Annales scientifiques de l'É.N.S.

Laurent Moret-Bailly

Groupes de Picard et problèmes de Skolem. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 2 (1989), p. 181-194

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_2_181_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 181 à 194.

GROUPES DE PICARD ET PROBLÈMES DE SKOLEM II

PAR LAURENT MORET-BAILLY

1. Introduction et notations

1.1. Soit R un anneau de Dedekind qui est :

— soit l'anneau des S-entiers d'un corps de nombres, pour un ensemble fini S de places d'icelui (cas *arithmétique*);

— soit l'anneau d'une courbe affine lisse connexe sur un corps fini (cas *géométrique*).

On note K le corps des fractions de R, et l'on pose $B = \mathrm{Spec}\, R$. Soit

$$f: \quad X \to B$$

un B-schéma séparé de type fini. On suppose que :

— *f* est *surjectif*;

— X_K est *géométriquement irréductible* sur K;

— X est *irréductible.*

On se donne de plus un ensemble fini Σ de places de K (archimédiennes ou non), disjoint de l'ensemble $\mathrm{Max}(R)$ des idéaux maximaux de R (=points fermés de B), ces derniers étant identifiés à des places de K de la manière habituelle. Pour chaque $v \in \Sigma$ on note K_v le complété de K en v, et l'on fixe :

— une extension finie galoisienne L_v de K_v;

— un ouvert non vide Ω_v de $X(L_v)$ (pour la topologie définie par v), formé de points *lisses*, et invariant sous $\mathrm{Gal}(L_v/K_v)$.

DÉFINITION 1.2. — *On appelle* donnée de Skolem *une suite*

$$\mathscr{S} = (X \xrightarrow{f} B, \Sigma, \{L_v\}, \{\Omega_v\})$$

vérifiant les conditions ci-dessus. Elle est dite complète *si l'ensemble des places de* K *est réunion de* Σ *et de* $\mathrm{Max}(R)$, *et* incomplète *sinon.*

On appelle point entier de $\mathscr{S}$ *un fermé irréductible* Y *de* X, fini *et surjectif sur* B, *tel que, pour tout* $v \in \Sigma$, $Y \otimes_R L_v$ *soit* L_v-déployé (*i. e. formé de points* L_v*-rationnels*) *et contenu dans* Ω_v.

L'objet de cet article est d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Toute donnée de Skolem incomplète admet un point entier.*

Dans tout ce qui suit on désigne par $\mathscr{S}=(X \xrightarrow{f} B, \Sigma, \{L_v\}, \{\Omega_v\})$ une donnée de Skolem, et l'on utilise les notations de 1.1 (K, R, etc.). On supposera X *réduit* (quitte à remplacer X par X_{red}) : les hypothèses sur f impliquent alors que f est *plat.*

Pour éviter des contorsions sans intérêt, nous supposerons Σ *non vide*; le cas $\Sigma=\varnothing$ n'est autre que le « local-global principe » de Rumely [Ru 1], dont on trouvera dans [MB 1] une démonstration due à L. Szpiro et à l'auteur et n'utilisant pas la « théorie des capacités » de [Ru 2]. Le présent article est toutefois indépendant de [MB 1], et le lecteur pourra se convaincre que la démonstration, moyennant quelques aménagements, s'adapte au cas $\Sigma=\varnothing$.

L'intérêt, pour la démonstration, de l'hypothèse $\Sigma\neq\varnothing$ est qu'elle implique que X_K est *séparable* (= génériquement lisse) sur K, puisque X admet des points L_v-rationnels lisses pour $v\in\Sigma$.

Le plan de l'article est le suivant. Le reste du paragraphe 1 est consacré à diverses remarques et réductions plus ou moins élémentaires, ainsi qu'aux liens avec les travaux d'autres auteurs ([Ru 1] déjà cité, et [C-R]). Au paragraphe 2, on se ramène, par des sections hyperplanes, au cas où X est de dimension relative 1 sur B; ce cas est ensuite traité au paragraphe 3, où l'on verra que les propriétés de compacité de certains groupes de Picard [groupes de classes d'idèles (3.10.4) et jacobiennes (3.10.2)] jouent un rôle crucial.

Remarque 1.4. — Pour démontrer le théorème 1.3, on peut supposer (et on supposera désormais) que f est *quasi-projectif*, ceci en vertu du lemme de Chow (EGA II, 5.6). La version dudit lemme donnée dans [K] permet d'ailleurs d'étendre 1.3 au cas où X est un espace algébrique; en fait, il se généralise même aux *champs algébriques* sur S, comme on le verra dans [MB 2] (par d'autres méthodes, car l'avatar champêtre [D-M, 4.12] du lemme de Chow semble ici insuffisant). La notion de champ algébrique utilisée dans [MB 2] est celle de [D-M]; il serait intéressant de lui substituer (si possible) celle, plus générale, de [A].

Remarque 1.5. — Soit $Y \subset X$ un point entier de $\mathscr{S}$: sa fibre générique Y_K est alors spectre d'une extension finie K′ de K, et l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ définit un point $x\in X(K')$. Le fait que $Y \subset X$ soit fini sur B signifie que x est en fait dans $X(R')$, où R′ est le normalisé de R dans K′ (d'où l'expression « point entier »). Les conditions locales en $v\in\Sigma$ signifient que K′ se décompose sur L_v (*i. e.* $K' \otimes_K L_v$ est un produit de copies de L_v) et que pour tout plongement $K' \hookrightarrow L_v$, le point de $X(L_v)$ déduit de x par ce plongement appartient à Ω_v.

On voit ainsi que le théorème ci-dessus généralise un théorème de Cantor et Roquette ([C-R], « density theorem » 5.1), qui est essentiellement le cas où X_K est une K-variété unirationnelle et où $L_v=K_v$ pour tout $v\in\Sigma$. Notre démonstration s'inspire d'ailleurs largement de l'approche de *loc. cit.*

Remarque 1.6. — Le théorème 1.3 raffine, d'autre part, le théorème de densité de Rumely ([Ru 1] pour le cas arithmétique), que l'on obtient en « supprimant les L_v », c'est-à-dire en remplaçant, dans les données du problème, chaque L_v par une clôture algébrique $\bar{K}_v$ de K_v : en effet, dans ce cas, il existe pour chaque v une extension finie galoisienne L_v de K_v telle que $\Omega_v \cap X(L_v) \neq \emptyset$, en vertu du

LEMME 1.6.1. — *Soient* F *un corps local,* $\bar{F}$ *une clôture algébrique de* F, F^s *la clôture séparable de* F *dans* $\bar{F}$, X *un* F*-schéma de type fini génériquement lisse sur* F. *Alors* $X(F^s)$ *est dense dans* $X(\bar{F})$ *pour la topologie de la valuation.*

Preuve. — En caractéristique 0 il n'y a rien à démontrer. Soit donc $p = \mathrm{car}(F) > 0$, et soit v la valuation. On peut naturellement supposer X lisse sur F.

