

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES LAURENT

Polygône de Newton et b -fonctions pour les modules microdifférentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 20, n° 3 (1987), p. 391-441

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_3_391_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POLYGÔNE DE NEWTON ET b -FONCTIONS POUR LES MODULES MICRODIFFÉRENTIELS

PAR YVES LAURENT

TABLE DES MATIÈRES

- 0. Introduction
- 1. Rappels sur les opérateurs microdifférentiels
- 2. Polygone de Newton et symboles associés
- 3. Cycles microcaractéristiques
- 4. Modules holonômes et b -fonctions
- 5. Prolongement du polygone de Newton.

Introduction

Soit Λ une sous-variété lagrangienne homogène du fibré cotangent à une variété analytique complexe X . Nous voulons, dans cet article, définir plusieurs invariants attachés soit à un opérateur différentiel (ou microdifférentiel) à coefficients analytiques soit à un système d'équations aux dérivées partielles défini au voisinage de Λ . Ces invariants sont conservés en particulier par les transformations canoniques quantifiées et, comme nous le montrerons ultérieurement [17], déterminent le développement asymptotique des solutions du système au voisinage de Λ .

Cette situation a été étudiée en détails dans le cas d'une variété de dimension 1 par Ramis [23] (après les travaux de Malgrange sur l'irrégularité [20], [21]). La situation est beaucoup plus simple en dimension 1, d'une part parce que Λ est alors nécessairement le fibré conormal à un point et d'autre part parce que l'étude des systèmes d'équations se ramène à celle des opérateurs. Ramis définit le polygone de Newton d'un opérateur différentiel (ou d'un système d'équations différentielles) et montre que sur ce polygone on peut lire les indices de cet opérateur quand il agit sur les différents espaces d'ultradistributions à support ponctuel et de séries formelles.

En fait, ce polygone est un sous-ensemble de \mathbb{Q}^2 qui se décompose en deux parties. La première, que nous appellerons dans la suite « partie positive », caractérise les solutions séries formelles non convergentes de l'équation. En particulier si l'équation est « à singularités régulières », cette partie positive disparaît et, comme on le sait, toute solution

série formelle de l'équation est convergente. La deuxième, la « partie négative », n'est définie que pour les opérateurs à coefficients polynomiaux. Ramis montre qu'elle caractérise le type exponentiel des solutions entières de l'équation.

Dans [15], nous avons utilisé la théorie des opérateurs « 2-micro-différentiels » pour étudier le cas de plusieurs variables. Nous avons défini le polygône de Newton d'un opérateur microdifférentiel au voisinage de la variété lagrangienne Λ (en fait seulement la « partie positive » de ce polygône) et pour les systèmes d'équations c'est-à-dire les \mathcal{D}_X -modules et les \mathcal{E}_X -modules cohérents, nous avons associé une variété « microcaractéristique » à chaque couple (r, s) de rationnels tels que $1 \leq s \leq r + \infty$. Ces variétés microcaractéristiques sont des sous-ensembles analytiques involutifs du fibré cotangent $T^*\Lambda$ à la variété Λ . Enfin nous avons montré comment dans certains cas particuliers (Λ fibré conormal à un point) la croissance des solutions séries formelles du système est déterminée par ces variétés microcaractéristiques.

En considérant, pour chaque entier m , l'ensemble des opérateurs dont le polygône de Newton est contenu dans un demi-plan $\{(i, k) \in \mathbb{R}^2 / k \leq m\}$ on définit une filtration de l'anneau des opérateurs différentiels qui n'est autre que la filtration de Kashiwara [9]. Utilisant cette remarque Laumon [14], a redéfini le polygône de Newton d'un opérateur et les variétés microcaractéristiques d'un système à partir de la filtration de Kashiwara et de la filtration usuelle par l'ordre des opérateurs. Se plaçant dans le cadre de la géométrie algébrique, il s'est limité aux opérateurs différentiels et aux variétés Λ qui sont le fibré conormal à une sous-variété de la variété de base X . (Sur ce sujet voir aussi Sabbah [26] et Malgrange [19], [21].)

Nous reprenons ici cette construction dans le cadre microlocal. Nous redéfinissons donc tout d'abord la filtration de Kashiwara pour les opérateurs microdifférentiels au voisinage d'une sous-variété lagrangienne homogène Λ quelconque, puis, à l'aide de cette filtration et de la filtration usuelle par l'ordre, nous redéfinissons le polygône de Newton d'un opérateur microdifférentiel (cette nouvelle construction est plus simple que celle de [15], en particulier elle donne immédiatement l'invariance du polygône de Newton par transformation canonique quantifiée).

Ce polygône définit, pour chaque r rationnel supérieur ou égal à 1 ou $r = +\infty$, une filtration sur le faisceau \mathcal{E}_X des opérateurs microdifférentiels (le cas d'un nombre r non rationnel ne présente guère d'intérêt car les sommets du polygône de Newton sont à coordonnées entières).

Si $r = +\infty$, la filtration est celle de Kashiwara. Nous montrons que le gradué de \mathcal{E}_X pour cette filtration s'identifie à l'anneau $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ des opérateurs différentiels sur Λ dont les coefficients sont des sommes finies de fonctions holomorphes homogènes sur Λ . Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent muni d'une « bonne filtration » son gradué est alors un $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ -module cohérent dont la variété caractéristique est un sous-ensemble bihomogène de $T^*\Lambda$ que nous noterons $\text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$.

