ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

D. BURNS
P. DE BARTOLOMEIS

Applications harmoniques stables dans P^n

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 2 (1988), p. 159-177
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_2_159_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 159 à 177.

APPLICATIONS HARMONIQUES STABLES DANS P^n

PAR D. BURNS ET P. DE BARTOLOMEIS (1)

Introduction

Nous présentons ici les détails de nos résultats sur les applications harmoniques stables dans les espaces projectifs, décrits antérieurement dans une note [BdB1] parue aux comptes rendus du colloque « Applications Harmoniques » tenu à Luminy.

Soient M, N deux variétés compactes kählériennes. Il est bien connu que toute application $f: M \to N$ holomorphe est harmonique et d'énergie absolument minimale dans sa classe d'homotopie. Nous étudions ici jusqu'à quel point la réciproque est valable, du moins pour le cas très restreint $N = \mathbb{P}^n$, l'espace projectif complexe de dimension n. On peut trouver plusieurs exemples dans la littérature d'énoncés de ce genre, surtout pour le cas de $M = S^2$ et pour $N =$ un espace convenable, par exemple, les variétés de Grassmann complexes (*voir* e. g., [SY], [Si3], [BS], [BW], [CW], [U], [W], [O]). Dans les travaux [BRS], [V], [L], le rôle de l'espace de twistors au-dessus de N est mis en évidence.

D'une façon vague, on peut imaginer une application harmonique f comme étant la donnée d'une sous-variété minimale de N (l'image de l'application), munie d'un paramétrage distingué de cette sous-variété par l'application f elle-même. Notre travail se divise naturellement en deux parties, suivant ces deux aspects d'une application harmonique.

Dans la suite, nous supposons que M est une variété riemannienne, compacte, connexe, orientée et, pour simplifier, analytique réelle. Supposons de plus que $f: M \to \mathbb{P}^n$ est une application harmonique stable, dont la différentielle f_* est génériquement injective. Si M est de dimension paire $m = 2k$, on appelle degré de f l'entier d tel que $f_*([M]) = d.[L^k]$ dans $H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$, où [M] est la classe d'orientation de M, et $[L^k]$ est la classe associée à une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^n$ de dimension k, munie de son orientation complexe.

Nous nous servons, au paragraphe 1, de l'analogue pour les applications harmoniques dans les projectifs de l'argument de Lawson-Simons [LS] dans le cadre de courants stables. Son but ici est de dégager des conséquences locales de la stabilité globale, en étudiant le comportement de la seconde variation de l'énergie sur les variations de f le long d'un flot holomorphe de P^n. On trouve que, pour que M puisse porter une f stable

(1) Subventionnés en partie par la N.S.F. (U.S.A.) et C.N.R. (IT).

non dégénérée, il faut que la dimension de M soit paire. En ce cas (théorème 2.1), l'image de f est une sous-variété holomorphe irréductible V de $\mathbb{P}^n$. (Nous remarquons que nous rencontrons ici un problème technique que nous n'avons pas pu résoudre jusqu'à présent: *a priori*, il est possible que le courant d'intégration $f_*[M]$ soit la somme, au sens de courants, de plusieurs copies de la variété V, munies d'orientations différentes, ce qui ne nous semble peu probable. Le problème est lié à la dimension du sous-ensemble analytique réel Σ de M où le rang de f_* n'est pas maximal.)

Les conséquences locales de la stabilité de f dont nous avons parlé jusqu'à maintenant sont un peu plus générales, et suffisent pour l'étude d'applications harmoniques stables d'une surface (réelle) dans un espace hermitien symétrique quelconque (*voir* [BBdBR]). Les résultats ci-dessous dépendent plus étroitement du corollaire 1.5, qui dépend, à son tour, nettement de la forme exacte de la courbure de l'espace symétrique P^n.

Nous considérons aux paragraphes 3-4, le paramétrage fourni par l'application f. Soit encore Σ le sous-ensemble analytique réel de M où la différentielle f_* n'est pas de rang maximal. Il résulte du corollaire 1.5 que la structure complexe induite sur $f(M\setminus\Sigma) \subset \mathbb{P}^n$ grâce au théorème 2.1 induit une structure complexe sur $M\setminus\Sigma$, compatible avec la métrique ds^2 donnée sur M. Nous sommes donc amenés à étudier les espaces de twistors sur M. Rappelons que les espaces de twistors sont les fibrés sur M, $Z_+(M)$ ou $Z_-(M)$, paramétrisant les structures presque-complexes sur le fibré tangent à M, et qui sont directe ou rétrograde, respectivement, par rapport à l'orientation donnée de M. La structure presque-complexe J provenant de f donne naissance à une section de $Z_\pm(M)$, suivant l'orientation. L'image de cette section est une sous-variété de $Z_\pm(M)$ qui est holomorphe par rapport à la structure presque-complexe naturelle sur $Z_\pm(M)$, parce que J est intégrable. Mais la structure presque-complexe sur $Z_\pm(M)$ toute entière n'est presque jamais intégrable, donc on peut trouver des obstructions à l'existence d'une telle application f. Ces obstructions sont très fortes dans le cas d'une M de dimension réelle 4, et surtout, pour les surfaces kählériennes. Par exemple, on peut déterminer (paragraphe 4) qu'une application harmonique stable $f: M \to \mathbb{P}^n$ de degré positif, où M est une surface kählérienne minimale (au sens de la classification de surfaces complexes), est holomorphe ou anti-holomorphe, sauf quand la courbure de Ricci est nulle. (Dans ces cas, f est holomorphe pour une structure complexe tordue sur M.) Nous remarquons ici que la démonstration passe par plusieurs cas dans la classification, et pour les exemples où $Z_+(M)$ est intégrable, dépend d'une analyse globale de la géométrie complexe de $Z_+(M)$. (Pour les énoncés exacts, *cf.* théorèmes 4.3, 4.8, 4.10.) Remarquons que la situation pour les applications de degré négatif n'est pas symétrique du cas traité ici.

Nous voudrions remercier N. Sibony pour nombreuses discussions sur les courants et leurs prolongements, et C. Le Brun et le referee pour plusieurs remarques utiles pendant la rédaction de ce travail.

1. Conséquences locales de la stabilité

Soit $f: M \to N$ une application lisse de variétés riemanniennes. Soient $\nabla_M = \nabla$, $\nabla_N = \nabla$ les connexions de Levi-Civita sur M, N respectivement, et soit $\hat{\nabla}$ la connexion induite sur le fibré $E = f^* T(M)$. Nous identifions dans ce qui suit un champ de vecteurs v sur N et la section induite de E associée. Suivant cette identification, nous avons

$$\hat{\nabla} v = f^* \nabla v. \tag{1.1}$$

Donc, si X est un vecteur tangent à M,

$$\hat{\nabla}_X v = \nabla_{f_* X} v. \tag{1.2}$$

Supposons maintenant que M soit compacte. L'énergie $\mathscr{E}(f)$ est donnée par

$$\mathscr{E}(f) = \frac{1}{2} \int_M |f_*|^2 \, d\,\mathrm{vol}. \tag{1.3}$$

La seconde variation de $\mathscr{E}$ en f le long d'un champ de variation, c'est-à-dire, le long d'une section v de E, est donnée par

$$\delta^2 \mathscr{E}(v, v) = Q(v) = \int_M H_p(f)(v, v) \, d\,\mathrm{vol}(p), \tag{1.4}$$

où

$$H_p(f)(v, w) = (\hat{\nabla} v, \hat{\nabla} w) - \Sigma (R(f_*(e_i), v) f_*(e_i), w), \tag{1.5}$$

évalué en $p \in M$ (*voir* [Sm]). Ici, R désigne l'opérateur de courbure de Riemann de M, v, w sont des sections de E, et $\{e_i\}_{i=1, \ldots, m}$ est une base orthonormée de $T_p(M)$. On note par $(.,.)$ la forme quadratique sur T(M) et T(N) également.

Désormais, nous supposons que N est $\mathbb{P}^n$, l'espace projectif complexe, muni de sa métrique de Fubini-Study. Notons J_0 la structure presque-complexe habituelle sur $\mathbb{P}^n$, aussi bien, par abus de notation, celle qui est induite sur le fibré E. Soit maintenant (ξ_j) une base de l'algèbre $\mathfrak{k}$ de champs de Killing sur $\mathbb{P}^n$, orthonormée par rapport à la forme de Killing, notée $\langle .,. \rangle$.