(*a*) *Cas où* $X = A^1_F$. — Soit $x \in X(\bar{F}) = \bar{F}$, et construisons une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ avec $y_n \in F^s$ et $v(y_n - x) \to +\infty$. On peut supposer $v(x) \geq 0$. Pour $k \geq 0$ convenable on a $x^{p^k} = a \in F^s$. Pour $n \geq 1$, soit $y_n \in \bar{F}$ vérifiant

$$y_n^{p^k} - t^n y_n - a = 0$$

où t est une uniformisante de F : alors $y_n \in F^s$, $v(y_n) \geq 0$, et

$$v(y_n - x) = p^{-k} v(y_n^{p^k} - a) = p^{-k} v(t^n y_n) \geq np^{-k}$$

d'où le résultat.

(*b*) *Cas général.* — Soit $x \in X(\bar{F})$ et soit $P \in X$ le point fermé correspondant. Il existe un ouvert de Zariski U de X contenant P, et un F-morphisme $\pi : U \to A^n_F$ $(n = \dim(X))$, qui est fini étale au-dessus d'un voisinage V de $\pi(P)$. Par suite, pour la topologie de la valuation, π induit un homéomorphisme d'un voisinage Ω de x dans $X(\bar{F})$ sur un ouvert Ω' de $\bar{F}^n$; notre assertion résulte donc de ce que $(F^s)^n$ est dense dans $\bar{F}^n$ [en vertu de (*a*)] et du fait qu'un point de $X(\bar{F})$ est dans $X(\bar{F}^s)$ si et seulement si son image dans $\bar{F}^n$ est dans $(F^s)^n$, puisque π est étale. ■

En fait, si l'on remplace chaque L_v par $\bar{K}_v$, il n'est même pas nécessaire de supposer que $\Omega_v \subset X(\bar{K}_v)$ est formé de points lisses : en effet, si X est séparable sur K on procède comme ci-dessus; sinon, on est nécessairement dans le cas géométrique, justiciable du théorème de densité non archimédien établi dans [MB 1].

Le lemme 1.6.1 a la conséquence suivante, que nous exploiterons plus bas :

COROLLAIRE 1.6.2. — *Soient* F *un corps local non archimédien, d'anneau des entiers* Λ. *Soit* $\mathscr{X}$ *un* Λ*-schéma de type fini, plat et surjectif sur* Λ, *tel que* $\mathscr{X}_F$ *soit génériquement lisse sur* F. *Alors il existe une extension finie séparable* F' *de* F, *d'anneau des entiers* Λ', *telle que* $\mathscr{X}(\Lambda') \neq \emptyset$.

Preuve. — Soient F^s et $\bar{F}$ comme en 1.6.1, d'anneaux des entiers respectifs Λ^s et $\bar{\Lambda}$. Il s'agit de voir que $\mathscr{X}(\Lambda^s) \neq \emptyset$. Or, $\mathscr{X}(\Lambda^s)$ n'est autre que $\mathscr{X}(\bar{\Lambda}) \cap \mathscr{X}(F^s)$. Comme $\mathscr{X}(\bar{\Lambda})$ est un ouvert de $\mathscr{X}(\bar{F})$, non vide puisque $\mathscr{X}$ est plat et surjectif sur Λ, l'assertion résulte de 1.6.1. ■

Remarque 1.7. — Le théorème 1.3 s'étend immédiatement au cas où l'anneau de base R est un localisé quelconque de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, ou de l'anneau d'une courbe sur un corps fini : en effet, X s'étend alors en un schéma de type fini sur un anneau du type envisagé en 1.2, ayant les propriétés requises. De même, dans le cas géométrique, on aurait pu supposer que B soit une courbe sur la clôture algébrique d'un corps fini, une telle courbe (ainsi que les autres données) pouvant se descendre à un corps fini convenable.

Remarque 1.8. — Prenons $R=\mathbf{Z}$, $X=\mathbf{G}_{m,\mathbf{Z}}=\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$, $\Sigma=\{v_\infty\}=\{$ valeur absolue ordinaire $\}$, $L_{v_\infty}=\mathbf{C}$, $\Omega_{v_\infty}=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$. Il est immédiat que

$$\mathscr{S}=(X\to\operatorname{Spec}\mathbf{Z}, \{v_\infty\}, \{\Omega_{v_\infty}\})$$

est une donnée de Skolem complète sans point entier.

Le problème des points entiers pour les données de Skolem complètes relève [du moins lorsque $\dim(X)=1$] de la « théorie des capacités » de Rumely [Ru 2]; celle-ci n'existe, à l'heure actuelle, que sans conditions de rationalité locales.

Remarque 1.9 (« rétrécir X_K »). — Les hypothèses sur $f:X\to B$ impliquent que les fibres de f aux points fermés de B sont purement de codimension 1 dans X. Si F_K désigne un fermé strict de X_K, et F son adhérence dans X, il en résulte que F ne contient aucune fibre de f, et par suite $X-F\to B$ est encore surjectif. De plus, pour $v\in\Sigma$, $F(L_v)$ ne contient pas Ω_v [celui-ci est en effet une L_v-variété analytique de dimension $\dim(X_K)>\dim(F_K)$]. En conséquence $(X-F\to B, \{L_v\}, \{\Omega_v-F(L_v)\})$ *est encore une donnée de Skolem*.

Par exemple on peut prendre pour F_K l'ensemble des points non lisses de X_K, ce qui permet, dans la démonstration de 1.3, de supposer que X_K est *lisse* sur K.

Remarque 1.10 (« élargir Σ »). — Supposons (pour simplifier) X_K lisse sur K. Soit S un ensemble fini de points fermés de B : on peut « remplacer Σ par $\Sigma\cup S$ » de la façon suivante. D'abord le complémentaire $B_1=B-S$ est *affine* : en effet le groupe $\operatorname{Pic}(B)=\operatorname{Cl}(R)$ est fini, donc il existe $x\in R$ tel que $\operatorname{Supp}(\operatorname{div}(x))=S$, de sorte que $B_1=\operatorname{Spec}R[1/x]$.

Pour chaque $v\in S$, il résulte de 1.6.2 qu'il existe une extension finie galoisienne L_v de K_v, d'anneau des entiers R'_v, telle que $\Omega_v:=X(R'_v)$ soit un ouvert non vide de $X(L_v)$, évidemment invariant sous $\operatorname{Gal}(L_v/K_v)$. Posant $\Sigma_1=\Sigma\cup S$, $X_1=X\times_B B_1$, on voit donc que $\mathscr{S}_1=(X_1\to B_1, \Sigma_1, \{L_v\}, \{\Omega_v\})$ est une donnée de Skolem, et il est immédiat que si $Y_1\subset X_1$ est un point entier pour $\mathscr{S}_1$ alors son adhérence Y dans X est un point entier pour $\mathscr{S}$ (le fait que Y soit fini sur B résulte de la définition de Ω_v).

