

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

OLIVIER DEBARRE

Sur les variétés de Prym des courbes tétragonales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 21, n° 4 (1988), p. 545-559

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_4_545_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_4_545_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES VARIÉTÉS DE PRYM DES COURBES TÉTRAGONALES

PAR Olivier DEBARRE

1. Introduction

Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement double étale de courbes complexes lisses connexes. La composante neutre du noyau de l'homomorphisme norme $N\pi : J\tilde{C} \rightarrow JC$ est une variété abélienne de dimension $p = g(C) - 1$, appelée *variété de Prym* associée à π . La polarisation principale de $J\tilde{C}$ induit sur P le double d'une polarisation principale.

Il est alors naturel de chercher à savoir dans quels cas le revêtement π est déterminé (à isomorphisme près) par sa variété de Prym. C'est ce qu'on appelle le problème de Torelli pour les variétés de Prym. Un calcul de dimensions d'espaces de modules montre que la réponse est toujours négative en dimension $p \leq 5$: tout revêtement double étale a même variété de Prym qu'un autre tel revêtement non isomorphe.

Pour $p \geq 6$, si on sait qu'un revêtement *générique* est déterminé par sa variété de Prym ([F-S], [K], [W1], [D1]), la *construction tétragonale de Donagi*, qui associe à tout revêtement double étale d'une courbe tétragonale (c'est-à-dire admettant un morphisme de degré 4 sur \mathbb{P}^1) deux autres tels revêtements (en général non isomorphes au premier) ayant même variété de Prym que le premier, montre que la réponse au problème de Torelli est négative en toute dimension.

Donagi a alors émis dans [Do] la conjecture suivante :

CONJECTURE (Donagi). — *Deux revêtements doubles étales non isomorphes de courbes lisses connexes ont même variété de Prym si et seulement si l'un est obtenu à partir de l'autre par une succession de constructions tétrales.*

Le but de cet article est de montrer la partie suivante de cette conjecture. Soit π un revêtement étale double connexe d'une courbe lisse C tétragonale, non hyperelliptique, non trigonale et non bielliptique, de genre $g \geq 13$. Alors, si ρ est un revêtement double étale d'une courbe lisse D non isomorphe à π mais de même variété de Prym, il est obtenu à partir de π par une transformation tétragonale (nos hypothèses entraînent que C a un seul g_4^1). En particulier, D est tétragonale.

En fait, nous nous limiterons ici au cas (générique) où le morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ associé au g_4^1 n'a pas de fibre double (i. e. pas de fibre du type $2x + 2y$). C'est exactement le cas où les deux transformées tétrales de π sont encore lisses. Les mêmes méthodes

s'appliquent encore en général mais leur mise en œuvre est un peu fastidieuse. Par contre, dans notre cas, on montre la conclusion sous l'hypothèse plus large que ρ est un revêtement *admissible* (au sens de [B 1]) de courbes *stables*.

Notre méthode, inspirée de celle de [W 1], est la suivante. Rappelons d'abord que si (P, Ξ) est la variété de Prym associée à un revêtement double étale $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ de courbes lisses, les singularités du diviseur Ξ sont de deux types ([M]) : les singularités exceptionnelles (elles n'existent pas pour un revêtement générique) et les singularités stables (elles existent sur toute variété de Prym de dimension $p \geq 6$). Les sous-variétés correspondantes de $\text{Sing } \Xi$ sont notées respectivement $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ et $\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi$. Ces notions ne sont pas intrinsèques à la variété de Prym mais dépendent du revêtement π .

Lorsque C a un g_4^1 sans fibre double et est de genre $g \geq 13$, il est possible de déterminer assez explicitement le lieu singulier de Ξ . Tout d'abord, $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ est de dimension $p-6$ et a une seule composante irréductible de cette dimension, qu'on note $\text{Sing}_{\text{ex},1}^\pi \Xi$. Si $\pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$ et $\pi'' : \tilde{C}'' \rightarrow C''$ sont les deux revêtements obtenus en appliquant la construction tétragonale à π , on montre que $\text{Sing } \Xi$ est réunion de $\text{Sing}_{\text{ex},1}^\pi \Xi$, $\text{Sing}_{\text{ex},1}^{\pi'} \Xi$ et $\text{Sing}_{\text{ex},1}^{\pi''} \Xi$ et, éventuellement, de composantes de dimension inférieure. Les singularités stables pour l'un des trois revêtements π , π' ou π'' sont la réunion des composantes exceptionnelles de dimension $p-6$ des deux autres.

Maintenant, si on note σ l'involution de \tilde{C} associée à π et $\Sigma(\tilde{C})$ la surface image du morphisme :

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(2)} &\rightarrow P \\ \tilde{x} + \tilde{y} &\mapsto \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{x} + \tilde{y} - \sigma \tilde{x} - \sigma \tilde{y}), \end{aligned}$$

un calcul très simple (théorème 3.4) montre qu'on a (ensemblément) :

$$\{a \in P \mid a + \text{Sing}_{\text{ex},1}^\pi \Xi \subset \Xi\} = \Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'').$$

Il reste alors à remarquer ([W 1]) que la connaissance de la surface $\Sigma(\tilde{C})$ dans P permet de retrouver le revêtement π pour avoir tous les ingrédients nécessaires à la démonstration. On a aussi consacré une partie (la partie 5) à l'étude d'un cas particulier (celui où la courbe semi-canonique est singulière), pour illustrer les phénomènes qui peuvent se produire pour des courbes téragonales particulières.

Signalons pour terminer qu'on montre aussi (toujours dans le cas où C a un g_4^1 sans fibre double et est de plus de genre $g \geq 22$) l'égalité :

$$\{a \in P \mid a + \text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi \subset \Xi\} = \Sigma(\tilde{C}).$$

N'ayant raisonné qu'ensemblément, on ne peut malheureusement pas en déduire la même égalité pour un revêtement générique (pour lequel on a $\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi = \text{Sing } \Xi$), conjecturée par Welters dans [W 1].

2. Rappels et notations

On travaillera uniquement sur le corps des complexes.

La donnée d'un revêtement double étale $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ d'une courbe lisse C est équivalente à celle d'un élément η d'ordre deux de $\text{Pic}(C)$. La *courbe semi-canonique* est alors l'image du morphisme $C \rightarrow \mathbb{P} H^0(C, K_C + \eta) \simeq \mathbb{P}^{g-2}$ associé au système linéaire $|K_C + \eta|$ (sans point base si C n'est pas hyperelliptique).

