

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES COLIN DE VERDIÈRE

## **Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 20, n° 4 (1987), p. 599-615

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1987\\_4\\_20\\_4\\_599\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_4_599_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CONSTRUCTION DE LAPLACIENS DONT UNE PARTIE FINIE DU SPECTRE EST DONNÉE

PAR YVES COLIN DE VERDIÈRE

L'article de M. Kac « *Can one hear the shape of a drum?* » [KC] a été l'origine de nombreuses contributions au problème spectral inverse : déterminer certains invariants géométriques ou topologiques d'une variété riemannienne compacte à partir du spectre du laplacien. Moins d'attention a été portée au problème de savoir quelles sont les suites de valeurs propres possibles pour le laplacien d'une métrique riemannienne arbitraire sur une variété compacte donnée. D'autres problèmes du même type se posent avec la recherche d'ouverts bornés de  $\mathbf{R}^d$  tels que le laplacien euclidien avec conditions de Dirichlet ou de Neumann admette un spectre donné; ou encore avec l'opérateur de Schrödinger avec champ électrique et (ou magnétique) sur une variété riemannienne compacte donnée. Ces problèmes semblent d'accès très difficile comme le montrent les contraintes imposées par l'existence de différents développements asymptotiques (formule de Minakshisundaram-Pleijel, formule de Poisson). Nous nous restreindrons ici à l'étude du problème plus élémentaire de réaliser une suite finie  $s_N = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N\}$  comme suite des  $N$  premières valeurs propres avec multiplicité d'un opérateur à choisir dans une famille donnée d'opérateurs.

Indiquons quelques résultats typiques :

- Si  $X$  est une variété compacte de dimension  $\geq 3$  et  $s_N$  une suite arbitraire comme précédemment, il existe sur  $X$  des métriques riemanniennes telles que le laplacien admette cette suite comme suite des  $N$  premières valeurs propres avec multiplicité. En particulier, il n'y a aucune restriction sur les multiplicités des valeurs propres.

- Si  $X$  est une surface compacte, la situation est moins simple, car on sait ([CG], [BN]) que la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien est majorée en fonction de la topologie de  $X$ . Les résultats obtenus montrent que cela semble être la seule contrainte; par exemple, toute suite  $\{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N\}$  est la suite des  $N$  premières valeurs propres du laplacien pour une métrique bien choisie sur n'importe quelle surface.

- Pour ce qui est des laplaciens euclidiens dans les ouverts de  $\mathbf{R}^d$ , la situation est différente suivant le type de conditions aux limites :

- Pour le problème de Dirichlet, les inégalités de Payne, Polya et Weinberger ([P-P-W] et aussi [PR]) imposent des restrictions d'un autre type que la multiplicité : par exemple, pour tout ouvert borné de  $\mathbf{R}^d$ , les valeurs propres du problème de Dirichlet vérifient, pour tout  $n$ ,  $\lambda_{n+1} \leq 3\lambda_n$ .

— Pour le problème de Neumann, les seules restrictions sont de multiplicités : par exemple, pour toute suite  $\{\lambda_1=0<\lambda_2<\dots<\lambda_N\}$ , il existe un ouvert lisse simplement connexe de  $\mathbf{R}^2$  ayant cette suite comme suite des  $N$  premières valeurs propres du problème de Neumann.

Quelques indications sur les méthodes utilisées : comme les familles d'opérateurs étudiées ne sont pas normalisées (i. e. sont invariantes par homothétie), il suffit de trouver un opérateur ayant la suite  $\varepsilon s_N = \{0=\lambda_1 < \varepsilon\lambda_2 \leq \dots \leq \varepsilon\lambda_N\}$  comme suite des  $N$  premières valeurs propres. On cherche à évaluer les petites valeurs propres d'un laplacien par *effet tunnel purement géométrique* (i. e. sans barrière de potentiel); cette évaluation met en jeu une *matrice dite d'interaction* qui peut s'interpréter géométriquement comme un *laplacien combinatoire* (avec poids) sur un graphe qui est le graphe d'adjacence d'un découpage de la variété en régions séparées par des passages étroits (tunnels!). La matrice d'interaction est utilisée depuis longtemps en chimie pour l'étude de l'opérateur de Schrödinger gouvernant les électrons dans une molécule (méthode L.C.A.O.) et une étude mathématique très complète a été proposée récemment par Helffer-Sjöstrand ([HS]).

Cette évaluation par perturbation d'un laplacien combinatoire ne permettrait pas *a priori* de réaliser exactement le spectre voulu : en effet, dans le cas d'une valeur propre multiple, par exemple, la perturbation entraîne une dispersion du paquet de valeurs propres, c'est ici qu'intervient une idée fondamentale : utiliser la transversalité et travailler uniformément avec les hamiltoniens dépendant d'un paramètre variant dans une boule de  $\mathbf{R}^v$  : V. Arnold a montré ([AD]) que dans une famille de matrices symétriques à coefficients réels l'apparition de valeurs propres multiples peut être stable. Pour mettre en œuvre cette idée, on utilise une notion de *stabilité* (hypothèses SAH et WAH de [CV 3]) d'une famille finie de valeurs propres pour un hamiltonien d'une famille à paramètres. Tous les spectres construits auront cette propriété, en particulier les exemples trouvés pourront avoir un caractère générique (pas d'isométries, etc.) et on pourra lisser les exemples non lisses.

Cet article est complémentaire aux articles [C-C], [CV 2] et [CV 3] : la plupart des résultats ont déjà été présentés dans [CV 1].

Les techniques de [C-C] (lemme des petites valeurs propres, condensateurs) seront utilisées ici, mais nous considérons des *condensateurs euclidiens* (§ 6). La technique du paragraphe 7 est reprise de [CV 2] avec une adaptation pour déjouer l'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet en dimension 2.

L'autre outil développé ici est *l'adjonction d'anses* dans l'esprit de [C-F] et [AE]. Conjugué avec l'utilisation de propriétés de transversalité, il permet de montrer des résultats sur les surfaces (propriété  $C_N$ ) et de construire des métriques où la seconde valeur propre du laplacien est de multiplicité maximale (5) sur la bouteille de Klein. Les hypothèses de transversalité SAH et WAH introduites dans [CV 3] sont utilisées sans nouvelles précisions.

## 1. Énoncés des résultats

Pour énoncer les résultats, il sera pratique d'introduire quelques notations : soit  $\mathcal{F}$  une famille (ensemble) d'opérateurs autoadjoints  $\geq 0$ , à résolvante compacte et ayant 0 comme

valeur propre simple. Nous introduisons les propriétés suivantes de  $\mathcal{F}$  :

DÉFINITIONS 1.1. — (i) On dira que  $\mathcal{F}$  vérifie  $(A_N)$  si, pour toute suite  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ , il existe  $H$  dans  $\mathcal{F}$  ayant cette suite comme suite des  $N$  premières valeurs propres.

(ii) On dira que  $\mathcal{F}$  vérifie  $(B_N)$  si on a le même énoncé pour toute suite  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ .

(iii) On dira que  $\mathcal{F}$  vérifie  $(C_N)$  si pour toute suite  $\mu_1 = 0 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N$ , il existe  $H$  dans  $\mathcal{F}$  et  $b \geq 0$  tels que  $\mu_1 + b \leq \mu_2 + b \leq \dots \leq \mu_N + b$  soit un intervalle du spectre de  $H$ .