Si $r = 1$, la filtration est la filtration usuelle par l'ordre tandis que, pour $1 < r < +\infty$, le gradué de \mathcal{E}_X s'identifie à l'anneau $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ des sommes finies de fonctions bihomogènes sur $T^*\Lambda$ polynomiales dans les fibres de $T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$. Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent muni d'une « bonne filtration », (pour la r -filtration de \mathcal{E}_X) son gradué est un

$\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ -module cohérent et définit donc un sous-ensemble analytique $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ (qui n'est pas homogène). Le cône tangent de $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ le long de la section nulle de $T^*\Lambda$ est une sous-variété bihomogène de $T^*\Lambda$ que nous noterons $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$. On constate que les variétés $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sont les variétés microcaractéristiques de [15].

Toutes ces variétés sont des sous-ensembles analytiques involutifs de $T^*\Lambda$.

Le résultat central de cet article est que la dimension des variétés $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est au plus égale à la dimension de la variété caractéristique du module \mathcal{M} . En particulier si \mathcal{M} est holonome, ces variétés sont toutes lagrangiennes.

De là, on déduit que si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module (ou un \mathcal{D}_X -module) holonome défini près de Λ , alors pour tout r , $1 < r \leq +\infty$, il existe une « b -fonction » qui annule le gradué de \mathcal{M} .

Pour $r = +\infty$, cette b -fonction est un polynôme en une variable à coefficients dans \mathbb{C} . Kashiwara-Kawai ont montré l'existence de cette b -fonction lorsque le système \mathcal{M} est singulier régulier [11]. Par ailleurs cette b -fonction permet de retrouver la b -fonction usuelle comme elle est définie dans [7].

Lorsque $r < +\infty$, la b -fonction est un polynôme en une variable dont les coefficients sont des fonctions holomorphes sur Λ . Elle généralise ce que Ramis appelait dans le cas de la dimension 1, « l'équation déterminante ».

Pour terminer nous considérons les opérateurs à coefficients polynomiaux et plus généralement les opérateurs qui sont des sommes finies d'opérateurs homogènes en un sens convenable (cf. § 5 pour les détails). Dans ce cas nous définissons la « partie négative » du polygône de Newton et nous prolongeons à tout r rationnel, $-\infty \leq r \leq +\infty$, les résultats précédents.

Dans un article ultérieur [17], nous montrons comment les b -fonctions déterminent la croissance des solutions d'un système holonome. Par exemple si \mathcal{M} est un système holonome singulier régulier, Kashiwara-Kawai ont démontré [11] que les solutions distributions de \mathcal{M} admettent un développement asymptotique. Si les opérateurs sont à coefficients polynomiaux (ou plus généralement vérifient les conditions du paragraphe 5.3), la partie négative du polygône de Newton et les b -fonctions correspondantes déterminent la croissance de ce développement asymptotique.

1. Rappels sur les opérateurs microdifférentiels

Dans ce premier paragraphe nous rappelons quelques définitions et propriétés élémentaires de la théorie des opérateurs microdifférentiels dont nous aurons besoin dans la suite.

1.1. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET MICRODIFFÉRENTIELS (cf. [24], [2] et [25]). — Soit X une variété analytique complexe de fibré cotangent T^*X et soit $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique. On identifie X à la section nulle T_X^*X de T^*X et on note $\dot{T}^*X = T^*X \setminus X$.

On note \mathcal{D}_X le faisceau sur X des opérateurs différentiels (d'ordre fini) à coefficients holomorphes et \mathcal{E}_X le faisceau sur T^*X des opérateurs microdifférentiels.

Rappelons que $\mathcal{E}_X|_{T^*X} = \mathcal{D}_X$, que l'on a un morphisme injectif de faisceaux d'anneaux $\pi^{-1}\mathcal{D}_X \hookrightarrow \mathcal{E}_X$ et que \mathcal{E}_X est plat sur $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$. De plus \mathcal{E}_X et \mathcal{D}_X sont des faisceaux d'anneaux cohérents.

Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent, la variété caractéristique de \mathcal{M} , que l'on notera $\text{Ch}(\mathcal{M})$, est par définition le support de \mathcal{M} . C'est un sous-ensemble analytique involutif homogène de T^*X . Si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module cohérent sa variété caractéristique est celle de $\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$.

Lorsque des coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) ont été choisies sur un ouvert U de X , elles déterminent des coordonnées $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ de $T^*U \subset T^*X$ et pour tout ouvert homogène V de T^*U , les sections de \mathcal{E}_X sur V sont en bijection avec les séries formelles $\sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j(x, \xi)$ de fonctions holomorphes sur V qui vérifient :

$$(1.1.1) \quad p_j(x, \xi) \text{ est homogène de degré } j \text{ en } \xi.$$

$$(1.1.2) \quad \exists m \in \mathbb{Z}, \quad \forall j > m, \quad p_j \equiv 0$$

$$(1.1.3) \quad \forall K \subset \subset V, \quad \exists C > 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad j < 0, \quad \sup_K |p_j(x, \xi)| \leq C^{-j}(-j)!.$$

On dit que $\sum_{j \leq m} p_j(x, \xi)$ est le symbole (total) de l'opérateur microdifférentiel P et on écrit parfois $P = \sum_{j \leq m} p_j(x, D)$.

Le plus petit entier m qui satisfait (1.1.2) est l'ordre de P et la fonction $p_m(x, \xi)$ est alors le symbole principal de P , noté $\sigma(P)$. (Ils sont indépendants du choix des coordonnées locales).

On note $\mathcal{E}_{X, m}$ le sous-faisceau de \mathcal{E}_X des opérateurs d'ordre inférieur ou égal à m et $\mathcal{O}_{T^*X}[m]$ le sous-faisceau de \mathcal{O}_{T^*X} des fonctions holomorphes sur T^*X homogènes de degré m dans les fibres de π .