On peut définir la variété de Prym associée à π comme dans l'introduction par $P = \text{Ker}(Nm : J\tilde{C} \rightarrow JC)^0$ mais il est parfois utile de considérer sa translatée P^* dans $\{\tilde{L} \in J^{2g-2}\tilde{C} \mid Nm \tilde{L} \simeq \omega_C\}$ où g est le genre de C . On a alors :

$$P^* = \{\tilde{L} \in J^{2g-2}\tilde{C} \mid Nm \tilde{L} \simeq \omega_C \text{ et } h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \text{ pair}\}.$$

Le diviseur suivant représente alors sa polarisation principale :

$$\Xi = \{\tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \geq 2\}.$$

Les points singuliers de Ξ sont de deux types, les points singuliers *exceptionnels* :

$$\text{Sing}_{\text{ex}}^* \Xi = \{\tilde{L} = (\pi^* L)(\tilde{M}) \in P^* \mid h^0(C, L) \geq 2 \text{ et } \tilde{M} \geq 0\},$$

et les points singuliers *stables* :

$$\text{Sing}_{\text{st}}^* \Xi = \{\tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \geq 4\}.$$

Un point singulier peut bien sûr être à la fois stable et exceptionnel.

Ces notions ont été étendues par Beauville au cas de certains revêtements doubles de courbes semi-stables, dits revêtements *admissibles*. Le lecteur est renvoyé à l'article [B 1] pour plus de précisions.

La définition de la variété $\Sigma(\tilde{C})$ donnée dans l'introduction s'étend au cas des revêtements admissibles des courbes semi-stables.

3. Singularités exceptionnelles dans les variétés de Prym associées aux courbes tétraogales

Nous montrons, en nous appuyant sur des résultats de Keem ([Ke] ou [ACGH]), que les courbes tétraogales sont caractérisées par le fait que, pour tout revêtement double étale, les singularités exceptionnelles du diviseur thêta de la variété de Prym associée sont de codimension au plus 6. On a écarté les cas des courbes hyperelliptiques, trigonales ou bielliptiques, étudiés en détail dans [B 1] et [D 2], qui sont exactement ceux pour lesquels les singularités du diviseur thêta sont de codimension 4 dans la variété de Prym.

THÉORÈME 3.1. — *Soient C une courbe lisse irréductible de genre $g \geq 11$, non hyperelliptique, non trigonale et non bielliptique et (P, Ξ) la variété de Prym d'un revêtement étale*

double connexe de C . On note $p = g - 1$ la dimension de P . On a alors :

- (i) Si C n'a pas de g_4^1 , $\dim \text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi < p - 6$.
- (ii) Si C a un g_4^1 , $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ est de dimension $p - 6$. Si $g \geq 13$ et si C n'admet pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre 2, $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ a une seule composante de dimension $p - 6$.

Remarques 3.2. — 1. Une courbe qui vérifie les hypothèses du théorème admet au plus un g_4^1 (s'il y en avait deux, C admettrait un morphisme dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et serait soit bielliptique, soit de genre ≤ 9). Celui-ci vérifie $h^0(C, 2g_4^1) = 3$ (si ce n'était pas le cas, le système linéaire $|2g_4^1|$ induirait un morphisme birationnel de C sur une courbe de degré 8 dans \mathbb{P}^3 et on aurait $g \leq 9$). Enfin, si le système $|K_C - 2g_4^1|$ a un point base x , on a $h^0(C, 2g_4^1 + x) = 4$ et le morphisme associé a pour image une courbe de degré 9 dans \mathbb{P}^3 , ce qui entraîne $g \leq 12$. Pour $g = 11$ ou 12, il y a au plus un point base.

2. Lorsqu'on est dans le cas (ii) du théorème et que C n'admet pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre 2, si on note $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ le revêtement double de C , la composante de $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ de dimension $p - 6$ est :

$$\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi = \{ \tilde{L} = (\pi^* g_4^1)(\tilde{M}) \mid h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \text{ pair}, \tilde{M} \geq 0 \text{ et } \pi_* \tilde{M} \in |K_C - 2g_4^1| \}.$$

Il peut arriver que $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ soit contenu dans une composante de dimension supérieure de $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ (cf. Partie 5). En dehors de ce cas, $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ est une composante de $\text{Sing} \Xi$.

Lorsque C admet un morphisme de degré 2 sur une courbe de genre 2, $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ a une ou plusieurs composantes de dimension $p - 6$ autres que $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$.

Comme on l'a mentionné plus haut, la démonstration repose sur un résultat de Keem, dont je donne la version suivante, tirée de [ACGH], Exercices G. pages 200 à 202.

THÉORÈME 3.3. — Soit C une courbe lisse non hyperelliptique, non trigonale et non bielliptique, de genre $g \geq 11$. On suppose qu'il existe des entiers d et r satisfaisant à $d \leq g + r - 4$ et $r \geq 1$, et une sous-variété W de $W_d^r(C)$ satisfaisant à :

$$\dim W \geq d - 2r - 2,$$

et telle qu'un élément générique de W soit sans point base. Alors C a un g_4^1 et, si C n'admet pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre 2, on a $W = \{g_4^1\} \subset W_4^1$.

■ A un élément générique L de W est associé un morphisme $\phi_L : C \rightarrow \mathbb{P}^r$. Il se factorise en $C \xrightarrow{p_L} C_L \xrightarrow{n_L} \mathbb{P}^r$, où n_L est la normalisation de l'image de ϕ_L . Considérons la projection $\pi_x : \mathbb{P}^r \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ depuis le $(r-2)$ -plan engendré par les images par ϕ_L d'un $(r-1)$ -uplet $x = (x_1, \dots, x_{r-1})$ de points génériques de C . On a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{p_L} & C_L & \xrightarrow{n_L} & \mathbb{P}^r \\ & \searrow f_{L,x} & \downarrow g_{L,x} & \nearrow \pi_x & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

