* $u_0(x')$, $u_1(x')$ [*resp. et en plus les dérivées premières de* $u_0(x')$] *sont holomorphes et* bornées *sur le revêtement universel* $\mathscr{R}(V \setminus T)$ *de* $V \setminus T$, *alors il existe* $\omega > 0$, $M > 0$, *un voisinage ouvert* Ω *de* $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ *tels que* $\forall x \in \Omega$, $|k^i(x)| < \omega$ $(1 \leqq i \leqq 2)$, *pour tout point m de* $(S \cap \Omega) \setminus T$, *pour un choix quelconque de déterminations de* $u_0(x')$, $u_1(x')$ *au point m, on peut trouver des fonctions* $u^1(t, x)$, $u^2(t, x)$ *holomorphes et* bornées par M — *ainsi que leurs dérivées premières en x* — (*resp. et en plus* $e^{-t}\partial_t u^1$, $e^{-t}\partial_t u^2$ *sont* bornées par M) *sur* $\mathscr{R}_\omega \times \Omega$ *telles que la solution du problème linéaire :*

$$\text{(6.1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a(x, D) u = 0 \\ D^h_{x^0} u|_S = u_h(x'), \qquad 0 \leqq h \leqq 1. \end{array} \right.$$

soit donnée par $x \mapsto u^1(\operatorname{Log} k^1(x), x) + u^2(\operatorname{Log} k^2(x), x)$, *le choix des déterminations des deux logarithmes* $\operatorname{Log} k^1$, $\operatorname{Log} k^2$ *étant effectué comme dans l'énoncé du théorème* 2.4. *Le germe de solution au point m est évidemment prolongeable le long de tout chemin d'origine m tracé dans* Ω *et ne rencontrant pas les hypersurfaces caractéristiques.*

Nous suivrons de près [4] et utiliserons les techniques de [3]. Soit $R_0 > 0$ tel que les coefficients de l'opérateur $a(x, D)$ soient holomorphes et bornés sur le polydisque $\Delta(0, R_0)$ de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et de rayon $R_0 > 0$. Nous travaillerons avec un réel $\omega > 0$ et le revêtement

$$\mathscr{R}_\omega = \{t \in \mathbf{C} / \mathscr{R}et < \operatorname{Log} \omega\} \to \dot{D}_\omega = \{z \in \mathbf{C} / 0 < |z| < \omega\}$$
$$t \mapsto e^t.$$

Pour chaque $\omega > 0$, on se donne un point $a = a(\omega) \in \mathscr{R}_\omega$. Si $u \in \mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega)$, on pose alors :

$$\mathscr{D} u(t) = e^{-t} \partial_t u(t), \; \mathscr{D}^{-1} u(t) = \int_{a(\omega)}^t e^\theta u(\theta)\, d\theta.$$

Maintenant, nous abordons la preuve du théorème 6.1 et reprenons ses notations. Nous recherchons la solution du problème (6.1) sous la forme

$$x \mapsto u^1(\operatorname{Log} k^1(x), x) + u^2(\operatorname{Log} k^2(x), x).$$

Comme les hypersurfaces $k^i(x)=0$, $1 \leqq i \leqq 2$, sont caractéristiques, on obtient aisément (*voir* [4]) le lemme suivant :

LEMME 6.2. — *Soit* $i \in \{1, 2\}$. *Il existe des opérateurs différentiels linéaires* $P_l^i(x, D)$, $1 \leqq l \leqq 2$, *d'ordre* $\leqq l$, *à coefficients holomorphes dans* $\Delta(0, R_0)$ *ne dépendant que de* $a(x, D)$ *et de* $x \mapsto k^i(x)$, *tels que pour toute fonction* $u^i(t, x)$ *holomorphe sur un ouvert de* $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_0)$, *on ait*

$$a(x, D)\, u^i(\operatorname{Log} k^i(x), x) = \sum_{l=1}^{2} P_l^i(x, D)\, \mathscr{D}^{2-l} u^i(t, x)\big|_{t=\operatorname{Log} k^i(x)}.$$

En outre, si $a_2(x, D)$ *désigne la partie principale de* $a(x, D)$, *on a*

$$P_1^i(x, D) = \sum_{j=0}^{n} D_{\xi_j} a_2(x, \operatorname{grad} k^i(x))\, D_{x^j} + b^i(x)$$

où $b^i : \Delta(0, R_0) \to \mathbf{C}$ *est une fonction holomorphe.*

Nous ne tiendrons pas compte de la restriction $t = \operatorname{Log} k^i(x)$ et nous rechercherons des fonctions holomorphes $u^i(t, x)$, $1 \leqq i \leqq 2$ vérifiant :

$$\text{(6.2)} \qquad \sum_{l=1}^{2} P_l^i(x, D)\, \mathscr{D}^{2-l} u^i(t, x) \equiv 0, \qquad 1 \leqq i \leqq 2.$$

Le lemme 6.2 montre alors que $x \mapsto u^1(\operatorname{Log} k^1(x), x) + u^2(\operatorname{Log} k^2(x), x)$ annule identiquement l'opérateur $a(x, D)$.

