

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LAURENT MORET-BAILLY

Groupes de Picard et problèmes de Skolem. I

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 22, n° 2 (1989), p. 161-179

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_2_161_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GROUPES DE PICARD ET PROBLÈMES DE SKOLEM I

PAR Laurent MORET-BAILLY

1. Introduction : points entiers

1.1. Ce travail est le premier de trois articles dont le thème général est le suivant : étant donné un système d'équations diophantiennes

$$F_i(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, r)$$

à coefficients (disons) dans un anneau R d'entiers algébriques, trouver des conditions de nature locale sur R pour que ce système ait une solution (x_1, \dots, x_n) dans l'anneau \bar{R} de tous les entiers algébriques.

Ainsi, Skolem [S] a étudié en 1934 le cas où le système se réduit à

$$X_n P(X_1, \dots, X_{n-1}) = 1$$

où P est donné : il s'agit alors de trouver des entiers algébriques x_1, \dots, x_{n-1} tels que $P(x_1, \dots, x_{n-1})$ soit un entier algébrique inversible. Une telle solution, d'après Skolem, existe si et seulement si P est *primitif*, i. e. à coefficients premiers entre eux dans R .

1.2. Plus généralement, soit R un anneau de Dedekind de corps des fractions K ; on pose $B = \text{Spec } R$, on désigne par \bar{K} une clôture algébrique de K , et par \bar{R} la fermeture intégrale de R dans \bar{K} . Le « problème de Skolem » ci-dessus se généralise ainsi : étant donné un B -schéma X , a-t-on $X(\bar{R}) \neq \emptyset$? Dans le cas (qui seul nous intéressera) où X est séparé de type fini sur B , on a l'interprétation géométrique suivante :

LEMME 1.3. — Soit $f: X \rightarrow B$ un B -schéma séparé de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $X(\bar{R}) \neq \emptyset$;
- (ii) il existe un sous-schéma fermé irréductible Y de X , fini et surjectif sur B ;
- (iii) il existe un sous-schéma fermé de X , propre et surjectif sur B .

Preuve. — (ii) \Rightarrow (iii) est trivial, et (iii) \Rightarrow (i) résulte du critère valuatif de propreté. Supposons (i) et soit $x: \text{Spec } \bar{R} \rightarrow X$ un B -morphisme. Comme X est de type fini, x se

factorise par le spectre d'un sous-anneau de \bar{R} fini sur R ; (ii) en résulte en prenant pour Y l'image de x , qui est fermée dans X puisque X est séparé. ■

Ceci motive la définition suivante :

DÉFINITION 1.4. — Soit X un B -schéma de type fini. Un point entier de X sur B est un fermé irréductible de X , fini et surjectif sur B .

1.5. Nous aurons à considérer les conditions suivantes sur l'anneau R .

Condition (F) :

(i) pour toute extension finie K' de K , le groupe de Picard du normalisé R' de R dans K' est un groupe fini;

(ii) pour tout idéal maximal P de R , le corps résiduel R/P est fini.

Condition (T) :

(i) comme dans (F), avec « groupe fini » remplacé par « groupe de torsion »;

(ii) comme dans (F), avec « fini » remplacé par « extension algébrique d'un corps fini ».

Remarque. — Si l'on ne suppose pas R excellent, R' , dans les conditions (i) ci-dessus, n'est pas nécessairement fini sur R ; c'est toutefois un anneau de Dedekind (théorème de Krull-Akizuki, cf. Bourbaki, AC chap. 7).

THÉORÈME 1.6. — Soit $f : X \rightarrow B$ un B -schéma séparé de type fini. Soit K' une extension finie de K telle que les composantes irréductibles de $X_{\bar{K}}$ soient définies sur K' (en d'autres termes, les composantes de $X_{\bar{K}}$ sont géométriquement irréductibles sur K'). Soit B' le normalisé de B dans K' , et posons $X' = X \times_B B'$. Considérons les conditions suivantes :

(i) X admet un point entier sur B , i. e. $X(\bar{R}) \neq \emptyset$;

(ii) l'une au moins des composantes irréductibles de X' s'envoie surjectivement sur B' .

Alors (i) implique (ii); de plus (i) et (ii) sont équivalentes si R est excellent et vérifie la condition (T) de 1.5.

Il est immédiat que (i) implique (ii) : si X admet un point entier sur B il en est de même de X' sur B' [car il vérifie alors la condition (iii) de 1.3]; un tel point entier est contenu dans une composante de X' , laquelle est donc surjective sur B' .

Pour voir que (ii) implique (i), on peut remplacer B par B' et X par une composante de X' surjective sur B' . On est ainsi ramené à l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.7 (Rumely). — Supposons que R soit excellent et vérifie (T). Soit $f : X \rightarrow B$ un B -schéma séparé de type fini. On suppose que X est irréductible, que X_K est géométriquement irréductible sur K , et que f est surjectif. Alors $X(\bar{R}) \neq \emptyset$.

1.8. On trouvera dans [MB 1] des motivations pour la condition (T). On y verra notamment que (T) (i) est nécessaire pour la validité du théorème. Par contre (T) (ii) ne l'est pas comme le montre l'exemple d'un anneau R local hensélien; on trouvera dans *loc. cit.* un exemple de Raynaud mettant en défaut la conclusion de 1.7, où (T) (i) est vérifiée (R est local) mais non (T) (ii).

1.9. La condition (F) [et *a fortiori* (T)] est vérifiée si R est l'anneau des entiers d'un corps de nombres, ou l'anneau d'une courbe affine lisse sur un corps fini, ou un localisé d'un tel anneau.

1.10. Les théorèmes 1.6 et 1.7 s'étendent immédiatement au cas où X , au lieu d'un schéma, est un *espace algébrique*, ou même un *champ algébrique* sur B , ceci en vertu du lemme de Chow ([K], théorème 3.1 pour les espaces algébriques, [D-M], 4.12 pour les champs). Le même lemme, version schémas (EGA II, 5.6.1), montre aussi que l'on peut supposer f *quasi-projectif*.

1.11. Le théorème 1.7 est prouvé par Rumely dans [R 2], dans le cas où R est un anneau d'entiers algébriques; la preuve de Rumely fait appel de façon essentielle à sa « théorie des capacités » [R 1]. L'objet principal du présent travail est d'en donner une démonstration géométrique, due à L. Szpiro et à l'auteur.

Celle-ci est présentée au paragraphe 3. Par un argument de section hyperplane utilisant le « théorème de Bertini », on se ramène facilement au cas où X est de dimension relative 1 sur B . On plonge alors X comme ouvert dense dans un B -schéma \bar{X} propre sur B , et l'on cherche un point entier de X sous la forme d'un diviseur de Cartier Y de \bar{X} , disjoint de $Z = \bar{X} - X$. Nous aurons besoin pour cela d'informations sur les groupes de Picard des sous-schémas fermés de X de support Z (essentiellement parce qu'on construit d'abord le faisceau $\mathcal{O}_X(Y)$, dont la restriction à un tel sous-schéma fermé doit être triviale), et aussi sur les « groupes de Picard locaux » aux points fermés de \bar{X} : ceux-ci sont *de torsion*, de sorte que tout diviseur de Weil sur \bar{X} a un multiple non trivial qui est un diviseur de Cartier.

Ces divers résultats sur les groupes de Picard sont rassemblés au paragraphe 2, et ne prétendent pas à l'originalité. Le théorème 2.8, sur les groupes de Picard locaux, semble connu des spécialistes mais non publié jusqu'à présent. On aurait d'ailleurs pu appliquer à \bar{X} la résolution des singularités et ainsi se passer du théorème 2.8; nous avons toutefois pensé que celui-ci valait le détour.