L'application $\sigma_m : \mathcal{E}_{X, m} \rightarrow \mathcal{O}_{T^*X}[m]$ qui associe à un opérateur P la fonction p_m induit une bijection :

$$\mathcal{E}_{X, m} / \mathcal{E}_{X, m-1} \rightarrow \mathcal{O}_{T^*X}[m].$$

Rappelons encore que si $P = \sum_i p_i(x, D)$ et $Q = \sum_j q_j(x, D)$ on a $PQ = \sum_k r_k(x, D)$ avec :

$$(1.1.4) \quad r_k(x, \xi) = \sum_{\substack{k=i+j-|\alpha| \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha p_i(x, \xi) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha q_j(x, \xi).$$

1.2. MODULES HOLONOMES SIMPLES. — Rappelons qu'un \mathcal{D}_X -module ou un \mathcal{E}_X -module cohérent est dit holonome si sa variété caractéristique est lagrangienne.

Soient Λ une sous-variété lagrangienne lisse de T^*X et \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonome de variété caractéristique Λ . Suivant [24], on dit qu'une section u de \mathcal{M} est non dégénérée si l'idéal de \mathcal{O}_{T^*X} engendré par les symboles principaux des opérateurs de \mathcal{E}_X qui annulent u est l'idéal de définition de Λ .

Un module holonome est dit simple s'il est engendré par une section non dégénérée.

Soient Y une sous-variété (lisse) de X de codimension d et $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X . Il existe un \mathcal{D}_X -module holonome simple de variété caractéristique Λ canonique, on le note $\mathcal{B}_{Y|X}$.

$\mathcal{B}_{Y|X}$ peut être défini comme groupe de cohomologie algébrique locale de Y [7] :

$$\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}_{[Y]}^d(\mathcal{O}_X).$$

Si on choisit des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d})$ de X pour lesquelles $Y = \{(x, y) \in X / x=0\}$, $\mathcal{B}_{Y|X}$ s'identifie au \mathcal{D}_X -module $\mathcal{D}_X/\mathcal{I}$ ou \mathcal{I} est l'idéal de \mathcal{D}_X engendré par $x_1, \dots, x_d, D_{y_1}, \dots, D_{y_{n-d}}$.

$\mathcal{B}_{Y|X}$ a un générateur canonique que l'on note $\delta_{Y|X}$, c'est une section non dégénérée de $\mathcal{B}_{Y|X}$.

Lorsque l'on identifie $\mathcal{B}_{Y|X}$ à $\mathcal{D}_X/\mathcal{I}$ comme ci-dessus, $\delta_{Y|X}$ est l'image de $1 \in \mathcal{D}_X$ par $\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_X/\mathcal{I}$.

Le \mathcal{E}_X -module associé à $\mathcal{B}_{Y|X}$ est noté $\mathcal{C}_{Y|X}$:

$$\mathcal{C}_{Y|X} = \mathcal{E}_{X \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{D}_X} \pi^{-1} \mathcal{B}_{Y|X}.$$

C'est un \mathcal{E}_X -module holonome simple de support T_Y^*X .

Reprenons les coordonnées (x, y) précédentes, alors

$$T_Y^*X = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*X / x=0, \eta=0\}.$$

Comme pour \mathcal{E}_X , on peut définir le symbole d'une section de $\mathcal{C}_{Y|X}$, c'est une série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(y, \xi)$ de fonctions holomorphes sur T_Y^*X qui vérifie les conditions (1.1.1), (1.1.2) et (1.1.3). (Le symbole de $\delta_{Y|X}$ est égal à la fonction 1.)

Si u est une section de $\mathcal{C}_{Y|X}$ dont le symbole s'écrit $\sum_{j \leq m} a_j(y, \xi)$ avec $a_m \neq 0$, on dit que m est l'ordre de u et que a_m est le symbole principal de u . L'entier relatif m et la fonction a_m sur T_Y^*Y sont indépendants du choix des coordonnées (x, y) .

Remarquons encore que $\mathcal{C}_{Y|X}|_Y = \mathcal{B}_{Y|X}$ et que les sections de $\mathcal{B}_{Y|X}$ ont pour symboles les sommes finies $\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n-d} \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(y) \xi^\alpha$.

Nous voulons maintenant étudier tous les modules holonomes simples dont la variété caractéristique est une sous-variété lagrangienne lisse Λ de T^*X .

Tout d'abord, si on se place au voisinage d'un point de la section nulle T_X^*X de T^*X , $\Lambda \cap T_X^*X$ est une sous-variété lisse Y de $X \simeq T_X^*X$ et $\Lambda = T_Y^*X$. D'après [5], si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module holonome simple de variété caractéristique T_Y^*X il est isomorphe à $\mathcal{B}_{Y|X}$.

Plaçons-nous maintenant en dehors de la section nulle de T^*X . Alors il existe, localement sur T^*X , une transformation canonique $\varphi : T^*X \rightarrow T^*X$ qui transforme Λ en $\Lambda_0 = T_Y^*X$ pour une sous-variété Y de X , lisse et de codimension 1. D'après [24], il existe une transformation canonique quantifiée Φ associée à φ c'est-à-dire un isomorphisme de faisceaux d'anneaux $\Phi : \mathcal{E}_X \rightarrow \varphi^{-1} \mathcal{E}_X$ qui vérifie $\sigma(\Phi(P)) = \sigma(P) \circ \varphi^{-1}$. L'iso-

morphisme Φ transforme un \mathcal{E}_X -module holonome simple \mathcal{M} de support Λ en un \mathcal{E}_X -module holonome simple \mathcal{M}_0 de support Λ_0

Considérons donc une sous-variété Y de X de codimension 1 et fixons des coordonnées locales (x, y_1, \dots, y_{n-1}) de X telles que

$$Y = \{(x, y) \in X / x=0\}$$

et donc

$$\Lambda = T_Y^* X = \{(x, y, \xi, \eta) \in T_Y^* X / x=0, \eta=0\}.$$

D'après [24], ch. II, théorème 4.2.5, pour tout \mathcal{E}_X -module holonome simple \mathcal{M} de support Λ , il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que \mathcal{M} soit isomorphe au module $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{E}_X / \mathcal{I}_\alpha$ où \mathcal{I}_α est l'idéal engendré par $x D_x + \alpha, D_{y_1}, \dots, D_{y_{n-1}}$.