LEMME 1.1. — $\sum_j H_p(J_0 v_j, J_0 v_j) \equiv 0$ *sur* M, *où* $v_j = f^* \xi_j$.

Preuve. — Fixons $p \in M$, et soit $q = f(p)$. Alors, nous avons une décomposition en somme directe, orthogonale par rapport à la forme de Killing, $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}_q \oplus \mathfrak{p}_q$, où on définit $\mathfrak{h}_q = \{\xi \in \mathfrak{k} \mid \xi(q) = 0\}$. On note que $\mathfrak{p}_q \cong T_q(P^n)$. Soient $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ des bases orthonormées de $\mathfrak{h}_q$, $\mathfrak{p}_q$ respectivement, posons $\mathscr{B} = \mathscr{B}' \cup \mathscr{B}''$. Notons d'abord quelques faits qu'on déduit immédiatement de la définition de la métrique de Fubini-Study, et du fait qu'elle est kählérienne : pour $v \in \mathscr{B}$,

(i) $|\hat{\nabla} v|^2 = |\hat{\nabla} J_0 v|^2$;

(ii) si $v \in \mathfrak{p}_q$, alors $\hat{\nabla} v(q) = 0$;

(iii) $(R(v, w) w, v) = \frac{1}{4} (|v|^2 . |w|^2 - (v, w)^2 + 3 (v, J_0 w)^2)$,

où R est l'opérateur de courbure sur $\mathbb{P}^n$.

Le facteur 1/4 ci-dessus équivaut, bien sûr, au choix d'une constante pour la courbure sectionnelle holomorphe sur $\mathbb{P}^n$. (Le lecteur peut trouver (ii), (iii) dans [LS], par exemple.) Donc, on a

$$\sum_{v \in \mathcal{B}} H_p(f)(J_0 v) = \sum_{v \in \mathcal{B}'} + \sum_{v \in \mathcal{B}''}.$$

(i) ci-dessus et la définition de $\mathfrak{h}_q$ impliquent:

$$\sum_{v \in \mathcal{B}'} H_p(f)(J_0 v) = \sum_{v \in \mathcal{B}'} H_p(f)(v) = \sum_{v \in \mathcal{B}'} |\hat{\nabla} v|^2.$$

Pour les v dans $\mathcal{B}''$, on obtient:

$$\sum_{v \in \mathcal{B}''} H_p(f)(J_0 v) = - \sum_{v \in \mathcal{B}''} \sum_i (R(f_*(e_j), J_0 v) J_0 v, f_*(e_j))(q), \tag{1.6}$$

grâce à (ii) ci-dessus.

Soit maintenant v une section quelconque de E. Il faut développer $|\hat{\nabla} v|^2$ plus explicitement. Nous calculons

$$\begin{aligned}
|\hat{\nabla} v|^2 &= |f^* \nabla v|^2 \\
&= \Big|f^*\Big(\sum_{v_j \in \mathcal{B}''} \nabla_{v_j} v \otimes v_j^*\Big)\Big|^2 \\
&= \Big|\sum_{v_j \in \mathcal{B}''} \nabla_{v_j} v \otimes f^*(v_j^*)\Big|^2 \\
&= \sum_{v_j, v_k \in \mathcal{B}''} (\nabla_{v_j} v, \nabla_{v_k} v)(f^*(v_j^*), f^*(v_k^*)).
\end{aligned}$$

On a noté v_j^* les 1-formes duales des $v_j \in \mathcal{B}'' \subset \mathfrak{p}_q \cong T_q(P^n)$.

Si $\langle .,. \rangle$ est la forme de Killing sur $\mathfrak{k}$, l'isomorphisme $\mathfrak{p}_q \cong T_q(P^n)$ est, à un facteur près, une isométrie, d'où on peut écrire

$$\begin{aligned}
(\nabla_{v_j} v, \nabla_{v_k} v) &= \sum_{v_m \in \mathcal{B}''} (\nabla_{v_j} v, v_m)(\nabla_{v_k} v, v_m) \\
&= \sum_{v_m \in \mathcal{B}''} \langle \operatorname{ad}(v_j)(v), v_m \rangle \langle \operatorname{ad}(v_k)(v), v_m \rangle \\
&= \sum_{v_m \in \mathcal{B}''} \langle \operatorname{ad}(v_j)(v_m), v \rangle \langle \operatorname{ad}(v_k)(v_m), v \rangle,
\end{aligned}$$

grâce à l'invariance de la forme de Killing. Revenant à notre calcul principal, on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in \mathcal{B}'} |\nabla v|^2 &= \\
&= \sum_{v \in \mathcal{B}'} \sum_{v_j, v_k, v_l \in \mathcal{B}''} \langle \operatorname{ad}(v_j)(v_l), v \rangle \langle \operatorname{ad}(v_k)(v_l), v \rangle (f^* v_j^*, f^* v_k^*)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$= \sum_{v_j, v_k, v_l \in \mathscr{B}''} \langle \operatorname{ad}(v_j)(v_l), \operatorname{ad}(v_k)(v_l) \rangle (f^* v_j^*, f^* v_k^*)$$

$$= \sum_{v_j, v_k, v_l \in \mathscr{B}''} -\langle v_l, \operatorname{ad}(v_j) \operatorname{ad}(v_k)(v_l) \rangle (f^* v_j^*, f^* v_k^*)$$

$$= \sum_{v_j, v_k, v_l \in \mathscr{B}''} (\mathrm{R}(v_l, v_j) v_k, v_l)(f^* v_j^*, f^* v_k^*)$$

$$= \frac{n+1}{2} \sum_i |f_*(e_i)|^2.$$

D'autre part, en utilisant (1.6) une fois de plus, on obtient:

$$(1.8) \quad -\sum_{v \in \mathscr{B}''} \sum_i (\mathrm{R}(f_*(e_i), \mathrm{J}_0 v) \mathrm{J}_0 v, f_*(e_i))(q)$$

$$= -\sum_{v \in \mathscr{B}''} \sum_i \frac{1}{4} (|f_*(e_i)|^2 - (f_*(e_i), \mathrm{J}_0 v)^2 - 3(f_*(e_i), v)^2)$$

$$= -\frac{n+1}{2} \sum_i |f_*(e_i)|^2.$$

En comparant (1.7), (1.8), la démonstration est achevée.

En tenant compte de la stabilité de f, le lemme 1.1 implique immédiatement:

COROLLAIRE 1.2. — *Pour chaque* $v \in \mathfrak{f}$, $\mathrm{J}_0 v$ *est un champ de Jacobi le long de* f, *c'est-à-dire, satisfait à l'équation de Jacobi* $\mathscr{J}(\mathrm{J}_0 v) = 0$, *où*

$$\mathscr{J}(v) \equiv \hat{\nabla}^* \hat{\nabla}(v) - \sum_i \mathrm{R}(f_*(e_i), v) f_*(e_i).$$

En fait, il y a suffisamment de sections de E parmi les $v \in \mathfrak{f}$, qu'on peut montrer le lemme suivant.

LEMME 1.3. — *En tant qu'opérateurs sur les sections de E, on a*

$$[\mathscr{J}, \mathrm{J}_0] = 0.$$

Démonstration. — En effet, d'après les définitions mêmes, et le fait que $\mathbb{P}^n$ est kählérienne, pour v une section de E quelconque,

$$[\mathscr{J}, \mathrm{J}_0](v) = -\sum_i \mathrm{R}(f_*(e_i), \mathrm{J}_0 v) f_*(e_i) + \sum_i \mathrm{R}(f_*(e_i), v) \mathrm{J}_0 f_*(e_i),$$

En particulier, $[\mathscr{J}, \mathrm{J}_0]$ est un opérateur de degré 0. En même temps, $[\mathscr{J}, \mathrm{J}_0]\ (v) = 0$, pour chaque $v \in \mathfrak{f}$, grâce au corollaire 1.2. Parce que chaque fibre E_p de E est engendré par les valeurs de tels $v \in \mathfrak{f}$, le lemme est démontré.

Avant de procéder à la proposition finale de ce paragraphe, précisons notre notation. Pour $p \in \mathrm{M}$, $q = f(p) \in \mathbb{P}^n$, soit

$${}^t f_* : \quad \mathrm{T}_q(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$$

l'adjoint de la différentielle $f_*: T_p(M) \to T_q(\mathbb{P}^n)$ par rapport aux produits scalaires données sur $T_p(M)$, $T_q(\mathbb{P}^n)$. Le reste de ce travail est basé sur la proposition suivante, et son corollaire 1.5.