Comme l'opérateur $a(x, D)$ est à caractéristiques simples, les résultats du paragraphe 1 montrent que $D_{\xi_0} a_2(x, \operatorname{grad} k^i(x))$ ne s'annule pas à l'origine; quitte à diminuer $R_0 > 0$, nous supposerons que cette fonction ne s'annule pas sur $\Delta(0, R_0)$. Pour chaque $1 \leqq i \leqq 2$, il existe alors des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur $\Delta(0, R_0)$, $R^i(x, D')$ (d'ordre $\leqq 1$ et indépendant de D_{x^0}), $T^i(x, D)$ d'ordre $\leqq 2$ tels que les relations (6.2) soient équivalentes à :

$$\text{(6.3)} \qquad D_{x^0} \mathscr{D} u^i(t, x) = R^i(x, D') \mathscr{D} u^i(t, x) + T^i(x, D)\, u^i(t, x) \qquad (1 \leqq i \leqq 2).$$

Comme $\mathscr{D} \circ \mathscr{D}^{-1} = \mathrm{Id}$, les relations (6.3) seront *a fortiori* vérifiées si :

$$\text{(6.4)} \qquad D_{x^0} u^i(t, x) = R^i(x, D')\, u^i(t, x) + T^i(x, D)\, \mathscr{D}^{-1} u^i(t, x), \qquad 1 \leqq i \leqq 2.$$

Maintenant étudions les données de Cauchy. Rappelons que $k^1(0, x') = k^2(0, x') = x^1$. Il existe ω_1 et $R_1 > 0$ tels que pour tout point $m = (0, x'_0) = (0, x_0^1, x''_0)$ de $S \setminus T$ vérifiant $0 < |x_0^1| < \omega_1$ et $x'_0 \in \Delta(0, R_1)$, pour un choix quelconque des déterminations de $u_0(x')$, $u_1(x')$ au point m, il existe des fonctions $(t, x') \mapsto u_h^i(t, x') \in \mathscr{H}(\mathscr{R}_{\omega_1} \times \Delta(0, R_1))$, $0 \leqq h \leqq 1$

telles que $u'_h(\operatorname{Log} x^1, x') = u_h(x')$, $0 \leqq h \leqq 1$. Nous verrons que le théorème 6.3 établit l'existence d'un voisinage ouvert $\Omega \subset \Delta(0, \mathrm{R}_1)$ de l'origine tel que les assertions du théorème 6.1 seront vérifiées pour tout choix de m dans $(\mathrm{S} \cap \Omega) \setminus \mathrm{T}$. Nous choisissons les déterminations « initiales » de $\operatorname{Log} k^1(x)$, $\operatorname{Log} k^2(x)$ (et de $\operatorname{Log} x^1$), de sorte que dans un petit voisinage de m, on ait $\operatorname{Log} k^1(0, x') = \operatorname{Log} k^2(0, x') = \operatorname{Log} x^1$. Cela dit, on a :

$$\mathrm{D}_{x^0}(x \mapsto u^i(\operatorname{Log} k^i, x)) = [(\mathrm{D}_{x^0} k^i)(x)\, \mathscr{D} u^i(t, x) + \mathrm{D}_{x^0} u^i(t, x)]\big|_{t = \operatorname{Log} k^i(x)}.$$

Par conséquent, les relations $\mathrm{D}^h_{x^0}(u^1(\operatorname{Log} k^1, x) + u^2(\operatorname{Log} k^2, x))\big|_{\mathrm{S}} = u'_h(\operatorname{Log} x^1, x')$, $0 \leqq h \leqq 1$ seront *a fortiori* vérifiées si on a identiquement :

$$u^1(t, 0, x') + u^2(t, 0, x') = u'_0(t, x') \tag{6.5}$$

$$\sum_{i=1}^{2} [(\mathrm{D}_{x^0} k^i)(0, x')\, \mathscr{D} u^i(t, 0, x') + \mathrm{D}_{x^0} u^i(t, 0, x')] = u'_1(t, x'). \tag{6.6}$$