Exemple 1.10.1. — Il résulte de 1.9 et 1.10 que l'on peut toujours (quitte à élargir Σ) remplacer X par un ouvert non vide quelconque de X. Par exemple, on peut toujours supposer X *lisse* sur B.

2. Réduction au cas des pinceaux de courbes

Comme l'indique le titre, on se propose dans ce numéro de montrer qu'il suffit, pour prouver 1.3, de le faire lorsque $\dim(X_K)=1$. La preuve est essentiellement celle de [Ru 1].

LEMME 2.1. — *Soit* F *un corps muni d'une valuation discrète* v. *Soient* $\hat{\mathrm{F}}$ *son complété et* F′ *la fermeture algébrique de* F *dans* $\hat{\mathrm{F}}$. *On suppose que* $\hat{\mathrm{F}}$ *est une extension séparable de* F (i. e. *que l'anneau de* v *est excellent; j'ignore si cette condition est superflue*).

Soit Z *un* F-*schéma de type fini : alors* $\mathrm{Z}(\mathrm{F}')$ *est dense dans* $\mathrm{Z}(\hat{\mathrm{F}})$ *pour la topologie définie par* v.

Preuve. — C'est clair si $\mathrm{Z}=\mathbf{A}^n_{\mathrm{F}}$; dans le cas général, stratifiant Z par des sous-schémas localement fermés convenables, on peut supposer que Z est régulier. Un point de $\mathrm{Z}(\hat{\mathrm{F}})$ se factorise alors par l'ouvert de lissité de Z sur F (car c'est un point régulier à corps résiduel séparable sur F) donc on peut supposer que Z est lisse sur F, et même, quitte à restreindre Z, qu'il existe un morphisme étale $\pi:\mathrm{Z}\to\mathrm{U}$ où U est un ouvert de $\mathbf{A}^n_{\mathrm{F}}\,(n=\dim \mathrm{Z})$. Si $\Omega\subset\mathrm{Z}(\hat{\mathrm{F}})$ est un ouvert non vide (pour la topologie de v), alors $\pi(\Omega)$ est ouvert dans $\mathrm{U}(\hat{\mathrm{F}})$ donc contient un point de $\mathrm{U}(\mathrm{F}')$, soit $u=\pi(z)$ avec $z\in\Omega$, $u\in\mathrm{U}(\mathrm{F}')$. Mais comme π est quasi-fini, les points de $\pi^{-1}(u)$ (en particulier z) sont algébriques sur F, d'où la conclusion. ■

Reprenons maintenant les notations de 1.1, et supposons f *quasi-projectif* (1.4) et X_{K} *lisse* sur K (1.7). Il est inutile pour l'instant de supposer que la donnée de Skolem $\mathscr{S}$ est incomplète.

LEMME 2.2. — *Il existe un fermé* $\mathrm{T}\subset\mathrm{X}$ *de dimension* 1, *quasi-fini et surjectif sur* B, *qui rencontre chaque* Ω_v *au sens suivant : pour tout* $v\in\Sigma$, *on a* $\mathrm{T}(\mathrm{L}_v)\cap\Omega_v\neq\varnothing$.

Preuve. — D'après le lemme précédent, il existe un point de Ω_v qui est algébrique sur K, *i. e.* dont l'image dans X_{K} est un point fermé P_v. Notons T_v l'adhérence de P_v dans X : c'est un fermé de X, quasi-fini sur B. La réunion des T_v, pour $v\in\Sigma$, se projette sur un ouvert non vide de B, soit B − S, où S est un ensemble fini de points fermés. Pour chaque $v\in\mathrm{S}$ on choisit un fermé $\mathrm{T}_v\subset\mathrm{X}$, quasi-fini sur B et dont l'image dans B contient v, et l'on prend $\mathrm{T}=\bigcup_{v\in\Sigma}\mathrm{T}_v$. ■

On suppose maintenant que $\dim\mathrm{X}_{\mathrm{K}}=n\geqq 2$. Fixons $\mathrm{T}\subset\mathrm{X}$ comme ci-dessus : sa fibre générique T_{K} est un ensemble fini de points fermés de X_{K}.

LEMME 2.3. — *Il existe une hypersurface* $\mathrm{X}'_{\mathrm{K}}\subset\mathrm{X}_{\mathrm{K}}$, *géométriquement irréductible, contenant* T_{K} *et régulière aux points de* T_{K}.

Preuve. — Fixons un plongement projectif $\mathrm{X}_{\mathrm{K}}\subset\mathbf{P}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{K}}$, et notons $\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}$ l'adhérence de X_{K} dans $\mathbf{P}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{K}}$. Désignons par I l'Idéal de T_{K} dans $\mathscr{O}_{\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}}$ et considérons, pour $d\geqq 1$ convenable, le système linéaire

$$\mathrm{L}_d=\mathbf{P}(\mathrm{H}^0(\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}},\mathrm{I}(d))\check{\ })$$

des hypersurfaces de degré d de $\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}$ contenant T_{K}. Pour d assez grand, L_d définit un plongement projectif de l'éclaté de T_{K} dans $\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}$; par suite, le théorème de Bertini ([J], chapitre 1, théorème 6.3) implique qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U_d de L_d tel que les hypersurfaces correspondantes soient *géométriquement irréductibles* sur K.

Pour d assez grand, on a pour tout $x\in\mathrm{T}_{\mathrm{K}}$

$$\mathrm{H}^1(\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}},\mathrm{I}.\mathrm{I}_x(d))=0$$

où I_x désigne l'idéal de x dans $\bar{X}_K$. Ceci implique que l'on a un ouvert de Zariski dense V_d de L_d [complémentaire de la réunion des $\mathbf{P}(H^0(I.I_x(d))\check{\ })$ pour $x \in T_K$] tel que les hypersurfaces correspondantes soient *régulières* aux points de T_K.

Il suffit dès lors de choisit $s \in (U_d \cap V_d)(K)$ et de prendre pour X'_K le schéma des zéros de s dans X_K. ■

2.4. X'_K étant choisi comme en 2.3, désignons par X' l'adhérence de X'_K dans X : il est clair que X' est irréductible, à fibre générique X'_K géométriquement irréductible; comme de plus T_K est dense dans T, X' contient T et est donc surjectif sur B.

D'autre part, pour $v \in \Sigma$, soit $t_v \in T_K(L_v) \cap \Omega_v$: alors le point fermé de T_K image de t_v est à corps résiduel contenu dans L_v donc *séparable* sur K, et par suite X'_K est *lisse* en ce point. Si l'on pose

$$\Omega'_v = \{\text{points lisses de } X'_K(L_v)\} \cap \Omega_v$$

alors Ω'_v est un ouvert de $X'_K(L_v)$, non vide puisqu'il contient t_v.