Le système linéaire $|f_{L,x}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|$ est la partie mobile de $|L(-x)|$. La famille :

$$\{L(-x) \mid L \in W \text{ et } x \in C^{(r-1)}\}$$

est une sous-variété de $W_{d-(r-1)}^1(C)$ de dimension au moins égale à $d-2r-2+(r-1)=d-(r-1)-4$. De même, si e est le degré de $f_{L,x}$, la famille :

$$\{f_{L,x}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \mid L \in W \text{ et } x \in C^{(r-1)}\}$$

est une sous-variété de $W_e^1(C)$ de dimension au moins égale à $e-4$. On a de plus :

$$e \geq 4 \text{ par hypothèse}$$

$$e \leq d-(r-1).$$

Il ressort alors des exercices précités de [ACGH], de [M] et de nos hypothèses, d'une part que la courbe C est tétragonale et a un nombre fini de g_4^1 , d'autre part que si de plus elle n'admet pas de morphisme de degré deux sur une courbe de degré 2, il existe un g_4^1 qui vérifie $f_{L,x}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = g_4^1$ pour tout élément L de W . On distingue alors trois cas :

(i) Si la courbe C_L est rationnelle, nos hypothèses entraînent que $g_{L,x}$ est un isomorphisme. La famille W est alors réduite à $\{rg_4^1\}$. Elle est donc de dimension 0, ce qui entraîne $r=1$.

(ii) Si la courbe C_L est irrationnelle, on peut la supposer indépendante de L .

Si $p=p_L$ est un isomorphisme, on a :

$$L(-x) = f_{L,x}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = g_4^1$$

et

$$W = g_4^1 + W_{r-1}(C_L),$$

qui n'est inclus dans $W_{r+3}^r(C)$ que pour $r=1$.

Si p est de degré 2, on a alors $W = p^* W'$ avec :

$$W' = g_2^1(C_L) + W_{r-1}(C_L) \subset W_{r+1}^r(C_L).$$

Cette dernière inclusion entraîne $g(C_L)=1$, ce qui contredit l'hypothèse que C n'est pas bielliptique. ■

■ *Démonstration du théorème 3.1.* — Soit Z une composante de dimension $\geq g-7$ de singularités exceptionnelles. Un élément générique de Z s'écrit $(\pi^* L)(\tilde{M})$ avec $h^0(L)=2$, L sans point base et $\pi_* \tilde{M} \in |\omega_C \otimes L^{-2}|$. Si d désigne le degré de L , il existe une sous-variété W de $W_d^1(C)$ qui vérifie :

$$(\star) \quad \forall L \in W, \quad g-7 \leq \dim W + \dim |\omega_C \otimes L^{-2}|.$$

(i) Si $d=g-1$, on a $L^2 \simeq \omega_C$ pour tout $L \in W$ soit, par (\star) , $g-7 \leq 0$. Contradiction.

(ii) Si $d = g - 2$, on a $L^2 \simeq \omega_C(-x-y)$ avec $x, y \in C$ pour $L \in W$, de sorte que $g - 7 \leq 2$. Contradiction.

(iii) Si $g - 3 \geq d \geq 5$ et $\dim W \leq d - 5$, l'inégalité (★) donne :

$$\forall L \in W, \quad \dim |\omega_C \otimes L^{-2}| \geq g - 7 - d + 5 = g - d - 2.$$

Le théorème de Clifford entraîne qu'on a égalité. En particulier W est de dimension $d - 5$ et on a :

$$\dim W_{2g-2d-2}^{g-d-2}(C) \geq d - 5 \geq 2g - 2d - 2 - 2(g - d - 2) - 2 = 0.$$

Comme $2g - 2d - 2 \leq g + g - d - 2 - 4$ et $g - d - 2 \geq 1$, on peut appliquer le théorème 3.3 qui montre que C est tétragonale.

Si C n'admet pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre 2, on a de plus $L^2 \simeq \omega_C(-g_4^1)$ pour tout $L \in W$, ce qui entraîne $g - 7 \leq \dim W + 1 = 1 = 1$, puisque C a un seul g_4^1 (remarque 3.2.1). Contradiction.

(iv) Lorsque $\dim W \geq d - 4$, le théorème 3.3 montre que C a un g_4^1 . Si C n'admet pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre 2, on a de plus :

$$Z = \{ \tilde{L} = (\pi^* g_4^1)(\tilde{M}) \mid h^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \text{ pair et } \pi_* \tilde{M} \in |K_C - 2g_4^1| \},$$

de sorte que Z est isomorphe à une sous-variété spéciale (au sens de [B 2]), associée au système linéaire $|K_C - 2g_4^1|$. Or il résulte de la remarque 3.2.1 que sous nos hypothèses et si $g \geq 13$, ce système est un $g_{2g-7-10}^{g-7}$ sans point base. Le morphisme associé est alors soit de degré 2 sur une courbe de genre 2, soit birationnel. Dans ce dernier cas, l'irréductibilité de Z résulte du corollaire à la proposition 3 de [B 2]. ■

On en vient maintenant au point essentiel de cet article.

THÉORÈME 3.4. — Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement double étale connexe d'une courbe lisse de genre $g \geq 11$ tétragonale, non hyperelliptique, non trigonale et non bielliptique. On note $\pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$ et $\pi'' : \tilde{C}'' \rightarrow C''$ les revêtements admissibles obtenus par la construction tétragonale appliquée à π . Alors, si $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ est la sous-variété de $\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi$ définie dans la remarque 3.2.2, on a l'égalité ensembliste :

$$\{a \in P \mid a + \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi \subset \Xi\} = \Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'').$$

Remarquons que si $\Sigma(\tilde{C}) \not\subset \Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'')$, le théorème montre en particulier que $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ n'est pas contenu dans $\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi$ donc que c'est une composante de $\text{Sing } \Xi$.

La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant, élémentaire mais crucial.

LEMME 3.5. — Soient $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement admissible d'une courbe stable, \tilde{L} un faisceau inversible sur \tilde{C} et M un élément réduit à support non singulier de $|\omega_C \otimes (Nm \tilde{L})^{-1}|$. On suppose que pour tout diviseur effectif \tilde{M} sur \tilde{C} vérifiant $\pi_* \tilde{M} = M$, on a $H^0(\tilde{C}, \tilde{L}(\tilde{M})) \neq 0$. Alors $H^0(\tilde{C}, \tilde{L}) \neq 0$.