Comme $\mathscr{D} \circ \mathscr{D}^{-1} = \mathrm{Id}$, la relation (6.6) sera *a fortiori* vérifiée si on a :

$$\sum_{i=1}^{2} (\mathrm{D}_{x^0} k^i)(0, x')\, u^i(t, 0, x') = \mathscr{D}^{-1} u'_1(t, x') - \sum_{i=1}^{2} \mathrm{D}_{x^0} \mathscr{D}^{-1} u^i(t, 0, x'). \tag{6.6$'$}$$

Rappelons (*voir* § 1) que $\mathrm{D}_{x^0} k^i(0) = \lambda_i$ et que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Par conséquent, quitte à diminuer R_0, il existe des fonctions holomorphes sur $\Delta(0, \mathrm{R}_0)$, $f_i(x')$, $g_i(x')$, $1 \leqq i \leqq 2$ telles que les relations (6.5) et (6.6)$'$ soient équivalentes à ($1 \leqq i \leqq 2$) :

$$u^i(t, 0, x') = f_i(x')\, u'_0(t, x') + g_i(x')\, \mathscr{D}^{-1} u'_1(t, x') - \sum_{j=1}^{2} g_i(x')\, \mathrm{D}_{x^0} \mathscr{D}^{-1} u^j(t, 0, x'). \tag{6.7}$$

Par conséquent, nous rechercherons des fonctions holomorphes $u^1(t, x)$, $u^2(t, x)$ solution du problème ($1 \leqq i \leqq 2$) :

$$\text{(6.8)} \quad \begin{aligned} &\mathrm{D}_{x^0} \mathrm{U}^i(t, x) = \mathrm{R}^i(x, \mathrm{D}')\, \mathrm{U}^i(t, x) + \mathrm{T}^i(x, \mathrm{D})\, \mathscr{D}^{-1} \mathrm{U}^i(t, x) \\ &\mathrm{U}^i(t, 0, x') = f_i(x')\, u'_0(t, x') + g_i(x')\, \mathscr{D}^{-1} u'_1(t, x') - \sum_{j=1}^{2} g_i(x')\, \mathrm{D}_{x^0} \mathscr{D}^{-1} \mathrm{U}^j(t, 0, x'). \end{aligned}$$

Rappelons que $a = a(\omega)$, $\mathscr{D}^{-1} u(t) = \int_a^t e^{\theta} u(\theta)\, d\theta$, $u(t) = \mathscr{D}^{-1} \circ \mathscr{D} u(t) + u(a)$. Par conséquent, si (u^1, u^2) est solution du problème (6.8), alors $(\mathscr{D} u^1, \mathscr{D} u^2)$ est solution du problème suivant ($1 \leqq i \leqq 2$) [l'inconnue est notée $(\mathrm{U}^1, \mathrm{U}^2)$] :

$$\text{(6.9)} \quad \begin{aligned} &\mathrm{D}_{x^0} \mathrm{U}^i(t, x) = \mathrm{R}^i(x, \mathrm{D}')\, \mathrm{U}^i(t, x) + \mathrm{T}^i(x, \mathrm{D})\, \mathscr{D}^{-1} \mathrm{U}^i(t, x) + \mathrm{T}^i(x, \mathrm{D})\, u^i(a, x) \\ &\mathrm{U}^i(t, 0, x') = f_i(x')\, \mathscr{D} u'_0(t, x') + g_i(x')\, u'_1(t, x') \\ &\qquad - \sum_{j=1}^{2} g_i(x')\, \mathrm{D}_{x^0} u^j(a, 0, x') - \sum_{j=1}^{2} g_i(x')\, \mathrm{D}_{x^0} \mathscr{D}^{-1} \mathrm{U}^j(t, 0, x'). \end{aligned}$$

Quitte à diminuer $R_0 > 0$, nous pouvons supposer que $0 < R_0 < 1$ et que les $f_i(x')$, $g_i(x')$ et les coefficients de $T^i(x, D)$, $R^i(x, D')$ sont holomorphes et bornés sur $\Delta(0, R_0)$. La suite de cet appendice est consacrée à la preuve du théorème suivant qui permet d'étudier les problèmes (6.8) et (6.9).