On s'est placé en dehors de la section nulle de $T^* X$ donc sur Λ on a $\xi \neq 0$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, ξ^α est le symbole d'un opérateur de \mathcal{E}_X que l'on note D_x^α .

Si P est l'opérateur microdifférentiel de symbole $\sum_{j \leq m} P_j(x, y, \xi, \eta)$ alors l'opérateur $D_x^\alpha P D_x^{-\alpha}$ a pour symbole :

$$(1.2.1) \quad \sum_{j \leq m} \sum_{0 \leq n \leq m-j} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \xi^{-n} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n P_{j+n}(x, y, \xi, \eta)$$

[d'après la formule (1.1.4)].

Lorsque $\alpha \notin \mathbb{Z}$, D_x^α n'est plus dans \mathcal{E}_X [c'est en fait une section du faisceau $\mathcal{E}_X^{\text{RR}}$ (cf. [24])], mais la formule (1.2.1) définit encore un opérateur de \mathcal{E}_X ; on définit ainsi un isomorphisme de faisceaux d'anneaux $\Phi_\alpha : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{E}_X$ par $\Phi_\alpha(P) = D_x^\alpha P D_x^{-\alpha}$.

On a toujours $\Phi_\alpha(x D) = x D + \alpha$ donc Φ_α induit un isomorphisme de \mathcal{M}_0 sur \mathcal{M}_α au-dessus de $\Phi_\alpha : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{E}_X$. (Par contre si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_α ne sont pas isomorphes comme \mathcal{E}_X -modules.)

Remarquons encore que Φ_α est une transformation canonique quantifiée associée à l'application identique de $T^* X$ dans lui-même.

Revenons au cas général d'une sous-variété lagrangienne Λ quelconque de $T^* X$ et d'un \mathcal{E}_X -module holonome simple \mathcal{M} de support Λ .

Si v est une section de \mathcal{M} , on peut définir de manière intrinsèque son ordre [24] et son symbole principal [12], mais nous n'aurons pas besoin ici de ces notions et nous nous contenterons de définir l'ordre et le symbole principal pour un module \mathcal{M} muni d'un générateur.

Soient donc \mathcal{M} un module holonome simple de variété caractéristique Λ et u une section non dégénérée de \mathcal{M} qui l'engendre; on pose pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{M}_m = \mathcal{E}_{X, m} u.$$

On a $\mathcal{M} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_m$ et l'application $\sigma_m : \mathcal{E}_{X, m} \rightarrow \mathcal{O}_{T^*X}[m]$ induit un isomorphisme de faisceaux :

$$\sigma_m : \mathcal{M}_m / \mathcal{M}_{m-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\Lambda[m]$$

où $\mathcal{O}_\Lambda[m]$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur Λ qui sont homogènes de degré m .

Pour montrer ce résultat il suffit de vérifier que l'application composée $\mathcal{E}_{X, m} \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{O}_{T^*X}[m] \rightarrow \mathcal{O}_\Lambda[m]$ est surjective et a pour noyau $\mathcal{E}_{X, m-1} + \mathcal{E}_{X, m} \cap \mathcal{I}$, \mathcal{I} désignant l'annulateur de u .

Or les transformations canoniques quantifiées respectent l'application σ_m donc on peut par une telle transformation se ramener à $\mathcal{M} = \mathcal{C}_{Y|X}$ et $u = \delta_{Y|X}$. Dans ce cas il suffit de se placer en coordonnées locales pour obtenir le résultat.

On voit donc que le choix d'une section non dégénérée u de \mathcal{M} détermine une filtration $(\mathcal{M}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{M} et un isomorphisme

$$\text{gr } \mathcal{M} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_m / \mathcal{M}_{m-1} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_\Lambda[m].$$

2. Polygone de Newton et symboles associés

Dans ce paragraphe nous allons donner une définition microlocale de la filtration de Kashiwara [9] et en déduire la définition du polygone de Newton d'un opérateur microdifférentiel le long d'une sous-variété lagrangienne.

2.1. FILTRATION ASSOCIÉE A UNE VARIÉTÉ LAGRANGIENNE. — Rappelons tout d'abord la définition de la filtration de Kashiwara [9] :

Soient X une variété analytique complexe, Y une sous-variété (lisse) de X et \mathcal{I}_Y l'idéal de \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes qui s'annulent sur Y .

On définit une filtration $F_Y^k \mathcal{D}_X$ de \mathcal{D}_X en posant pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$F_Y^k \mathcal{D}_X = \{ P \in \mathcal{D}_X \mid \forall P \in \mathbb{N}, P(\mathcal{I}_Y^l) \subset \mathcal{I}_Y^{l-k} \}.$$

(Les notations sont un peu différentes de celles de [9]). Notons

$$\text{gr}_{F_Y}^k \mathcal{D}_X = F_Y^k \mathcal{D}_X / F_Y^{k-1} \mathcal{D}_X \quad \text{et} \quad \text{gr}_{F_Y} \mathcal{D}_X = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}_{F_Y}^k \mathcal{D}_X$$

le gradué de \mathcal{D}_X pour la filtration F_Y .