■ Supposons que la conclusion ne soit pas vérifiée. Il existe alors un diviseur effectif \tilde{X} sur \tilde{C} de degré maximal tel que $\pi_* \tilde{X} < M$ et $H^0(\tilde{C}, \tilde{L}(\tilde{X})) = 0$. Soit $\tilde{Y} = \tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_r$, un diviseur effectif quelconque sur \tilde{C} vérifiant $\pi_* \tilde{Y} = M - \pi_* \tilde{X}$. Pour tout $i = 1, \dots, r$, on a

par construction $h^0(\tilde{L}(\tilde{X} + \tilde{y}_i)) = 1$, ce qui donne une section $s_i \in H^0(\tilde{L}(\tilde{X} + \tilde{Y}))$ qui s'annule en tous les points de \tilde{Y} excepté \tilde{y}_i . Ces sections sont linéairement indépendantes, de sorte que $h^0(\tilde{L}(\tilde{X} + \tilde{Y})) = p$, et ce pour tous les choix possibles de \tilde{Y} . Mais la parité de $h^0(\tilde{L}(\tilde{X} + \tilde{Y}))$ doit changer lorsqu'on remplace un \tilde{y}_i par $\sigma \tilde{y}_i$. On est donc arrivé à une contradiction. ■

■ *Démonstration du théorème 3.4.*

Soit a un élément de P tel que $a + \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi \subset \Xi$. Il résulte de la remarque 3.2.1 que le système linéaire $|\omega_C(-2g_4^1)|$ a au plus un point base, donc qu'il contient un élément réduit. Il découle donc du lemme précédent qu'on a :

$$h^0(\tilde{C}, a + \pi^* g_4^1) > 0.$$

Il existe donc un diviseur effectif \tilde{X} de degré 8 sur \tilde{C} tel que $a \equiv \tilde{X} - \pi^* g_4^1$. Or on a $\pi_* a \equiv 0$, de sorte que $\pi_* \tilde{X} \in |2g_4^1|$ et (cf. remarque 3.2.1) :

$$\begin{aligned} \exists X_1, X_2 \in |g_4^1|, \quad \pi_* \tilde{X} &= X_1 + X_2 \\ \Rightarrow \exists \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \quad \pi_* \tilde{X}_i &= X_i \quad \text{et} \quad a \equiv \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 - \pi^* g_4^1 \equiv \tilde{X}_1 - \sigma \tilde{X}_2. \end{aligned}$$

Or il ressort de [B2] § 3.c que les images des courbes \tilde{C}' et \tilde{C}'' par les applications $\tilde{x}' \mapsto \tilde{x}' - \sigma' \tilde{x}'$ et $\tilde{x}'' \mapsto \tilde{x}'' - \sigma'' \tilde{x}''$ sont les sous-variétés spéciales associées au g_4^1 de C . On en déduit :

$$\Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'') = P \cap \{ \mathcal{O}(\tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2) \mid \pi_* \tilde{Y}_1, \pi_* \tilde{Y}_2 \in |g_4^1| \},$$

ce qui termine la démonstration du théorème. ■

La proposition suivante utilise encore le lemme 3.5. Elle nous sera utile pour déterminer, au moins dans le cas générique, toutes les composantes de $\text{Sing } \Xi$ de dimension $p-6$.

PROPOSITION 3.6. — Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement admissible d'une courbe stable admettant un g_4^1 sans point base. On note $\pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$ et $\pi'' : \tilde{C}'' \rightarrow C''$ les revêtements admissibles obtenus par la construction tétragonale appliquée à π . On a alors l'égalité ensembliste :

$$\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi'} \Xi \cap \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi''} \Xi = \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi} \Xi.$$

■ Puisque l'on a ([W1] (2.2), p. 168) :

$$\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi'} \Xi = \{ x \in P^* \mid x + \Sigma(\tilde{C}') \subset \Xi \},$$

il suffit de montrer l'égalité ensembliste :

$$\{ x \in P^* \mid x + [\Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'')] \subset \Xi \} = \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi} \Xi.$$

Le théorème 3.4 montre que le membre de droite est inclus dans le membre de gauche. Soit donc \tilde{L} un faisceau inversible sur \tilde{C} correspondant à un élément du membre de gauche. Pour tout couple de diviseurs effectifs $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ sur \tilde{C} vérifiant

$\pi_* \tilde{X}_1 \equiv \pi_* \tilde{X}_2 \in |g_4^1|$, on a alors :

$$\text{soit } h^0(\tilde{C}, \tilde{L}(-\pi^* g_4^1 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2)) \geq 2,$$

$$\text{soit } h^0(\tilde{C}, \tilde{L}(-\pi^* g_4^1 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2)) \text{ impair.}$$

Le lemme 3.5 permet alors de conclure qu'on a l'inégalité :

$$h^0(\tilde{C}, \tilde{L}(-\pi^* g_4^1)) \geq 1,$$

c'est-à-dire que \tilde{L} correspond à un point de $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$. ■

4. Le cas générique

Le théorème 3.4 nous indique maintenant la marche à suivre pour arriver à reconstruire un revêtement double étale $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ de courbes lisses à partir de sa variété de Prym (P, Ξ) . Encore faut-il pouvoir identifier *a priori* $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ dans $\text{Sing } \Xi$. Lorsque cette famille est irréductible et qu'elle n'est pas contenue dans $\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi$, le théorème 3.1 montre que c'est une composante de $\text{Sing } \Xi$. Par contre, il peut arriver que $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ soit contenu dans une composante de dimension supérieure de $\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi$. Il est alors impossible d'identifier *a priori* $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ dans $\text{Sing } \Xi$.

Le théorème suivant caractérise les revêtements doubles pour lesquels ce phénomène se produit. On poursuit ensuite par l'étude du cas (générique) où le morphisme de degré quatre $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est *sans fibre double*, c'est-à-dire sans fibre du type $2x + 2y$ avec $x, y \in C$.

THÉORÈME 4.1. — Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement double étale de courbes lisses connexes, associé à un élément η d'ordre 2 de $\text{Pic}^0 C$. On suppose C tétragonale, non hyperelliptique, non trigonale et non bielliptique, de genre $g \geq 11$. On note $\pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$ et $\pi'' : \tilde{C}'' \rightarrow C''$ les revêtements admissibles obtenus par la construction tétragonale. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ est contenu dans $\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi$.
- (ii) $\Sigma(\tilde{C}) \subset \Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'')$.
- (iii) $\Sigma(\tilde{C})$ est égal à $\Sigma(\tilde{C}')$ [par exemple, ou à $\Sigma(\tilde{C}'')$].
- (iv) On a $h^0(C, g_4^1 + \eta) = 1$.
- (v) Il existe des points x_1, x_2, y_1, y_2 de C vérifiant :

$$\eta \equiv x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \quad \text{et} \quad 2x_1 + 2x_2 \equiv 2y_1 + 2y_2 \in |g_4^1|.$$

- (vi) La courbe semi-canonique est singulière.