PROPOSITION 1.4. — *Soit $f: M \to \mathbb{P}^n$ une application harmonique stable, et soit J_0 la structure presque-complexe sur $T_q(\mathbb{P}^n)$. Alors,*

$$[f_* \circ {}^t f_*, J_0] = 0 \quad \textit{sur} \quad T_q(\mathbb{P}^n). \tag{1.9}$$

Notons d'abord quelques conséquences immédiates de la proposition.

COROLLAIRE 1.5. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a:*

(1) *L'image de f_* dans $T_q(\mathbb{P}^n)$ est un sous-espace complexe.*

(2) *f_* est de rang paire en chaque $p \in M$.*

(3) *Si f_* est localement injective, alors la structure presque-complexe intégrable $J = f_*^{-1} \circ J_0 \circ f_*$ induite par f est hermitienne pour la métrique donnée sur* M.

Remarque. — On appelle la structure presque-complexe J sur $T_p(M)$ *hermitienne* si elle satisfait à la condition

$$(JX, JY) = (X, Y), \tag{1.10}$$

pour X, Y quelconque dans $T_p(M)$.

Démonstration (de la proposition). — D'après le lemme 1.3,

$$\sum_i R(f_*(e_i), J_0 v) f_*(e_i) - \sum_i R(f_*(e_i), v) J_0 f_*(e_i) = 0,$$

quoique soit $v \in T_q(\mathbb{P}^n)$. En explicitant la courbure R de $\mathbb{P}^n$, on voit:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i (f_*(e_i), J_0 v) f_*(e_i) - \sum_i (f_*(e_i), v) J_0 f_*(e_i) \\ &= f_*\Big(\sum_i (e_i, {}^t f_*(J_0 v)) e_i\Big) - J_0 f_*\Big(\sum_i (e_i, {}^t f_*(v)) e_i\Big) \\ &= f_* \circ {}^t f_*(J_0 v) - J_0 (f_* \circ {}^t f_*(v)), \end{aligned}$$

d'où la proposition.

Quant au corollaire, les parties (1) et (2) sont immédiates, d'après la proposition. Pour le reste, il faut d'abord noter qu'en un tel $p \in M$, X, Y quelconques dans $T_p(M)$ peuvent s'écrire comme $X = {}^t f_*(v)$, $Y = {}^t f_*(w)$, avec v, $w \in T_q(\mathbb{P}^n)$ convenablement choisis.

Donc, on peut calculer

$$\begin{aligned}(JX, JY) &= (f_*^{-1} \circ J_0 \circ f_*(X), f_*^{-1} \circ J_0 \circ f_*(Y)) \\ &= (f_*^{-1} \circ J_0 \circ f_*({}^t f_*(v)), f_*^{-1} \circ J_0 \circ f_*({}^t f_*(w))) \\ &= ({}^t f_*(J_0 v)), {}^t f_*(J_0 w)) = (J_0 v, f_* \circ {}^t f_*(J_0 w)) \\ & (v, f_* \circ {}^t f_*(w)) = ({}^t f_*(v), {}^t f_*(w)) = (X, Y),\end{aligned}$$

ce qui restait à démontrer.

2. L'image de f

A cause du corollaire 1.5, nous supposons désormais que la variété M est de dimension paire. Répétons, de plus, que pour des raisons techniques, nous supposons que M est analytique réelle. Donc, f est analytique réelle.

Le but de ce paragraphe est démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. — *Soient* M, f *comme dans l'Introduction. Alors l'image* $f(M) = V$ *est une sous-variété algébrique irréductible de* $\mathbb{P}^n$.

L'égalité ici est au sens «ensembliste». Elle doit être valable au sens des courants intégraux, à un facteur intégral de multiplicité près. (Voir la remarque dans l'Introduction, et la démonstration qui suit.)

Démonstration. — Soit Σ l'ensemble analytique réel où le rang de f_* n'est pas la dimension de M. Soit U un composant connexe de $M \setminus \Sigma$, et K son adhérence dans M. Définissons un courant $f_\sharp[U] \in \mathscr{E}'_{2k}(\mathbb{P}^n)$ de dimension $2k =$ dimension réelle de M, de la façon habituelle: pour $\omega \in \mathscr{E}^{2k}(\mathbb{P}^n)$.

$$\langle f_\sharp[U], \omega \rangle = \int_U f^*(\omega).$$

Vérifions d'abord que $f_\sharp[U]$ est fermé, ce qui revient à montrer, grâce au théorème de Stokes, que pour $\varphi \in \mathscr{E}^{2k-1}(\mathbb{P}^n)$,

$$\int_{\partial K \cap \Sigma^1} f^*(\varphi) = 0, \tag{2.1}$$

où Σ^1 est le sous-ensemble relativement ouvert de Σ où Σ est lisse et de codimension réelle 1 dans M. Mais (2.1) est trivial parce que, en fait, $f^*(\varphi) \equiv 0$ sur Σ^1, ce qui résulte du fait que la différentielle f_*, n'étant pas de rang $2k$ en $p \in \Sigma^1$, doit être de rang $\leq 2k-2$, parce que son rang est nécessairement pair, d'après le corollaire 1.5. Donc, si l'on note le noyau de f_* dans $T_p(M)$ par $N_p(f_*)$, on a $N_p(f_*) \cap T_p(\Sigma^1) \neq \{0\}$. Donc, la différentielle de $f|_{\Sigma^1}$ est singulière en p, ce qui vérifie (2.1).

Le même raisonnement montre que la mesure de Haussdorf de $f(\partial K)$ s'annule :

$$(2.2) \qquad \mathscr{H}_{2k-2+\varepsilon}(f(\partial K))=0, \varepsilon>0.$$

(Outre l'argument ci-dessus, il faut utiliser la stratification de Σ selon les singularités.)

Nous remarquons que le courant $f_{\#}[U]$ est de bidimension (k, k), parce que les espaces tangents à $f(U)$ sont tous complexes. En plus, $f_{\#}[U]$ est un courant soit positif, soit négatif, partout en dehors de $f(\partial K)$, parce que l'orientation induite sur U par J est soit directe, soit rétrograde, partout par rapport à celle de U (U étant connexe). Finalement, il faut noter que la masse de $f_{\#}[U]$ est finie, parce que c'est donnée maintenant par $\left|\int_U f^*(\Omega^k/k!)\right|<+\infty$, où Ω est la forme de Kähler sur $\mathbb{P}^n$.

On déduit maintenant que $f_{\#}[U]$ est une constante intégrale fois le courant d'intégration sur une sous-variété complexe (donc algébrique) de $\mathbb{P}^n$, à cause du théorème de King [K].

Pour compléter la démonstration, soient $U_1, \ldots, U_r$ les composantes connexes de $M \setminus \Sigma$, en nombre fini. D'après ce que nous venons de montrer, ils existent des sous-variétés algébriques correspondantes $V_1, \ldots, V_r$, chacune d'entre eux étant de dimension pure $2k$. S'ils existent deux composantes irréductibles entre les plusieurs V_i, on peut trouver un polynôme homogène (c'est-à-dire, une section holomorphe σ de $H^{\otimes d}$ sur $\mathbb{P}^n$) qui s'annule sur toutes les composantes sauf une. Ceci contredirait le principe de la continuation analytique, si on regarde la section $f^*\sigma$ du pull-back $f^*(H^{\otimes d})$. Donc, $V_1=\ldots=V_r$, V_1 est irréductible, et $V_1=f(M)$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Généralités sur les twistors et structures presque complexes

Nous essayerons d'expliciter dans le prochain paragraphe les restrictions sur l'existence d'une application harmonique stable implicites dans les conditions imposées par le corollaire 1.5 ci-dessus, surtout sa condition (3). Pour faciliter la discussion, nous rappelons d'abord quelques faits fondamentaux sur les twistors de Penrose dans le cadre de la géométrie riemannienne (*cf.* [AHS], [D], [L]).