1.12. Au paragraphe 4, on déduit du théorème 1.7 le théorème de contraction suivant, que m'a signalé Raynaud. On suppose que R vérifie (T) (ii) et que $f: X \rightarrow B$ est projectif à fibres géométriquement connexes de dimension 1. On se donne de plus un fermé V de X , de dimension 1 et strictement contenu dans une fibre de f . Alors on peut « contracter V », en ce sens qu'il existe un B -morphisme $\pi: X \rightarrow X'$ qui envoie V sur un ensemble fini et induit sur $X - V$ une immersion ouverte. Lorsque B est une courbe sur un corps fini, c'est une conséquence d'un théorème d'Artin [A]. Notons qu'inversement on peut déduire 1.7 du théorème de contraction : c'est ce qui est fait dans [MB 1] (où le théorème de contraction n'est toutefois pas démontré).

1.13. Dans [R 2], Rumely prouve en fait le théorème de densité suivant : sous les hypothèses de 1.7, supposons de plus que K soit un corps de nombres ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini et donnons-nous un ensemble fini Σ de places de K , disjoint de l'ensemble $\text{Max}(R)$ des points fermés de B . Pour chaque $v \in \Sigma$, fixons une clôture algébrique \bar{K}_v de K_v et donnons-nous un ouvert non vide Ω_v de $X(\bar{K}_v)$, pour la topologie définie par v , invariant sous $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$. On suppose qu'il existe au moins une place de K n'appartenant ni à Σ , ni à $\text{Max}(R)$. Alors on peut trouver un point entier Y de X tel que, pour tout $v \in \Sigma$, $Y(\bar{K}_v)$ soit contenu dans Ω_v .

On prouve au paragraphe 6 le théorème de densité dans le cas particulier où toutes les places de Σ sont non archimédiennes : c'est alors un corollaire facile de 1.7, moyennant quelques généralités topologiques exposées au paragraphe 5. Ici encore les résultats du paragraphe 5 ne sont probablement guère nouveaux mais l'auteur ne les a pas trouvés dans la littérature.

La méthode très géométrique employée ici ne semble pas pouvoir s'étendre aux places archimédiennes; nous donnons dans [MB 2] une preuve du théorème de densité général, avec des compléments (rationalité locale) que nous exposons brièvement ci-dessous.

1.14. Le théorème de densité a été d'abord démontré par Cantor et Roquette [C-R] lorsque la fibre générique X_K est *K-unirationnelle*. Dans ce cas, avec les notations de 1.13, ils prouvent même que l'on peut se donner, pour chaque $v \in \Sigma$, un ouvert non vide U_v de $X(K_v)$, formé de points lisses, et imposer au point entier Y d'être « contenu dans chaque U_v », au sens suivant : pour $v \in \Sigma$, tous les points de $Y \otimes_K K_v$ sont K_v -rationnels et appartiennent à U_v .

Ce résultat est établi dans [MB 2] sans hypothèse d'unirationalité, par une méthode généralisant celle de [C-R], et indépendante du présent article. On peut même prendre pour U_v un ouvert non vide (et formé de points lisses) de $X(L_v)$, où L_v est une extension finie galoisienne fixée de K_v ; la conclusion est alors que, pourvu que chaque U_v soit invariant sous $\text{Gal}(L_v/K_v)$, on peut choisir Y tel que chaque $Y \otimes_K L_v$ soit formé de points L_v -rationnels, tous dans U_v .

Bien entendu, ceci redémontre 1.7. Il est à noter que P. Roquette a annoncé également une preuve de 1.7 par les méthodes de [C-R].

Ces résultats seront étendus dans [MB 3] au cas où X est un *champ algébrique* (au sens de [D-M]) séparé de type fini sur B .

1.15. *Questions d'effectivité.* Comme expliqué dans [R 2], le théorème 1.7 implique que le « dixième problème de Hilbert sur \mathbb{Z} » a une réponse positive : il existe un algorithme permettant de décider si un système donné d'équations polynômes à coefficients dans \mathbb{Z} a une solution. En ce qui concerne la détermination d'une telle solution, la méthode de Rumely n'est pas constructive, en raison du recours à la théorie des capacités. Il est possible que la preuve donnée au paragraphe 3 conduise à un algorithme de résolution. L'auteur plaide l'incompétence dans ce domaine; la résolution des singularités est probablement un obstacle sérieux. Voir aussi la remarque 3.9.

Le théorème principal de cet article (1.7) m'a été suggéré par L. Szpiro, et sa démonstration est le fruit d'une collaboration avec lui. Je tiens également à remercier M. Raynaud pour ses nombreuses remarques et suggestions.

2. Théorèmes de finitude pour certains groupes de Picard

A. GROUPES DE PICARD GLOBAUX EN DIMENSION 1. — 2.1. Soient R , K et B comme dans 1.2, et donnons-nous de plus un B -schéma séparé de type fini Z , *purement de dimension relative* 0 au sens de Fulton ([F], 20.1) : cela signifie ici que chaque composante irréduc-

tible de Z est :

- soit quasi-finie et dominante sur B (« horizontale »);
- soit une courbe au-dessus d'un point fermé de K (« verticale »).

Notons que toute composante de Z est soit verticale et *propre* sur B , soit *affine*.

DÉFINITION 2.2. — On note $\text{Pic}^0(Z)$ le sous-groupe de $\text{Pic}(Z)$ formé des classes de faisceaux inversibles L tels que, pour toute composante C et Z verticale et propre sur B , on ait $\deg_C(L|_C) = 0$.

THÉORÈME 2.3. — Supposons que R vérifie la condition (F) [resp. (T)] de 1.5. Alors $\text{Pic}^0(Z)$ est un groupe fini (resp. de torsion).

Pour la démonstration, nous supposons pour fixer les idées que R vérifie (F); la preuve dans le cas (T) est entièrement analogue.

2.4. Réduction au cas où Z est réduit. — Z admet une suite de sous-schémas fermés, de support Z :

$$Z = Z_n \supset Z_{n-1} \supset \dots \supset Z_0 = Z_{\text{red}}$$

tels que, pour $i = 1, \dots, n-1$ l'inclusion de Z_i dans Z_{i+1} soit définie par un idéal J_i de carré nul, de support contenu dans une composante irréductible de Z . Si cette composante est affine, on a $H^1(J_i) = 0$; sinon, elle est verticale et propre sur B , donc $H^1(J_i)$ est un R -module de longueur finie, donc *fini*. Les suites exactes habituelles

$$H^1(J_i) \rightarrow \text{Pic}(Z_{i+1}) \rightarrow \text{Pic}(Z_i)$$

déduites de

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow J_i \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{i+1}}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{Z_i}^\times \rightarrow 1 \\ f \mapsto 1 + f \end{aligned}$$

induisent des suites exactes

$$H^1(J_i) \rightarrow \text{Pic}^0(Z_{i+1}) \rightarrow \text{Pic}^0(Z_i)$$

(c'est immédiat d'après la définition de Pic^0). Il en résulte par récurrence sur n que si $\text{Pic}^0(Z_{\text{red}})$ est fini il en est de même de $\text{Pic}^0(Z)$.