Si la propriété (iii) est vérifiée, les revêtements π et π' sont isomorphes. La courbe C'' est réunion d'une courbe trigonale et d'une courbe rationnelle lisse la coupant en 2 points.

■ L'implication (i) \Rightarrow (ii) est une conséquence directe du théorème 3.4 et de l'inclusion :

$$\Sigma(\tilde{C}) + \text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi \subset \Xi.$$

Si (ii) est vérifié, il ressort de la fin de la démonstration du théorème 3.4 qu'on a :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{C}, \quad \exists \tilde{X} \in \tilde{C}^{(8)}, \quad \tilde{x} + \tilde{y} - \sigma \tilde{x} - \sigma \tilde{y} &\equiv \tilde{X} - \pi^* g_4^1 \\ \Rightarrow h^0(\pi^* g_4^1 + \tilde{x} + \tilde{y} - \sigma \tilde{x} - \sigma \tilde{y}) &\geq 1. \end{aligned}$$

Ceci entraîne facilement $h^0(\pi^* g_4^1) \geq 3$, c'est-à-dire la propriété (iv).

Si (iv) est vérifié, l'élément D de $|g_4^1 + \eta|$ vérifie $2D \equiv 2g_4^1$, ce qui entraîne (cf. remarque 3.2.1) qu'il existe deux éléments D_1 et D_2 de $|g_4^1|$ satisfaisant à $2D_1 + 2D_2 = 2D$. Comme $D \notin |g_4^1|$, D_1 et D_2 sont distincts, donc sans point commun. Il existe donc des points x_1, x_2, y_1 et y_2 de C tels que :

$$D_1 = 2x_1 + 2x_2, \quad D_2 = 2y_1 + 2y_2, \quad D = x_1 + x_2 + y_1 + y_2,$$

ce qui entraîne (v). L'implication réciproque (v) \Rightarrow (iv) est immédiate.

L'implication (iv) \Rightarrow (i) résulte aussitôt du fait que si $h^0(\pi^* g_4^1) \geq 3$, alors, pour tout faisceau inversible \tilde{L} sur \tilde{C} correspondant à un point de $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$, on a $h^0(\tilde{L}) \geq h^0(\pi^* g_4^1) \geq 3$ et $h^0(\tilde{L})$ pair, ce qui entraîne $\tilde{L} \in \text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi$.

L'équivalence entre (v) et (vi) est immédiate, de sorte que les propriétés (i), (ii), (iv), (v) et (vi) sont équivalentes.

Supposons maintenant (v) vérifié et montrons (iii). On a :

$$h^0(\pi^*(x_1 + x_2)) = h^0(\pi^*(y_1 + y_2)) = 2$$

et \tilde{C} a un g_4^1 sans point base. Pour tout $\tilde{x} \in \tilde{C}$, on notera $\tilde{X}(\tilde{x})$ l'unique diviseur de degré trois sur \tilde{C} tel que $\tilde{x} + \tilde{X}(\tilde{x}) \in |\pi^*(x_1 + x_2)|$.

Le morphisme :

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{X}(\tilde{x}) + \sigma \tilde{x}$$

induit un morphisme de \tilde{C} dans une des transformées tétraogonales \tilde{C}' de \tilde{C} puisque :

$$\pi_*(\tilde{X}(\tilde{x}) + \sigma \tilde{x}) = \pi_*(\tilde{X}(\tilde{x}) + \tilde{x}) \equiv \pi_* \pi^*(x_1 + x_2) \equiv g_4^1.$$

Ce morphisme est compatible aux actions de σ et il est injectif :

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tilde{x}) + \sigma \tilde{x} &\equiv \tilde{X}(\tilde{y}) + \sigma \tilde{y} \\ \Rightarrow \sigma \tilde{x} - \tilde{x} &\equiv \sigma \tilde{y} - \tilde{y} \\ \Rightarrow \tilde{x} &= \tilde{y}, \end{aligned}$$

puisque \tilde{C} , comme C , n'est pas hyperelliptique.

Comme \tilde{C}' a au plus des points doubles ordinaires comme singularités, \tilde{C}' est lisse et π' est isomorphe à π . La propriété (iii) résulte alors de l'équivalence :

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{C}, \quad \tilde{x} + \tilde{y} - \sigma \tilde{x} - \sigma \tilde{y} \equiv \tilde{X}(\sigma \tilde{y}) + \tilde{y} - \tilde{X}(\tilde{x}) - \sigma \tilde{x}.$$

Enfin, à tout élément $\tilde{X}(\tilde{x}) + \tilde{x}$ de $|g_4^1|$ est associé un point de \tilde{C}'' , ce qui induit un plongement de \mathbb{P}^1 dans \tilde{C}'' . Ce \mathbb{P}^1 coupe les autres composantes de \tilde{C}'' en les points singuliers $\pi^*(x_1 + x_2)$ et $\pi^*(y_1 + y_2)$ (cf. [B 2], prop. 3).

La démonstration du théorème est ainsi complète. ■

On s'intéresse maintenant aux revêtements doubles étales des courbes lisses C munies d'un morphisme de degré quatre $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ sans fibre double, c'est-à-dire sans fibre du type $2x + 2y$ avec $x, y \in C$. Il apparaît qu'on peut décrire assez explicitement les singularités du diviseur thêta de la variété de Prym associée. Comme d'habitude, on note $\pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$ et $\pi'' : \tilde{C}'' \rightarrow C''$ les revêtements admissibles obtenus par la construction tétragonale; d'après le critère de Welters ([W 2], [B 2]), l'hypothèse que le g_4^1 de C est sans fibre double est équivalente à la lissité de C' et C'' . En particulier, leur g_4^1 vérifie alors la même propriété.

THÉORÈME 4.2. — Soient $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement double étale d'une courbe lisse connexe non hyperelliptique, non trigonale et non bielliptique de genre $g \geq 13$ et (P, Ξ) sa variété de Prym, de dimension $p = g - 1$. On suppose que C admet un g_4^1 sans fibre double. Alors, $\text{Sing } \Xi$ est de dimension $p - 6$ et a trois composantes irréductibles de cette dimension à savoir :

$$\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi} \Xi, \quad \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi'} \Xi \quad \text{et} \quad \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi''} \Xi.$$

Les singularités stables pour un des revêtements π , π' ou π'' sont constituées de la réunion des composantes $\text{Sing}_{\text{ex}, 1} \Xi$ des deux autres revêtements.