Soit d'abord M une variété riemannienne orientée et de dimension paire. On appelera la structure presque complexe J sur $T_p(M)$ *hermitienne* si elle satisfait à la condition

$$(3.1) \qquad (JX, JY)=(X, Y),$$

pour X, Y quelconque dans $T_p(M)$. Soit $Z_{\pm}(M)$ la variété de couples (p, J), où $p \in M$, et J est une structure presque complexe hermitienne sur l'espace tangent $T_p(M)$, dont l'orientation induite est directe, resp. rétrograde, par rapport à celle de M. $Z_{\pm}(M)$ est fibrée au-dessus de M, à fibre un espace homogène difféomorphe à $SO(2k)/U(k)$, $2k$ étant la dimension réelle de M. Notons par $P_{\pm}: Z_{\pm}(M) \to M$ la projection. Une structure presque complexe hermitienne J définie sur M donne lieu à une section tautologique associée du fibré $Z_{\pm}(M)$, notée σ_J par la suite, le signe suivant l'orientation induite par J.

On rappelle maintenant la structure presque complexe canonique J sur $Z_{\pm}(M)$. On part de la connexion de Levi-Civita qui opère sur le fibré $Z_{\pm}(M)$, donnant lieu à une décomposition

$$T_{(p,J)}(Z_{\pm}(M)) = T_p(Z_{\pm}(M)_p) \oplus H_{(p,J)}, \tag{3.2}$$

où $H_{(p,J)}$ est le sous-espace horizontal, et $T_p(Z_{\pm}(M)_p)$ l'espace des tangents au fibre. J est compatible avec cette décomposition et on la définit sur $T_p(Z_{\pm}(M)_p)$ par la structure hermitienne sur $Z_{\pm}(M)_p$, et par J elle même sur $H_{(p,J)}$, en identifiant ce dernier à $T_p(M)$ au moyen de P_*.

Nous explicitons les conditions d'intégrabilité de J, sous une forme convenable pour la suite. Dans ce but, rappellons que l'intégrabilité de J équivaut à l'annulation du tenseur de Nijenhuis

$$T(X, Y) = [X, Y] - [JX, JY] + J[JX, Y] + J[X, JY]. \tag{3.3}$$

où X, Y sont des vecteurs tangents à $Z_{\pm}(M)$. Les propositions suivantes donnent les renseignements nécessaires concernant $T(.,.)$.

PROPOSITION 3.1. — (1) *Soit* V (resp. H) *un vecteur vertical* (resp., *horizontal*) *dans* $T_{(p,J)}(Z_{\pm}(M))$. *Alors,* $T(V, H) = 0$, *en* (p, J). *On peut donc factoriser* $T(.,.)$ *par l'espace de vecteurs horizontaux, qui s'identifie à l'espace* $T_p(M)$.

(ii) *Utilisant cette identification, on trouve en* (p, J)

$$T(X, Y) = [R(X, Y), J] - [R(JX, JY), J] + J.[R(JX, Y), J] + J.[R(X, JY), J], \tag{3.4}$$

ce qu'on peut interpréter comme endomorphisme anti-auto-adjoint de $T_p(M)$ *ou comme vecteur tangent vertical à* $Z_{\pm}(M)$ *en* (p, J).

PROPOSITION 3.2. — *Soit maintenant* J *une structure presque complexe hermitienne intégrable sur* M. *Alors, pour chaque* X *tangent à* M,

$$\nabla_{JX} J = J.(\nabla_X J). \tag{3.5}$$

PROPOSITION 3.3. — (i) *La structure presque complexe hermitienne* J *est intégrable sur* M *si et seulement si l'image de* M *dans* $Z_{\pm}(M)$ *par la section tautologique* σ_J *est une sous-variété complexe de* $Z_{\pm}(M)$, *c'est-à-dire, son espace tangent est stable par J.*

(ii) *Si* J *est une structure presque complexe et hermitienne sur* M, *alors* $T(.,.)$ *s'annule en chaque point* $(p, J(p))$ *de l'image de* σ_J.

Démonstrations. — Le calcul conduisant à la proposition 3.1 est plus ou moins direct et bien connu, donc nous l'esquissons seulement. Nous indiquons le calcul de $T(.,.)$ en un point (p, J_0).

On peut supposer d'abord qu'on a un repère orthonormé local $X_1, \ldots, X_{2k}$ de $T(M)$ tel que:

$$\nabla X_i(p) = 0, \; 1 \leq i \leq 2k. \tag{3.6}$$

On peut en plus prolonger J_0 en une structure hermitienne J au voisinage de p telle que:

$$(3.7) \qquad J(p)=J_0 \quad \text{et} \quad \nabla J(p)=0.$$

La fibre $Z_{\pm}(M)_p$ au-dessus de p s'identifie aux endomorphismes $\tilde{J}$ de $T_p(M)$ tels que $\tilde{J}^2=-I$, $\tilde{J}^*=-\tilde{J}$, et l'orientation induite par $\tilde{J}$ est $\pm$ directe par rapport à celle de M. C'est un espace homogène par rapport à la conjugaison de $\tilde{J}$ par $g\in SO(T_p(M))$. Si J est toujours notre structure presque complexe hermitienne définie au voisinage de $p \subset M$, on peut paramétriser $Z_{\pm}(M)$ localement par $\mathcal{O}\, x\, (SO(T_p(M))/U(T_p(M), J))$, $\mathcal{O}$ étant un voisinage de $p\in M$, et le paramétrage donné par $(x, \bar{g}) \to (x, \bar{g}.J(x).\bar{g}^{-1}) \in Z_{\pm}(M)$. Ici on a prolongé l'action de $SO(T_p(M))$ sur $T_p(M)$ à $T(M)$ au-dessus de $\mathcal{O}$ par notre repère orthonormé local de $T(M)$. Ceci nous donne une autre décomposition de l'espace tangent, distincte de celle de (3.2):

$$(3.8) \qquad T_{(x, \bar{g}.J(x).\bar{g}^{-1})}(Z_{\pm}(M)) = T_x(M) \oplus T_{(\bar{g}.J(x).\bar{g}^{-1})}(SO(T_p(M))/U(T_p(M), J)).$$

L'espace tangent à $SO(T_p(M))/U(T_p(M), J)$ en $\tilde{J}$ est

$$(3.9) \qquad \{A\in \mathfrak{so}(T_p(M)) \,|\, \tilde{J}A\tilde{J}^{-1}=-A\},$$

et sous cette identification, et (3.6), on trouve

$$(3.10) \qquad J((0, A))=(0, \tilde{J}A).$$

Quant au sous-espace $H_{(p, J)}$ de (3.2), on calcule que le relèvement horizontal du champ de vecteurs X sur M est donné par le champ

$$(3.11) \qquad (X, -\nabla_X(\bar{g}.J(x).\bar{g}^{-1})), \quad \text{en } (x, \bar{g}.J(x).\bar{g}^{-1}),$$

suivant la convention de (3.6).

En tenant compte de tous ces préliminaires, surtout (3.6-11), la démonstration de la proposition 3.1 est immédiate.

Pour montrer la proposition 3.2, on change la notation conformément à celle de la proposition, à savoir, J est maintenant supposée presque complexe, hermitienne et intégrable. Soient X, Y, Z des champs de vecteurs tangents à M, et définissons

$$(3.12) \qquad B(X)=\nabla_{JX}J-J.(\nabla_X J).$$

De (3.1) et $J^2=-I$ il s'ensuit que

$$(3.13) \qquad (B(X)Y, Z)=-(Y, B(X)Z).$$

Un calcul direct montre en plus que

$$(3.14) \qquad B(X)Y-B(Y)X=T_J(X, Y)\equiv 0,$$

où $T_J(.,.)$ désigne ici le tenseur de Nijenhuis de J sur M. Donc,

$$(B(X)X, Z)=-(X, B(X)Z)=-(X, B(Z)X)=0,$$

d'où

$$0=-(\mathrm{B}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})(\mathrm{X}+\mathrm{Y}), \mathrm{Z})=2(\mathrm{B}(\mathrm{X}) \mathrm{Y}, \mathrm{Z}).$$

Remarquons enfin que la partie (ii) de la proposition 3.3 est conséquence directe de la partie (i) et la proposition 3.1. La partie (i) à son tour résulte de (3.11) et la proposition 3.2. Suivant la convention (3.8), un vecteur (X, A) est tangent à $\sigma_{\mathrm{J}}(\mathrm{M})$ si et seulement si $\mathrm{A}=0$. Il faut noter ici qu'on a laissé tomber la condition (3.7) sur J! La décomposition de (X, 0) en partie horizontale et partie verticale s'écrit

$$(\mathrm{X}, 0)=(\mathrm{X},-\nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{J})+(0, \nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{J}),$$

d'après (3.11), d'où

$$\mathrm{J}(\mathrm{X}, 0)=(\mathrm{JX},-\nabla_{\mathrm{JX}} \mathrm{J})+(0, \mathrm{J} . \nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{J}).$$

Pour que ce dernier soit encore tangent à $\sigma_{\mathrm{J}}(\mathrm{M})$, il faut que

$$\nabla_{\mathrm{JX}} \mathrm{J}-\mathrm{J} . \nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{J}=0,$$

ce qui est valable, grâce à la proposition 3.2.