2.5. Réduction au cas où Z est normal. — Supposons Z réduit; soit $\pi: Z_1 \rightarrow Z$ le normalisé de Z , et soit $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_Z$ le conducteur correspondant [qui est à la fois un idéal de \mathcal{O}_Z et de $\pi_*(\mathcal{O}_{Z_1})$]. On considère le diagramme commutatif, à lignes exactes, de faisceaux sur Z :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & (1 + \mathfrak{f})^\times & \rightarrow & \mathcal{O}_Z^\times & \rightarrow & (\mathcal{O}_Z/\mathfrak{f})^\times \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & (1 + \mathfrak{f})^\times & \rightarrow & \pi_* \mathcal{O}_{Z_1}^\times & \rightarrow & (\pi_* \mathcal{O}_{Z_1}/\mathfrak{f})^\times \rightarrow 1 \end{array}$$

qui donne naissance à

$$\begin{array}{ccccc} H^0((\mathcal{O}_Z/\mathfrak{f})^\times) & \rightarrow & H^1((1+\mathfrak{f})^\times) & \rightarrow & \text{Pic } Z \rightarrow 1 \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ H^0((\mathcal{O}_{Z_1}/\mathfrak{f})^\times) & \rightarrow & H^1((1+\mathfrak{f})^\times) & \rightarrow & \text{Pic } Z_1 \rightarrow 1 \end{array}$$

qui montre que $\text{Ker}(\text{Pic } Z \rightarrow \text{Pic } Z_1) = \text{Ker}(\text{Pic}^0 Z \rightarrow \text{Pic}^0 Z_1)$ est un sous-quotient de $H^0((\mathcal{O}_{Z_1}/\mathfrak{f})^\times)$. Ce dernier est fini, d'où la conclusion (remarquer que les corps résiduels de Z_1 sont encore finis, en vertu du théorème de Krull-Akizuki).

2.6. *Fin de la démonstration.* — Lorsque Z est normal, il est somme de ses composantes irréductibles. On suppose donc Z irréductible, et l'on a trois cas :

- *Z horizontal* : alors Z est un ouvert d'un schéma $\text{Spec } R'$ comme en (F)(i) : il suffit donc de remarquer que $\text{Pic } R' \rightarrow \text{Pic } Z = \text{Pic}^0 Z$ est surjectif.

- *Z vertical et propre* : alors $\text{Pic}^0 Z$ est contenu dans le groupe des points rationnels de la jacobienne de Z , qui est une variété algébrique sur un corps fini; c'est donc bien un groupe fini.

- *Z vertical et affine* : alors Z est un ouvert d'une courbe propre \bar{Z} , et l'on a une suite exacte

$$\text{Pic}^0 \bar{Z} \rightarrow \text{Pic } Z \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

(où d est le pgcd des degrés des points de $\bar{Z} - Z$), ce qui achève la démonstration. ■

B. GROUPES DE PICARD LOCAUX EN DIMENSION 2.

2.7. *Notations.* — Soit A un anneau local noethérien excellent de dimension 2, de corps résiduel k . On note $S = \text{Spec } A$, $\{s\} = \text{Spec } k$, $U = S - \{s\}$, et l'on suppose que U est régulier.

THÉORÈME 2.8. — *On suppose k fini (resp. algébrique sur un corps fini). Alors $\text{Pic } U$ est fini (resp. de torsion).*

Comme pour le théorème 2.3, nous supposons k fini dans la démonstration.

2.9. *Réductions.* — On peut supposer A réduit : remplacer A par A_{red} ne change pas U . On peut supposer A intègre : si P_1, \dots, P_n sont les idéaux premiers minimaux de A et si U_i désigne le complémentaire du point fermé dans $\text{Spec}(A/P_i)$, il est immédiat que U est somme disjointe des U_i .

On peut supposer A normal : si M_1, \dots, M_n sont les idéaux maximaux du normalisé A_1 de A (qui est fini sur A puisque A est supposé excellent), et U_i le complémentaire du point fermé dans $\text{Spec}(A_1)_{M_i}$, il est immédiat que $\text{Pic } U$ s'injecte dans $\prod_{i=1}^n \text{Pic}(U_i)$.

On peut supposer A complet : si \hat{A} désigne son complété, et \hat{U} le spectre épointé de \hat{A} , alors $\text{Pic } U \hookrightarrow \text{Pic } \hat{U}$. En effet, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{U} & \xrightarrow{\hat{j}} & \hat{S} = \text{Spec } \hat{A} \\ \downarrow f_U & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{j} & S \end{array}$$

Pour $L \in \text{Pic } U$, posons $M = j_* L$: c'est un A -module de profondeur 2. Par suite $\text{prof}(f^* M) = 2$, de sorte que $f^* M = \hat{j}_*(f_U^* L)$. Si $f_U^* L$ est libre alors $\hat{j}_*(f_U^* L) \cong \mathcal{O}_{\hat{S}}$ d'où $M \cong \mathcal{O}_S$ et L est libre.

2.10. Pour A normal complet, soit $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ une résolution des singularités de S . Soit $E = \pi^{-1}(s)$, et soit J l'ensemble des composantes irréductibles de E . La forme intersection sur Z^J (identifié à l'ensemble des diviseurs à support dans E) est *définie négative* ([M], § 1); il existe donc, d'après [A], lemme 2.10, un diviseur effectif $Y \subset \tilde{S}$, de support E , tel que pour tout $Z \supset Y$ de support E on ait $\text{Pic } Z \xrightarrow{\sim} \text{Pic } Y$ (l'injectivité nous suffirait). Si \tilde{S}_E désigne le complété formel de \tilde{S} le long de E , on a en particulier $\text{Pic}(\tilde{S}_E) \cong \text{Pic } Y$. D'autre part, comme A est complet on a (théorème des morphismes propres, EGA III, 4.15) $\text{Pic } \tilde{S} \hookrightarrow \text{Pic}(\tilde{S}_E)$, d'où finalement

$$\text{Pic } \tilde{S} \hookrightarrow \text{Pic } Y.$$

On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ Z^J & \rightarrow & \text{Pic } \tilde{S} & \rightarrow & \text{Pic } U & \rightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Z^J & \rightarrow & \text{Pic } Y & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \end{array}$$

qui montre que $\text{Pic } U$ est un sous-groupe de C ; il suffit donc de voir que C est fini. Pour cela considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{Pic}^0 Y & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & Z^J & \rightarrow & \text{Pic } Y & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & Z^J & \xrightarrow{i} & (Z^J)^* & \rightarrow & F \rightarrow 0 \end{array}$$

où i est déduit de la forme intersection sur Z^J donc est bien injectif, de sorte que F est fini. Il reste à voir que $\text{Pic}^0 Y$ est un groupe fini, ce qui se démontre comme dans le théorème 2.3. ■

3. Preuve du théorème de Rumely

Dans tout ce paragraphe on adopte les hypothèses et notations du théorème 1.7. On suppose de plus (*cf.* remarque 1.10) que $f: X \rightarrow B$ est *quasi-projectif* et que X est réduit, donc *intègre* : ceci implique que f est *plat*. Les fibres de f ont toutes la même dimension, notée $\dim(X/B)$; le lecteur remarquera que si $\dim(X/B)=0$, alors f est un isomorphisme. Nous supposons donc désormais que $\dim(X/B) \geq 1$.

3.1. *Réduction au cas où $\dim(X/B)=1$ (nous suivons [R 2]).*

LEMME 3.1.1. — *Il existe un fermé $T \subset X$ de dimension 1, quasi-fini et surjectif sur B .*

Preuve. — Pour tout point fermé $x \in X$, il existe un fermé de X contenant x , quasi-fini et dominant sur B (on peut par exemple invoquer brutalement EGA IV, 14.5.3). Choisissons arbitrairement un tel fermé T_1 : alors $f(T_1)$ est le complémentaire dans B d'un ensemble fini $\{b_2, \dots, b_n\}$. Il suffit de choisir pour chaque $i \in \{2, \dots, n\}$ un point fermé $x_i \in f^{-1}(b_i)$ et un $T_i \ni x_i$, quasi-fini et dominant sur B , et de poser $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$. ■

LEMME 3.1.2. — *On suppose que $\dim(X/B) \geq 2$. Il existe un fermé X' de X , de dimension relative $\dim(X/B) - 1$, tel que le morphisme induit $X' \rightarrow B$ vérifie encore les hypothèses du théorème 1.7.*

Preuve. — Choisissons T comme ci-dessus, et désignons par \tilde{X}_K l'éclaté de T_K dans X_K . Fixons un K -plongement projectif de \tilde{X}_K : comme K est infini et $\dim \tilde{X}_K \geq 2$, le théorème de Bertini ([J], théorème 6.3) montre qu'il existe une hypersurface H ne contenant pas \tilde{X}_K , telle que $H \cap \tilde{X}_K$ soit géométriquement irréductible. L'image X'_K de $H \cap \tilde{X}_K$ dans X_K est un fermé de X_K de codimension 1, géométriquement irréductible et contenant T_K . Il suffit de prendre pour X' l'adhérence de X'_K dans X (laquelle contient T , donc s'envoie surjectivement sur B). ■

3.2. On suppose désormais que $\dim(X/B) = 1$, et l'on fixe une compactification relative

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\ f \searrow & & \swarrow \bar{f} \\ & B & \end{array}$$

où j est une immersion ouverte dense, et où \bar{f} est projectif et plat. On peut supposer, et l'on suppose, que \bar{X} est normal.