THÉORÈME 6.3. — *Soit* $R_1 \in]0, R_0/2]$; *alors il existe deux réels* $R_2 \in]0, R_1[$, $\omega_0 > 0$ *ne dépendant que de* R_1, *des* $f_i(x')$, $g_i(x')$, *des coefficients de* $T^i(x, D)$, $R^i(x, D')$, $1 \leqq i \leqq 2$ *tels que* $\forall \omega \in]0, \omega_0]$, *pour toutes fonctions* $h_i(t, x')$, $\tilde{g}_i(t, x)$, $(1 \leqq i \leqq 2)$ *holomorphes et bornés par* $C' > 0$ *sur* $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_1)$ *le problème suivant* $(1 \leqq i \leqq 2)$:

$$(6.10)\qquad \begin{aligned} U^i(t, 0, x') &= h_i(t, x') - \sum_{j=1}^{2} g_i(x') D_{x^0} \mathscr{D}^{-1} U^j(t, 0, x') \\ D_{x^0} U^i(t, x) &= R^i(x, D') U^i(t, x) + T^i(x, D) \mathscr{D}^{-1} U^i(t, x) + \tilde{g}_i(t, x) \end{aligned}$$

possède une unique solution $(U^1(t, x), U^2(t, x))$ *holomorphe sur* $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_2)$ *par une constante ne dépendant que de* C' *et des coefficients des opérateurs.*

Preuve du théorème 6.1 *à partir du théorème* 6.3. — Reprenons ce qui a été dit juste avant les expressions notées (6.5) et (6.6). On vérifie aisément qu'il existe $N > 0$, $\omega_1 > 0$ et $R_1 \in]0, R_0/2]$ ne dépendant que des données de Cauchy $u_0(x')$, $u_1(x')$ du problème (6.1) tels que $u'_0(t, x')$, $u'_1(t, x')$ [resp. et aussi $\mathscr{D} u'_0(t, x')$] sont holomorphes et bornés par N sur $\mathscr{R}^2_{\omega_1} \times \Delta(0, R_1)$. En examinant l'énoncé du théorème 6.3, on constate qu'il existe des réels $0 < \omega_0 (< \omega_1)$, $0 < 2R_3 < R_2 < R_1$ tels que $\forall \omega \in]0, \omega_0]$ pour toutes fonctions $h_i(t, x')$, $\tilde{g}_i(t, x)$ holomorphes et bornées par $C' > 0$ sur $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_1)$ [resp. $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_2/2)$] le problème (6.10) possède une unique solution holomorphe sur $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_2)$ [resp. $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_3)$] et cette solution est bornée par une constante ne dépendant que de C' et des coefficients des opérateurs. Fixons $\omega = \omega_0$ [et par conséquent $a = a(\omega_0)$]. Le lemme 3.1 montre que $\forall t \in \mathscr{R}_{\omega_0}$, il existe un chemin $\gamma \mid [0, 1] \to \mathscr{R}_{\omega_0}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant a à t tel que :

$$\int_0^1 |e^{\gamma(s)}| \, |\gamma'(s)| \, ds \leqq 3\omega_0.$$

On vérifie alors immédiatement que les fonctions :

$$h_i(t, x') = f_i(x') u'_0(t, x') + g_i(x') \mathscr{D}^{-1} u'_1(t, x'), \qquad 1 \leqq i \leqq 2$$

sont holomorphes et bornées sur $\mathscr{R}_{\omega_0} \times \Delta(0, R_1)$. Le théorème 6.3 assure alors l'existence et l'unicité d'une solution $(u^1(t, x), u^2(t, x))$ holomorphe sur $\mathscr{R}_{\omega_0} \times \Delta(0, R_2)$ du problème (6.8) et cette solution est bornée. Supposons $\mathscr{D} u'_0(t, x')$ bornée sur $\mathscr{R}_{\omega_1} \times \Delta(0, R_1)$. On vérifie aisément que les fonctions

$$\begin{gathered} h_i(t, x') = f_i(x') \mathscr{D} u'_0(t, x') + g_i(x') u'_1(t, x') - \sum_{j=1}^{2} g_i(x') D_{x^0} u^j(a, 0, x') \\ \tilde{g}_i(t, x) = T^i(x, D) u^i(a, x) \end{gathered}$$