Il est clair que la propriété  $(A_N)$  implique  $(B_N)$  et  $(C_N)$ . Si  $X$  est une variété compacte, nous noterons  $\mathcal{F}_X$  la famille des laplaciens associés à une métrique riemannienne  $C^\infty$  sur  $X$ .  $\mathcal{S}_X$  sera la famille des opérateurs de Schrödinger  $H = \Delta + V$  sur  $X$ , dont 0 est la plus petite valeur propre. Pour  $d \geq 2$ , nous noterons  $\mathcal{G}_d$  la famille des laplaciens avec conditions de Neumann sur un ouvert borné,  $C^1$  par morceaux de  $\mathbf{R}^d$ .

Nous avons alors les :

THÉORÈME 1.2. — Si  $X$  est de dimension  $\geq 3$ ,  $\mathcal{F}_X$  vérifie  $(A_N)$  pour tout  $N$ .

En général posons  $N(X) = \sup \{N \mid \mathcal{F}_X \text{ vérifie } (A_N)\}$ .

THÉORÈME 1.3. — Si  $X$  est de dimension 2,  $\mathcal{F}_X$  vérifie  $(B_N)$  et  $(C_N)$  pour tout  $N$ .

Si  $X_\gamma$  est la surface orientable de genre  $\gamma$ , ( $\gamma \geq 3$ ) :

$$E(3/2 + \sqrt{2\gamma + 1/4}) \leq N(X_\gamma) \leq 4\gamma + 4.$$

Remarque. — Dans le cas des surfaces de genre  $\leq 2$ , on ne connaît pas de minoration significatives de  $N(X)$ .

THÉORÈME 1.4. —  $\mathcal{G}_d$  vérifie  $(A_N)$  pour tout  $N$  si  $d \geq 3$ .  $\mathcal{G}_2$  vérifie  $(A_N)$  si et seulement si  $N \leq 4$ .  $\mathcal{G}_2$  vérifie  $(B_N)$  pour tout  $N$ .

Remarque. — Soit, pour une variété compacte  $X$  (avec ou sans bord),  $C(X)$  le nombre chromatique de  $X$  défini comme le plus grand entier  $N$  tel qu'il existe un plongement du graphe complet à  $N$  sommets dans  $X$ .

On définit aussi pour toute variété riemannienne compacte (avec ou sans bord)  $(X, g)$ ,  $m(X, g)$  comme la multiplicité de la première valeur propre  $> 0$  du laplacien (condition de Neumann) sur  $(X, g)$ . Puis  $m(X) = \sup m(X, g)$ , où le sup porte sur l'ensemble des métriques riemanniennes sur  $X$ .

On a posé dans [CV 2] la :

CONJECTURE ★. — Pour toute variété compacte  $m(X) = C(X) - 1$ .

Cette conjecture est vraie pour les variétés de dimension 1, de dimension plus grande que 3 (où  $m(X) = C(X) - 1 = +\infty$  [CV 2]), pour les surfaces de genre 0 et 1 ([CG], [BN] et paragraphe 5 de cet article pour B) :

$$C(S^2) = 4, \quad C(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2) = 7, \quad C(P^2(\mathbf{R})) = 6, \quad C(B) = 6.$$

Pour les surfaces de genre  $\gamma \geq 3$ , le théorème 1.3 donne :

$$E[1/2 + \sqrt{2\gamma + 1/4}] \leq m(X) \leq 4\gamma + 3,$$

alors que, d'après [RL],

$$C(X_\gamma) = E[7/2 + \sqrt{12\gamma + 1/4}].$$

Un pas important serait donc une majoration de  $m(X)$  en  $O(\sqrt{\gamma})$ . Signalons en outre que dans le paragraphe 7 on prouve le :

**THÉORÈME 1.5.** — *Pour toute surface compacte  $X$ , la propriété  $A_N$  est vraie pour  $S_X$  avec  $N = C(X)$ .*

*En particulier, il existe sur  $X$  un opérateur de Schrödinger dont la seconde valeur propre est de multiplicité  $C(X) - 1$ .*

Ce type de résultats sera essentiel dans [CV 5].

*Remarque.* — Les majorations de [CG] et [BN] sur la multiplicité de la seconde valeur propre du laplacien s'étendent sans difficultés au cas de l'opérateur de Schrödinger.

## 2. Cas des surfaces : propriétés $A_N$ et $B_N$

**2a. PROPRIÉTÉ  $A_N$ .** — La preuve de  $A_N$  pour les surfaces de genre  $\gamma \geq 3$  et  $N \leq E(3/2 + \sqrt{2\gamma + 1/4})$  résulte d'une modification immédiate de [C-C] : au lieu de partir du graphe complet  $K_N$  avec  $N$  sommets, avec un laplacien discret sur ce graphe de spectre  $(0, 1, 1, \dots, 1)$ , on munit ce graphe d'un laplacien discret ayant le spectre voulu (ainsi qu'il est montré dans [CV 3], § 4). On remarque que les métriques trouvées peuvent être à courbure constante.

**2b. PROPRIÉTÉ  $B_N$ .** — La preuve résulte des techniques de [C-C] et du résultat de [CV 3] sur la propriété  $B_N$  pour le graphe en étoile : il suffit de construire une métrique sur  $X$  telle que le graphe associé comme dans [C-C], § 2, soit un graphe  $E_N$  en étoile à  $N$  branches.

$$X = \bigcup_{i=0}^N \hat{X}_i \cup \bigcup_{i=1}^N Z_i$$
 où les  $Z_i$  sont des cylindres hyperboliques recollant  $\hat{X}_0$  aux  $\hat{X}_i$ . Si on veut que  $X$  soit homéomorphe à  $S^2$ , il suffit de prendre pour  $\hat{X}_0$  (resp  $\hat{X}_i$ ,  $i \geq 1$ ) la sphère  $S^2$  privée de  $N$  disques de même rayon et ne se rencontrant pas (resp. privée d'un disque). Il suffit alors de recoller les  $Z_i$  le long des bords de ces disques en suivant le schéma imposé par le graphe en étoile.

## 3. Adjonction d'anses à une surface

Chavel et Feldmann [C-F] ont montré que l'adjonction de *petites* anses à une surface ne modifie pas beaucoup les valeurs propres du laplacien. Nous donnons une construction assez explicite permettant de contrôler les espaces propres de ce type de métriques en deux étapes :

— Métriques  $C^1$  par morceaux obtenue par recollement direct des bords de deux petits disques.

— Régularisation de cette métrique.

La première étape n'est pas fondamentalement différente du cas où on enlève des petits disques : seule la condition aux limites est nouvelle, ce n'est ni celle de Neumann, ni celle de Dirichlet, mais une condition de recollement du type condition de périodicité. La même construction permettra dans le paragraphe 4 de traiter le cas de la bouteille de Klein par éclatement en un point de  $P^2(\mathbf{R})$ .

Après avoir montré un résultat général, nous l'appliquons à la propriété  $B_N$  pour les surfaces.