Commençons par quelques préliminaires sur la géométrie de \bar{X} . Nous utiliserons constamment le lemme suivant, conséquence du théorème 2.8 :

LEMME 3.3. — *Soit D un diviseur de Weil (ou 1-cycle) sur \bar{X} . Il existe un entier $n > 0$ tel que nD soit un diviseur de Cartier.*

Preuve. — On peut supposer $D \geq 0$. Comme \bar{X} est normal de dimension 2, l'ensemble S des points singuliers de \bar{X} est fini; soit U l'ouvert complémentaire et notons $i: U \rightarrow \bar{X}$

l'inclusion. Alors $D \cap U$ est un diviseur de Cartier dans U , défini par une section s_U du faisceau inversible $L_U = \mathcal{O}_U(D \cap U)$. Comme B est excellent (donc \bar{X} aussi) on peut appliquer le théorème 2.8 aux anneaux locaux de \bar{X} aux points de S : ainsi il existe, quitte à remplacer D par un multiple, un faisceau inversible L sur \bar{X} prolongeant L_U . Comme \bar{X} est normal, L coïncide avec $i_*(L_U)$, et la section $i_*(s_U)$ de L sur \bar{X} définit un diviseur de Cartier prolongeant $D \cap U$. ■

3.4. *Notations :*

- $A_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} A$ pour un groupe abélien A ;
- \mathcal{V} = groupe des diviseurs de Weil *verticaux* de \bar{X} ;
- $\text{Pic}^{\deg 0} \bar{X} = \{ L \in \text{Pic } \bar{X} \mid \deg L_K = 0 \}$;
- pour tout point fermé $b \in B$ on note :
 - $\bar{X}_b = \bar{f}^{-1}(b) \in \mathcal{V}$;
 - $I_b = \{ \text{composantes irréductibles de } \bar{X}_b \}$;
 - $W_b = \mathbf{Q}^{I_b} / \mathbf{Q} \cdot \bar{X}_b$;
- $S = \{ b \in B \mid W_b \neq 0 \} = \{ b \in B \mid \bar{X}_b \text{ est réductible} \}$;
- $W = \bigoplus_{b \in B} W_b = \bigoplus_{b \in S} W_b = \mathcal{V}_{\mathbf{Q}} / \bar{f}^* \text{Div}_{\mathbf{Q}} B$;

3.5. *Intersections.* — On définit un accouplement

$$(3.5.1) \quad \begin{aligned} \text{Pic } \bar{X} \times \mathcal{V} &\rightarrow \text{Div } B \\ (L, D) &\rightarrow \langle L, D \rangle \end{aligned}$$

par linéarité en D , en imposant

$$\langle L, D \rangle = (\deg_{x(b)}(L|_D)) \cdot [b]$$

lorsque D est une courbe intègre au-dessus de $b \in B$. Si $D_0 \in \text{Div } B$, on a

$$\langle L, \bar{f}^* D_0 \rangle = (\deg L_K) D_0$$

de sorte que si $\deg L_K = 0$, $\langle L, D \rangle$ ne dépend que de $D \bmod \bar{f}^*(\text{Div } B)$. On en déduit un accouplement, encore noté $\langle \ , \ \rangle$:

$$(3.5.2) \quad \text{Pic}^{\deg 0} \bar{X} \times (\mathcal{V} / \bar{f}^*(\text{Div } B)) \rightarrow \text{Div } B.$$

Il est commode de rendre numériques ces deux accouplements, en affublant chaque point fermé $b \in B$ du degré 1 (par exemple), et en posant

$$(L, D) = \deg \langle L, D \rangle \in \mathbf{Z}.$$

En particulier, (3.5.2) induit un accouplement

$$(3.5.3) \quad \text{Pic}_{\mathbf{Q}}^{\deg 0} \bar{X} \times W \rightarrow \mathbf{Q}$$

d'où, en restreignant à W , une forme bilinéaire

$$(3.5.4) \quad W \times W \rightarrow \mathbf{Q}$$

qui est *définie négative* : ceci se démontre comme dans le cas régulier, cf. par exemple [SPC], exposé 1, prop. 2. 6. De plus W est somme orthogonale des W_b , pour $b \in S$.

3. 6. Revenant à la situation de 3. 2, posons $Z = \bar{X} - X$. Pour simplifier les notations on peut supposer que Z est purement de dimension 1, par exemple en lui ajoutant un fermé convenable contenant ses points isolés. On peut alors écrire

$$Z = V \cup F$$

où F est fini et plat sur B et où V est vertical. Comme f est surjectif par hypothèse, V ne contient aucune fibre de \bar{f} de sorte que si l'on désigne par J l'ensemble des composantes de V et si l'on pose

$$E = Q^J = \{ \text{diviseurs à support dans } V \}_{\mathbb{Q}}$$

alors E s'injecte dans W , et en particulier la forme intersection induite sur E par 3. 5. 4 est *définie négative*. De plus :

LEMME 3. 7. — Soit $D \in E$. On suppose que $(D, C) \geq 0$ (resp. > 0) pour tout $C \in J$. Alors D est effectif (resp. effectif de support V).

Preuve. — Écrivons $D = P - N$, P et $N \geq 0$, P et N sans composante commune [de sorte que $(P, N) \geq 0$]. Alors

$$0 \geq (D, N) = (P, N) = (P, N) - (N, N) \geq 0$$

de sorte que $(N, N) = 0$, d'où $N = 0$. Ceci montre que D est effectif. Pour la seconde assertion, soit $C_0 \in J$. Pour tout n assez grand et tout $C \in J$, on a $((nD - C_0), C) \geq 0$ par hypothèse. Donc $nD - C_0$ est effectif et $C_0 \subset \text{Supp}(D)$. ■

Nous allons établir le raffinement suivant de 1. 7 :

PROPOSITION 3. 8. — Soit H_K un faisceau inversible ample sur \bar{X}_K . Il existe un diviseur effectif $Y \subset \bar{X}$, disjoint de Z , tel que $\mathcal{O}_{\bar{X}}(Y)_K \cong H_K^{\otimes d}$ pour $d > 0$ convenable.

Il est clair (cf. lemme 1. 3) que ceci implique l'existence d'un point entier.

Preuve de 3. 8. — On construit Y comme section d'un certain faisceau inversible sur \bar{X} , lui-même construit en plusieurs étapes.

Étape I. — Soit D un diviseur de Weil sur \bar{X} tel que $\mathcal{O}_{\bar{X}}(D)_K \cong H_K$. D'autre part attachons à chaque $C \notin J$ un rationnel $d_C > 0$ de manière que, pour tout $b \in B$, on ait $\sum_{\substack{C \subset \bar{X}_b \\ C \notin J}} d_C = \deg H_K$. (C'est possible car V ne contient aucune fibre \bar{X}_b , donc la somme à gauche n'est jamais vide.) Il résulte alors de la non-dégénérescence de la forme intersection sur W qu'il existe $\Delta \in \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ (diviseur vertical à coefficients rationnels) tel que, pour C intègre et vertical,

$$((D + \Delta), C) = \begin{cases} 0 & \text{si } C \in J \\ d_C & \text{si } C \notin J. \end{cases}$$

Bien entendu Δ est effectivement calculable en termes de la matrice d'intersection sur W et des nombres (D, C) .