Remarque 4.3. — Si $\xi \in H^2(P, \mathbb{Z})$ désigne la classe du diviseur Ξ , il résulte de [B 2] que la classe de cohomologie de chacune des trois familles ci-dessus est $2^3 \xi^6 / 6!$

D'autre part, il peut exister des composantes de dimension $< p - 6$ de $\text{Sing } \Xi$, qui sont alors exceptionnelles pour les trois revêtements.

■ **Démonstration du théorème 4.2.** — L'unique g_4^1 de C n'admettant pas de fibre double, celle-ci n'admet pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre 2. Il en est de même pour C' et C'' . Le théorème 3.1 montre alors que les trois familles en question sont irréductibles. La proposition 3.6 donne ensuite :

$$\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi'} \Xi \cup \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi''} \Xi \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi} \Xi.$$

D'autre part, le g_4^1 de C étant sans fibre double, la condition (v) du théorème 4.1 n'est pas vérifiée, donc $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi} \Xi$ n'est pas contenu dans $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi} \Xi$. En particulier, $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi} \Xi$ et $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi'} \Xi$ sont distincts. Par conséquent, les familles $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi} \Xi$, $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi'} \Xi$ et $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi''} \Xi$ sont des composantes de $\text{Sing } \Xi$ distinctes deux à deux.

Enfin, soit Z une composante de $\text{Sing } \Xi$ de dimension $\geq p - 6$. Si Z n'est pas égale à $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi} \Xi$, la proposition 3.6 montre que Z n'est pas contenue dans $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi'} \Xi \cap \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi''} \Xi$. La famille Z est donc formée de singularités exceptionnelles pour l'un des revêtements π' ou π'' et est donc égale [théorème 3.1 (ii)] à l'une des familles $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi'} \Xi$ ou $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi''} \Xi$, ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Le théorème de Torelli se démontre alors très simplement.

COROLLAIRE 4.4 (théorème de Torelli). — Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement double étale vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Soit $\rho : \tilde{D} \rightarrow D$ un revêtement admissible de variété de Prym isomorphe à celle de π . Alors, ρ est isomorphe à π ou à l'un des deux revêtements obtenus à partir de π par application d'une construction tétragonale.

■ Il résulte de théorèmes d'existence ([Be], [D 2]) que la variété $\text{Sing}_{\text{st}}^p \Xi$ est non vide, de dimension partout $\geq p-6$, donc qu'elle contient l'une des trois composantes décrites dans le théorème précédent. Cette conclusion est aussi conséquence de nos résultats : si les trois composantes sont exceptionnelles pour ρ , le théorème 3.1 montre que D a un g_4^1 ; la proposition 3.6 montre alors que $\text{Sing}_{\text{st}}^p \Xi$ a une composante de dimension $\geq p-6$.

Si $\text{Sing}_{\text{st}}^p \Xi$ contient par exemple $\text{Sing}_{\text{ex},1}^p \Xi$, on déduit du théorème 3.4 qu'on a :

$$\Sigma(\tilde{D}) \subset \Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'').$$

On peut alors utiliser la description suivante de $\mathbb{P} T_0 \Sigma(\tilde{D})$, cône tangent projectifié en 0 à $\Sigma(\tilde{D})$, partielle mais suffisante pour nos besoins.

LEMME 4.5. — Soit $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$ un revêtement admissible de variété de Prym (P, Ξ) . Alors, si D est singulière, les composantes irréductibles de dimension >0 de $\mathbb{P} T_0 \Sigma(\tilde{D})$ sont de degré $< 2g(D)-2$. Si D est lisse, $\mathbb{P} T_0 \Sigma(\tilde{D})$ est isomorphe à l'image du morphisme $D \rightarrow \mathbb{P} H^0(K_D + \eta) \simeq \mathbb{P} T_0 P$ associé au système semi-canonique lié à π ; en particulier, si $\dim \text{Sing } \Xi < \dim P-4$, $\mathbb{P} T_0 \Sigma(\tilde{D})$ est une courbe de degré $2g(D)-2$, dont D est la normalisée.

■ On peut supposer la courbe D stable. Soient $\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_s$ les normalisées des composantes irréductibles de \tilde{D} . La variété $\Sigma(\tilde{D})$ est alors réunion des images Σ_i des surfaces $\tilde{N}_i^{(2)}$ d'une part et des images $\Sigma_{i,j}$ des surfaces $\tilde{N}_i \times \tilde{N}_j$ d'autre part.

Il est facile de montrer que $\mathbb{P} T_0 \Sigma_{i,j}$ est réunion de droites.

D'autre part, comme le remarque Welters dans [W 1], p. 167, le morphisme naturel $\tilde{N}_i^{(2)} \rightarrow \Sigma_i$ induit, après éclatement de 0 dans P , le morphisme de Gauss $G_i : \tilde{N}_i \rightarrow \mathbb{P} T_0 \Sigma_i \subset \mathbb{P} T_0 P$, qui est aussi le morphisme associé aux sections antiinvariantes de $\omega_{\tilde{N}_i}$.

Si N_i est le quotient de \tilde{N}_i par l'involution associée à π et $2r_i$ le nombre de points de ramification du morphisme induit, le degré de $G_i(\tilde{N}_i)$ est alors au plus $2g(N_i)-2+r_i=2(g(N_i)+r_i)-2-r_i \leq 2g(D)-2$ [on pourra remarquer que $G_i(\tilde{N}_i)$ est une courbe sauf si \tilde{N}_i est une courbe elliptique]. Il y a égalité si et seulement si $r_i=0$, c'est-à-dire si D est lisse. Dans ce cas, la courbe $G(\tilde{D})$ est de degré $2g(D)-2$, sauf peut-être si D est hyperelliptique ou bielliptique. Ces cas sont exclus si on fait l'hypothèse $\dim \text{Sing } \Xi < \dim P-4$ ([B 1], [D 2]). ■

On peut alors terminer la démonstration du corollaire 4.4 : comme $\mathbb{P} T_0 \Sigma(\tilde{D})$ est contenu dans la réunion de $\mathbb{P} T_0 \Sigma(\tilde{C}')$ et de $\mathbb{P} T_0 \Sigma(\tilde{C}'')$, qui, par le lemme 4.5, sont des courbes irréductibles de même degré $2g-2$, le même lemme montre que \tilde{D} est lisse et que ρ est isomorphe à l'un des revêtements π' ou π'' . ■

On termine par la démonstration d'une conjecture de Welters, dans le cas particulier des courbes tétragonales. On rappelle qu'ayant raisonné ensemblistement, on ne peut déduire du résultat de ce corollaire la conjecture pour une variété de Prym générique.