4. Le paramétrage par f

Dans ce paragraphe, nous traitons les conséquences du corollaire 1.5 (3) pour les applications stables dans $\mathbb{P}^n$, pour les cas de M de dimension 2 ou 4. Nous revenons donc à nos conventions des paragraphes 1-2. Le cas de M de dimension 2 est plus ou moins trivial.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* M *une surface riemannienne, compacte et orientée, f une application harmonique stable de* M *dans $\mathbb{P}^n$. Alors f est holomorphe ou anti-holomorphe par rapport à la structure complexe induite par la métrique donnée sur* M.

Remarques. — Pour $\mathrm{M}=\mathrm{S}^2$, le résultat ci-dessus est dû à [SY]; pour une f suffisamment ramifiée, il est dû indépendamment à [BRS]. Ces derniers auteurs montrent un théorème analogue à celui ci pour telles applications dans un espace symétrique de type compact quelconque. (Le cas $\mathrm{M}=\mathrm{S}^2$, N hermitienne, est dû à Siu, [Si3].) Dans [BBdBR] le lecteur trouvera l'extension du théorème 4.1 aux applications dans un espace symétrique *hermitien.* On conjecture que le résultat principal de [BRS] reste valable sans restriction sur la ramification de l'application f.

Démonstration. — Si l'application f n'est pas constante, il existe un ouvert connexe $\mathcal{O}$ de M sur lequel le rang de f_* vaut 2. Sur cet ensemble, la structure presque complexe J induite par f comme au paragraphe 1 est hermitienne, donc se confond avec J_0 ou $-\mathrm{J}_0$ sur $\mathcal{O}$. Cela veut dire que f est holomorphe ou anti-holomorphe, selon le cas, sur $\mathcal{O}$. D'après le théorème de continuation analytique de Siu [Si3], f est $\pm$ holomorphe sur M toute entière, d'où le théorème.

Considérons maintenant le cas d'un M de dimension réelle 4. Dans ce cas, il est bien connu que (3.4) se réduit à

$$(4.1)\quad 0=[W_\pm(X, Y), J]-[W_\pm(JX, JY), J]+J.[W_\pm(JX, Y), J]+J.\ [W_\pm(X, JY), J]$$

où $W_\pm$ est la partie $\pm$ auto-duale de la courbure de Weyl de M, suivant l'orientation. Si, sur un ouvert $\mathcal{O}$ de M, la courbure $W_\pm$ n'admet pas de solution J à l'équation (4.1), il n'existe pas une application f harmonique et stable dans P^n. Si, par exemple, il n'existe que peu de solutions de (4.1) sur un ouvert $\mathcal{O}$ de M, on pourrait montrer un théorème d'unicité comme dans le théorème 4.1 ci-dessus. Nous considérons cette dernière possibilité dans le cadre des surfaces kählériennes.

Soit maintenant M une surface complexe, compacte et connexe, munie d'une métrique kählérienne. Notons J_0 sa structure presque complexe donnée, et remarquons que $-J_0$ induit la même orientation que J_0 sur M. La variété de twistors $Z_+(M)$ est donc munie de deux sous-variétés complexes, à savoir $\sigma_{\pm J_0}(M)$, le long desquelles le tenseur de Nijenhuis s'annule, d'après les propositions du paragraphe 3.

Il est bien connu que, sous les hypothèses posées maintenant sur M, le tenseur W_+ se réduit essentiellement à la courbure scalaire de M. Plus exactement, en identifiant $\mathfrak{so}(T_p(M))$ à $\Lambda^2(T_p(M))$, W_+ définit une application de $\Lambda^2 T(M)$ dans lui-même. Il est bien connu que W_+ est une application linéaire auto-adjointe, s'annulant sur Λ^2_-, l'espace de 2-formes anti-auto-duales en p. Soit e_1, $e_2=J_0 e_1$, e_3, $e_4=J_0 e_3$ une base orthonormée de l'espace tangent $T_p(M)$, et soit

$$E_1=(1/\sqrt{2})(e_1 \wedge e_2+e_3 \wedge e_4),$$
$$E_2=(1/\sqrt{2})(e_1 \wedge e_3-e_2 \wedge e_4),$$
$$E_3=(1/\sqrt{2})(e_1 \wedge e_4+e_2 \wedge e_3),$$

la base orthonormée correspondante de Λ^2_+, l'espace de 2-formes auto-duales en p. Le lemme suivant est bien connu (*voir* [D], par exemple), et s'ensuit maintenant d'un calcul direct :

LEMME 4.2. — W_+ *se diagonalise dans la base* E_i, *à savoir,*

$$(4.3)\qquad W_+=\begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix},\quad \text{où } \lambda=12\,R(p),$$

$R(p)$ *étant la courbure scalaire de* M *en* p.

COROLLAIRE 4.3. — (i) $Z_+(M)$ *est intégrable au-dessus de* $\mathcal{O}\subset M$ *si et seulement si la courbure scalaire s'annule sur* $\mathcal{O}$.

(ii) *Si* $R(p)\neq 0$, *seules* $\pm J_0$ *sont les solutions à* (4.1), *parmi les* $J\in Z_+(M)_p$.

Démonstration. — (i) est évident. Quant à (ii), on commence en traduisant (4.1) en termes de W_+ agissant sur $\Lambda^2 T_p(M)$. Dans ce but, soit A (J) la dérivation induite sur

Λ^2 par J, à savoir,

$$A(J)(X \wedge Y) = JX \wedge Y + X \wedge JY.$$

A (J) laisse stable les $\Lambda^2_\pm$, et, si $J \in Z_+(M)_p$, $A(J) \equiv 0$ sur Λ^2_-. La condition (4.1) se traduit en

$$[A(J).W_+.A(J), A(J)] = 0 \text{ sur } \Lambda^2_+. \tag{4.4}$$

De (4.3) on peut conclure que l'image $A(J)(\Lambda^2_+)$ est stable par W_+. Mais l'image de A (J) est de dimension 2, et donc, grâce à (4.3), doit se confondre à l'image de $A(J_0)$, si $\lambda \neq 0$. Le complément orthogonal à $A(J)(\Lambda^2_+)$ doit donc se confondre avec celui de $A(J_0)(\Lambda^2_+)$. Ces compléments sont engendrés par les duales des formes de kähler ω_J et ω_{J_0}, respectivement. Donc, $\omega_J = \pm\omega_{J_0}$, d'où $J = \pm J_0$.

THÉORÈME 4.4. — *Soient* M, *f comme dans l'Introduction, et supposons de plus que*:

(i) *la courbure scalaire* $R \neq 0$ *sur* M;

(ii) *il existe* $p \in M \setminus \Sigma$ *tel que la* J *induite par f en p est d'orientation directe.*

Alors l'application *f* est holomorphe ou anti-holomorphe.

Remarque. — L'hypothèse (ii) est valable si, par exemple,

$$\int_M f^*(\omega_{\mathbb{P}^n})^2 > 0.$$

Démonstration. — Il résulte du corollaire 1.5, paragraphe 3 et le lemme 4.2 (ii), que $J = \pm J_0$ au voisinage de *p*, c'est-à-dire, *f* est $\pm$ holomorphe au voisinage de *p*. Le principe de la continuation analytique implique le théorème.

Nous nous intéressons ensuite aux surfaces kählériennes M admettant une métrique dont la courbure scalaire s'annule identiquement. Malheureusement, la classification des surfaces kählériennes à $R = 0$ est inconnue jusqu'à présent, et nous devons nous borner à la considération de surfaces M qui sont minimales au sens de la classification de surfaces, c'est-à-dire, qui ne sont pas l'éclatement des surfaces complexes admettant une métrique kählérienne à $R \equiv 0$, ou autrement, anti-auto-duale; sous diverses formes, il est plus ou moins bien connu (*cf.*, [B], [LB]).