Introduisons d'abord quelques notations :

$X$  est une surface compacte munie d'une métrique riemannienne  $g_0$ ;  $x_0$  est un point de  $X$ ;  $\varepsilon > 0$ ;  $X_\varepsilon = X \setminus B(x_0, \varepsilon)$ , où  $B(x_0, \varepsilon)$  est la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$ ; l'injection  $j : H^1(X_\varepsilon) \hookrightarrow H^1(X)$  définie par

$$j(f) = \begin{cases} f & \text{sur } X_\varepsilon, \\ P_\varepsilon(f) & \text{sur } B(x_0, \varepsilon), \end{cases}$$

où  $P_\varepsilon(f)$  est le prolongement harmonique de  $f$  à  $B(x_0, \varepsilon)$ ;  $\Delta_\varepsilon$  est l'extension de Friedrich de la forme  $q_\varepsilon(f) = \int_{X_\varepsilon} |df|^2$ , avec un domaine  $D_\varepsilon$  vérifiant les inclusions :

$$H_0^1(X_\varepsilon) \subset D_\varepsilon \subset H^1(X_\varepsilon);$$

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq C < C+1 \leq \lambda_{n+1} \leq \dots,$$

le spectre du laplacien sur  $X$ ;  $E_n \subset H^1(X)$  la somme des espaces propres associés aux  $n$  premières valeurs propres et de même pour  $\Delta_\varepsilon$ :  $\lambda_n(\varepsilon)$ ,  $E_n(\varepsilon)$ , on a alors avec les notations de [CV 3] le :

THÉORÈME 3.1. — Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\lambda_n(\varepsilon) \rightarrow \lambda_n$  et

$$[j(q_\varepsilon)]_{j(E_n(\varepsilon))} \rightarrow q_{E_n},$$

ces convergences étant uniformes lorsque  $g$  reste dans un voisinage de  $g_0$ .

En particulier, on a le :

COROLLAIRE 3.2. — Si  $\lambda_0$  valeur propre de  $\Delta_{g_0}$  vérifie WAH (notation de [CV 3]), relativement à une famille  $(g_a)_{a \in K}$ , il existe  $a_0 \in K$ , proche de 0 tel que  $\Delta_{g_{a_0}}$  admet  $\lambda_0$  comme valeur propre avec la même multiplicité et vérifiant WAH relativement à la même famille de métriques.

*Preuve.* — La convergence des spectres résulte de [R-T] et [C-F], qui traitent les cas extrêmes (Neumann et Dirichlet), par application du minimax.

La convergence des espaces propres est alors claire par densité et le minimax : un espace de dimension  $n$  où  $q_\varepsilon(f) \leq (\lambda_n + \varepsilon) \int |f|^2$  est proche de la somme des espaces propres (voir [CV 2] pour un énoncé précis). La proximité des formes quadratiques provient de

ce que, si  $f \in H^1(X)$  fixée, alors

$$\int_{B(x_0, \varepsilon)} |d(P_\varepsilon f)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

*Preuve de  $C_N$  pour les surfaces.* — Soit  $X$  une surface et  $S = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N\}$  donnés. On choisit  $l$  tel que  $2l+1 \geq N$  et il existe alors  $\varepsilon > 0$  et  $g$  proche de la métrique canonique de  $S^2$  tel que le laplacien  $\Delta_g$  admette les valeurs propres  $l(l+1) + \varepsilon S$  comme intervalle de son spectre et que cette suite vérifie l'hypothèse SAH relativement aux déformations conformes de  $g$  (voir [CV 3], § 3). Par une homothétie, on peut donc trouver une métrique  $g_1 = C \cdot g$  ayant la suite  $b + S$  comme intervalle du spectre et ceci de façon à vérifier SAH relativement aux déformations conformes de  $g_1$ .

Soit alors  $Y$  une surface (orientable pour simplifier) de genre  $\gamma$  :  $Y$  s'obtient à partir de  $S^2$  par adjonction de  $\gamma$  anses et la construction faite au début de ce paragraphe s'applique : elle montre l'existence d'une métrique  $g_2$ ,  $C^1$  par morceaux, sur  $Y = (S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{2\gamma} B(x_i, \alpha)) / \sigma$  ( $\alpha$  petit) où  $\sigma$  est l'identification des bords des disques 2 à 2, telle que  $g_2$  admette  $b + S$  comme intervalle du spectre.

En effet  $H^1(Y)$  s'identifie alors à un  $D_e$  du type précédent.

La propriété WAH permet alors de lisser la métrique  $g_2$  et de conclure.

#### 4. La bouteille de Klein

Soit  $B$  la bouteille de Klein, surface compacte non orientable que l'on peut voir comme quotient de  $\mathbf{R}^2$  par le groupe  $\Gamma$  des transformations  $\tau_{m,n}$  ( $m, n \in \mathbf{Z}$ ) définies par :

$$\tau_{m,n}(x, y) = (x + m, (-1)^m y + n).$$

Lorsque  $B$  est munie d'une métrique localement euclidienne, celle-ci se remonte à  $\mathbf{R}^2$  en une métrique invariante par  $\Gamma$  que l'on peut supposer de la forme  $adx^2 + bdy^2$ . La multiplicité maximale de la première valeur propre  $> 0$ ,  $\lambda_2$  du laplacien sur  $B$  pour une telle métrique est 3; elle est atteinte lorsque, par exemple  $a=b=1$ , on a, dans ce cas :  $\lambda_2 = 4\pi^2$  et l'espace propre est engendré par les fonctions  $\cos 2\pi x$ ,  $\sin 2\pi x$  et  $\cos 2\pi y$ .

En adaptant des arguments de Cheng et Besson, on va prouver le :

THÉORÈME 4.1. —  $m(B) \leq 5$ .

La technique développée au paragraphe 3 permet de montrer le :

THÉORÈME 4.2. — Il existe sur  $B$  des métriques riemanniennes  $g \in C^\infty$  telles que l'on ait :  $m(B, g) = 5$ .

COROLLAIRE 4.3. —  $m(B) = 5$ .

Ce corollaire est l'énoncé de la conjecture ★, lorsque  $X = B$ , car  $C(B) = 6$  (voir [RL], p. 71).

*Preuve du théorème 4.1.* — Rappelons d'abord quelques lemmes fondamentaux de [CG] et [BN]; ici  $X$  est une surface quelconque :

LEMME 4.4. — Soit  $x_0 \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$   $k$  lacets fermés d'origine  $x_0$  sur  $X$  tels que :

- (i) les classes  $[\gamma_i] \in H_1(X, \mathbb{Z}_2)$  ne sont pas linéairement indépendantes,
- (ii)  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \gamma_i \notin (\bigcup_{j \neq i} \gamma_j)$ ,

alors  $X \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_k)$  n'est pas connexe.

La preuve de ce lemme utilise l'application qui à  $[\gamma_i], [\gamma_j]$  associe la parité du nombre d'intersections de  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$ .

DÉFINITION 4.5. — Une fonction  $C^\infty, f: X \rightarrow \mathbb{R}$  est nulle à l'ordre  $p$  en  $x_0 \in X$  ssi

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(p)}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(p+1)}(x_0) \neq 0.$$

Dans la suite  $E$  est un espace propre (de dimension  $N$ ) d'un opérateur elliptique du second ordre à coefficients réels, symétrique, sur  $X$ .

LEMME 4.6. — Pour tout  $x_0 \in E$ , il existe  $f \in E \setminus 0$ , nulle à un ordre  $\geq [N/2] - 1$  en  $x_0$ .