sont holomorphes et bornées sur $\mathscr{R}_{\omega_0} \times \Delta(0, R_2/2)$ par une constante ne dépendant que des coefficients des opérateurs, de R_2 et des constantes majorant $u_0'(t, x')$, $u_1'(t, x')$ et $\mathscr{D}u_0'(t, x')$. Le théorème 6.3 assure l'existence et l'*unicité* d'une solution holomorphe sur $\mathscr{R}_{\omega_0} \times \Delta(0, R_3)$ du problème (6.9) et cette solution est bornée. Comme $2R_3 < R_2$, on sait que $(\mathscr{D}u^1(t, x), \mathscr{D}u^2(t, x))$ est une solution holomorphe sur $\mathscr{R}_{\omega_0} \times \Delta(0, R_3)$ du problème (6.9), elle est donc bornée sur $\mathscr{R}_{\omega_0} \times \Delta(0, R_3)$. Quitte à diminuer R_3, on peut supposer que pour tout x de $\Delta(0, R_3)$, on a $|k^i(x)| < \omega_0$, $1 \leqq i \leqq 2$. Ce qui a été dit depuis le début de cet appendice montre alors que le théorème 6.1 est démontré en prenant $\Omega = \Delta(0, (1/2) R_3)$ et $\omega = \omega_0$.

Avant d'aborder la preuve du théorème 6.3, nous rappelons les définitions et propriétés de fonctions majorantes définies dans [3].

DÉFINITION 6.4. — *Soit* $R > 0$, $\rho > 1$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *On pose :*

$$\varphi_k^R(x) = \frac{k!}{\left(1 - (x^0 \rho/R) - \sum_{j=1}^{n} (x^j/R)\right)^{k+1}}.$$

Les résultats de la proposition suivante sont prouvés dans [3].

PROPOSITION 6.5. — *Avec les notations précédentes*

1. $\varphi_k^R(x) \ll \varphi_{k+1}^R(x)$, $D_{x^0} \varphi_k^R(x) = (\rho/R) \varphi_{k+1}^R(x)$, $D_{x^j} \varphi_k^R(x) = (1/R) \varphi_{k+1}^R(x)$, $1 \leqq j \leqq n$.
2. *Soit* $x \mapsto b(x)$ *une fonction holomorphe bornée par* M *sur* $\Delta(0, R)$. *Alors on a :*

$$b(x) \ll M \varphi_0^R(x).$$

3. *Supposons* $0 < R < R_0/2$. *Soit* $x \mapsto a(x)$ *une fonction holomorphe bornée par* M *sur* $\Delta(0, R_0)$. *Soient* $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ *et* $u(x)$ *une série formelle. Alors on peut affirmer que :*

$$u(x) \ll C \varphi_k^R(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) u(x) \ll 2MC \varphi_k^R(x).$$

Preuve. — Nous allons reproduire la démonstration de [3]. On obtient immédiatement le 1. Prouvons le 2. Les inégalités de Cauchy montrent que :

$$b(x) \ll M \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{1 - (x^j/R)}\right) \ll M \frac{1}{1 - (1/R)(x^0 + \ldots + x^n)} \ll M \varphi_0^R(x).$$

Ceci prouve le 2. Prouvons le 3. Pour alléger les notations, nous poserons $X = \rho x^0 + x^1 + \ldots + x^n$. On a

$$\frac{1}{1-(1/2)} \varphi_k^R(x) - \frac{1}{1-(1/2R)X} \varphi_k^R(x) = \frac{1/2}{1-(1/2)} \frac{1}{1-(1/2R)X} \frac{k!}{(1-(X/R))^k} \gg 0.$$

D'où :

$$\frac{1}{1-(X/2R)} \varphi_k^R(x) \ll 2 \varphi_k^R(x).$$

Comme $2\mathrm{R} < \mathrm{R}_0$, le 2 montre que :

$$a(x) \ll \frac{\mathrm{M}}{1-(\mathrm{X}/2\mathrm{R})};$$

on obtient alors immédiatement le 3.

Note. — Le 3 de la proposition 6.5 nous permettra de majorer l'action des coefficients des opérateurs par des constantes multiplicatives.