Étape II. — Il résulte de 3.3 qu'il existe $n_0 > 0$ tel que $n_0(D + \Delta)$ soit un diviseur de Cartier sur \bar{X} . Le faisceau $L_0 = \mathcal{O}_{\bar{X}}(n_0(D + \Delta))$ vérifie alors :

- (i) $(L_0)_K \cong H_K^{n_0}$
- (ii) pour toute composante C d'une fibre de \bar{f} , on a

$$(L_0 \cdot C) \begin{cases} = 0 & \text{si } C \in J \\ > 0 & \text{si } C \notin J. \end{cases}$$

Les étapes III, IV, V ci-dessous sont indépendantes de I et II :

Étape III. — Il existe sur \bar{X} un diviseur effectif à coefficients rationnels D_1 , de support Z , tel que

$$\forall C \in J, (D_1 \cdot C) < 0.$$

Cherchons en effet D_1 sous la forme $D_1 = F + D_0$, où $D_0 \in E$. D_0 doit vérifier :

$$\forall C \in J, (D_0 \cdot C) < -(F \cdot C),$$

système que l'on peut résoudre puisque (\cdot) est non dégénérée. Or ceci implique, par le lemme 3.7, que D_0 est effectif de support V , d'où l'assertion.

Étape IV. — Comme dans l'étape II, il existe un multiple D_2 de D_1 vérifiant :

- (i) D_2 est un diviseur de Cartier effectif de support Z ;
- (ii) $\forall C \in J, (D_2 \cdot C) < 0$.

Notons qu'alors $\mathcal{O}_{D_2}(-D_2)$ est *ample* sur D_2 , car la condition ci-dessus implique qu'il est ample sur le normalisé de $(D_2)_{\text{red}} = Z$.

Étape V. — L'assertion d'amplitude ci-dessus implique qu'il existe $k > 0$ tel que $H^1(D_2, \mathcal{O}_{D_2}(-m D_2)) = 0$ pour tout $m \geq k$. Posons $D_3 = k D_2$: alors D_3 est un diviseur de Cartier effectif, de support Z , vérifiant :

- (i) $\mathcal{O}_{D_3}(-D_3)$ est ample sur D_3 ;
- (ii) pour tout $n > 0$, $\text{Pic}(n D_3) \xrightarrow{\cong} \text{Pic}(D_3)$.

En effet, (i) est clair; pour (ii), posons $I = \mathcal{O}(-D_2)$, $I' = \mathcal{O}(-D_3) = I^{\otimes k}$. On a la suite exacte habituelle

$$H^1(I'^n/I'^{n+1}) \rightarrow \text{Pic}((n+1) D_3) \rightarrow \text{Pic}(n D_3) \rightarrow 0$$

et le \mathcal{O}_{D_3} -module I'^n/I'^{n+1} admet une suite de composition à quotients de la forme $I^m/I^{m+1} = \mathcal{O}_{D_2}(-m D_2)$, avec $m \geq k$. Le H^1 dans la suite exacte ci-dessus est donc nul, d'où (ii).

Étape VI. — Prenons D_3 comme ci-dessus, et L_0 comme dans l'étape II. Comme $\text{Supp } D_3 = Z$ on a $L_0|_{D_3} \in \text{Pic}^0 D_3$ qui est un groupe de torsion (2.3). Il existe donc $n_1 > 0$ tel que $L_1 = L_0^{\otimes n_1}$ vérifie

- (i) $(L_1)_K \cong H_K^{\otimes n_0 n_1}$;
- (ii) $L_1|_{D_3} \cong \mathcal{O}_{D_3}$;
- (iii) pour C composante d'une fibre, on a

$$(L_1 \cdot C) \begin{cases} = 0 & (C \in J) \\ > 0 & (C \notin J). \end{cases}$$

Étape VII. — Il existe $n_2 > 0$ tel que $L_2 = L_1^{\otimes n_2}$ vérifie :

- (i) $(L_2)_K \cong H_K^{\otimes n_0 n_1 n_2}$;
- (ii) $L_2|_{D_3} \cong \mathcal{O}_{D_3}$;
- (iii) $L_2(-D_3)$ est *ample* sur \bar{X} .

En effet les deux premières conditions sont automatiques; pour la troisième il suffit, d'après EGA III, 4.7.1, que pour toute composante C d'une fibre de \bar{f} on ait $(L_2(-D_3) \cdot C) > 0$. Si $C \in J$ c'est clair car $(L_2 \cdot C) = 0$ et $(D_3 \cdot C) < 0$. Si $C \notin J$, on a $(L_2(-D_3) \cdot C) = n_2(L_1 \cdot C) - (D_3 \cdot C)$ d'où le résultat pour n_2 assez grand puisque $(L_1 \cdot C) > 0$.

Étape VIII. — Il existe donc $n_3 > 0$ tel que $H^1(\bar{X}, L_2(-D_3)^{\otimes n_3}) = 0$. Par suite l'homomorphisme de restriction

$$H^0(L_2^{\otimes n_3}) \rightarrow H^0(L_2^{\otimes n_3}|_{n_3 D_3})$$

est surjectif. Or $L_2^{\otimes n_3}$ est trivial sur D_3 donc aussi sur $n_3 D_3$ puisque $\text{Pic}(n_3 D_3) \xrightarrow{\cong} \text{Pic}(D_3)$; ainsi il existe $s \in H^0(L_2^{\otimes n_3}|_{n_3 D_3})$ partout non nulle. Celle-ci se relève en $t \in H^0(\bar{X}, L_2^{\otimes n_3})$ et il est clair que $Y = \text{div}(t)$ répond à la question. ■

3.9. *Remarque.* — Il se peut qu'un examen approfondi de la preuve ci-dessus conduise à une majoration effective de d dans 3.8, en termes de données telles que $\deg H_K$ et la matrice d'intersection des composantes de Z , au moins lorsque \bar{X} est régulier.

4. Application : théorèmes de contraction

Dans ce paragraphe on déduit du théorème 1.7 un théorème d'existence de contractions pour certains schémas de dimension 2, qui m'a été signalé par Raynaud. Dans le cas des surfaces sur un corps fini ce théorème est dû à Artin [A].

4.1. *Notations.* — Soit B un schéma régulier de dimension 1, intègre et excellent, de corps des fonctions K . Soit $f: X \rightarrow B$ un B -schéma projectif et plat, intègre, à fibres purement de dimension 1. Soit $V \subset X$ un fermé purement de dimension 1 et *vertical* (i. e. d'image dans B finie). On suppose que $X - V$ s'envoie *surjectivement* sur B .

DÉFINITION 4.2. — (i) Une contraction projective de (X, V) est un diagramme commutatif de B-schémas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & B & \end{array}$$

où π est surjectif, f' est projectif, $\pi(V)$ est un ensemble fini de points fermés de X' , et $\pi|_{X-V}$ est une immersion ouverte.

(ii) Soit H un faisceau inversible sur X . Une contraction projective de (X, V, H) est la donnée d'une contraction projective de (X, V) comme ci-dessus et d'un faisceau inversible H' sur X' , ample relativement à f' , tel qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\pi^* H'$ et $H^{\otimes n}$ soient isomorphes sur $X - f^{-1}(f(V))$.