En conclusion $\mathscr{S}' := (X' \to B, \Sigma, \{L_v\}, \{\Omega'_v\})$ est une donnée de Skolem sur B, incomplète si $\mathscr{S}$ l'est, vérifiant $\dim X'_K = \dim X_K - 1$, et il est immédiat que si $Y' \subset X'$ est un point entier de $\mathscr{S}'$, son image dans X est un point entier de $\mathscr{S}$. Comme annoncé plus haut nous sommes ainsi ramenés, par récurrence sur $\dim X_K$, au cas où $\dim X_K = 1$ (le lecteur constatera que si $\dim X_K = 0$ alors f est un isomorphisme !).

3. Le cas des pinceaux de courbes

3.1. Soit désormais $\mathscr{S} = (f : X \to B, \Sigma, \{L_v\}, \{\Omega_v\})$ une donnée de Skolem avec $\dim(X_K) = 1$ et f quasi-projectif et lisse. Choisissons une compactification

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{X} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

où j est une immersion ouverte dense et où $\bar{f}$ est projectif. Nous pouvons supposer $\bar{X}$ *normal* (quitte à le remplacer par son normalisé; remarquer que X est régulier puisque f est lisse).

Considérons la « frontière »

$$Z = \bar{X} - X.$$

C'est un fermé de $\bar{X}$ de dimension $\leqq 1$, ne contenant aucune fibre de $\bar{f}$ (puisque f est surjectif). Nous noterons encore Z le sous-schéma réduit de $\bar{X}$ de support Z, et nous poserons

$$(3.1.1) \qquad \begin{cases} g = h^1(\bar{X}_K, \mathcal{O}_{\bar{X}_K}) \\ z = \deg_K(Z_K). \end{cases}$$

Pour unifier la démonstration nous supposerons $z>0$ (on peut toujours agrandir Z!).

Quitte à remplacer B par un ouvert convenable et à élargir Σ (1.10), *nous supposerons que :*

(3.1.2)

(i) $\bar{X}$ est régulier;

(ii) les fibres de $\bar{f}$ sont géométriquement intègres;

(iii) Z est régulier, et $Z \to B$ est fini, plat et surjectif (en particulier, Z est un diviseur de Cartier dans $\bar{X}$).

[Justifications : pour (i), remarquer que $\mathrm{Sing}(\bar{X})$ est fini si $\bar{X}$ est normal. Pour (ii), *cf.* EGA IV, 12.2.1. Pour (iii), $\mathrm{Sing}(Z)$ est fini, ainsi que l'ensemble des composantes irréductibles de Z contenues dans une fibre].

3.2. Pour $d \in \mathbf{N}$, considérons la d-ième puissance symétrique

$$X^{(d)} := X^d / \mathfrak{S}_d, \tag{3.2.1}$$

le produit étant fibré sur B. La projection naturelle $X^d \to X^{(d)}$ est étale sur $X^d - \Delta$, où Δ est réunion des $\Delta_{ij} = \{ (x_1, \ldots, x_d) \mid x_i = x_j \}$ $(i \neq j)$. Notons

$$U_d := (X^d - \Delta)/\mathfrak{S}_d \subset X^{(d)} \tag{3.2.2}$$

l'ouvert de $X^{(d)}$ correspondant.

Pour tout B-schéma S on a (parce que X est lisse sur B) une bijection fonctorielle en S

$$\begin{aligned}(3.2.3)\quad X^{(d)}(S) \leftrightarrow \{ &\text{diviseurs de Cartier effectifs } D \subset X_S = X \times_B S, \\ &\text{finis et plats de degré } d \text{ sur } S \} \\ = \{ &\text{diviseurs de Cartier effectifs } D \subset \bar{X}_S, \text{ finis} \\ &\text{et plats de degré } d \text{ sur S et disjoints de } Z \}\end{aligned}$$

qui, pour $(x_1, \ldots, x_d) \in X^d(S)$, associe à l'image de $(x_1, \ldots, x_d)$ dans $X^{(d)}(S)$ le diviseur $[x_1] + \ldots + [x_d]$, où $[x_i]$ désigne le diviseur de Cartier image de la section $x_i : S \to X_S$.

Bien entendu, $U_d(S) \subset X^{(d)}(S)$ s'identifie ainsi à l'ensemble des diviseurs D qui sont de plus *étales* sur S.

Pour tout $v \in \Sigma$, notons

$$\Omega_v^{[d]} \subset U_d(K_v) \subset X^{(d)}(K_v) \tag{3.2.4}$$

l'ensemble des diviseurs $D \subset X \otimes_{\mathbf{R}} K_v$ qui sont effectifs de degré d, étales, L_v-déployés et contenus dans l'ouvert Ω_v de $X(L_v)$ (en ce sens que $D(L_v) \subset \Omega_v$).

LEMME 3.3. — (i) *Pour tout* $d \geqq 0$, $\Omega_v^{[d]}$ *est* ouvert *dans* $U_d(K_v)$ (*pour la topologie de* v).

(ii) *Si d est multiple de* $[L_v : K_v]$, *alors* $\Omega_v^{[d]} \neq \varnothing$.

Preuve. — (i) Soit $\Omega' \subset U_d(L_v)$ l'ensemble des diviseurs $D \subset X \otimes_{\mathbf{R}} L_v$ qui sont de la forme $[x_1] + \ldots + [x_d]$ où les $x_i \in \Omega_v$ sont deux à deux distincts. Il est clair que

$\Omega_v^{[d]} = \Omega' \cap U_d(K_v)$, donc il suffit de voir que Ω' est ouvert dans $U_d(L_v)$: c'est immédiat puisque Ω' est l'image, par la projection canonique, de l'ouvert $\Omega_v^d - \Delta(L_v) \subset X^d(L_v)$, et que cette projection est étale au-dessus de U_d donc induit une application ouverte sur les points à valeurs dans L_v.

(ii) Posons $\delta = [L_v : K_v]$, et $d = r\delta$. Pour chaque corps intermédiaire $K_v \subset M \subsetneqq L_v$, $\Omega_v \cap X(M)$ est une K_v-variété analytique de dimension $[M : K_v]$. Comme l'ensemble de ces corps est fini, la réunion de ces variétés est un fermé d'intérieur vide de Ω_v ; on peut ainsi trouver r points $P_1, \ldots, P_r \in \Omega_v$ qui sont de degré δ sur K_v, et sont deux à deux non conjugués sous $\mathrm{Gal}(L_v/K_v)$. Il est clair que le diviseur formé des P_i et de leurs conjugués est dans l'ouvert Ω' introduit plus haut, et est K_v-rationnel, donc définit un point de $\Omega_v^{[d]}$. ■

3.4. Pour tout B-schéma S et tout $d \in \mathbf{Z}$, considérons la catégorie $\mathscr{C}(S)$ [resp. $\mathscr{C}_d(S)$] des couples $(\mathscr{L}, \alpha)$ où $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible (resp. un faisceau inversible de degré d) sur $\bar{X}_S$ et $\alpha : \mathscr{O}_{Z_S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_{|Z_S}$ une trivialisation ; un morphisme $(\mathscr{L}, \alpha) \to (\mathscr{L}', \alpha')$ est un isomorphisme $\varphi : \mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}'$ tel que $\varphi \circ \alpha = \alpha'$. Nous noterons

$$\text{(3.4.1)} \qquad \mathrm{PG}(\bar{X}, Z)(S) \qquad (\text{resp. } \mathrm{PG}_d(\bar{X}, Z)(S))$$

le groupe des classes d'isomorphie d'objets de $\mathscr{C}(S)$ [resp. $\mathscr{C}_d(S)$]. $\mathrm{PG}(\bar{X}, Z)$ est le « foncteur de Picard généralisé » de $\bar{X}$ relativement à Z, et $\mathrm{PG}_0(\bar{X}, Z)(S)$ la jacobienne généralisée au sens de [S], chapitre V.