On obtient immédiatement le lemme suivant :

LEMME 6.6. — *Soient* $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p, \mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_p$ *des constantes réelles* $\geqq 0$. *Si* $\mathrm{U}(x)$ *est une série formelle vérifiant*

$$\mathrm{D}_{x^0} \mathrm{U}(x) \ll \mathrm{C}_1 \mathrm{D}_{x^0} \varphi_{k_1}^{\mathrm{R}} + \ldots + \mathrm{C}_p \mathrm{D}_{x^0} \varphi_{k_p}^{\mathrm{R}}$$
$$\mathrm{U}(0, x') \ll \mathrm{D}_1 \varphi_{j_1}^{\mathrm{R}} + \ldots + \mathrm{D}_p \varphi_{j_p}^{\mathrm{R}},$$

alors on a

$$\mathrm{U}(x) \ll \mathrm{C}_1 \varphi_{k_1}^{\mathrm{R}} + \ldots + \mathrm{C}_p \varphi_{k_p}^{\mathrm{R}} + \mathrm{D}_1 \varphi_{j_1}^{\mathrm{R}} + \ldots + \mathrm{D}_p \varphi_{j_p}^{\mathrm{R}}.$$

Maintenant nous pouvons aborder la preuve du théorème 6.3. Soit $\mathrm{R}_1 \in]0, \mathrm{R}_0/2]$. Le réel $\omega_0 > 0$ ne sera choisi qu'à la fin de la preuve [*voir* la numérotation (6.13) plus loin]. Soit $\omega \in]0, \omega_0]$; reprenons les notations du théorème 6.3. Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que pour $1 \leqq i \leqq 2$, les fonctions $h_i(t, x')$, $\tilde{g}_i(t, x)$ sont holomorphes et bornées par M sur $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, \mathrm{R}_1)$.

On définit des suites $(\mathrm{U}_k^i(t, x))_{k \in \mathbf{N}}$, $1 \leqq i \leqq 2$ de fonctions holomorphes sur $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, \mathrm{R}_1)$ par les relations de récurrence suivante :

$$(6.11)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{U}_0^i(t, 0, x') = h_i(t, x') \\ &\mathrm{D}_{x^0} \mathrm{U}_0^i(t, x) = \tilde{g}_i(t, x) \\ &\mathrm{U}_{k+1}^i(t, 0, x') = -\sum_{j=1}^{2} g_i(x') \mathrm{D}_{x^0} \mathscr{D}^{-1} \mathrm{U}_k^j(t, 0, x') \\ &\mathrm{D}_{x^0} \mathrm{U}_{k+1}^i(t, x) = \mathrm{R}^i(x, \mathrm{D}') \mathrm{U}_k^i(t, x) + \mathrm{T}^i(x, \mathrm{D}) \mathscr{D}^{-1} \mathrm{U}_k^i(t, x). \end{aligned}$$

La solution du problème (6.10) est alors donnée *formellement* par :

$$u^i(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{U}_k^i(t, x).$$

Le 2 de la proposition 6.5 montre que $(1 \leqq i \leqq 2)$:

$$\forall t \in \mathscr{R}_\omega, \quad h_i(t, x') \ll \mathrm{M}\, \varphi_0^{\mathrm{R}_1}(x), \qquad \tilde{g}_i(t, x) \ll \mathrm{M}\, \varphi_0^{\mathrm{R}_1}(x).$$

Le 1 de la proposition 6.5 montre en outre que :

$$\mathrm{D}_{x^0} \mathrm{U}_0^i(t, x) \ll \mathrm{M}\, \varphi_0^{\mathrm{R}_1} \ll \mathrm{M}\, \varphi_1^{\mathrm{R}_1}(x) = \mathrm{M} \frac{\mathrm{R}_1}{\rho} \mathrm{D}_{x^0} \varphi_0^{\mathrm{R}_1}.$$

Le lemme 6.6 montre alors que

$$\text{(6.12)} \qquad U_0^i(t, x) \ll M\left(\frac{R_1}{\rho}+1\right)\varphi_0^{R_1}(x).$$

Soit N le nombre total de monômes de dérivations en x d'ordre $\leqq 2$. Soit $C > 0$ tel que les $f_i(x')$, $g_i(x')$, les coefficients des opérateurs $R^i(x, D')$, $T^i(x, D)$ soient bornés par $C > 0$ sur le polydisque $\Delta(0, R_0)$. Par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$, nous allons établir le lemme suivant.

LEMME 6.7. — *Posons* $A=4C(N+2)$. *Alors* $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall t \in \mathscr{R}_\omega$, *pour tout chemin* γ *de classe* C^1 *par morceaux* $[0, 1] \to \mathscr{R}_\omega$ *et joignant* a *à* t, *on a* $(1 \leqq i \leqq 2)$:

$$U_k^i(t, x) \ll A^k \sum_{k_1+k_2=k} M\left(\frac{R_1}{\rho}+1\right)\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{k_1} \frac{L^{k_1}(\gamma)}{k_1!} \varphi_{k_1}^{R_1} \rho^{-k_2}$$

où $L(\gamma)=\int_0^1 |e^{\gamma(s)}|\,|\gamma'(s)|\,ds$.