LEMME 4.5. — *Pour qu'une surface kählérienne soit anti-auto-duale, il faut qu'elle soit d'une des formes suivantes*:

(i) $\mathrm{Ric}(M) \equiv 0$.

(ii) $\mathrm{Ric}(M) \not\equiv 0$, *mais* $R \equiv 0$.

Dans le cas (i), M *admet un revêtement non ramifié fini par un tore plat ou une surface* K3, *munie de sa métrique de Yau. Dans le cas* (ii), M *est l'éclatement d'une surface réglée; si en plus* M *est minimale, la métrique sur* M *est conformément plate.*

Démonstration. — Le lemme résulte presque immédiatement de la classification de surfaces et les conditions cohomologiques suivantes:

$$[\omega_M] . c_1 = 0, \tag{4.5}$$

$$c_1^2 \leqq 0, \text{ et } c_1^2 = 0 \text{ si et seulement si } \mathrm{Ric}(M) \equiv 0. \tag{4.6}$$

Ici $[\omega_M]$ est la classe de la forme de kähler de M et c_1 la première classe de Chern de M. On déduit (4.5-6) de la représentation de c_1 par la forme de Ricci de M. D'après (4.5), aucun diviseur nK, $n \in \mathbb{Z}$, ne peut être effectif, donc le modèle minimal de M n'est pas une surface de type général ni une surface elliptique. Si le modèle minimal de M est un tore, une surface hyperelliptique ou une surface K3, (4.5) implique que M elle-même est minimale, et (4.6) achève la démonstration pour le cas (i).

Il reste le cas des éclatements de surfaces réglées. Si M est minimale, on déduit de (4.6) que le réglage de M a pour base une courbe C de genre $g \geqq 2$. On sait par hypothèse que $W_+(M) \equiv 0$. Parce que la signature τ de M est, à la fois, 0 (parce que M est fibrée) et donnée par la formule

$$\tau = \frac{1}{48\pi^2} \int_M \{ |W_+|^2 - |W_-|^2 \}_- \, d\,\mathrm{vol},$$

on conclut que $W_- \equiv 0$, d'où le lemme.

Pour traiter les applications harmoniques stables dans P^n définies sur une surface kählérienne anti-auto-duale M, il nous faut tenir compte des propriétés globales de l'espace $Z_+(M)$, qui est maintenant une variété compacte complexe. Nous supposons d'abord que l'application f induit une J sur $M \setminus \Sigma$ dont l'orientation est celle de J_0 en un point p. Nous montrerons ci-dessous que, sous les hypothèses données, que l'image de σ_J dans $Z_+(M)$, d'abord localement définie, se prolonge uniquement en un sous-ensemble analytique (complexe) de $Z_+(M)$. Ensuite, on contrôle les cycles globaux construits de cette façon par la géométrie complexe globale de $Z_+(M)$. Parce que cette géométrie dépend de chaque cas dans le lemme 4.5 ci-dessus, nous traitons les cas séparément. Il faut d'abord prolonger l'image de σ_J.

LEMME 4.5. — *Soient* M, f *comme toujours et supposons en plus que* $R \equiv 0$ *et qu'il existe* $p \in M \setminus \Sigma$ *tel que* J *soit d'orientation directe en* p. *Alors l'image de* σ_J *au voisinage de* $J(p) \in Z_+(M)_p$ *se prolonge en un sous-ensemble analytique fermé* $\mathfrak{Z}$ *de* $Z_+(M)$, *dont le nombre d'intersection avec le fibre* $Z_+(M)_p$ *est* 1.

Démonstration. — $M \setminus \Sigma$ s'écrit comme la réunion disjointe $M_+ \cup M_-$, où M_+ (resp., M_-) est l'ouvert où la structure presque complexe J induite par f est d'orientation directe (resp., rétrograde). On a supposé que M_+ n'était pas vide.

D'après le corollaire 1.5, le rang de f_* vaut 0, 2, ou 4. Soit alors $\Sigma_{(0)} \subset \Sigma$ l'ensemble des points en lesquels le rang de f_* vaut 0. Nous remarquons d'abord que le sous-ensemble analytique réel $\Sigma_{(0)} \subset \Sigma$ est de dimension (réelle) $\leqq 2$. Autrement, si on se met en un point régulier p de $\Sigma_{(0)}$, on peut considérer les composants de l'application f, en coordonnées locales convenablement choisies, comme étant la solution d'un problème de Cauchy pour un système d'équations quasi-linéaires elliptiques dont les données de

Cauchy sont nulles le long de la surface initiale $\Sigma_{(0)}$. Donc, à cause de l'unicité de la solution d'un tel problème, il faut que f soit localement, et donc globalement, constante. Or f n'est pas constante sur M_+.

Nous définissons un sous-ensemble analytique réel de $Z_+(M)$,

$$Y=\{(p, J)\in Z_+(M) \mid f_*.J=J_0.f_*: T_p(M)\to T_{f(p)}(\mathbb{P}^n)\}.$$

Si (q', J) est un point de $Y\cap Z_+(M)_{q'}$, et si $q'\in\Sigma_{(2)}=\Sigma\setminus\Sigma_{(0)}$, on voit directement de l'équation définissant Y que le noyau de f^* en q' est stable par J agissant sur $T_p(M)$, et donc son complément orthogonal, parce que J est hermitienne. En plus, on voit que la structure J est déterminée d'une façon unique par J_0 et f_* sur ce complément. Le noyau de f_* étant de dimension réelle 2, la structure J est bien déterminée à un facteur ± 1 près, et le signe est déterminé en exigent que J soit d'orientation directe. Donc, $Y\cap Z_+(M)_{q'}$ consiste au plus en un seul point.

Montrons à présent que $M_-=\varnothing$. En raisonnant par l'absurde, supposons que $M_-\neq\varnothing$, et soit q un point régulier de $\Sigma_{(2)}$ dans $\bar{M}_+\cap\bar{M}_-$. Notons d'abord que $Y\cap Z_+(M)\neq\varnothing$. D'après le paragraphe précédent, Y est lisse, de dimension 3 au-dessus de $\Sigma_{(2)}$ au voisinage de q, et la restriction de la projection P à Y est localement bianalytique. Supposons que Y soit totalement réelle en $(q, J)\in Y$. Alors le corollaire 3.4 (i) de [S] montrerait que l'adhérence $\overline{\sigma_J(M_+)}\subset Z_+(M)$ est localement un sous-ensemble analytique de dimension complexe 2 contenant Y localement au voisinage de (q', J), ce qui est absurde, pour des raisons de dimension. Donc, il faudrait que Y soit localement CR de dimension CR 1. (La sous-variété X est dite CR de dimension CR k si $\dim_{\mathbb{C}}(T_p(X)\cap J(T(X)))\equiv k$, indépendante de p.) Parce que en plus Y est analytique réelle, il existe une fonction F holomorphe au voisinage de (q, J) à $F_*\neq 0$, s'annulant sur Y. La sous-variété complexe $\{F=0\}$ contient $\sigma_J(M_+)$ au-dessus du côté M_+ de $\Sigma_{(2)}$, donc $\{F=0\}\subset Y$ localement. Ceci implique l'existence de $q''\in M_-$ près de q, où l'équation $f_*.J=J_0.f_*$ admet en même temps une solution (q'', J_1) avec J_1 d'orientation directe et une autre (q'', J_2) d'orientation rétrograde. Ceci est absurde, parce que le rang de f_* est 4 en q'', et la solution à $f_*.J=J_0.f_*$ est donc unique en q''. Donc $M_-=\varnothing$. Notons que le raisonnement donné montre en plus que $\overline{\sigma_J(M_+)}$ est analytique au voisinage de (q, J).

On sait à présent que $Y\cap Z_+(M)_p\neq\varnothing$, $\forall p\in M$. Soit $\mathfrak{Z}'=Y\cap P^{-1}(M\setminus\Sigma_{(0)})$. En suivant la stratification par singularités de $\Sigma_{(2)}$, des arguments semblables aux précédents montrent que $\mathfrak{Z}'$ est analytique. Nous prétendons que $\mathfrak{Z}=\bar{\mathfrak{Z}}'\subset Z_+(M)$ soit la sous-variété complexe cherchée dans l'énoncé du lemme. Il ne reste qu'à montrer que $\mathfrak{Z}'$ se prolonge à travers $P^{-1}(\Sigma_{(0)})$.