Il résulte de 3.1.2 (ii) et de la surjectivité de $Z \to B$ que, pour tout S, les catégories $\mathscr{C}(S)$ et $\mathscr{C}_d(S)$ sont *rigides*. Il s'ensuit que $\mathrm{PG}(\bar{X}, Z)$ et $\mathrm{PG}_d(\bar{X}, Z)$ sont des faisceaux sur B_{fppf}.

Si $\pi_Z : Z \to B$ est la projection induite par $\bar{f}$, on a une suite exacte naturelle de faisceaux sur B

$$\text{(3.4.2)} \qquad 1 \to \mathbf{G}_{m,B} \xrightarrow{a} (\pi_Z)_* \mathbf{G}_{m,Z} \xrightarrow{b} \mathrm{PG}(\bar{X}, Z) \xrightarrow{c} \underline{\mathrm{Pic}}_{\bar{X}/B} \to 1$$

où a est l'injection canonique, c l'oubli de la trivialisation sur Z, et où, pour S sur B-schéma et $\lambda \in H^0(Z_S, \mathbf{G}_m)$, $b(\lambda)$ est la classe du faisceau trivial $\mathscr{O}_{\bar{X}_S}$ muni de la trivialisation sur Z_S donnée par λ.

Il résulte de (3.4.2) que $\mathrm{PG}(\bar{X}, Z)$ est extension de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\bar{X}/B}$ par le B-schéma en groupes affine lisse commutatif $(\pi_Z)_* \mathbf{G}_{m,Z}/\mathbf{G}_{m,B}$. En particulier $\mathrm{PG}(\bar{X}, Z)$ est *représentable* par un B-schéma en groupes lisse séparé localement de présentation finie, dont $\mathrm{PG}_0(\bar{X}, Z)$ est la composante neutre. Nous n'aurons d'ailleurs à utiliser que la représentabilité de la fibre générique $\mathrm{PG}(\bar{X}, Z)_K$, résultant de celle de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\bar{X}_K/K}$ (Murre; *cf.* SGA 6, XII.1.5).

3.5. Si D désigne un diviseur de Cartier sur un schéma Y, nous noterons s_D la section rationnelle canonique de $\mathscr{O}_Y(D)$ [de sorte que $\mathrm{div}(s_D) = D$].

Soit S un B-schéma et soit $D \in X^{(d)}(S)$, considéré comme diviseur sur $\bar{X}_S$. Nous poserons

$$\text{(3.5.1)} \qquad \mathrm{cl}^Z(D) = \text{classe dans } \mathrm{PG}_d(\bar{X}, Z)(S) \text{ de } (\mathscr{O}_{\bar{X}_S}(D), s_{D|Z}).$$

On obtient ainsi un B-morphisme

$$(3.5.2)\qquad \begin{aligned} \varphi_d : \quad & X^{(d)} \to \mathrm{PG}_d(\bar{X}, Z) \\ & D \mapsto \mathrm{cl}^Z(D) \end{aligned}$$

dont les fibres se décrivent comme suit. Pour $(\mathscr{L}, \alpha) \in \mathscr{C}_d(S)$, posons

$$(3.5.3)\qquad \Gamma(\bar{X}_S, \mathscr{L}, \alpha) = \{ s \in H^0(\bar{X}, \mathscr{L}) \mid s_{|Z} = \alpha \}.$$

Si $s \in \Gamma(\bar{X}_S, \mathscr{L}, \alpha)$, s est une section *régulière* de $\mathscr{L}$ sur $\bar{X}_S$: en effet, se ramenant au cas où S est localement noethérien, on remarque que les points associés à $\mathcal{O}_{\bar{X}_S}$ sont maximaux dans leur fibre (EGA IV, 3.3.1), donc que s ne peut s'y annuler puisque $s_{|Z}$ est partout non nulle. Les zéros de s forment donc un diviseur de Cartier $D = \mathrm{div}(s)$ sur $\bar{X}_S$ qui est dans $X^{(d)}(S)$, et il est immédiat que $(\mathscr{L}, \alpha)$ est isomorphe à $\mathrm{cl}^Z(D)$. On a ainsi défini une bijection fonctorielle en S

$$(3.5.4)\qquad \begin{aligned} X^{(d)}(S) \leftrightarrow \{ & \text{classes d'isomorphie de triplets } (\mathscr{L}, \alpha, s) \\ & \text{où } (\mathscr{L}, \alpha) \in \mathrm{PG}_d(\bar{X}, Z)(S) \text{ et } s \in \Gamma(\bar{X}_S, \mathscr{L}, \alpha) \} \\ D & \mapsto (\mathrm{cl}^Z(D), s_D) \\ \mathrm{div}(s) & \leftarrow\!\shortmid (\mathscr{L}, \alpha, s). \end{aligned}$$

LEMME 3.6. — *On suppose que* $d \geqq 2g + z - 1$. *Alors le morphisme* $\varphi_d : X^{(d)} \to \mathrm{PG}_d(\bar{X}, Z)$ *de* (3.5.2) *est une fibration localement triviale en espaces affines de dimension* $d + 1 - g - z$.

Preuve. — Posons pour abréger $P_d = \mathrm{PG}_d(\bar{X}, Z)$, et notons $(\mathscr{U}_d, \alpha_d)$ l'objet universel de $\mathscr{C}_d(P_d)$: ainsi $\mathscr{U}_d$ est un faisceau inversible sur $\bar{X} \times_B P_d$, et α_d une trivialisation de sa restriction à $Z \times_B P_d$. Posons

$$(3.6.1)\qquad \begin{aligned} \mathscr{E}_d &= (\mathrm{pr}_2)_*(\mathscr{U}_d) \\ \mathscr{F}_d &= (\mathrm{pr}_2)_*(\mathscr{U}_{d\,|\,Z}) \\ \mathscr{N}_d &= (\mathrm{pr}_2)_*(\mathscr{U}_d(-Z)) \end{aligned}$$

(noter que Z est un diviseur de Cartier dans $\bar{X}$). L'hypothèse sur d assure que

$$(3.6.2)\qquad R^1(\mathrm{pr}_2)_*(\mathscr{U}_d) = R^1(\mathrm{pr}_2)_*(\mathscr{U}_d(-Z)) = 0$$

par dualité (remarquer pour cela que $\bar{X}$ est régulier, donc de Gorenstein, et que pour tout $b \in B$, $\bar{X}_b$ est géométriquement réduite de sorte qu'un faisceau inversible de degré <0 sur $\bar{X}_b$ n'a pas de section non nulle).