Preuve. — L'inégalité (6.12) montre que le lemme est vrai dans le cas $k=0$. Soit $k \geqq 0$; supposons le lemme démontré au rang k. Rappelons que $0 < R_1 < 1$. Le 1 de la proposition 6.5 montre alors que pour tout entier $l \geqq 0$ et tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a :

$$\frac{1}{\rho} D_{x^0} \varphi_l^{R_1} = D_{x^j} \varphi_l^{R_1} \gg \varphi_l^{R_1}.$$

Comme $R_1 < R_0/2$, l'hypothèse de récurrence et le 3 de la proposition 6.5 montrent alors que :

$$R^i(x, D')\,U_k^i(t, x) \ll A^k M\left(\frac{R_1}{\rho}+1\right) \sum_{k_1+k_2=k} \left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{k_1} \frac{L^{k_1}(\gamma)}{k_1!} \rho^{-k_2}\, 2CN \frac{1}{\rho} D_{x^0} \varphi_{k_1}^{R_1}.$$

Comme $0 < R_1 < 1$ et $\rho > 1$, le 1 de la proposition 6.5 montre que pour tout $l \in \mathbf{N}$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}$ de longueur $\leqq 2$, on a :

$$\varphi_l^{R_1} \ll D_x^\alpha \varphi_l^{R_1} \ll D_{x^0}^2 \varphi_l^{R_1} = D_{x^0}\left(\frac{\rho}{R_1} \varphi_{l+1}^{R_1}\right).$$

Considérons un chemin γ vérifiant les conditions du lemme 6.7; on a :

$$\mathscr{D}^{-1} U_k^i(t, x) = \int_0^1 e^{\gamma(s)} \gamma'(s)\, U_k^i(\gamma(s), x)\, ds.$$

En appliquant pour chaque $0 \leqq s \leqq 1$ l'hypothèse de récurrence à la restriction de γ à $[0, s]$ et en utilisant la proposition 6.5, on obtient :

$$T^i(x, D)\mathscr{D}^{-1} U_k^i(t, x) \ll A^k M\left(\frac{R_1}{\rho}+1\right)$$
$$\sum_{k_1+k_2=k} (2\,CN)\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{k_1} \rho^{-k_2} \frac{L^{k_1+1}(\gamma)}{(k_1+1)!} D_{x^0}\left(\frac{\rho}{R_1}\varphi_{k_1+1}^{R_1}\right).$$

En raisonnant comme précédemment on vérifie aisément que :

$$U_{k+1}^i(t, 0, x') \ll A^k M\left(\frac{R_1}{\rho}+1\right) \sum_{k_1+k_2=k} 4\,C\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{k_1} \frac{L^{k_1+1}(\gamma)}{(k_1+1)!} \rho^{-k_2} \frac{\rho}{R_1} \varphi_{k_1+1}^{R_1}.$$

Comme $2\,CN+2\,CN+4\,C \leqq A$, le lemme 6.6 permet d'obtenir immédiatement le lemme 6.7.

Maintenant nous allons établir l'existence d'au moins une solution du problème (6.10). Soit $t \in \mathscr{R}_\omega$; d'après le lemme 3.1, il existe un chemin γ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant a à t tracé dans $\mathscr{R}_\omega$ et tel que $L(\gamma) \leqq 3\,\omega$. Le lemme 6.7 montre que pour que les séries $\sum_{k \geqq 0} U_k^i(t, x)$, $(1 \leqq i \leqq 2)$ convergent, il suffit que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k_1+k_2=k} \left[\frac{A\,\rho\,3\,\omega}{R_1(1-(\rho\,|x^0|/R_1)-(\sum|x^j|/R_1))}\right]^{k_1} \left(\frac{A}{\rho}\right)^{k_2} < +\infty.$$

Dans cet article, nous prendrons $\rho = A+2$. Posons $R_2 = R_1/2\,\rho\,(n+1)$. On considère alors un réel $\omega_0 > 0$ vérifiant :

$$\text{(6.13)} \qquad \frac{2\,A\,\rho\,3\,\omega_0}{R_1} \leqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{2\,A\,\rho\,3\,\omega_0}{(1/2)\,R_2} \leqq \frac{1}{2}.$$

Il est alors clair que pour tout $\omega \in]0, \omega_0]$ les séries $\sum_{k \geqq 0} U_k^i(t, x) = U^i(t, x)$ convergent uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_2)$ et que $(U^1(t, x), U^2(t, x))$ définit une solution holomorphe bornée sur $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_2)$ du problème (6.10).