LEMME 4.7. — (a) Si  $f \in E \setminus 0$ , nulle à l'ordre  $p$  en  $x_0$ , il existe  $k = p + 1$  lacets fermés distincts d'origine  $x_0$  contenus dans  $f^{-1}(0)$ , vérifiant l'hypothèse (ii) du lemme 4.4.

(b) Si  $f^{-1}(0)$  a un autre point singulier que  $x_0$ , alors il y a  $k = p + 2$  lacets fermés distincts contenus dans  $f^{-1}(0)$  et vérifiant l'hypothèse (ii) du lemme 4.4.

*Preuve du théorème 4.1 (suite).* — On suppose que  $E$  est l'espace propre associé à la seconde valeur propre d'un opérateur elliptique, etc. sur  $B$ . D'après Courant,  $\forall f \in E \setminus 0$ ,  $B \setminus f^{-1}(0)$  a deux composantes connexes.

(i) D'après le lemme 4.7,  $f \in E \setminus 0$  ne peut s'annuler à l'ordre 3 et si elle s'annule à l'ordre 2,  $f^{-1}(0)$  n'a pas d'autres points singuliers.

(ii) Si  $N \geq 6$ , il existe, pour tout  $x_0 \in B$  une fonction  $f_{x_0}$  qui s'annule à l'ordre 2 en  $x_0$ .

(iii)  $f_{x_0}$  est unique à homothétie près d'après l'argument de [BN], p. 122-127.

(iv)  $f_{x_0}^{-1}(0) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ , avec  $\{[\gamma_i] \mid i = 1, 2, 3\}$  l'ensemble des 3 vecteurs non nuls de  $H_1(B, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

(v) Si  $\gamma$  est un lacet de base  $x_0$ , on peut déformer  $f_{x_0}$  en suivant  $\gamma$ , on obtient ainsi une bijection de  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  sur lui-même, donnée par :

$$\gamma_i \mapsto \gamma \gamma_i \gamma^{-1}$$

où les opérations sont au sens de  $\Gamma = \pi_1(B, x_0)$ .

Si  $[\gamma_1] = 1 \oplus 0$  et  $\gamma = \tau_{0,1}$ , on aboutit à une contradiction, car  $\gamma^n \gamma_1 \gamma^{-n} = \gamma^{2^n} \gamma_1$  tend vers l'infini dans  $\Gamma$  et donc, pour  $n$  assez grand,

$$\gamma^n \gamma_1 \gamma^{-n} \notin \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}.$$

*Preuve du théorème 4.2.* — On considère  $B$  comme éclaté projectif en un point de  $P^2(\mathbb{R})$  : si  $x_0 \in B$ , muni d'une métrique riemannienne,  $\varepsilon > 0$  petit, on considère le



quotient  $C_\varepsilon$  de  $B_\varepsilon = B \setminus B(x_0, \varepsilon)$  par l'identification  $\sigma$  des points diamétralement opposés de  $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in B \mid d(x_0, x) = \varepsilon\}$ .

On est dans le cadre des applications des méthodes du paragraphe 3 : La métrique  $g$  définit une métrique singulière le long de  $S(x_0, \varepsilon)/\{\sigma\}$  sur  $P^2(\mathbf{R}) = C_\varepsilon$  et le laplacien de cette métrique est un opérateur du type  $\Delta_\varepsilon$  considéré dans le paragraphe 3;

$$D_\varepsilon = \{f \in H^1(B_\varepsilon) \mid \forall \theta \ f(\varepsilon, \theta) = f(\varepsilon, -\theta)\}$$

et donc  $H_0^1(B_\varepsilon) \subset D_\varepsilon$ .

Il ne reste plus qu'à utiliser comme métrique de départ sur  $B$  la métrique canonique,  $g_0$  du plan projectif où  $\lambda_2$  est de multiplicité 5 et vérifie SAH (cf. [CV 3]) relativement aux déformations conformes.

## 5. Les variétés compactes de dimension $\geq 3$

Indiquons ici une construction simplifiant celle [CV 2]. Soit  $S = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N\}$  donnée et  $(Z, g_0)$  une surface compacte ayant  $S$  comme début du spectre avec la propriété WAH relativement à une famille de métriques  $(g_a)_{a \in K}$ . L'existence d'un tel objet résulte du paragraphe 2.

Soit  $X$  de dimension  $\geq 3$  une variété compacte et  $j : Z \rightarrow X$  un plongement. Pour chaque  $g_a$ , on construit sur  $X$  une métrique  $G_a$ , dépendant continûment de  $a$ , telle que  $(G_a)|_Z = g_a$  et  $G_a$  est une métrique produit près de  $j(Z)$ . On peut alors recopier la démonstration de [CV 2] en remplaçant les voisinages tubulaires du graphe complet par les voisinages tubulaires de  $j(Z)$ . On évite ainsi les problèmes liés aux singularités du voisinage tubulaire près des sommets du graphe complet.

## 6. Les domaines euclidiens

Nous allons adapter les arguments précédents et la construction de [C-C] au cas des domaines euclidiens de  $\mathbf{R}^2$  et de  $\mathbf{R}^3$  et d'abord construire des 0-condensateurs euclidiens (au sens de [C-C]).

6a. CONDENSATEURS. — Un condensateur euclidien est la donnée d'un triplet  $\mathcal{C} = (Z, C_+, C_-)$ , où  $Z$  est un ouvert borné de  $\mathbf{R}^d$ , à bord  $C^1$  par morceaux, et  $\partial Z = C_+ \cup C_- \cup W$ , cette partition étant en domaines  $C^1$  par morceaux du bord.

DÉFINITION 6.1. — La capacité du condensateur  $\mathcal{C}$  est le nombre  $\text{cap}(\mathcal{C}) = \inf \left( \int |df|^2 \right)$ , où le inf porte sur les fonctions  $f \in H^1(Z)$  telles que  $f|_{C_+} = 1$ ,  $f|_{C_-} = 0$ .

Il existe une unique fonction  $f$ , vérifiant les conditions précédentes, pour laquelle le inf est atteint; elle est caractérisée par  $\Delta f = 0$  dans  $Z$  et  $\partial f / \partial n = 0$  sur  $W$ . Cette fonction est le potentiel d'équilibre du condensateur pour les tensions indiquées. Plus généralement, on

posera :

$$f_{a,b} = (a-b)f + b,$$

on a alors :

$$(6.3) \quad \int_Z |df_{a,b}|^2 = \text{cap}(\mathcal{C})(a-b)^2.$$

On introduira ultérieurement des familles de condensateurs dont la capacité tend vers 0, et on peut axiomatiser comme suit les propriétés nécessaires (voir aussi [C-C]) :

DÉFINITION 6.4. — Soit  $\mathcal{C}_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) une famille de condensateurs, on dira que  $\mathcal{C}_\varepsilon$  est un 0-condensateur si les 4 propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{cap}(\mathcal{C}_\varepsilon)/\varepsilon) = 1$ ,
- (ii)  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Z |f_{a,b}^\varepsilon|^2 = V_+ a^2 + V_- b^2$ , où  $V_+$  et  $V_-$  sont  $> 0$  et indépendants de  $\varepsilon$ .
- (iii) Si  $f^\varepsilon$  est le potentiel d'équilibre de  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , on a :

$$\|\partial f / \partial n\|_{L^2(C_\pm^\varepsilon)} = O(\varepsilon).$$

- (iv) L'application  $\text{Tr}_\varepsilon : H^1(Z_\varepsilon) \rightarrow L^2(C_\pm^\varepsilon)$  est uniformément majorée en norme quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Un corollaire de la définition est que, si  $\mathcal{C}_\varepsilon$  est un 0-condensateur, on a :

$$(6.5) \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \quad \forall g \in H^1(Z_\varepsilon), \quad \left| \int_{Z_\varepsilon} \langle df_{a,b}^\varepsilon, dg \rangle \right| \leq C \varepsilon \|f_{a,b}^\varepsilon\|_{L^2(Z_\varepsilon)} \|g\|_{H^1(Z_\varepsilon)}.$$

Il n'est pas clair qu'il existe des 0-condensateurs, cependant nous allons exhiber des exemples en dimension 2 et 3.