Il est clair que $\text{gr}_{F_Y}^k \mathcal{D}_X$ opère de $(\mathcal{I}_Y^l / \mathcal{I}_Y^{l-1})$ dans $(\mathcal{I}_Y^{l-k} / \mathcal{I}_Y^{l-k-1})$ pour tout l et que, par conséquent, $\text{gr}_{F_Y} \mathcal{D}_X$ opère sur $\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} (\mathcal{I}_Y^l / \mathcal{I}_Y^{l-1})$.

Soient $T_Y X$ le fibré normal à Y dans X , $\tau : T_Y X \rightarrow Y$ la projection et $\mathcal{O}_{[T_Y X]}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $T_Y X$ qui sont polynomiales dans les fibres de τ . L'image directe $\tau_* \mathcal{O}_{[T_Y X]}$ s'identifie canoniquement à $\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_Y^l / \mathcal{S}_Y^{l-1})$ et donc $\text{gr}_{F_Y} \mathcal{D}_X$ opère sur

$$\tau_* \mathcal{O}_{[T_Y X]}.$$

En fait, on vérifie facilement en se plaçant en coordonnées locales (cf. [18] par exemple) que comme sous-anneau de $\tau_* \mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{[T_Y X]}, \mathcal{O}_{[T_Y X]})$ $\text{gr}_{F_Y} \mathcal{D}_X$ n'est autre que $\tau^* \mathcal{D}_{[T_Y X]}$, image directe du faisceau des opérateurs différentiels sur $T_Y X$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{[T_Y X]}$.

Dans la suite nous allons microlocaliser cette construction en définissant une filtration sur le faisceau $\mathcal{E}_X|_{\Lambda}$ des opérateurs microdifférentiels définis au voisinage d'une sous-variété lagrangienne Λ du fibré cotangent T^*X .

Nous verrons que lorsque $\Lambda = T_Y^* X$ (fibré conormal à Y), on peut retrouver la construction précédente via l'isomorphisme

$$T^*(T_Y^* X) \xrightarrow{\sim} T^*(T_Y X).$$

Soit Λ une sous-variété lagrangienne homogène (lisse) de T^*X . Soient \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonome simple de support Λ et u une section non dégénérée de \mathcal{M} qui l'engendre. Comme au paragraphe 1.1, on pose, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_m = \mathcal{E}_{X, m} u$. (En général, Λ étant donnée, \mathcal{M} et u existent seulement localement sur Λ).

On définit une filtration $F_{\Lambda}^* \mathcal{E}_X$ sur $\mathcal{E}_X|_{\Lambda}$ en posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(2.1.1) \quad F_{\Lambda}^k \mathcal{E}_X = \{ P \in \mathcal{E}_X|_{\Lambda} / \forall m \in \mathbb{Z}, P \mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}_{m+k} \}.$$

PROPOSITION 2.1.1. — La filtration $F_{\Lambda}^* \mathcal{E}_X$ est indépendante du choix du module holonome simple \mathcal{M} de variété caractéristique Λ et du choix de la section non dégénérée u de \mathcal{M} .

Remarque. — Ceci montre en particulier que la filtration $F_{\Lambda}^* \mathcal{E}_X$ est définie globalement sur Λ même si \mathcal{M} n'est défini que localement.

Démonstration de la proposition 2.1.1. — Si u_1 et u_2 sont deux sections non dégénérées d'un même module \mathcal{M} , il existe d'après [24], ch. II, théorème 4.2.5, un opérateur E inversible tel que $E u_1 = u_2$. Si E est d'ordre m_0 on a :

$$E \mathcal{E}_{X, m} = \mathcal{E}_{X, m} E = \mathcal{E}_{X, m+m_0}$$

donc

$$\mathcal{E}_{X, m} u_2 = \mathcal{E}_{X, m+m_0} u_1$$

ce qui montre que la filtration $F_{\Lambda}^* \mathcal{E}_X$ est indépendante du choix de u à \mathcal{M} fixé.

Nous avons vu au paragraphe 1.2 que si Λ est définie au voisinage de la section nulle, on a nécessairement $\Lambda = T_Y^* X$ pour Y sous-variété de X et $\mathcal{M} \simeq \mathcal{C}_Y|_X$. Il n'y a alors qu'un choix de \mathcal{M} (à isomorphisme près) et la filtration $F_{\Lambda}^* \mathcal{E}_X$ est bien définie. Nous pouvons donc dans la suite nous placer en dehors de la section nulle.

Il existe alors une transformation canonique φ qui envoie Λ sur le conormal T_Y^*X à une hypersurface Y de X et une transformation canonique quantifiée $\Phi : (\mathcal{E}_X|_\Lambda) \rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{E}_X|_{T_Y^*X})$.

Φ respecte l'ordre des opérateurs donc si $F_1^* \mathcal{E}_X$ et $F_2^* \mathcal{E}_X$ sont les filtrations associées à deux modules simples \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 de variété caractéristique Λ , $\Phi(F_1^* \mathcal{E}_X)$ et $\Phi(F_2^* \mathcal{E}_X)$ sont les filtrations associées respectivement à $\Phi(\mathcal{M}_1)$ et $\Phi(\mathcal{M}_2)$.

Pour montrer que $F^* \mathcal{E}_X$ est indépendante du choix de \mathcal{M} , on peut donc supposer que $\Lambda = T_Y^*X$ et comme tout module simple \mathcal{M} de variété caractéristique Λ est isomorphe à un module \mathcal{M}_α (§ 1.2), il suffit de vérifier que la filtration $F_\alpha^* \mathcal{E}_X$ définie par \mathcal{M}_α est indépendante de α .