Maintenant prouvons l'unicité. Fixons $\omega \in]0, \omega_0]$. Soit $(U'^1(t, x), U'^2(t, x))$ une autre solution du problème (6.10) holomorphe (*on ne la suppose pas bornée*) sur $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_2)$. Posons $U''^i = U^i - U'^i$. Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathscr{R}_\omega$. L'examen de la preuve du lemme 3.1 montre qu'il existe un compact connexe par arcs (de classe C^1 par morceaux) K' de $\mathscr{R}_\omega$ contenant $K \cup \{a\}$ et tel que $\forall\, t \in K$ il existe un chemin γ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux tracé dans K' joignant a à t et vérifiant $L(\gamma) \leqq 3\,\omega$. Posons $R = (1/2)\,R_2$. Les fonctions U''^i sont bornées sur $K' \times \Delta(0, R)$. D'après le 2 de la proposition 6.5, il existe une constante $C_{K'} > 0$ telle que $(1 \leqq i \leqq 2)$:

$$\forall\, t \in K', \quad U''^i(t, x) \ll C_{K'}\,\varphi_0^R(x).$$

Les fonctions U''^i vérifient les relations :

$$U''^i(t, 0, x') = -\sum_{j=1}^{2} g_i(x') D_{x^0} \mathscr{D}^{-1} U''^j(t, 0, x')$$

$$D_{x^0} U''^i(t, x) = R^i(x, D') U''^i(t, x) + T^i(x, D) \mathscr{D}^{-1} U''^i(t, x).$$

La démonstration du lemme suivant est tout à fait analogue à la démonstration du lemme 6.7.

LEMME 6.8. — *Pour tout entier naturel k, pour tout t de* K′ *et tout chemin γ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux joignant a à t et tracé dans* K′ *on a* $(1 \leqq i \leqq 2)$:

$$U''^i(t, x) \ll A^k C_{K'} \sum_{k_1+k_2=k} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k_1} \frac{L^{k_1}(\gamma)}{k_1!} \varphi^R_{k_1} \rho^{-k_2}.$$

Rappelons que $\rho = A + 2$, *que pour tout t de* K *on peut supposer* $L(\gamma) \leqq 3\omega$, *que* $0 < \omega \leqq \omega_0$ *et que :* $(R = (1/2) R_2)$

$$\frac{2 A \rho 3 \omega_0}{R} \leqq \frac{1}{2}.$$

Posons $R' = R/2\rho(n+1)$.

On vérifie alors aisément que les séries $(1 \leqq i \leqq 2)$ (de terme général constant) $\sum U''^i(t, x)$ convergent pour tout $(t, x) \in K \times \Delta(0, R')$. Comme $K \times \Delta(0, R')$ est d'intérieur non vide, on en déduit que les fonctions $U''^i(t, x)$ sont identiquement nulles sur l'ouvert connexe $\mathscr{R}_\omega \times \Delta(0, R_2)$. Ceci prouve le théorème 6.3.

BIBLIOGRAPHIE

[0] J.-M. BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 14, 1981). *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Séminaire X*, E.D.P., 1981-1982).

[1] E. LEICHTNAM, *Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 20, 1987, p. 137-170).

[2] E. LEICHTNAM, *Le problème de Cauchy ramifié* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 23, 1990, p. 369-443).

[3] C. WAGSCHAL, *Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes* (*J. Math. Pures Appl.*, t. 53, 1974, p. 99).

[4] C. WAGSCHAL, *Sur le problème de Cauchy ramifié* (*J. Math. Pures Appl.*, t. 53, 1974, p. 147-164).

[5] C. WAGSCHAL, *Le problème de Goursat non linéaire* (*J. Math. Pures Appl.*, 1979).

[6] E. ANDRONIKOF et E. LEICHTNAM, *Une version faisceautique de l'intégration des formes différentielles holomorphes ramifiées relatives de degré maximum* (à paraître).

[7] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Microlocal study of sheaves* (*Astérisque*, vol. 128, 1985).

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1989,
révisé le 26 mars 1990).

E. LEICHTNAM,
École Normale Supérieure,
D.M.I.,
45, rue d'Ulm,
75005 Paris, France.