Supposons, donc, que $\Sigma_{(0)}\neq\varnothing$. D'après la première partie de la démonstration, on sait que la dimension réelle de Y est $\leqq 4$. C'est évident que $\mathfrak{Z}\cap P^{-1}(\Sigma_{(0)})$ est contenu dans le lieu singulier Σ' de Y. Donc, il ne nous reste que de prolonger $\mathfrak{Z}'$ à travers Σ', qui est de dimension réelle $\leqq 3$. D'après la théorie des prolongements de courants positifs [S], il suffit de prolonger $\mathfrak{Z}'$ localement à travers Σ' en des points $(q, J)\in\Sigma'$ tels que

(i) Σ' est lisse de dimension 3 en (p, J), et

(ii) Σ' est CR au voisinage de (p, J).

Ceci est parce que le complément de tels points dans Σ' est un sous-ensemble analytique réel de dimension $\leqq 2$. Le cas de Σ' de $\dim_{CR}(\Sigma')=0$ est déjà traité comme auparavant par le corollaire 3.5 (i) de [S].

Plaçons-nous dans le cas où $\dim_{CR}(\Sigma')=1$. Soit donc V une petite boule en coordonnées locales de $Z_+(M)$ tel que $\Sigma''=\Sigma'\cap V$ soit difféomorphe à une boule de dimension 3. Soit de plus une function F holomorphe et de différentielle $F_*\neq 0$ sur V, valant 0 sur Σ'', et dont la sous-variété $\{F=0\}$ est difféomorphe à une boule. On note d'abord que la masse de $\mathfrak{Z}'$ est localement bornée en (q, J), parce que c'est bornée par celle de Y. Soit T le courant intégral, positif, et fermé dans $V\setminus\Sigma''$, d'intégration sur $\mathfrak{Z}'\cap V$, munie de son orientation positive. T se prolonge en $\tilde{T}$ dans V par continuité, et $\tilde{T}$ est un courant normal ([S], Cor. 3.5 (i)), dont $d\tilde{T}$ est un courant normal fermé de dimension trois porté par Σ''. Il s'ensuit que $d\tilde{T}$ est, à un facteur constant positif près, le courant d'intégration sur Σ'', munie d'une orientation convenable. Si ce facteur est 0, le lemme est démontré. Sinon, notons que $\{F=0\}\cap(V\setminus\Sigma'')$ se scinde en deux composants connexes, soit $\{F=0\}_\pm$. Soient $S_\pm$ les deux courants d'intégration correspondants, dont l'un des courants $dS_\pm$, disons dS_+, est le courant d'intégration sur Σ'', munies de l'orientation rétrograde par rapport à celle de $d\tilde{T}$ ci-dessus. Donc, il existe une constante positive α telle que le courant $\alpha S_+ + \tilde{T}$ est fermé. D'après un théorème de Siu [Si 1], il faut que $\alpha=1$, $\tilde{T}=S_-$. Donc, on a $\mathfrak{Z}'\cap V=\{F=0\}_-$, et puis il s'ensuit que $\{F=0\}\subset Y\cap V$, parce que $\mathfrak{Z}'\cap V$ l'est. $Y\setminus\Sigma'$ se scinde globalement dans $Z_+(M)$ en composants connexes $\mathfrak{Z}'\cup Y_2\cup\ldots\cup Y_k$, où les composants $Y_2, \ldots, Y_k$ sont contenues dans $P^{-1}(\Sigma_{(0)})$. $\{F=0\}_+$, étant connexe, est contenu dans l'un de ces composants globales. Si c'était l'une des Y_i, on pourrait conclure que $\{F=0\}_-=\mathfrak{Z}'\cap V$ serait contenu dans un Y_i, ce qui est absurde. Donc, $\{F=0\}_+$ est aussi $\subset\mathfrak{Z}'$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous sommes finalement prêts à traiter le cas des surfaces anti-auto-duales. Nous considérons les deux cas du lemme 4.5 séparément, parce que la géométrie globale de $Z_+(M)$ diffère d'un cas à l'autre.

(i) *Cas d'une surface à* $Ric\equiv 0$. — Une telle surface admet un revêtement non ramifié fini par un tore plat ou une surface K3, munie de l'une de ses métriques de Kähler-Einstein. Nous montrons un résultat précis pour ces dernières surfaces et laissons au lecteur la traduction immédiate au cas général en prenant le quotient par un groupe fini d'isométries de M, dont nous donnons un exemple dans le corollaire 4.7 ci-dessous.

Faisons d'abord quelques remarques préliminaires sur la géométrie de $Z_+(M)$, M étant un tore plat ou une surface K3 Kähler-Einstein, *cf.* [C], [H]. Il existe une famille à deux paramètres de structures presque complexes intégrables, hermitiennes et même kählériennes (les structures *tordues*). Les sections $\{\sigma_J\}$ *induites* de $Z_+(M)$ sont les fibres d'une autre projection *holomorphe*

$$\pi:\quad Z_+(M)\to P^1.$$

Le lemme suivant est dû à Nigel Hitchin [H].

LEMME 4.7. — *Le cycle* $\mathfrak{Z}$ *de dimension* 2 *dans* Z_+ *est un fibre de* π.

Du lemme il s'ensuit que la structure presque complexe induite par une application harmonique stable de M dans P^n est holomorphe par rapport à l'une des structures kählériennes compatibles avec la métrique donnée sur M. En plus, il n'existe qu'un nombre dénombrable de possibilités pour cette structure, parce que M doit être une variété algébrique munie de cette structure, à cause du théorème 2.1. On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 4.8. — *Soit f une application harmonique stable d'un tore plat ou d'une surface* K 3 *Kähler-Einstein dans* P^n, *telle que l'opérateur* J *induit par f est d'orientation directe en un point $p \in M$. Alors f est holomorphe par rapport à une structure complexe tordue.*

COROLLAIRE 4.9. — *Soit* M *une surface d'Enriques, et autrement f comme dans le théorème. Alors f est $\pm$ holomorphe.*

(ii) *Cas d'un modèle minimal dont $Ric \not\equiv 0$ et $R \equiv 0$.* — D'après le lemme 4.5, ce cas ne consiste qu'en les surfaces M réglées au-dessus d'une courbe de genre $g \geqq 2$, dont la métrique est conformément plate. D'après un théorème de Derdzinski [D], la métrique donnée sur M est localement symétrique. Plus exactement, soit C la base de M, $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, et Δ le disque unité de C. Le revêtement universel de M est $\Delta \times P^1$, muni de sa métrique produite: il faut choisir les métriques sur les facteurs telles que leurs courbures de Gauss soient, disons, -1 et $+1$, respectivement — la métrique n'est déterminée qu'à un facteur près. Nous devons identifier explicitement l'espace $Z_+(\tilde{M})$.

Dans ce but, rappelons que l'espace $Z_+(\tilde{M})$ ne dépend que de la structure conforme sous-jacente de la structure riemannienne de M. On peut plonger $\Delta \times P^1$ conformément et d'une façon équivariante par rapport à l'action du groupe $G = PSL(2, R) \times SO(3)$ d'isométries de $\tilde{M}$ sur le complément d'un cercle C géodésique dans la sphère unité S^4. Donc, l'espace de twistors $Z_+(\tilde{M})$ s'identifie à l'ouvert $P^{-1}(S^4 \setminus C)$ dans $Z_+(S^4) = P^3$. Nous voudrions en plus identifier l'image des sections de $Z_+(M)$ induites par $\pm J_0$, ou plus exactement leurs relèvements dans $Z_+(\tilde{M})$. Ces derniers sont facile à déterminer.

En effet, il est facile de vérifier que l'ensemble $P^{-1}(S^4 \setminus C)$, qui est invariant par l'action du groupe G, est contenu dans un quadrique $\mathfrak{Q}_0$ non-singulier de P^3. ($\mathfrak{Q}_0$ est l'unique quadrique dans P^3 invariant par G.) Soient maintenant $\pm \mathfrak{Z}_0 \subset Z_+(\tilde{M})$ les images des sections associées à $\pm J_0$. De leur invariance par G il s'ensuit que $\pm \mathfrak{Z}_0$ sont les composantes connexes de $\mathfrak{Q}_0 \setminus (\mathfrak{Q}_0 \cap P^{-1}(S^4 \setminus C))$.