6b. CONDENSATEURS EN DIMENSION 2. — Soit  $a > 0$  fixé et  $\tilde{Z}$  l'intérieur de la région de  $\mathbf{R}^2$  limitée par l'ellipse  $E_\varepsilon$  de centre  $O$ , de foyers  $F_\pm = (\pm \eta, 0)$ , et de sommets principaux  $S_\pm = (\pm a, 0)$  avec  $\eta = a / \cosh(2\varepsilon/\pi)$ . Soit  $Z_\varepsilon$  l'intérieur de cette ellipse, d'où l'on retranche les segments  $[F_+, S_+]$  et  $[F_-, S_-]$ ,

$$C_+^\varepsilon = E \cap \{y > 0\}, \quad C_-^\varepsilon = E \cap \{y < 0\},$$

et  $W$  la réunion des 4 côtés des segments  $[F_+, S_+]$  et  $[S_-, F_-]$ .

PROPOSITION 6.6. —  $\mathcal{C}_\varepsilon$  est un 0-condensateur.

La capacité et le potentiel d'équilibre de ce condensateur se calculent en utilisant l'invariance conforme de la capacité en dimension 2 et la transformation conforme  $F_\varepsilon(z) = \eta \cosh z$  du rectangle  $R = [-b, b] \times [0, \pi]$  sur  $Z_\varepsilon$  avec la relation :  $\eta \cosh b = a$ . Le potentiel d'équilibre pour le condensateur ainsi transformé est  $f = (x+b)/2b$ .

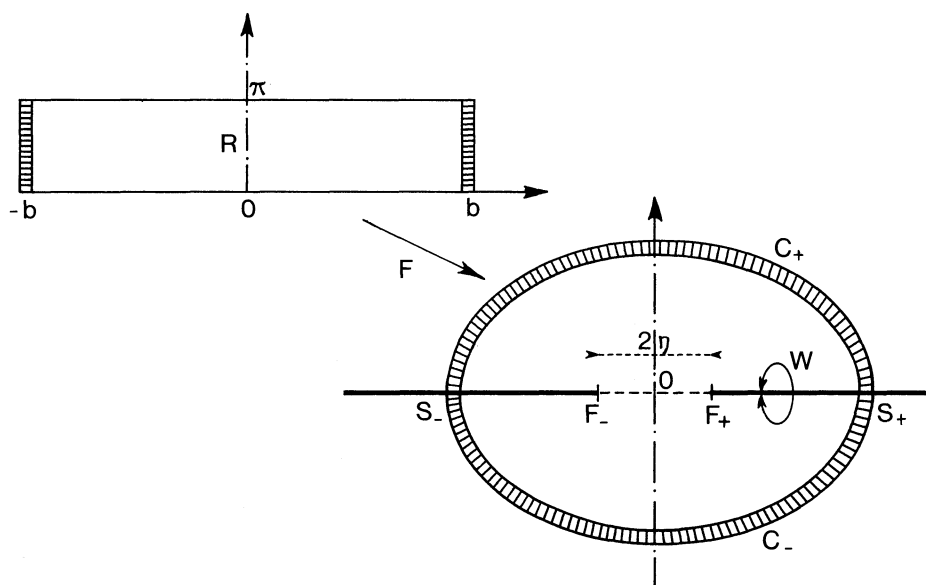


Fig. 1

. La vérification des différentes propriétés ne pose pas de problème sérieux, la capacité est évidemment donnée par :

$$\text{cap}(\mathcal{C}_\varepsilon) = \int_{\mathbf{R}} \left( \frac{1}{2b} \right)^2 dx dy = \frac{\pi}{2b} = \varepsilon.$$

On a aussi :  $V_+ = V_- = (1/2) \pi a^2$ .

6c. CONDENSATEURS EN DIMENSION 3. — *Description de  $\mathcal{C}_\varepsilon$ .* — Soient  $S_+$  et  $S_-$  deux demi-boules euclidiennes de même axe  $Oz$  et de même rayon  $R$  ( $=1$  par exemple) fixé. On suppose que les centres  $O_+$  et  $O_-$  de  $S_+$  et  $S_-$  ont dans  $\mathbf{R}^3$  les coordonnées  $O_\pm = (0, 0, \pm l)$  ( $l > 0$  fixé). On se donne un nombre  $\eta > 0$  petit et on considère le domaine :

$$Z = S_+ \cup S_- \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid |z| \leq l, x^2 + y^2 \leq \eta^2\}.$$

Soient  $C_+$  (resp.  $C_-$ ) la demi-sphère limitant  $S_+$  (resp.  $S_-$ ),  $\mathcal{C}_\varepsilon = (Z, C_+, C_-)$  est un condensateur de capacité  $\varepsilon = \varepsilon(\eta) \rightarrow 0$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$  (il est facile de vérifier que  $\varepsilon = \text{cap}(\mathcal{C}_\varepsilon) \leq \pi \eta^2 / 4l^2$  en testant sur une fonction constante dans les demi-boules et affine de  $z$  dans le tube central  $T$ ).

PROPOSITION 6.7. —  $\mathcal{C}_\varepsilon$  est un 0-condensateur.

*Preuve que  $\mathcal{C}_\varepsilon$  est un 0-condensateur.* — Soit  $f$  le potentiel d'équilibre. On lui associe la mesure  $\mu$  portée par le disque  $D_+$  de rayon  $\eta$ , de centre  $O_+$ , situé dans le plan équatorial

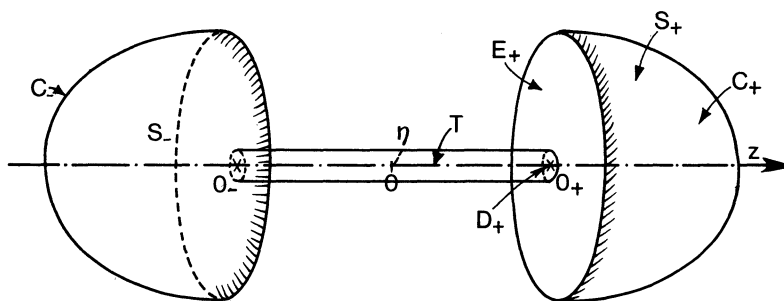


Fig. 2

$E_+$  de  $S_+$  et définie par :

$$\mu = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} dx dy.$$

LEMME 6.8. —  $\mu$  est une mesure positive et  $\mu(1) \leq 2\varepsilon$ .