Il résulte de (3.6.2) ci-dessus que la formation des images directes $\mathscr{E}_d$ et $\mathscr{N}_d$ commute à tout changement de base, et que l'homomorphisme de restriction

$$(3.6.3)\qquad r_d : \quad \mathscr{E}_d \to \mathscr{F}_d$$

est un morphisme surjectif de faisceaux localement libres, dont le noyau est universellement $\mathscr{N}_d$. On dispose de plus d'une section

$$(3.6.4)\qquad \sigma_d \in \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_d, \mathscr{F}_d)$$

déduite de α_d. On déduit de r_d et σ_d, en passant aux fibrés vectoriels associés, un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}(\mathscr{E}_d^\vee) \arrow[rr, "\underline{r_d}"] \arrow[dr] & & \mathbf{V}(\mathscr{F}_d^\vee) \arrow[dl, shift left] \\ & \mathrm{P}_d \arrow[ur, shift left, "\underline{\sigma_d}"'] & \end{tikzcd}$$

Le lecteur vérifiera sans peine, en utilisant (3.5.4), que le sous-schéma $\underline{r_d}^{-1}(\mathrm{Im}\,\underline{\sigma_d})$ de $\mathbf{V}(\mathscr{E}_d^\vee)$ s'identifie à $\mathrm{U}^{(d)}$, la projection naturelle sur P_d correspondant au morphisme φ_d. Le lemme en résulte, puisque le sous-schéma en question est un torseur sous $\mathrm{Ker}(\underline{r_d})=\mathbf{V}(\mathscr{N}_d^\vee)$ qui est un fibré vectoriel de rang $d+1-g-z$. ■

3.7. Pour $d\in\mathbf{N}$ et $v\in\Sigma$, posons

$$(3.7.1)\qquad \mathrm{W}_v^{[d]}=\varphi_d(\Omega_v^{[d]}) \subset \mathrm{P}_d(\mathrm{K}_v)$$

où φ_d est défini en (3.5.2), $\Omega_v^{[d]}$ en (3.2.4) et où l'on pose, comme ci-dessus, $\mathrm{P}_d=\mathrm{PG}_d(\bar{\mathrm{X}}, \mathrm{Z})$.

Ainsi, $\mathrm{W}_v^{[d]}$ « est » l'ensemble des $(\mathscr{L}, \alpha)\in\mathrm{P}_d(\mathrm{K}_v)$ qui sont de la forme $\mathrm{cl}^{\mathrm{Z}}(\mathrm{D})$ pour D effectif de degré d, étale, L_v-déployé et contenu dans Ω_v.

LEMME 3.7.2. — (i) *Pour* $d\geqq 2g+z-1$, $\mathrm{W}_v^{[d]}$ *est un ouvert de* $\mathrm{P}_d(\mathrm{K}_v)$, *non vide si d est multiple de* $[\mathrm{L}_v : \mathrm{K}_v]$.

(ii) *Soient d et $d'\geqq 0$ avec $d\geqq 2g+z$. Alors, le groupe* $\mathrm{PG}(\bar{\mathrm{X}}, \mathrm{Z})$ *étant noté multiplicativement, on a*

$$\mathrm{W}_v^{[d]}.\,\mathrm{W}_v^{[d']} \subset \mathrm{W}_v^{[d+d']}.$$

Preuve. — (i) résulte de 3.3, et de 3.6 qui implique que φ_d est lisse. Prouvons (ii). Soit $(\mathscr{L}, \alpha)\in\mathrm{W}_v^{[d]}$, et soit $(\mathscr{L}', \alpha')=\mathrm{cl}^{\mathrm{Z}}(\mathrm{D}')$ avec $\mathrm{D}'\in\Omega_v^{[d']}$. Posons $\mathrm{A}=\Gamma(\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}_v}, \mathscr{L}, \alpha)$ (que nous identifierons au K_v-schéma en espaces affines correspondant). Considérons l'ouvert de Zariski U de A paramétrant les sections s telles que $\mathrm{div}(s)\cap\mathrm{D}'=\varnothing$. On a :

$$(3.7.2.1)\qquad \mathrm{U}\neq\varnothing.$$

Montrons en effet que $\mathrm{U}(\mathrm{L}_v)\neq\varnothing$: écrivant $\mathrm{D}'(\mathrm{L}_v)=\mathrm{P}_1+\ldots+\mathrm{P}_{d'}$, le complémentaire de $\mathrm{U}(\mathrm{L}_v)$ est la réunion des sous-espaces affines $\mathrm{A}_i=\{s\in\mathrm{A}_{\mathrm{L}_v}\,|\,s(\mathrm{P}_i)=0\}$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{A}_i\neq\mathrm{A}_{\mathrm{L}_v}$ pour tout i; or l'égalité impliquerait

$$\mathrm{H}^0(\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{L}_v}, \mathscr{L}(-\mathrm{Z}-\mathrm{P}_i)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^0(\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{L}_v}, \mathscr{L}(-\mathrm{Z}))$$

d'où $\mathrm{H}^1(\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{L}_v}, \mathscr{L}(-\mathrm{Z}-\mathrm{P}_i))\neq 0$ ce qui est exclu par l'hypothèse $d\geqq 2g+z$.

On a ainsi prouvé (3.7.2.1). Il en résulte que $U(K_v)$ est *dense* dans A pour la v-topologie. Si l'on pose

$$(3.7.2.2) \qquad V = \{ s \in A \mid \operatorname{div}(s) \in \Omega_v^{[d]} \}$$

alors V est un ouvert de A pour la v-topologie, non vide puisque $(\mathscr{L}, \alpha) \in W_v^{[d]}$. Il existe donc $D \in V \cap U(K_v)$, et il est clair que $D + D' \in \Omega_v^{[d+d']}$, d'où $\mathrm{cl}^Z(D + D') = (\mathscr{L}, \alpha) \otimes (\mathscr{L}', \alpha') \in W_v^{[d+d']}$. ■

LEMME 3.8. — *Soit $\mathscr{M}$ un faisceau inversible sur $\bar{X}$, de degré $d \geqq 2g + z - 1$. Soit α une trivialisation de $\mathscr{M}_{\mid Z}$, d'où un point $(\mathscr{M}, \alpha) \in P_d(R)$. Supposons que pour tout $v \in \Sigma$, le point correspondant $(\mathscr{M}, \alpha)_v \in P_d(K_v)$ soit dans $W_v^{[d]}$.*

