GOURIER

Sur l'équation de Kepler

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 7 (1878), p. 73-76
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1878_2_7__73_0>

SUR

L'ÉQUATION DE KEPLER,

PAR M. GOURIER,

ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Dans le cours professé à la Sorbonne l'année dernière, M. Hermite s'est occupé de l'équation de Kepler, et il a bien voulu m'engager à rédiger, d'après ses indications, la démonstration d'une propriété importante des racines de cette équation.

L'équation

$$(1) \qquad f(z) = z - \alpha - \mathrm{E} \sin z = 0,$$

dans laquelle α représente un angle donné compris entre zéro et π, et E une constante positive inférieure à l'unité, a une racine réelle comprise entre zéro et π et une infinité de racines imaginaires. En divisant le plan sur lequel on figure les valeurs de z par des bandes parallèles à l'axe des y, et distantes de π, chaque bande de rang impair du côté des x positives comprend deux racines conjuguées, et de même chaque bande de rang pair du côté des x négatives.

Si l'on considère la bande de rang $2k+1$ du côté des x positives, et si l'on représente par $x \pm yi$ les deux racines comprises dans cette bande, il s'agit d'établir que, pour les grandes valeurs de k, la valeur de x est à peu près égale à $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, et celle de y à $\mathrm{L}\frac{2}{\mathrm{E}} + \mathrm{L}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

A cet effet, traçons dans cette bande un rectangle ABCD dont les sommets correspondent aux quatre valeurs suivantes de z :

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + ai, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon + ai,$$

dans lesquelles ε représente une constante positive, prise arbitrairement aussi petite que l'on veut, et a une autre constante positive dont le minimum sera déterminé plus loin. Nous allons démontrer que, quand k a une valeur supérieure à une certaine limite, ce rectangle renferme une des racines de l'équation. En faisant mouvoir le point z dans le sens direct sur le contour du rectangle, on reconnaît aisément que le nombre μ des racines situées à l'intérieur de ce rectangle est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} 2\mu = \mathrm{I}&\left[\frac{t + \frac{\mathrm{E}}{2}(e^t - e^{-t})\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - \frac{\mathrm{E}}{2}(e^t + e^{-t})\cos\varepsilon}\right]_0^a \\ -\mathrm{I}&\left[\frac{t - \frac{\mathrm{E}}{2}(e^t - e^{-t})\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{\mathrm{E}}{2}(e^t + e^{-t})\cos\varepsilon}\right]_0^a \\ +\mathrm{I}&\left[\frac{a - \frac{\mathrm{E}}{2}(e^a - e^{-a})\sin(t-\varepsilon)}{\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - t - \frac{\mathrm{E}}{2}(e^a + e^{-a})\cos(t-\varepsilon)}\right]_0^{2\varepsilon}, \end{aligned}$$

dans laquelle ω représente la quantité $2k\pi - \alpha$, et I un indice pris par rapport à t.

L'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega + \varepsilon - \frac{\mathrm{E}}{2}(e^t + e^{-t})\cos\varepsilon = 0$$

admet une seule racine réelle positive t_1. De même l'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{\mathrm{E}}{2}(e^t + e^{-t})\cos\varepsilon = 0$$

admet une seule racine positive t_2 moindre que t_1. Nous supposerons

α supérieur à t_1. L'équation

$$t - \frac{E}{2}(e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon = 0$$

est vérifiée par $t = 0$, et admet une seule racine positive t_3; nous démontrerons que, lorsque ω dépasse une certaine limite, t_3 est nécessairement inférieur à t_2. Supposons cette condition remplie; on voit alors que le premier indice est égal à $+1$, que le second est égal à -1, et que le troisième est égal à zéro. On a donc

$$\mu = 1.$$

La fonction $t - \frac{E}{2}(e^t - e^{-t}) \sin \varepsilon$ s'annule pour $t = 0$; elle va en croissant lorsque t varie depuis zéro jusqu'à la racine positive de l'équation

$$1 - \frac{E}{2}(e^t + e^{-t}) \sin \varepsilon = 0,$$

puis elle décroît continuellement; donc, pour que t_3 soit inférieur à t_2, il suffit que l'on ait

$$(2) \qquad t_2 - \frac{E}{2}(e^{t_2} - e^{-t_2}) \sin \varepsilon < 0.$$

Mais t_2, étant la racine de l'équation

$$\frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon - \frac{E}{2}(e^t + e^{-t}) \cos \varepsilon = 0,$$

est supérieur à $L(\omega)$. L'inégalité (2) sera satisfaite si l'on a

$$L(\omega) - \frac{E}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) \sin \varepsilon < 0.$$

On déduit de cette inégalité une limite de ω et par suite de k.

Connaissant la valeur de x, on peut obtenir celle de y par l'équation

$$x - \alpha - \frac{E}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x = 0$$

ou

$$\omega + \frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{E}{2}(e^y + e^{-y}) \cos\gamma = 0,$$

dans laquelle γ désigne une quantité très-petite, positive ou négative. De cette équation on tire approximativement

$$y = L \frac{2}{E \cos\gamma} + L\left(\omega + \frac{\pi}{2} + \gamma\right).$$

La valeur de y est donc, à peu près,

$$y = L \frac{2}{E} + L\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$