*Preuve.* — En effet la fonction  $\partial f / \partial z$  est harmonique dans  $Z$ , elle est dans  $H^1(Z)$  [car  $f \in H^2(Z)$ ] et  $\geq 0$  sur le bord : c'est clair sur  $C_+$ ,  $C_-$ ,  $E_+$  et  $E_-$ ; sur la partie  $bT$ , c'est moins évident. Pour tout  $\alpha$ , les régions  $D_\alpha = \{f \geq \alpha\}$  (resp.  $E_\alpha = \{f \leq \alpha\}$ ) sont connexes [sinon on peut diminuer  $\int |df|^2$  en remplaçant  $f$  par  $\alpha$  dans la composante connexe qui ne rencontre pas  $C_+$  (resp.  $C_-$ )]. Soit  $\varphi(z) = f(\eta, 0, z)$  et supposons que :  $\partial \varphi / \partial z(z_0) < 0$ , on aurait alors 3 valeurs  $-l < z_1 < z_2 < z_3 < l$  telles que  $\varphi(z_i) = \alpha$  et il y aurait contradiction avec la connectivité de  $D_\alpha$  et de  $E_\alpha$ . Donc  $\partial f / \partial z \geq 0$  sur  $bZ$  et donc dans  $Z$  puisqu'elle est harmonique.

De plus on a évidemment :

$$\mu(1) = 2 \cdot \int_{z \leq l} |df|^2 \leq 2\varepsilon.$$

Soit  $G(m, m')$  le noyau de la résolvante du problème de Dirichlet dans la boule  $B_+$  dont  $S_+$  est la moitié. On a :

$$\forall m \in S_+, \quad f(m) = 1 - \int_{D_+} G(m, m') d\mu(m'),$$

et comme :

$$G(m, O^+) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_+} - 1 \right), \quad \text{avec } r_+ = d(m, O_+)$$

$G(m, m') = G(m, O_+) + O(d(m', O_+))$ ,  $m' \in D$ ,  $m \in S_+$  avec  $d(m, O_+) \geq \alpha > 0$ , on a :

$$f(m) = 1 + \frac{1}{4\pi} (\mu(1)) \left(1 - \frac{1}{r_+}\right) + O(\eta) \cdot \varepsilon$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{|S_+} = O(\mu(1)) = O(\varepsilon).$$

De plus lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , on voit que  $f \rightarrow 1$  dans  $S_+ \setminus O_+$ .

Le quatrième axiome se vérifie aisément, car la géométrie est fixe à une distance  $\leq 1/2$  des plaques de  $\mathcal{C}$ .

On peut évidemment adapter cette construction en toutes dimensions, nous l'utiliserons en dimension 2 dans le paragraphe 7.

6d. PREUVE DU THÉORÈME 1.4. — La méthode utilisée est celle de [C-C]. Précisons les notations utilisées ici :

$X$  est un ouvert borné  $C^1$  par morceaux de  $\mathbf{R}^d$  ( $d=2$  ou  $3$ ), qui dépendra de paramètres  $\varepsilon_{i,j} > 0$  et éventuellement de quelques autres paramètres variant dans un compact.

$X = \bigcup_{i=1}^N X_i$  est une partition de  $X$  en sous-domaines connexes;

$\Gamma$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  et ayant une arête  $\{i, j\} \in A$  chaque fois que  $\bar{X}_i \cap \bar{X}_j \neq \emptyset$ .

On suppose aussi qu'un voisinage de chacune de ces intersections est isomorphe à un modèle type donné par les condensateurs de 6b et 6c; plus précisément, pour chaque arête  $\{i, j\} \in A$ , il existe  $Z_{(i,j)} \subset X$  (2 à 2 disjoints) tels que, si :

$$C_i = \partial Z_{(i,j)} \cap X_i, \quad C_j = \partial Z_{(i,j)} \cap X_j$$

alors  $\mathcal{C} = (Z_{(i,j)}, C_i, C_j)$  est isométrique au 0-condensateur type  $\mathcal{C}_{\varepsilon_{i,j}}$  de dimension  $d$ .

On pose alors  $\bar{X}_i = X_i \setminus (\bigcup_j Z_{(i,j)})$ .

Soit maintenant  $K_0$  un compact convexe de  $(\mathbf{R}^+ \setminus 0)^A$ , on pose  $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon c_{i,j}$  où  $c = (c_{i,j}) \in K_0$  et on s'intéresse au comportement asymptotique quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  des valeurs propres du problème de Neumann dans  $X$ .

Remarquons que les seuls paramètres géométriques faisant varier  $X$  sont les largeurs des ouvertures en dimension 2 (resp. les épaisseurs des tubes en dimension 3) entre  $X_i$  et  $X_j$ .

On applique alors le *lemme des petites valeurs propres* [C-C] dont les hypothèses seront des conséquences des axiomes des 0-condensateurs, comme dans [C-C].

Précisons l'espace test  $E \subset H^1(X)$  déterminant l'asymptotique des petites valeurs propres.

Si  $V_i = \text{vol}(X_i)$ ,  $\mu = \sum_i V_i \delta(i)$ ,  $E$  est l'image de l'application  $j : L^2(S, \mu) \rightarrow H^1(X)$  définie par  $j((x_i)) = f$  avec :

$$\begin{cases} f|_{\bar{X}_i} = x_i \\ f|_{Z_{(i,j)}} = f_{x_i, x_j} \end{cases},$$