Plaçons-nous à présent dans la situation provenant d'une application f comme ci-dessus de M dans P^n. Nous avons donc deux sous-ensembles complexes $\pm \mathfrak{Z}$ de $Z_+(M)$ fournis par le lemme 4.6. Soient $\pm \tilde{\mathfrak{Z}}$ leurs relèvements en $Z_{\pm}(\tilde{M})$. Leur réunion $\tilde{\mathfrak{Z}} \cup -\tilde{\mathfrak{Z}}$ est un sous-ensemble analytique fermé de $Z_+(\tilde{M}) = P^3 \setminus (P^{-1}(S^4 \setminus C))$. Nous voudrions le prolonger en un sous-ensemble analytique de P^3 tout entier. Dans ce but, notons τ la conjugaison (anti-holomorphe) canonique de l'espace de twistors d'une variété de dimension (réelle) quatre envoyant (p, J) en $(p, -J)$. D'après le corollaire 3.5 de [S], le courant positif fermé T d'intégration sur $\tilde{\mathfrak{Z}} \cup \tilde{\mathfrak{Z}}$ se prolonge en un courant normal $\tilde{T}$ sur P^3, positif, de bidimension (2.2). En raisonnant comme dans la dernière partie de la démonstration du lemme 4.6, on voit que son bord $d\tilde{T}$ est, à un facteur constant près, le courant d'intégration sur $P^{-1}(S^4 \setminus C)$. Parce que $\mathfrak{Z} \cup -\mathfrak{Z}$ est de dimension complexe 2, on a $\tau_\#(T)=T$, et donc $\tau_\#(T)=\tilde{T}$. Il s'ensuit alors que $\tau_\#(d\tilde{T})=d\tilde{T}$. Or $P^{-1}(S^4 \setminus C)$ est de dimension 3, et τ est anti-holomorphe sur les fibres de P et τ commute avec P. Donc τ renverse l'orientation de $P^{-1}(S^4 \setminus C)$. Grâce à un théorème de Federer, on peut conclure $\tau_\#(d\tilde{T})=-d\tilde{T}$, d'où $d\tilde{T}=0$. Ceci montre que $\tilde{\mathfrak{Z}} \cup -\tilde{\mathfrak{Z}}$ se prolonge en un sous-ensemble analytique $\mathfrak{Q}$ de P^3. Un argument comme dans la dernière partie de la démonstration du lemme 4.6 montre que $P^{-1}(S^4 \setminus C) \subset \mathfrak{Q}$, donc $P^{-1}(S^4 \setminus C)$, qui est de dimension 3, est contenu dans $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Q}_0$, d'où $\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}_0$. En interprétant çà sur notre M originale, on conclut que la structure J sur M induite par f est soit J_0, soit $-J_0$. On a donc montré le théorème suivant.

THÉORÈME 4.10. — *Soit* M *un modèle minimal dont* $\mathrm{Ric} \not\equiv 0$ *et* $R \equiv 0$, *et f une application harmonique stable comme ci-dessus. Alors f est holomorphe ou anti-holomorphe.*

Remarques. — Nous laissons évidemment plusieurs questions ouvertes. D'abord, il serait très intéressant de connaître la classification des surfaces kählériennes anti-auto-duales. Il ne nous semble pas clair que nos techniques marchent bien en dimension supérieure : la dimension du fibre de $Z_\pm(M)$ est une fonction quadratique de la dimension de M, ce qui pose des problèmes sévères pour le contrôle des prolongements comme ci-dessus. Enfin, la plupart des arguments présentés n'ont pas besoin de l'analyticité de f, mais encore les arguments sur les prolongements ne sont pas clairs dans le cadre $\mathscr{C}^\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[AHS] M. F. ATIYAH, N. HITCHIN et I. M. SINGER, *Self-duality in Four Dimensional Riemannian Geometry* (*Proc. Roy. Soc. Lond.*, A 362, 1978, p. 425-461).

[B] C. BOYER, *Conformal Duality and Compact Complex Surfaces* (*Math. Ann.*, 274, 1986, p. 517-526).

[BdB 1] D. BURNS et P. DE BARTOLOMEIS, *Stable Harmonic Maps Into* P^n, à paraître aux *comptes rendus du colloque « Applications Harmoniques »*, Marseille/Luminy, juin, 1986.

[BdB 2] D. BURNS et P. DE BARTOLOMEIS, *Stable Vector Bundles and Extremal Metrics* (à paraître).

[BBdBR] D. BURNS, F. BURSTALL, P. DE BARTOLOMEIS et J. RAWNSLEY, *Stable Maps Into Kähler Manifolds* (à paraître).

[BRS] F. BURSTALL, J. RAWNSLEY et S. SALOMON, *Stable Harmonic 2-spheres in Symmetric Spaces* (*Bull. AMS*, vol. 16, (2), 1987, p. 274-278).

[BS] F. BURSTALL et S. SALOMON, *Tournaments, Flags and Harmonic Maps* (*Math. Ann.*, vol. 280, 1987.

[BW] F. BURSTALL et J. WOOD, *The Construction of Harmonic Maps Into Complex Grassmannians* (*J. Diff. Geom.*, vol. 23, 1986, p. 255-298).

[C] E. CALABI, *Métriques Kählériennes et Fibrés Holomorphes* (*Ann. Sci. E.N.S.*, 4. sér., vol. 12, 1979, p. 269-294).

[CW] S. S. CHERN et J. WOLFSON, *Harmonic Maps of the Two-sphere Into a Complex Grassmann Manifold II* (*Ann. Math.*, vol. 125, 1987, p. 301-335).

[D] A. DERDZINSKI, *Self-dual Kähler Manifolds and Einstein Manifolds of Dimension Four* (*Comp. Math.*, vol. 49, 1983, p. 405-433).

[H] N. HITCHIN, *Kählerian Twistor Spaces* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 43, (3), 1981, p. 133-150).

[K] J. KING, *The Currents Defined by Analytic Varieties* (*Acta Math.*, vol. 127, 1972, p. 185-220).

[L] H. B. LAWSON, *Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose* (*Sém. Boubaki*, exp. 624, Astér., 1985, p. 121-122).

[LS] H. B. LAWSON et J. SIMONS, *On Stable Currents and Their Applications to Global Problems in Real and Complex Geometry* (*Ann. Math.*, vol. 98, 1974, p. 427-450).

[LB] C. LE BRUN, *On the Topology of Self-dual 4-manifolds* (*Proc. AMS*, vol. 98, 1986, p. 367-640).

[O] S. OHNITA, *On Pluriharmonicity of Stable Harmonic Maps* (*J. London Math. Soc.*, (2), vol. 35, 1987, p. 563-568).

[S] N. SIBONY, *Quelques problèmes de prolongements en analyse complexe* (*Duke Math. J.*, vol. 52, 1985, p. 157-198).

[Si1] Y. T. SIU, *Analyticity of Sets Associated with Lelong Numbers and the Extension of Positive Closed Currents* (*Inv. Math.*, vol. 27, 1974, p. 53-156).

[Si 2] Y. T. SIU, *The Complex Analyticity of Harmonic Maps and the Strong Rigidity of Compact Kähler Manifolds* (*Ann. Math.*, vol. 112, 1980, p. 73-111).

[Si 3] Y. T. SIU, *Curvature Characterisation of Hyperquadrics* (*Duke Math. J.*, vol. 47, 1980, p. 641-654).

[SY] Y. T. SIU et S.-T. YAU, *Compact Kähler Manifolds of Positive Bisectional Curvature* (*Inv. Math.*, vol. 59, 1980, p. 189-204).

[Sm] R. T. SMITH, *The Second Variation of a Harmonic Map* (*Proc. AMS*, vol. 47, 1975, p. 229-236).

[U] K. UHLENBECK, *Harmonic Maps Into Lie Groups*, preprint.

[V] J.-L. VERDIER, *Applications stables de* S^2 *dans* S^4, dans *Geometry Today*, Giornate di Geometria, Roma, 1984, p. 267-282, Birkhäuser, Basel/Boston, 1985.

[W] J. WOLFSON, *Harmonic Sequences and Harmonic Maps to Complex Grassmann manifolds* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 2 juillet 1987,
révisé le 4 janvier 1988).

D. BURNS,
P. DE BARTOLOMEIS,
Mathematics Department,
University of Michigan,
Ann Arbor, MI 48109,
U.S.A.

Istituto Matematica, U. Dini,
Università degli Studi,
Viale Morgagni, 67/A,
I-50134 Firenze, Italia.