Comme $\Phi_\alpha(F_0^k \mathcal{E}_X) = F_\alpha^k \mathcal{E}_X$, il suffit de vérifier que $\Phi_\alpha(F_0^k \mathcal{E}_X) = F_0^k \mathcal{E}_X$ ce qui se déduit immédiatement de la formule (1.2.1) et du lemme suivant :

LEMME 2.1.2. — Soient Y une sous-variété de X et $\Lambda = T_Y^*X$. Soit $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ un système de coordonnées locales de X dans lequel $Y = \{(x, y) \in X / x = 0\}$ et $\Lambda = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*X / x = 0, \eta = 0\}$.

Un opérateur microdifférentiel P , dont le symbole dans ce système de coordonnées est $\sum P_j(x, y, \xi, \eta)$, appartient à $F_\Lambda^k \mathcal{E}_X$ si et seulement si, pour tout j , P_j s'annule à l'ordre $j-k$ sur Λ .

Démonstration. — Si P est défini près de Λ , chaque fonction P_j peut se développer en série de Taylor sous la forme :

$$P_j(x, y, \xi, \eta) = \sum_{\alpha, \beta} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) x^\alpha \eta^\beta.$$

De la formule 1.1.4 et de l'égalité $\mathcal{C}_{Y|X, m} = \mathcal{E}_{X, m} \delta_{Y|X}$ on déduit que si $u = \sum_{j \leq m} u_j(y, \xi)$ est un élément de $\mathcal{C}_{Y|X, m}$, Pu a pour symbole

$$\sum_{i, j, \alpha, \beta} (-1)^{|\alpha|} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha u_i(y, \xi).$$

$P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) (\partial/\partial y)^\beta (\partial/\partial \xi)^\alpha u_i(y, \xi)$ est homogène de degré $j - |\beta| + i - |\alpha|$ donc $P \in F_\Lambda^k \mathcal{E}_X$ si et seulement si $P_{j, \alpha, \beta} \equiv 0$ pour $j - |\alpha| - |\beta| > k$ ce qui montre le lemme.

Remarquons encore que si on note $\sigma_m(u) = u_m$ le symbole principal de u on a :

$$\sigma_{m+k}(Pu) = \sum_{j - |\alpha| - |\beta| = k} (-1)^{|\alpha|} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha u_i(y, \xi)$$

ce qui peut s'écrire :

$$(2.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{m+k}(Pu) = \hat{P} \sigma_m(u) \\ \text{avec} \\ \hat{P}(y, \xi, D_y, D_\xi) = \sum_{j - |\alpha| - |\beta| = k} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) D_y^\beta (-D_\xi)^\alpha. \end{array} \right.$$

L'action de \mathbb{C}^* sur la variété lagrangienne homogène Λ définit un champ de vecteurs sur Λ , le champ d'Euler e_Λ .

Nous noterons $\mathcal{O}_\Lambda[m] = \{f \in \mathcal{O}_\Lambda / e_\Lambda f = mf\}$, le sous-faisceau de \mathcal{O}_Λ des fonctions holomorphes homogènes de degré m ($m \in \mathbb{Z}$) sur Λ et $\mathcal{O}_{(\Lambda)} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_\Lambda[m]$, de même nous noterons

$\mathcal{D}_\Lambda[m] = \{P \in \mathcal{D}_\Lambda / [e_\Lambda, P] = mP\}$ le sous-faisceau de \mathcal{D}_Λ des opérateurs différentiels sur Λ homogènes de degré m et $\mathcal{D}_{(\Lambda)} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_\Lambda[m]$.

Lorsqu'un module \mathcal{M} de support Λ et un générateur u sont choisis, $\text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X = F_\Lambda^k \mathcal{E}_X / F_\Lambda^{k-1} \mathcal{E}_X$ opère de $\mathcal{M}_m / \mathcal{M}_{m-1} \cong \mathcal{O}_\Lambda[m]$ dans $\mathcal{M}_{m+k} / \mathcal{M}_{m+k-1} \cong \mathcal{O}_\Lambda(m+k)$ et donc $\text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X$ opère sur $\mathcal{O}_{(\Lambda)}$.

Lorsque Λ est de la forme T_Y^*X , on peut choisir $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{Y|X}$ et $u = \delta_{Y|X}$, alors $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ opère canoniquement sur $\mathcal{O}_{(\Lambda)}$ et la formule 2.1.2 montre que comme sous-anneau de $\text{End}(\mathcal{O}_{(\Lambda)})$, $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ s'identifie à $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$.

Dans le cas général, l'isomorphisme $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{(\Lambda)}$ est défini à un automorphisme intérieur de $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ près. (On se ramène au cas précédent par transformation canonique quantifiée).

Nous avons donc la proposition :

PROPOSITION 2.1.3. — (i) Le module \mathcal{M} et son générateur u étant fixés, $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ opère sur $\mathcal{O}_{(\Lambda)}$ et s'identifie ainsi à $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$. ($\text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X$ s'identifiant à $\mathcal{D}_\Lambda[k]$).

(ii) L'isomorphisme $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{D}_{(\Lambda)}$ est indépendant des choix de \mathcal{M} et u modulo un automorphisme intérieur de $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ (i.e. une application $P \rightarrow f^{-1} \circ P \circ f$ avec f holomorphe homogène).

En particulier le symbole principal de l'image d'un opérateur P de $F_\Lambda^k \mathcal{E}_X$ par $F_\Lambda^k \mathcal{E}_X \rightarrow \text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{D}_{(\Lambda)}[k]$ est indépendant des choix de \mathcal{M} et de u .