Nous dirons parfois « contraction » pour « contraction projective ». Le lien avec les points entiers est fourni par l'exemple suivant (que je dois à M. Raynaud) :

PROPOSITION 4.3. — Soit $f: X \rightarrow B$ comme en 4.1; soit Y un diviseur de Cartier effectif de X , plat sur B , tel que Y_K soit ample sur X_K . Soit V la réunion des composantes de fibres de f qui ne rencontrent pas Y , et soit $H = \mathcal{O}_X(Y)$. Alors :

(i) pour $n \gg 0$, $H^{\otimes n}$ est sans points fixes relativement à f , i. e. définit un B-morphisme

$$\varphi_n: X \rightarrow P_n = \mathbf{P}(f_* H^{\otimes n});$$

(ii) pour $n \gg 0$, l'image de X par φ_n , munie du faisceau inversible induit par $\mathcal{O}_{P_n}(1)$, est une contraction projective de (X, V, H) .

Preuve. — On peut supposer B affine (ceci pour simplifier les notations). Pour n assez grand, $H^1(X_K, H_K^{\otimes n}) = 0$ donc $H^1(X, H^{\otimes n})$ est un $\Gamma(B, \mathcal{O}_B)$ -module artinien, de sorte que la suite de modules

$$H^1(X, H^{\otimes m}) \rightarrow H^1(X, H^{\otimes m+1}) \rightarrow \dots$$

où la flèche est donnée par la section de H définissant Y , est stationnaire. La suite de cohomologie implique alors que pour $n \gg 0$ la restriction $H^0(X, H^{\otimes n}) \rightarrow H^0(Y, H|_Y^{\otimes n})$ est surjective. Comme Y est fini sur B , $H|_Y^{\otimes n}$ est ample sur Y et par suite (vu la surjectivité ci-dessus), $H^{\otimes n}$ est (pour $n \gg 0$) sans point fixe sur Y . Il est aussi sans point fixe hors de Y [puisque $H = \mathcal{O}_X(Y)$], d'où (i).

Comme la restriction de H à V est triviale (par définition de V) il est clair que $\varphi_n(V)$ est un ensemble fini de points de P_n . D'autre part, si C est une composante d'une fibre de f non contenue dans V , alors $(Y \cdot C) > 0$ donc C n'est pas contractée par φ_n , et $\varphi_n|_C: C \rightarrow P_n$ est fini. En particulier, pour tout point fermé $x \in P_n$, la fibre $\varphi_n^{-1}(x)$ est réunion de composantes de V et d'un nombre fini de points. Introduisons la factorisation de Stein

$$X \xrightarrow{\pi_n} X'_n \xrightarrow{q_n} P_n$$

de φ_n : on déduit de ce qui précède (les points de $X-V$ étant isolés dans leur fibre par φ_n , et *a fortiori* par π_n) que $X-V = \pi_n^{-1}(U)$ où U est un ouvert de X'_n , d'où

nécessairement $X-V \xrightarrow{\sim} U$. Comme π_n contracte V en un nombre fini de points (puisque q_n est fini) on voit que X'_n (muni du faisceau ample $H'_n = q_n^* \mathcal{O}_{P_n}(1)$) est une contraction projective de (X, V, H) . Comme H'_n est ample sur X'_n on a pour $k \gg 0$ un plongement

$$X'_n \hookrightarrow \mathbf{P}(H^0(X'_n, H'_n{}^{\otimes k}))$$

mais comme $\pi_{n*}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X'_n}$ on a $\pi_{n*}(H'_n) = \pi_{n*} \pi_n^*(H'_n) = H'_n$ d'où

$$H^0(X'_n, H'_n{}^{\otimes k}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, H^{\otimes nk})$$

de sorte que le composé de $\pi_n : X \rightarrow X'_n$ avec le plongement ci-dessus n'est autre que φ_{nk} , et (ii) en résulte. ■

COROLLAIRE 4.4 (théorème de contraction, cas hensélien). — *Avec les hypothèses et notations de 4.1, on suppose de plus que B est un trait hensélien. Alors (X, V) admet une contraction projective.*

Preuve. — Pour toute composante C de la fibre fermée de f , non contenue dans V , soit x_C un point fermé de $C-V$. Il existe alors un diviseur de Cartier effectif et connexe $Y_C \subset X$, plat sur B et contenant x_C . Comme B est hensélien, Y_C est local de sorte que sa fibre fermée se réduit à $\{x_C\}$ et que $Y_C \subset X-V$. Il suffit alors de poser $Y = \sum_{C \not\subset V} Y_C$ et

d'appliquer 4.3. ■

COROLLAIRE 4.5 (théorème de contraction, cas de petits corps résiduels). — *Avec les hypothèses et notations de 4.1, on suppose de plus que*

- (i) *les corps résiduels des points fermés de B sont des extensions algébriques de corps finis;*
- (ii) *X_K est géométriquement irréductible sur K ;*
- (iii) *X est normal.*

Soit de plus H un faisceau inversible sur X , ample relativement à f . Alors il existe une contraction projective de (X, V, H) .

Preuve. — On se ramène immédiatement au cas où $B = \text{Spec}(R)$ est local de point fermé b . Dans ce cas, B vérifie la condition (T) de 1.5. Pour chaque composante C de X_b , non contenue dans V , soit U_C l'ouvert de X complémentaire de la réunion des composantes de X_b , autres que C . Appliquant 3.8 à chaque U_C et prenant la réunion des fermés obtenus, on trouve un point entier $Y \subset X-V$ qui rencontre chacune des composantes C ci-dessus, et tel que $\mathcal{O}_{X_K}(Y_K) \cong H_K^{\otimes m}$ pour $m > 0$ convenable; on peut de plus supposer, d'après 3.3, que Y est un diviseur de Cartier. Il suffit dès lors d'appliquer 4.3. ■

5. Topologie des variétés sur un corps valué

PROPOSITION 5.1. — Soit F un corps topologique séparé. On peut, d'une manière et d'une seule, associer à tout F -schéma localement de type fini X une topologie sur $X(F)$, dite forte, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) tout F -morphisme $X \rightarrow Y$ induit une application continue $X(F) \rightarrow Y(F)$;
- (ii) si $i: X \rightarrow Y$ est une immersion, la topologie forte sur $X(F)$ est induite par celle de $Y(F)$ via i ; de plus si i est une immersion fermée, $i(X(F))$ est un fermé de $Y(F)$;
- (iii) pour tout $n \geq 1$, la topologie forte sur $A^n(F) = F^n$ est la topologie produit (déduite de celle de F).

La démonstration est laissée au lecteur. Si X est un F -schéma localement de type fini, $U \subset X$ un sous-schéma ouvert, Ω un ouvert de F , et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, alors $f^{-1}(\Omega) = \{x \in U(F) \mid f(x) \in \Omega\}$ est évidemment un ouvert de $X(F)$, et la topologie forte sur $X(F)$ est engendrée par les ouverts de ce type.

5.2. Soit maintenant F un corps complet pour une valeur absolue; soit \bar{F} une clôture algébrique de F , munie de la valeur absolue, notée $|\cdot|$, prolongeant celle de F , et de la topologie correspondante. On pose $G = \text{Aut}_F(\bar{F})$.

Si X est un F -schéma localement de type fini, l'ensemble $|X|$ des points fermés de X s'identifie au quotient $X(\bar{F})/G$; on peut alors munir $X(F)$ de la topologie forte (déduite de $|\cdot|$) et $|X|$ de la topologie quotient, que nous appellerons encore *topologie forte* de $|X|$. Par définition, les ouverts de $|X|$ correspondent donc bijectivement aux *ouverts* G -invariants de $X(\bar{F})$.

Si U désigne un ouvert affine de X , $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, et $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$(5.2.1) \quad \{x \in U(\bar{F}) \mid |f(x)| < \varepsilon\}$$

est un ouvert G -invariant de $X(\bar{F})$, donc définit un ouvert de $|X|$. D'ailleurs, si $P \in |U|$, $|f(P)|$ a bien un sens puisque $f(P)$ est un élément du corps résiduel de P , sur lequel la valeur absolue se prolonge de façon unique : ceci définit une application $|f|: |U| \rightarrow \mathbf{R}$, évidemment continue.