Alors, si $\mathscr{S}$ est incomplète, il existe $s \in \Gamma(\bar{X}, \mathscr{M}, \alpha)$ telle que $\operatorname{div}(s)_v \in \Omega_v^{[d]}$ *pour tout v, et chaque composante irréductible de* $\operatorname{div}(s)$ *est un point entier de $\mathscr{S}$.*

Preuve. — La seconde assertion résulte des définitions. Montrons la première. Vu l'hypothèse sur d, $A := \Gamma(\bar{X}, \mathscr{M}, \alpha)$ est un « R-espace affine », *i. e.* un espace homogène principal sous le R-module projectif de type fini $H^0(\bar{X}, \mathscr{M}(-Z))$. Pour chaque $v \in \Sigma$, l'ensemble $U_v \subset A \otimes_R K_v$ formé des s telles que $\operatorname{div}(s) \in \Omega_v^{[d]}$ est un ouvert [ceci résulte de 3.3 (i)], non vide puisque $(\mathscr{M}, \alpha)_v \in W_v^{[d]}$. Le lemme résulte donc du *théorème d'approximation forte* qui affirme que, si $\mathscr{S}$ est incomplète, A est dense dans $\prod_{v \in \Sigma} (A \otimes_R K_v)$. Ledit théorème est établi par exemple dans [C-F], II, § 15, dans le cas d'un espace affine isomorphe à R, et il s'étend immédiatement au cas envisagé ici. ■

Il suffit donc, pour établir 1.3, de trouver $(\mathscr{M}, \alpha)$ vérifiant les hypothèses du lemme ci-dessus. Or on a, plus précisément :

LEMME 3.9. — *Soit $\mathscr{M}_0$ un faisceau inversible* ample *sur $\bar{X}$ (en d'autres termes,* $\deg(\mathscr{M}_0)_K > 0$). *Alors,* si $\mathscr{S}$ est incomplète, *il existe un entier $n \geqq 1$ et une trivialisation α de $\mathscr{M}_{0 \mid Z}^{\otimes n}$ tels que, en posant $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0^{\otimes n}$, le couple $(\mathscr{M}, \alpha)$ vérifie les hypothèses du lemme* 3.8.

Preuve. — Posons $d = \deg(\mathscr{M}_0)_K$. Quitte à remplacer $\mathscr{M}_0$ par une puissance convenable, nous supposerons que :

(i) $d \geqq 2g + z$;

(ii) pour tout $v \in \Sigma$, $[L_v : K_v]$ divise d;

(iii) $\mathscr{M}_{0 \mid Z} \simeq \mathscr{O}_Z$.

[Pour (iii), remarquer que les hypothèses 1.1 sur R et 3.1.2 (iii) sur Z impliquent que Pic(Z) est fini]. Fixons de plus une trivialisation α_0 de $\mathscr{M}_{0 \mid Z}$; ainsi, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, les trivialisations de $\mathscr{M}_{0 \mid Z}^{\otimes n}$ sont de la forme $\alpha = \lambda \alpha_0^{\otimes n}$ où $\lambda \in \Gamma(Z, \mathscr{O}_Z^\times)$. Posons

$$(3.9.1) \qquad \begin{aligned} K_\Sigma &= \prod_{v \in \Sigma} K_v \\ G &= P_0(K_\Sigma)/\operatorname{im}\Gamma(Z, \mathscr{O}_Z^\times) \end{aligned}$$

[on rappelle que $P_0 = PG_0(\bar{X}, Z)$]. On munit G de la topologie quotient (obtenue en munissant $P_0(K_\Sigma) = \prod_{v \in \Sigma} P_0(K_v)$ du produit des topologies v-adiques).

LEMME 3.9.2. — *Le groupe topologique* G *de* (3.9.1) *est* quasi-compact.

En particulier, pour tout $g \in \mathrm{G}$, *la suite* $(g^n)_{n \in \mathbf{N}}$ *admet l'élément neutre comme point d'accumulation.*

3.9.3. Montrons que ce lemme (et même sa seconde assertion) implique 3.9. Pour n entier $\geqq 1$, posons

$$\mathrm{W}_{\Sigma}^{[nd]} = \prod_{v \in \Sigma} \mathrm{W}_v^{[nd]} \subset \mathrm{P}_{nd}(\mathrm{K}_{\Sigma}).$$

En vertu de 3.7.2 et des hypothèses sur d, c'est un ouvert non vide de $\mathrm{P}_{nd}(\mathrm{K}_{\Sigma})$ et de plus, pour m et $n \geqq 1$, on a

$$\mathrm{W}_{\Sigma}^{[md]} . \mathrm{W}_{\Sigma}^{[nd]} \subset \mathrm{W}_{\Sigma}^{[(m+n)d]}. \tag{3.9.3.1}$$

Fixons $q_0 \in \mathrm{W}_{\Sigma}^{[d]}$ et soit $p_0 \in \mathrm{P}_d(\mathrm{K}_{\Sigma})$ la classe de $(\mathscr{M}_0, \alpha_0)$. L'ouvert $\mathrm{W}'_{\Sigma} = \mathrm{W}_{\Sigma}^{[d]} q_0^{-1}$ est un voisinage de l'unité dans $\mathrm{P}_0(\mathrm{K}_{\Sigma})$; appliquant (3.9.2) à son image canonique dans G, on voit qu'il existe $n \geqq 1$ tel que $(p_0 q_0^{-1})^n \in \Gamma(\mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}^{\times}) . \mathrm{W}'_{\Sigma}$; en d'autres termes il existe $\lambda \in \Gamma(\mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}^{\times})$ tel que $p_0^n q_0^{-n} \in \lambda q_0^{-1} \mathrm{W}_{\Sigma}^{[d]}$, ou encore

$$\lambda^{-1} p_0^n \in q_0^{n-1} \mathrm{W}_{\Sigma}^{[d]} \subset \mathrm{W}_{\Sigma}^{[nd]}$$

à cause de (3.9.3.1), puisque $q_0 \in \mathrm{W}_{\Sigma}^{[d]}$. C'est bien ce qu'affirme le lemme 3.9. ■

3.10. *Preuve du lemme* 3.9.2. De la suite exacte (3.4.2) on tire une suite exacte de groupes topologiques

$$1 \to ((\pi_{\mathrm{Z}})_* \mathbf{G}_{m,\mathrm{Z}}/\mathbf{G}_{m,\mathrm{B}})(\mathrm{K}_{\Sigma}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{P}_0(\mathrm{K}_{\Sigma}) \xrightarrow{\gamma} \underline{\mathrm{Pic}}_{\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}/\mathrm{K}}(\mathrm{K}_{\Sigma}) \tag{3.10.1}$$