DÉFINITION 2.1.4. — Soit P un opérateur de $\mathcal{E}_X|_\Lambda$. On note $\sigma_\Lambda^{(\infty)}(P)$ le symbole principal de l'image P par $F_\Lambda^k \mathcal{E}_X \rightarrow \text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{D}_{(\Lambda)}[k]$ pour $k \in \mathbb{Z}$ tel que P soit un opérateur de $F_\Lambda^k \mathcal{E}_X$ mais non de $F_\Lambda^{k-1} \mathcal{E}_X$.

La méthode de définition de la filtration F_Λ montre immédiatement qu'elle est invariante par transformation canonique quantifiée :

COROLLAIRE 2.1.4. — Soit φ une transformation canonique d'un ouvert de T^*X_1 dans un ouvert de T^*X_2 qui envoie une sous-variété lagrangienne homogène Λ_1 de T^*X_1 sur Λ_2 dans T^*X_2 .

Soit $\tilde{\varphi} : T^*\Lambda_1 \rightarrow T^*\Lambda_2$ l'application cotangente à φ et soit $\Phi : \mathcal{E}_{X_1} \rightarrow \varphi^{-1} \mathcal{E}_{X_2}$ une transformation canonique quantifiée associée à φ .

Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\Phi(F_{\Lambda_1}^k \mathcal{E}_{X_1}) = \varphi^{-1} F_{\Lambda_2}^k \mathcal{E}_{X_2}$ et pour tout $P \in \mathcal{E}_{X_1}$ on a :

$$\sigma_{\Lambda_2}^{(\infty)}(\Phi(P)) = \sigma_{\Lambda_1}^{(\infty)}(P) \circ \tilde{\varphi}^{-1}.$$

Remarque 2.1.5. — Si $N_\Lambda(P)$ désigne le polygône de Newton de P le long de Λ au sens de [15], §3, $F_\Lambda^k \mathcal{E}_X$ est le sous-faisceau de $\mathcal{E}_X|_\Lambda$ des opérateurs P tels que $N_\Lambda(P) \subset \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \mu \leq k\}$.

En effet $F_{\Lambda}^k \mathcal{E}_X$ et $N_{\Lambda}(P)$ sont invariants par transformation canonique quantifiée donc il suffit de vérifier ce résultat pour $\Lambda = T_Y^* X$ et dans ce cas de considérer les calculs explicites de la démonstration du lemme 2.1.2.

Remarque 2.1.6. — En dehors de la section nulle de $T^* X$ on peut encore définir la filtration F_{Λ} suivant la méthode de [12] et [22] :

On pose $\mathcal{J}_{\Lambda} = \{P \in \mathcal{E}_X(1) \mid \Lambda / \sigma_1(P) \mid_{\Lambda} \equiv 0\}$ et \mathcal{E}_{Λ} désigne la sous-algèbre de $\mathcal{E}_X \mid_{\Lambda}$ engendrée par \mathcal{J}_{Λ} .

Alors $F_{\Lambda}^0 \mathcal{E}_X = \mathcal{E}_{\Lambda}$ et $F_{\Lambda}^k \mathcal{E}_X = \mathcal{E}_X(k) \mathcal{E}_{\Lambda}$.

Mais cette définition ne donne pas l'identification $\text{gr } \mathcal{E}_X \simeq \mathcal{D}_{(\Lambda)}$.

Remarque 2.1.7. — Si Y est une sous-variété de X on a un isomorphisme

$T^*(T_Y^* X) \xrightarrow{\sim} T^*(T_Y X)$ auquel correspond un isomorphisme $\mathcal{D}_{[T_Y^* X]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{[T_Y X]}$ (donné par la transformation de Fourier dans les fibres de $T_Y^* X \rightarrow Y$).

Au voisinage de la section nulle de $\Lambda = T_Y^* X$, la filtration $F_{\Lambda}^k \mathcal{E}_X$ s'identifie à la filtration

$F_Y^k \mathcal{D}_X$ de Kashiwara et via les isomorphismes ci-dessus l'isomorphisme $\text{gr}_{F_Y} \mathcal{D}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{[T_Y X]}$ s'identifie à l'isomorphisme de la proposition 2.1.3.

2.2. POLYGÔNE DE NEWTON D'UN OPÉRATEUR. — Étant donnée une sous-variété lagrangienne Λ de $T^* X$, $\mathcal{E}_X \mid_{\Lambda}$ est muni de deux filtrations, la filtration $F_{\Lambda} \mathcal{E}_X$ du paragraphe précédent et la filtration usuelle par l'ordre des opérateurs que nous avons notée $(\mathcal{E}_X, m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

DÉFINITION 2.2.1. — Soit P un opérateur microdifférentiel défini au voisinage de la variété lagrangienne Λ .

On définit un sous-ensemble $S_{\Lambda}(P)$ de \mathbb{R}^2 par la propriété suivante :

$$(\lambda, \mu) \notin S_{\Lambda}(P) \Leftrightarrow \exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \quad k < \mu, l < \lambda + \mu, \quad P \in F_{\Lambda}^k \mathcal{E}_X + \mathcal{E}_{X, l}.$$

De la remarque 2.1.5 on déduit immédiatement :

PROPOSITION 2.2.2. — Le polygône de Newton $N_{\Lambda}(P)$ ([15], §3) est l'enveloppe convexe de $S_{\Lambda}(P)$.