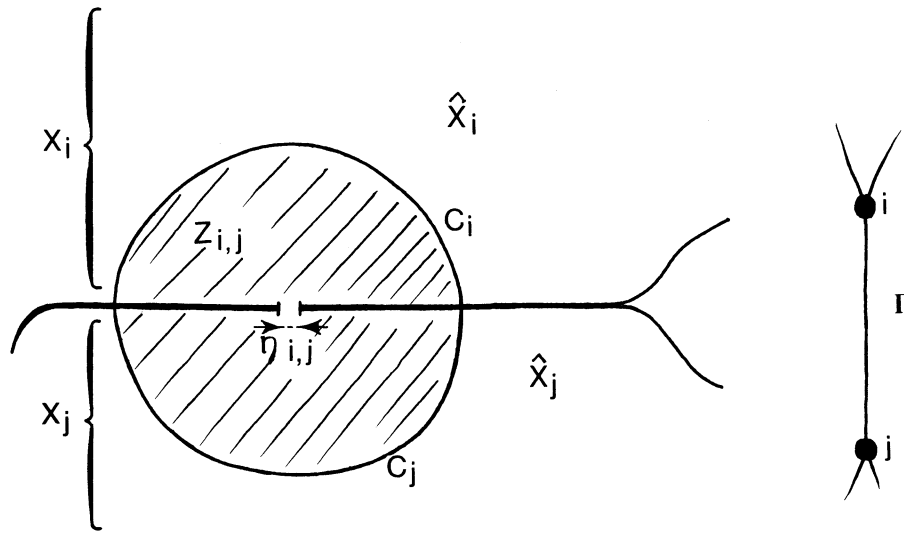


Fig. 3

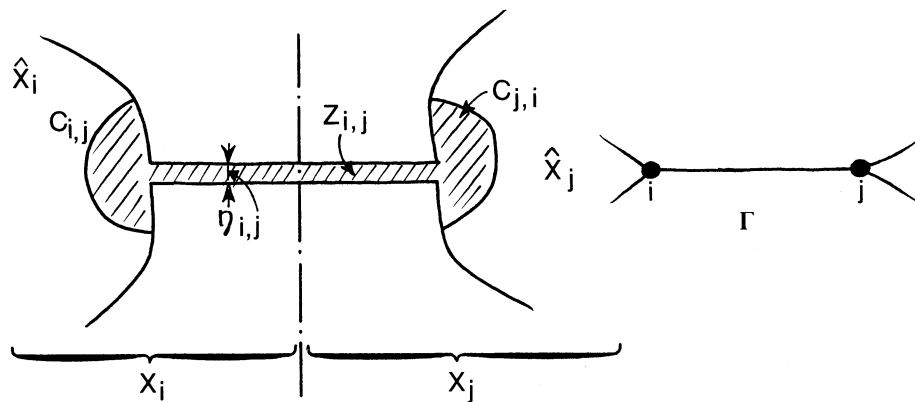


Fig. 4

où  $f_{x_i, x_j}$  est le potentiel d'équilibre de  $Z_{(i, j)}$  avec les tensions  $x_i$  sur  $C_i$  et  $x_j$  sur  $C_j$ . On a alors par application des axiomes des 0-condensateurs :

$$\int \|df\|^2 = \varepsilon \sum_{\{i, j\} \in A} c_{(i, j)} (x_i - x_j)^2, \quad \int f^2 \simeq \sum_{i=1}^N V_i x_i^2.$$

Pour appliquer le lemme des petites valeurs propres, il reste à prouver que :  $\lambda_{N+1}(X) \geq C > 0$ , indépendamment de  $\varepsilon$ . C'est une conséquence du minimax et de la minoration uniforme  $\lambda_2(X_i) \geq C_i > 0$ .

Le théorème 1.4 se prouve alors simplement en regardant les graphes  $\Gamma$  possibles :

dans  $\mathbb{R}^2$ , le graphe complet à 4 sommets et les graphes en étoiles avec un nombre arbitraire de sommets sont possibles,

dans  $\mathbf{R}^3$ , tous les graphes finis sont possibles.

On en déduit le théorème 1.4 par les arguments de stabilité déjà utilisés dans [CV 2] et [C-C] et les propriétés SAH pour les graphes complets et en étoiles ([CV 3]).

## 7. L'opérateur de Schrödinger sur les surfaces

La nécessité de travailler avec ces opérateurs apparaît lorsque l'on veut adapter les méthodes de [CV 2] au cas de la dimension 2 : l'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet en dimension 2 oblige à séparer la mesure et la métrique, ce qui revient à considérer des opérateurs de Schrödinger dont la plus petite valeur propre est 0, ce que nous expliquons maintenant.

*Une remarque préliminaire.* — Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte et  $\mu = a(x)v_g$  une mesure positive sur  $X$  de support  $X$ , on peut associer à ces données l'extension de Friedrich  $\Delta_{g, \mu}$  de la forme  $q(f) = \int_X |df|_g^2 d\mu$  de domaine  $H^1(X)$ , relativement à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ . On obtient ainsi, lorsque  $a \in C^\infty(X)$  :

$$\Delta_{g, \mu} f = \Delta f + \frac{1}{a} \langle da | df \rangle_g.$$

La transformation unitaire  $U : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, v_g)$ , qui à  $f$  associe  $f\sqrt{a}$ , transforme  $\Delta_{g, \mu}$  en l'opérateur de Schrödinger  $H$  défini par :

$$Hf = \Delta_g f + \left( a^{1/2} \Delta_g (a^{-1/2}) - \frac{1}{2a^2} \|da\|^2 \right) f,$$

Réciproquement, si  $H = -\Delta + V$  et que la plus petite valeur propre de  $H$  est 0 associé à la fonction propre  $\varphi_0 > 0$ , la transformation unitaire  $V : L^2(X, v_g) \rightarrow L^2(X, \mu)$ , avec  $\mu = \varphi_0^2 v_g$ , qui à  $f$  associe  $f/\varphi_0$ , transforme  $H$  en l'opérateur  $\Delta_{g, \mu}$ .

La construction d'opérateurs de Schrödinger sur une surface est donc (aux problèmes de régularité près) ramenée à celle d'opérateurs  $\Delta_{g, \mu}$ . Il en est de même dans le cas des graphes.

Nous allons prouver le :

**THÉORÈME 7.1.** — *Soit  $\Gamma$  un graphe fini,  $(\Delta_a)_{a \in K}$  une famille de laplaciens combinatoires sur  $\Gamma$  ayant la suite  $S = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N\}$  de valeurs propres vérifiant la propriété WAH.*

*Soit  $X$  une surface compacte telle qu'il existe un plongement  $j : \Gamma \rightarrow X$ , alors il existe un opérateur  $\Delta_{g, \mu}$  sur  $X$  dont le spectre commence par  $S$ .*

**COROLLAIRE 7.2.** — *Il existe sur toute surface  $X$  un opérateur  $\Delta_{g, \mu}$  avec  $\mu \in C^\infty(X)$ , tel que :*

$$m(X, \Delta_{g, \mu}) = C(X) - 1.$$

**COROLLAIRE 7.3.** — *S'il existe sur  $\Gamma$  un laplacien combinatoire ayant la valeur propre  $\lambda_2$  de multiplicité  $N$  et vérifiant la propriété WAH,  $\Gamma$  n'est pas plongeable dans une surface  $X$  telle que  $m(X) < N$ .*

**Exemples 7.4.** — Le graphe complet  $K_6$  n'est pas plongeable dans  $P^2(\mathbf{R})$  ou dans  $B$ .

Le graphe complet bipartite  $K_{3,3}$  n'est pas plongeable dans  $S^2$ .

**Preuve du théorème 7.1.** — La technique est très voisine de celle de [CV 2], mais utilise le lemme des petites valeurs propres [C-C] et les condensateurs euclidiens du paragraphe 6.

$\Gamma$  est un graphe donné, à  $N$  sommets, muni d'un laplacien combinatoire  $\Delta_{c_0, v_0}$ , vérifiant WAH relativement à  $\{\Delta_{c, v} \mid (c, v) \in K\}$ . On dessine  $\Gamma$  sur la surface  $X$  et on choisit une métrique riemannienne  $g$  sur  $X$  qui soit euclidienne près de  $\Gamma$  et telle que les arêtes soient géodésiques. On construit alors au voisinage de chaque sommet  $A_i$ , un domaine polygonal  $P_i$  de centre  $A_i$  et d'aire  $V_i$  (s'il n'y a pas assez de place, on fait une homothétie sur  $g$ ), et dont les côtés rencontrent les arêtes de  $\Gamma$  orthogonalement. Puis on considère le domaine

$$D_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N P_i \cup \bigcup_{a \in A} T_{i,j},$$

où  $T_{ij}$  est le rectangle de largeur  $\varepsilon_{i,j}$  ayant l'arête  $\gamma_{i,j}$  comme axe.