[où il faut remarquer que γ est strict car *ouvert* : ceci résulte du fait que le morphisme c de (3.4.2) est lisse]. Si l'on note R' l'anneau de Z, on a

$$((\pi_{\mathrm{Z}})_* \mathbf{G}_{m,\mathrm{Z}}/\mathbf{G}_{m,\mathrm{B}})(\mathrm{K}_{\Sigma}) = (\mathrm{R}' \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{K}_{\Sigma})^{\times}/\mathrm{K}_{\Sigma}^{\times}$$

de sorte que $\mathrm{G} = \mathrm{P}_0(\mathrm{K}_{\Sigma})/\mathrm{im}\,\Gamma(\mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}^{\times})$ est extension d'un sous-groupe ouvert de

$$\underline{\mathrm{Pic}}^0_{\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}/\mathrm{K}}(\mathrm{K}_{\Sigma}) = \prod_{v \in \Sigma} \underline{\mathrm{Pic}}^0_{\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}/\mathrm{K}}(\mathrm{K}_v)$$

par le groupe

$$\mathrm{H} := (\mathrm{R}' \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{K}_{\Sigma})^{\times}/(\mathrm{R}'^{\times} . \mathrm{K}_{\Sigma}^{\times})$$

Le lemme ci-dessous implique que chaque $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}/\mathrm{K}}(\mathrm{K}_v)$ (donc aussi leur produit) est compact :

LEMME 3.30.2. — *Soient* F *un corps localement compact,* C *une courbe propre, régulière et géométriquement intègre sur* F, $\mathrm{J} = \underline{\mathrm{Pic}}^0_{\mathrm{C}/\mathrm{F}}$ *la jacobienne de* C. *Alors le groupe* J(F) *est compact* (*pour la topologie déduite de celle de* F).

Preuve (obligeamment fournie par M. Raynaud). — Quitte à remplacer F par une extension finie séparable (ce qui n'affecte pas les hypothèses sur C) on peut supposer que C a un point rationnel de sorte que J(F) s'identifie au groupe des classes de faisceaux inversibles de degré 0 sur C. D'autre part, d'après [A-K], J s'identifie à un ouvert du F-schéma *propre* J′ paramétrant les faisceaux sans torsion de rang 1 et de degré 0 sur C. Comme C est régulière tout $\mathcal{O}_C$-module cohérent sans torsion est localement libre, donc $J(F)=J'(F)$ est compact. ■

Pour achever de prouver 3.9.2, il suffit donc de voir que H est *quasi-compact*. En fait, on a le résultat plus fort suivant :

LEMME 3.10.3. — *Le groupe*

$$H_1 := (R' \otimes_R K_\Sigma)^\times / R'^\times$$

est quasi-compact.

Preuve. — Comme R′ est régulier il est produit de R-algèbres finies, régulières et intègres; on peut donc supposer que R′ est le normalisé de R dans une extension finie K′ de K, et l'on a alors

$$R' \otimes_R K_\Sigma = K'_{\Sigma'} = \prod_{v \in \Sigma'} K'^{\times}_v$$

où Σ′ est l'ensemble des places de K′ au-dessus d'une place de Σ. L'hypothèse que $\mathcal{S}$ est *incomplète* entraîne qu'il existe une place v_0 de K′ n'appartenant ni à Σ′, ni à Max(R′). Par suite notre assertion résulte, en remplaçant R par R′, du lemme (plus ou moins) bien connu suivant (*cf.* aussi [C-R], lemme 4.4) :

LEMME 3.10.4. — *Si $\mathcal{S}$ est incomplète, le groupe $K_\Sigma^\times / R^\times$ est quasi-compact.*

Preuve. — Comme, pour tout v, le groupe des unités locales $\{x \in K_v^\times \mid |x|_v = 1\}$ est compact, il suffit de montrer que le conoyau de

$$\lambda_\Sigma : \quad R^\times \to \mathbf{R}^\Sigma \qquad u \mapsto (\log |u|_v)_{v \in \Sigma}$$

est quasi-compact. Considérons l'ensemble S de toutes les places de K n'appartenant pas à Max(R), et l'homomorphisme analogue $\lambda_S : R^\times \to \mathbf{R}^S$. Il est bien connu ([C-F], II, § 18) que l'image de λ_S est un réseau dans l'hyperplan de $\mathbf{R}^S$ noyau de $(x_v)_{v \in S} \mapsto \sum_v x_v$, d'où une suite exacte

$$0 \to T \to \operatorname{Coker} \lambda_S \xrightarrow{\pi} \mathbf{R} \to 0$$

où $T \simeq (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^S$ est compact. On a d'autre part une suite exacte évidente

$$\mathbf{R}^{S-\Sigma} \to \operatorname{Coker} \lambda_S \to \operatorname{Coker} \lambda_\Sigma \to 0$$

et le composé $\mathbf{R}^{S-\Sigma} \to \operatorname{Coker} \lambda_S \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}$ est la forme linéaire somme des coordonnées. Comme $\mathscr{S}$ est incomplète on a $\Sigma \underset{\neq}{\subset} S$ et ce composé est donc surjectif. Par suite $\operatorname{Coker} \lambda_\Sigma$ est un quotient de T, donc quasi-compact. ■

BIBLIOGRAPHIE

EGA A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique*, chap. 1, Springer, coll. Grundlehren; chap. II, III, IV (*Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

SGA *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie* (*Lecture Notes in Math.*, Springer).

[A] M. ARTIN, *Versal Deformations and Algebraic Stacks* (*Inv. Math.*, vol. 27, 1974, p. 165-189).

[A-K] A. B. ALTMAN et S. L. KLEIMAN, *Compactifying the Picard scheme I, II* (*Advances in Math.*, vol. 35, n° 1, 1980, p. 50-112; *Amer. J. Math.*, vol. 101, n° 1, 1979, p. 10-41).

[C-R] D. CANTOR et P. ROQUETTE, *On Diophantine Equations Over the Ring of all Algebraic Integers* (*J. Number Theory*, vol. 18, 1984, p. 1-26).

[C-F] J. W. S. CASSELS et A. FRÖHLICH, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD, *The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus* (*Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 36).

[J] J.-P. JOUANOLOU, *Théorèmes de Bertini et applications* (*Progress in Math.*, Birkhäuser, vol. 42).

[K] D. KNUTSON, *Algebraic Spaces*, LNM 203, Springer.

[MB 1] L. MORET-BAILLY, *Groupes de Picard et problèmes de Skolem I* [*Ann. sci. E.N.S.* (4e série, t. 22, 1989, p. 161-179)].

[MB 2] L. MORET-BAILLY, *Problèmes de Skolem sur les champs algébriques* (en préparation).

[Ru 1] R. RUMELY, *Arithmetic Over the Ring of all Algebraic Integers* (*J. reine u. angew. Math.*, vol. 368, 1986, p. 127-133).

[Ru 2] R. RUMELY, *Capacity theory on algebraic curves* (à paraître).

[S] J.-P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann.

(Manuscrit reçu le 17 mai 1988,
révisé le 14 novembre 1988).

L. MORET-BAILLY,
I.R.M.A.R.,
Université de Rennes-I, Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France,
bitnet: MORET @ FRCICB81.