PROPOSITION 5.3. — Sous les hypothèses de 5.2, soit X un F -schéma localement de type fini, et soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Alors la topologie forte sur $|X|$ est engendrée par les ouverts du type (5.2.1), où U est l'un des U_i , f parcourt $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, et $\varepsilon > 0$.

Preuve. — Vu les définitions on se ramène au cas où X est affine et $\mathcal{U} = \{X\}$, puis à $X = A_F^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in X(\bar{F}) = \bar{F}^n$, posons $|x| = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$ et, pour $\varepsilon > 0$,

$$B(x, \varepsilon) = \{z \in \bar{F}^n \mid |z - x| < \varepsilon\}.$$

Soit Ω un ouvert G -invariant de \bar{F}^n contenant x : alors Ω , par définition de la topologie quotient, contient un ouvert du type $G \cdot B(x, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ convenable. Si $\sigma_1 x, \dots$,

$\sigma_r x (\sigma_i \in G, \sigma_1 = \text{id}_{\bar{F}})$ désignent les conjugués (distincts) de x , on a

$$G \cdot B(x, \varepsilon) = \{ z \in \bar{F}^n \mid \min_j |z - \sigma_j x| < \varepsilon \}.$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, le polynôme

$$P_i(T) = \prod_{j=1}^r (T - \sigma_j(x_i)) \in \bar{F}[T]$$

est G -invariant; il existe donc $s \geq 1$ tel que $Q_i[T] = P_i(T)^{p^s}$ soit dans $F[T]$, où p désigne l'exposant caractéristique de F . Il est clair que pour $t \in \bar{F}$ on a

$$(5.3.1) \quad \inf_{j=1, \dots, r} |t - \sigma_j(x_i)| \leq |Q_i(t)|^{1/rp^s}.$$

Considérons les points de \bar{F}^n de la forme

$$x^{(\alpha)} = (\sigma_{\alpha(1)}(x_1), \dots, \sigma_{\alpha(n)}(x_n))$$

où α parcourt les applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, r\}$. L'inégalité (5.3.1) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \bar{F}^n$, on a

$$(5.3.2) \quad \left(\sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |Q_i(z_i)| < \varepsilon p^s \right) \Rightarrow (z \in \bigcup_{\alpha} B(x^{(\alpha)}, \varepsilon)).$$

Les $x^{(\alpha)}$ définissent un nombre fini de points fermés de X , dont l'un s'identifie à l'orbite Gx . Il existe donc $f \in F[T_1, \dots, T_n]$ tel que $f(x) = 0$ et $f(x^{(\alpha)}) \neq 0$ si $x^{(\alpha)} \notin Gx$. Quitte à multiplier f par une constante on peut même supposer que $|f(x^{(\alpha)})| \geq 1$ pour tout α tel que $x^{(\alpha)} \notin Gx$. Comme la fonction f est continue sur F^n , il existe $\eta > 0$ tel que

$$(5.3.3) \quad |f(z)| \begin{cases} < 1/2 \text{ pour } z \in B(x, \eta) \text{ [et donc pour } z \in GB(x, \eta)] \\ > 1/2 \text{ pour } z \in \bigcup_{x^{(\alpha)} \notin Gx} B(x^{(\alpha)}, \eta). \end{cases}$$

Ceci donne le résultat car si $z \in \bar{F}^n$ vérifie $|f(z)| < 1/2$ et $|Q_i(z_i)| < \eta^{rp^s}$ pour $i = 1, \dots, n$, alors (5.3.2) montre que z est dans l'une des boules $B(x^{(\alpha)}, \eta)$, et (5.3.3) assure que cette boule ne peut être que $B(x, \eta)$. ■

La proposition ci-dessus peut être raffinée comme suit :

PROPOSITION 5.4. — *Avec les hypothèses et notations de 5.2, soit $F_0 \subset F$ un sous-corps dense; soient X_0 un F_0 -schéma localement de type fini, \mathcal{U} un recouvrement de X_0 par des ouverts affines, et $X = X_0 \otimes_{F_0} F$. Alors la topologie de $|X|$ est engendrée par les ouverts (5.2.1) où $U \in \mathcal{U}$ et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_0})$.*

En effet on se ramène au cas où $X_0 = A_{F_0}^n = \text{Spec } F_0[t_1, \dots, t_n]$, et $\mathcal{U} = \{X_0\}$. Soit alors \mathcal{T} la topologie engendrée par les ouverts (5.2.1) où $U = X_0$ et $f \in \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$. Fixons $f \in F[t_1, \dots, t_n]$ et $\varepsilon > 0$, et soit

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega = \{ z \in F^n \mid |f(z)| < \varepsilon \}.$$

Il s'agit de trouver un ouvert de \mathcal{T} contenant x et contenu dans Ω . Soit $R > |x| = \sup_i |x_i|$; la boule $B = \{z \mid \sup_i |z_i| < R\}$ est un ouvert de \mathcal{T} .

Posons $\varepsilon' = (|f(x)| + \varepsilon)/2$. La fonction $f: \bar{F}^n \rightarrow \bar{F}$ est limite uniforme sur B de fonctions de $F_0[t_1, \dots, t_n]$ (vérification immédiate); soit donc $g \in F_0[t_1, \dots, t_n]$ telle que

$$(5.4.1) \quad \forall z \in B, \quad |f(z) - g(z)| < \varepsilon' - |f(x)|.$$

Alors $\Omega_1 = \{z \in B \mid |g(z)| < \varepsilon'\}$ est un ouvert de \mathcal{T} ; on a $x \in \Omega_1$ car $|x| < R$ et, d'après (5.4.1), $|g(x)| < |f(x)| + \varepsilon' - |f(x)| = \varepsilon'$; enfin $\Omega_1 \subset \Omega$ car si $z \in \Omega_1$ on a $z \in B$ d'où, à nouveau par (5.4.1) :

$$|f(z)| \leq |g(z)| + \varepsilon' - |f(x)| < 2\varepsilon' - |f(x)| = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

5.5. Gardant les notations de 5.2, nous supposons en outre désormais \bar{F} non archimédien : sa topologie est donc définie par une valuation $v: \bar{F}^\times \rightarrow \mathbf{R}$. Notons $\bar{\Lambda} = \{x \in \bar{F} \mid v(x) \geq 0\}$, et $\Lambda = \bar{\Lambda} \cap F$. Donnons-nous de plus un sous-corps dense F_0 de F et posons $\Lambda_0 = \Lambda \cap F_0$. Notons que $\bar{\Lambda}$ (resp. Λ , Λ_0) est un ouvert de \bar{F} (resp. F , F_0) pour la topologie de v .

Soit X_0 un F_0 -schéma localement de type fini, et posons $X = X_0 \otimes_{F_0} F$.

DÉFINITION 5.6. — Un modèle entier de X_0 (sur Λ_0) est un Λ_0 -schéma \mathcal{X}_0 localement de type fini muni d'un F_0 -isomorphisme $\mathcal{X}_0 \otimes_{\Lambda_0} F_0 \simeq X_0$.

5.7. Si \mathcal{X}_0 est un modèle entier de X_0 , posons $\chi = \mathcal{X}_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda$; il est immédiat que $\mathcal{X}(\bar{\Lambda}) = \mathcal{X}_0(\bar{\Lambda})$ est un ouvert de $X(\bar{F}) = X_0(\bar{F})$. D'autre part l'image canonique de $\mathcal{X}(\bar{\Lambda})$ dans $|X|$ s'identifie à l'ensemble $\text{Ent}_\Lambda(\mathcal{X})$ des points entiers de \mathcal{X} sur Λ ; cet ensemble est donc un ouvert de $|X|$.