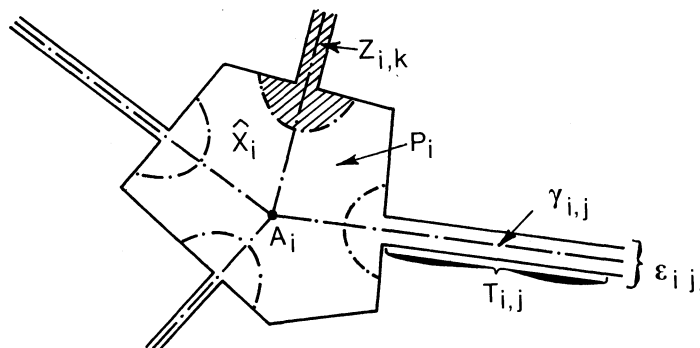


Fig. 5

Par extraction de demi-disques de rayon fixé aux bouts des rectangles  $T_{i,j}$ , on obtient la décomposition standard :

$$D_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N \hat{X}_i \cup \bigcup_{\{i,j\} \in A} Z_{i,j}.$$

On s'intéresse d'abord à l'opérateur  $\Delta_{g, \mu}$ , où  $\mu = v_g$  sur  $D_\varepsilon$  et  $\mu = (\varepsilon')^2 \cdot v_g$  sur  $X \setminus D_\varepsilon$ .

En vue d'appliquer le lemme des petites valeurs propres à cet opérateur, on fixe l'espace de Hilbert par la transformation unitaire

$$U : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, v_g) = L^2(D_\varepsilon, v_g) \oplus L^2(X \setminus D_\varepsilon, v_g),$$



qui, à  $f$ , associe  $(\varphi, \psi)$  avec  $\varphi = f|_{D_\varepsilon}$  et  $\psi = (f/\varepsilon')|_{X \setminus D_\varepsilon}$ .

Le domaine de la forme quadratique transportée est donc :

$$\{(\varphi, \psi) \in H^1(D_\varepsilon) \oplus H^1(X \setminus D_\varepsilon) \mid \psi|_{\partial D_\varepsilon} = \varepsilon' \varphi|_{\partial D_\varepsilon}\}.$$

Alors, si  $P : H^1(D_\varepsilon) \rightarrow H^1(X \setminus D_\varepsilon)$  est le prolongement harmonique de  $f$ , on a :

$$\|Pf\|_{H^1(X \setminus D_\varepsilon)} \leq C(\varepsilon) \|f\|_{H^1(D_\varepsilon)}$$

et on choisit  $\varepsilon'$  tel que :  $\varepsilon' \cdot C(\varepsilon) = \varepsilon^2$ . On pose alors  $E_0 = J(L^2(S, V))$ , où :

$$J((x_i))|_{D_\varepsilon} = f = \begin{cases} x_i & \text{sur } \hat{X}_i \\ f_{x_i, x_j} & \text{sur } Z_{i,j} \end{cases}$$

et

$$J((x_i))|_{X \setminus D_\varepsilon} = \varepsilon' P(f)$$

Le choix des  $\varepsilon_{i,j}$  conformément aux données de  $\Delta_{\varepsilon, v}$  et du calcul des capacités du paragraphe 6 donne alors :

$$q(J((x_i))) = \varepsilon \left( \sum c_{i,j} (x_i - x_j)^2 \right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\int |J((x_i))|^2 v_g = \sum V_i \cdot x_i^2 + o(1).$$

De plus, il est clair que :

$$\lambda_{N+1}(\Delta_{g, \mu}) \geq \inf_i (\inf \{\lambda_2^{N_e}(X_i)\}, \inf_\alpha \{\lambda_1^{P_{ir}}(W_\alpha)\}),$$

où les  $W_\alpha$  sont les composantes connexes de  $X \setminus \Gamma$ . On est donc en situation d'appliquer le lemme des petites valeurs propres et on conclut par un lissage de  $\mu$  comme dans [CV 2].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [AD] V. ARNOLD, *Modes and Quasi-Modes (Journal of Functional Analysis and its applications*, vol. 6, 1972, p. 94-101).
- [AE] C. ANNÉ, *Écrasement d'anses et spectre du laplacien (Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série* (20, 1987, p. 271 à 280).
- [BN] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes (Ann. Institut Fourier*, vol. 30, 1980, p. 109-128).
- [BR] M. BURGER, *Estimations des petites valeurs propres du laplacien d'un revêtement de variétés riemanniennes compactes (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 302, série I*, 1986, p. 191-194).
- [C-C] B. COLBOIS et Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Multiplicité de la première valeur propre positive du laplacien d'une surface à courbure constante [Comment. Math. Helv., 1987 (à paraître)]*.
- [C-F] CHAVEL et FELDMANN, *Spectra of Manifolds with Small Handles (Comment. math. Helv., vol. 56*, 1981, p. 83-102).

- [CG] S. CHENG, *Eigenfunctions and Nodal Sets* (*Commentarii Math. Helv.*, vol. 51, 1979, p. 43-55).
- [CS] B. COLBOIS, *Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 301, série I, 1985, p. 927-930).
- [CV 1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectres de variétés riemanniennes et spectres de graphes* [*Proc. ICM*, Berkeley, 1986 (à paraître)].
- [CV 2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien* (*Commentarii Math. Helv.*, vol. 61, 1986, p. 254-270).
- [CV 3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold* [*Comment. Math. Helv.*, 1987 (à paraître)].
- [CV 5] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur un nouvel invariant des graphes finis et un critère de planarité* (*Prépublications de l'Institut Fourier*, 71, 1987, p. 1-15).
- [DK] J. DODZIUK, *Difference Equations, Isoperimetric Inequalities and Transience of Certain Random Walks* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 284, 1984, p. 787-794).
- [H-S] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, *Puits multiples en semi-classique, I* (*Comm. P.D.E.*, vol. 1984, p. 337-408); *II* (*Ann. I.H.P. (Phys. théorique)*, vol. 42, 1985, p. 127-212); *III* (*Math. Nachrichten*, 127, 1985, p. 263-313); *IV* (*Comm. in P.D.E.*, vol. 10, 1985, p. 245-340); *V, VI* (à paraître).
- [KC] M. KAC, *Can One Hear the Shape of a Drum?* (*Amer. Math. Monthly*, vol. 73, 1966, p. 1-23).
- [PPW] L. PAYNE, G. POLYA et H. WEINBERGER, *On the Ratio of Consecutive Eigenvalues* (*J. of Math. and Phys.*, vol. 35, 1956, p. 289-298).
- [PR] M. PROTTER, *Can One Hear the Shape of a Drum?*, Revisited, Preprint, Berkeley, 1985.
- [P-S] T. PIGNATORO et D. SULLIVAN, *Ground State and Lowest Eigenvalue of the Laplacian for Non-Compact Hyperbolic Surfaces* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 104, 1986, p. 529-535).
- [RL] G. RINGEL, *Map Color Theorem*, Springer, 1974.
- [RT] RAUCH et TAYLOR, *Potential and Scattering Theory in Widely Perturbed Domains* (*Journal of Functional Analysis*, vol. 18, 1975, p. 27-59).

(Manuscrit reçu le 26 janvier 1987).

YVES COLIN DE VERDIÈRE,  
 Institut Fourier,  
 B.P. 74,  
 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex,  
 France.