COROLLAIRE 4.6 (Conjecture de Welters). — Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement étale double vérifiant les hypothèses du théorème précédent. On suppose de plus que C est de genre $g \geq 22$. On a alors l'égalité ensembliste :

$$\{a \in P \mid a + \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi} \Xi \subset \Xi\} = \Sigma(\tilde{C}).$$

■ Il ressort des théorèmes 3.4 et 4.2 que le membre de gauche est égal à :

$$\Sigma(\tilde{C}) \cup (\Sigma(\tilde{C}') \cap \Sigma(\tilde{C}'')).$$

Les courbes C' et C'' vérifiant les mêmes hypothèses que C , il suffit de montrer le lemme suivant. ■

LEMME 4.7. — L'intersection $\Sigma(\tilde{C}) \cap \Sigma(\tilde{C}')$ est une courbe contenue dans $\Sigma(\tilde{C}) \cap \Sigma(\tilde{C}') \cap \Sigma(\tilde{C}'')$.

■ Un point de $\Sigma(\tilde{C}) \cap \Sigma(\tilde{C}')$ correspond à une équivalence du type :

$$\tilde{x} + \tilde{y} - \sigma \tilde{x} - \sigma \tilde{y} \equiv \tilde{X}_2 - \tilde{X}_1,$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{C}, \quad \tilde{x} \neq \sigma \tilde{y} \\ \pi_* \tilde{X}_1, \pi_* \tilde{X}_2 \in |g_4^1|. \end{aligned}$$

On a donc :

$$(\star) \quad \tilde{X}_1 + \tilde{x} + \tilde{y} \equiv \tilde{X}_2 + \sigma \tilde{x} + \sigma \tilde{y}.$$

S'il y a égalité, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \sigma \tilde{x} + \sigma \tilde{y} + \tilde{Y}_1 \\ \tilde{X}_2 &= \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{Y}_2 \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \in \tilde{C}^{(2)}, \end{aligned}$$

de sorte que $\tilde{x} + \tilde{y}$ appartient à la courbe Γ de $\tilde{C}^{(2)}$ définie par :

$$\Gamma = \{ \tilde{x} + \tilde{y} \in \tilde{C}^{(2)} \mid H^0(C, g_4^1 - \pi \tilde{x} - \pi \tilde{y}) \neq 0 \}.$$

Réciproquement, si $\pi_*(\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{t}) \in |g_4^1|$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{x} + \tilde{y} - \sigma \tilde{x} - \sigma \tilde{y} &= \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{t} - (\sigma \tilde{x} + \sigma \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{t}) \\ &= \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} + \sigma \tilde{t} - (\sigma \tilde{x} + \sigma \tilde{y} + \tilde{z} + \sigma \tilde{t}) \\ &\in \Sigma(\tilde{C}) \cap \Sigma(\tilde{C}') \cap \Sigma(\tilde{C}''). \end{aligned}$$

S'il n'y a pas égalité dans (\star) , on a alors :

$$\begin{aligned} h^0(\tilde{C}, \tilde{X}_1 + \tilde{x} + \tilde{y}) &\geq 2 \\ \Rightarrow h^0(\tilde{C}, \pi^* g_4^1 + \tilde{x} + \tilde{y}) &\geq 3. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant la proposition p. 338 de [M] et en notant $x = \pi \tilde{x}$ et $y = \pi \tilde{y}$:

$$h^0(C, g_4^1 + x + y + \eta) \geq 1,$$

soit, puisque η est d'ordre 2 et que $H^0(C, g_4^1 + \eta)$ est nul :

$$h^0(C, 2g_4^1 + 2x + 2y) \geq 4.$$

On a donc un morphisme $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^3$ dont l'image est de degré ≤ 12 et est contenue dans un cône quadratique. On est alors dans un cas suivants :

• $\deg \varphi = 4$. La courbe $\varphi(C)$ est alors de degré 3 donc rationnelle lisse. Le g_4^1 de C étant unique, on a :

$$2g_4^1 + 2x + 2y \equiv 3g_4^1,$$

ce qui contredit l'hypothèse que le g_4^1 de C est sans fibre double.

• $\deg \varphi = 3$. La courbe $\varphi(C)$ est alors elliptique *lisse* puisque C n'est pas trigonale. Ce cas est impossible puisque $2x + 2y$ est dans une fibre de φ .

• $\deg \varphi = 2$. La courbe $B = \varphi(C)$ est alors lisse de genre 3. Si $\rho : C \rightarrow B$ est le morphisme induit et si on écrit un élément du g_4^1 de C comme $(p^*D)(M)$ où $M \geq 0$ et D est effectif maximal, la même proposition de [M] donne $h^0(B, D) \geq 2$, de sorte que B est hyperelliptique et que $g_4^1 = p^*g_2^1$. Ceci contredit l'hypothèse que le g_4^1 de C est sans fibre double.

• $\deg \varphi = 1$. Si $n : S \rightarrow \Sigma$ est la normalisation du cône quadratique contenant $\varphi(C)$, on a :

$$\text{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[F] \quad \text{et} \quad C \equiv 4H + aF$$

où $\mathcal{O}(H) = n^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$, $[H]^2 = 2$, $[H] \cdot [F] = 1$, $[F]^2 = 0$ et $a \leq 4$.

On a alors :

$$g(C) \leq 1 + \frac{1}{2}(4H + aF) \cdot (2H + aF) = 1 + 8 + 3a \leq 21,$$

ce qui contredit notre hypothèse. ■

5. Un cas particulier

Cette partie est consacrée à l'étude du cas particulier des revêtements doubles de courbes tétragones satisfaisant aux conditions équivalentes du théorème 4.1. On donne une démonstration du théorème de Torelli dans ce cas, principalement pour illustrer le genre de phénomènes que l'on rencontre lorsqu'on étudie les variétés de Prym de courbes tétragones particulières.

Tout comme dans la partie précédente, on commence par analyser la structure du lieu singulier du diviseur thêta de la variété de Prym.