THÉORÈME 5.8. — Sous les hypothèses et avec les notations de 5.5 et 5.7, les ouverts $\text{Ent}_\Lambda(\mathcal{X}_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda)$ forment une base de la topologie de $|X|$, lorsque \mathcal{X}_0 parcourt les modèles entiers de X_0 sur Λ_0 . De plus, si $X_0 \rightarrow \text{Spec } F_0$ est de type fini (resp. séparé, resp. de type fini et séparé, resp. affine), on peut se limiter aux $\mathcal{X}_0 \rightarrow \text{Spec } \Lambda_0$ ayant la même propriété.

Preuve. — Supposons d'abord le théorème démontré dans le cas affine; soit Ω un ouvert de $|X|$ pour la topologie forte et soit $x \in \Omega$. Si U_0 est un ouvert affine de X_0 tel que $U = U_0 \otimes_{F_0} F$ contienne x , il existe donc un modèle entier \mathcal{U}_0 de U_0 tel que $x \in \text{Ent}_\Lambda(\mathcal{U}_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda) \subset \Omega \cap |U|$. Alors le schéma \mathcal{X}_0 obtenu en recollant X_0 et \mathcal{U}_0 le long de leur ouvert commun U_0 est un modèle entier de X_0 qui vérifie

$$x \in \text{Ent}_\Lambda(\mathcal{X}_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda) = \text{Ent}_\Lambda(\mathcal{U}_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda) \subset \Omega$$

et qui de plus est de type fini (resp. séparé) si X_0 l'est.

Nous supposons donc désormais $X_0 = \text{Spec } A_0$, où A_0 est une F_0 -algèbre de type fini. Soit Ω un ouvert non vide de $|X|$, et soit $x \in \Omega$. D'après 5.4 on peut supposer qu'il

existe $f_1, \dots, f_r \in A_0$ tels que

$$\Omega = \{ z \in |X| \mid v(f_i(z)) \geq 0, i=1, \dots, r \}.$$

Nous pouvons même adjoindre aux f_i des générateurs g_j de A_0 sur F_0 (choisis de telle sorte que $v(g_j(x)) \geq 0$) et ainsi supposer que les f_i engendrent A_0 . Soient \mathcal{A}_0 la sous- Λ_0 -algèbre de A_0 engendrée par les f_i , et $\mathcal{A} = \Lambda \otimes_{\Lambda_0} \mathcal{A}_0$. Il est immédiat que $\text{Spec } \mathcal{A}_0$ est un modèle entier de X_0 , et de plus on a $\Omega = \text{Ent}_\Lambda(\text{Spec } \mathcal{A})$: en effet, un point de $|X|$, de corps résiduel F' (extension finie de F) correspond à un F -morphisme $\varphi: A \rightarrow F'$; ce point est un point entier de $\text{Spec } \mathcal{A}$ si et seulement si $\varphi(\mathcal{A})$ est contenu dans l'anneau des entiers de F' , c'est-à-dire, vu la définition de \mathcal{A} , si et seulement si $v(\varphi(f_i)) \geq 0$ pour $i=1, \dots, r$, d'où l'assertion. ■

6. Densité non archimédienne

Reprenons les hypothèses et notations de 1.2, et supposons que R soit excellent et vérifie la condition (T) de 1.5. Donnons-nous de plus un ensemble fini Σ de points fermés de B . Vu l'hypothèse (T)(i), il existe $a \in R$ tel que $\Sigma = \text{Supp}(\text{div}(a))$, de sorte que l'ouvert $B' = B - \Sigma$ de B est le spectre de $R' = R[a^{-1}]$. Soit alors $f': X' \rightarrow B'$ un B' -schéma de type fini. On suppose que X' est irréductible, que X'_K est géométriquement irréductible sur K et que f' est surjectif.

Pour chaque $v \in \Sigma$ (identifié à la place de K correspondante), notons K_v le complété de K en v et donnons-nous un ouvert non vide Ω_v de $|X'_{K_v}|$ (ensemble des points fermés de X'_{K_v} , muni de la topologie déduite de celle de K_v , cf. 5.2) : ceci revient donc à fixer un ouvert non vide de $X'_{\tilde{K}_v}$, invariant sous $\text{Aut}(\tilde{K}_v/K_v)$, où \tilde{K}_v désigne une clôture algébrique de K_v .

Les théorèmes 1.7 et 5.8 ont alors le corollaire suivant :

THÉORÈME 6.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un point entier Y' de X' sur B' qui est « contenu dans chaque Ω_v » au sens suivant : pour tout $v \in \Sigma$, on a $|Y' \otimes_{R'} K_v| \subset \Omega_v$.*

La preuve est immédiate : il résulte (par recollement) de 5.8 qu'il existe un B -schéma de type fini $f: X \rightarrow B$ tel que $X \times_B B'$ s'identifie à X' , et que pour chaque $v \in \Sigma$ l'ensemble des points entiers de $X \otimes_R R_v$ soit contenu dans Ω_v . Il est clair que f vérifie les hypothèses de 1.7, de sorte que X admet un point entier Y . Le fermé $Y' = Y \times_B B'$ de X' répond à la question. ■

6.2. Remarque. — Le théorème ci-dessus est, lorsque K est un corps de nombres, un cas particulier du théorème de densité de Rumely [R 2] : celui-ci traite également le cas où Σ contient des places archimédiennes, moyennant l'hypothèse d'incomplétude suivante : il existe une place de K n'appartenant ni à Σ , ni à $\text{Spec}(R')$. Notons que cette condition est automatiquement vérifiée dans 6.1 pour les corps de nombres (puisque l'on exclut les places archimédiennes) et pour les corps de fonctions (puisque B est affine).

BIBLIOGRAPHIE

- [A] M. ARTIN, *Some Numerical Criteria for Contractibility of Curves on Algebraic Surfaces* (*Amer. J. Math.*, vol. 84, 1962, p. 485-496).
- [C-R] D. CANTOR et P. ROQUETTE, *On Diaphantine Equations over the Ring of All Algebraic Integers* (*J. of Number Theory*, vol. 18, 1984, p. 1-26).
- [D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD, *The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus* (*Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 36).
- [F] W. FULTON, *Intersection Theory*, Springer Ergebnisse, vol. 2.
- [J] J.-P. JOUANLOU, *Théorèmes de Bertini et applications* (*Progress in Math.*, vol. 42, Birkhäuser).
- [K] D. KNUTSON, *Algebraic Spaces* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 203, Springer).
- [MB 1] L. MORET-BAILLY, *Points entiers des variétés arithmétiques* [*Séminaire de théorie des nombres de Paris* (*Progress in Math.*, Birkhäuser)].
- [MB 2] L. MORET-BAILLY, *Groupes de Picard et problèmes de Skolem II* [*Ann. sci. Ec. Norm. Sup.* (4^e série, t. 22, 1989, p. 181-194)].
- [MB 3] L. MORET-BAILLY, *Problèmes de Skolem sur les champs algébriques* (en préparation).
- [M] D. MUMFORD, *The Topology of Normal Singularities of an Algebraic Surface and a Criterion for Simplicity* (*Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 9, 1961).
- [R 1] R. RUMELY, *Capacity Theory on Algebraic Curves* (à paraître).
- [R 2] R. RUMELY, *Arithmetic Over the Ring of all Algebraic Integers* (*J. reine u. angew. Math.*, 368, 1986, p. 127-133).
- [S] T. SKOLEM, *Lösung gewisser Gleichungen in ganzen algebraischen Zahlen, insbesondere in Einheiten* (*Skrifter Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Mat. Naturv. Kl.* 10, 1934).
- [SPC] L. SZPIRO et coll. *Séminaire sur les pincesaux de courbes de genre au moins deux* (*Astérisque*, vol. 86).

(Manuscrit reçu le 17 mai 1988,
révisé le 14 novembre 1988).

L. MORET-BAILLY,
I.R.M.A.R.,
Université de Rennes-I, Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France,
bitnet: MORET @ FRCICB81.