PROPOSITION 5.1. — Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement double étale connexe d'une courbe lisse de genre $g = p + 1 \geq 10$, tétragonale, non trigonale et n'admettant pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre ≤ 2 . On suppose que π vérifie les conditions équivalentes du théorème 4.1. Alors la famille $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ est contenue dans une composante de dimension $p - 5$ de $\text{Sing } \Xi$.

■ Soit donc π un revêtement vérifiant les conditions équivalentes du théorème 4.1. Une des courbes fournies par la construction tétragonale s'écrit $C'' = D \cup \mathbb{P}^1$, où D est trigonale stable, coupant \mathbb{P}^1 en deux points x et y . On vérifie alors que :

$$H^0(C'', \omega_{C''}(-2g_4^1)) \simeq H^0(D, \omega_D(x+y-2g_3^1)) \simeq H^0(D, \omega_D(-2g_3^1)),$$

qui est de dimension $g(D) - 4 = g(C) - 5 = p - 4$.

Comme $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ est irréductible (théorème 3.1), il est clair qu'il suffit de démontrer la proposition dans le cas (générique) où la courbe D est lisse connexe (c'est le cas si et seulement si le g_4^1 de C a exactement deux fibres doubles). Le système linéaire $|\omega_D(-2g_3^1)|$ est alors sans point base et induit un morphisme $D \rightarrow \mathbb{P}^{p-5}$ birationnel sur son image. Il résulte alors de [B2] que $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi''} \Xi$ est irréductible de dimension $p - 5$. D'autre part, il résulte des propriétés 4.1 (i) et (iii) et de la proposition 3.6 qu'on a :

$$\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi \subset \text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi = \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi'} \Xi = \text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi''} \Xi,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

Remarque 5.2. — Il résulte de la démonstration ci-dessus que lorsque le g_4^1 de C a exactement deux fibres doubles, alors $\text{Sing } \Xi$ est réunion de la variété irréductible $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^{\pi''} \Xi$, de dimension $p - 5$, et, éventuellement, de composantes de dimension $< p - 6$.

On en vient pour terminer à la démonstration du théorème de Torelli dans ce cas. Rappelons que la courbe semi-canonique est singulière, donc en particulier non projectivement normale. Par conséquent, l'application Prym est ramifiée le long du lieu des revêtements satisfaisant aux conditions du théorème 4.1.

THÉORÈME 5.3. — Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement double étale connexe d'une courbe lisse de genre $g \geq 13$, tétragonale, non trigonale et n'admettant pas de morphisme de degré 2 sur une courbe de genre ≤ 2 . On suppose que π vérifie les conditions équivalentes du théorème 4.1 et on note (P, Ξ) sa variété de Prym.

Alors, tout revêtement étale double de courbes lisses connexes de variété de Prym isomorphe à (P, Ξ) est isomorphe à π .

■ Soit $p = g - 1$ la dimension de P et S une composante de dimension $p - 5$ de $\text{Sing } \Xi$ contenant $\text{Sing}_{\text{ex}, 1}^\pi \Xi$ (prop. 5.1). Si $\rho : \tilde{D} \rightarrow D$ est un revêtement de courbes lisses de variété de Prym (P, Ξ) , on a tout d'abord $\dim \text{Sing } \Xi < \dim P - 4$, de sorte que D n'est ni hyperelliptique, ni trigonale, ni bielliptique ([B1], Theorem (4.10)). Le théorème 3.1

montre alors que $\text{Sing}_{\text{ex}}^p \Xi \leq p-6$, de sorte que :

$$\begin{aligned} S &\subset \text{Sing}_{\text{st}}^p \Xi \\ \Rightarrow S + \Sigma(\tilde{D}) &\subset \Xi \\ \Rightarrow \text{Sing}_{\text{ex},1}^p \Xi + \Sigma(\tilde{D}) &\subset \Xi \\ \Rightarrow \Sigma(\tilde{D}) &\subset \Sigma(\tilde{C}') \cup \Sigma(\tilde{C}'') \quad (\text{par théorème 3.4}). \end{aligned}$$

Comme \tilde{C}'' est singulière (théorème 4.1) et que \tilde{D} est lisse, le lemme 4.5 entraîne l'égalité $\Sigma(\tilde{D}) = \Sigma(\tilde{C}') = \Sigma(\tilde{C})$. Le même lemme montre que les revêtements π et ρ sont isomorphes. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [ACGH] A. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Geometry of Algebraic Curves, I*, Springer Verlag.
- [B 1] A. BEAUVILLE, *Prym Varieties and the Schottky Problem* (*Invent. Math.*, vol. 41, 1977, p. 149-196).
- [B 2] A. BEAUVILLE, *Sous-variétés spéciales des variétés de Prym* (*Comp. Math.*, 45, 1982, p. 357-383).
- [Be] A. BERTRAM, *An Existence Theorem for Prym Special Divisors* (*Inv. Math.*, vol. 90, 1987, p. 669-671).
- [D 1] O. DEBARRE, *Sur le problème de Torelli pour les variétés de Prym* [*Am. J. of Math.* (à paraître)].
- [D 2] O. DEBARRE, *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3* (*Duke Math. J.*, vol. 56, 1988, p. 221-273).
- [Do] R. DONAGI, *The Tetragonal Construction* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 4, 1981, p. 181-185).
- [F-S] R. FRIEDMAN et R. SMITH, *The Generic Torelli Theorem for the Prym Map* (*Invent. Math.*, vol. 67, 1982, p. 473-490).
- [K] V. I. KANEV, *The Global Torelli Theorem for Prym Varieties at a Generic Point* (*Math. U.S.S.R. Izvestija*, 20, 1983, p. 235-258).
- [Ke] C. KEEM, *A Remark on the Variety of Special Linear Systems on an Algebraic Curve* (Ph. D. Thesis, Brown University, 1983).
- [M] D. MUMFORD, *Prym Varieties I. Contributions to Analysis*. Acad. Press, New York, 1974, p. 325-350.
- [W 1] G. WELTERS, *Recovering the Curve Data from a General Prym Variety* (*Amer. J. of Math.*, vol. 109, 1987, p. 165-182).
- [W 2] G. WELTERS, *Abel-Jacobi Isogenies for Certain Types of Fano Threefolds*, Mathematisch Centrum, Amsterdam. 1981.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1988,
révisé le 31 mai 1988).

O. DEBARRE,
Bâtiment 245
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France.