Si μ_0 est le plus petit entier tel que $P \in F_{\Lambda}^{\mu_0} \mathcal{E}_X$ et m_1 l'ordre de P (on a $\mu_0 \leq m_1$) alors le bord de $S_{\Lambda}(P)$ est la réunion de deux demi-droites $\Delta_{\infty} = \{\mu = \mu_0, \lambda < \lambda_0\}$ et $\Delta_1 = \{\lambda + \mu = m_1, \lambda > \lambda_1\}$ et d'un nombre fini de segments compacts. On appellera « *bord distingué de $S_{\Lambda}(P)$* » la réunion de ceux de ces segments compacts qui ne sont parallèles ni à Δ_1 ni à Δ_{∞} , c'est encore l'ensemble des points (λ_0, μ_0) de $S_{\Lambda}(P)$ tels que :

$$S_{\Lambda}(P) \cap \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda \geq \lambda_0, \lambda + \mu \geq \lambda_0 + \mu_0\} = \{(\lambda_0, \mu_0)\}.$$

(En fait les seuls points intéressants du bord distingué de $S_{\Lambda}(P)$ sont les points de coordonnées entières).

D'après la proposition 2.1.3, $\text{gr}_{F_{\Lambda}}^k \mathcal{E}_X$ est isomorphe (non canoniquement) à $\mathcal{D}_{\Lambda}[k]$ et si $Q \in \text{gr}_{F_{\Lambda}}^k \mathcal{E}_X$ l'ordre de son image dans $\mathcal{D}_{\Lambda}[k]$ (pour l'ordre usuel des opérateurs différentiels sur Λ) est indépendant du choix de l'isomorphisme.

Nous noterons $\text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X(m)$ le sous-faisceau de $\text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X$ des éléments dont l'image dans $\mathcal{D}_\Lambda[k]$ est d'ordre $\leq m-k$.

LEMME 2.2.3. — *L'application canonique $F_\Lambda^k \mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,m} \rightarrow \text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X(m)$ est surjective.*

Démonstration. — On peut se ramener à $\Lambda = T_Y^* X$ par une transformation canonique quantifiée et il suffit alors d'utiliser les calculs de la démonstration du lemme 2.1.2.

Si $Q \in F_\Lambda^k \mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,m}$, nous noterons $\hat{\sigma}_k(Q)$ son image dans $\text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X$ et $\sigma_{m-k}(\hat{\sigma}_k(Q))$ le symbole principal d'ordre $m-k$ de $\hat{\sigma}_k(Q)$ (ou plutôt de l'une de ses images dans $\mathcal{D}_\Lambda[k]$).

Si $\hat{\sigma}_k(Q)$ est exactement d'ordre $m-k$ on a $\sigma_{m-k}(\hat{\sigma}_k(Q)) = \sigma_\Lambda^{(\infty)}(Q)$ par définition, dans le cas contraire $\sigma_{m-k}(\hat{\sigma}_k(Q)) \equiv 0$ et le lemme 2.2.3 montre que le point $(m-k, k)$ n'appartient pas à $S_\Lambda(Q)$.

PROPOSITION 2.2.4. — *L'intersection de \mathbb{Z}^2 et du bord distingué de $S_\Lambda(P)$ est l'ensemble des points (λ, μ) de \mathbb{Z}^2 tels qu'il existe $Q \in F_\Lambda^\mu \mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,\lambda+\mu}$ avec :*

- (a) $P - Q \in F_\Lambda^{\mu-1} \mathcal{E}_X + \mathcal{E}_{X,\lambda+\mu-1}$ [i. e. $(\lambda, \mu) \notin S_\Lambda(P - Q)$].
- (b) $\sigma_{\lambda+\mu}(\hat{\sigma}_\mu(Q)) \neq 0$.

Démonstration. — Supposons que (λ, μ) appartiennent au bord distingué de $S_\Lambda(P)$. Par définition, cela signifie que les points $(\lambda+1, \mu)$ et $(\lambda-1, \mu+1)$ n'appartiennent pas à $S_\Lambda(P)$ donc il existe des opérateurs Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 tels que :

- 1. $P = Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$.
- 2. $Q_1 \in F_\Lambda^{\mu-1} \mathcal{E}_X$ et $Q_2 \in \mathcal{E}_{X,\lambda+\mu}$.
- 3. $Q_3 \in F_\Lambda^\mu \mathcal{E}_X$ et $Q_4 \in \mathcal{E}_{X,\lambda+\mu-1}$.

Alors $Q_1 - Q_3 = Q_4 - Q_2 \in F_\Lambda^\mu \mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,\lambda+\mu}$ et $P = (Q_3 - Q_1) + (Q_1 + Q_4)$ est la décomposition cherchée.

Si $\sigma_{\lambda+\mu}(\hat{\sigma}_\mu(Q_3 - Q_1))$ était nul le point (λ, μ) n'appartiendrait pas à $S_\Lambda(P)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

La réciproque est évidente.

La fonction $\sigma_\Lambda^{(\infty)}(Q) = \sigma_\lambda(\hat{\sigma}_\mu(Q))$ est donc indépendante du choix de Q .

DÉFINITION 2.2.5. — *Si (i, j) est un point de \mathbb{Z}^2 tel que $(i, j-i)$ appartiennent au bord distingué de $S_\Lambda(P)$, on note $\sigma_{(i,j)}(P)$ la fonction $\sigma^{(\infty)}(Q)$ pour un opérateur $Q \in F_\Lambda^{j-i} \mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_{X,j}$ tel que $P - Q \in F_\Lambda^{j-i-1} \mathcal{E}_X + \mathcal{E}_{X,j-1}$.*

Comme sous-variété homogène de T^*X , Λ est muni d'une action de \mathbb{C}^* qui induit une action H_1 de \mathbb{C}^* sur $T^*\Lambda$ distincte de l'action canonique H_0 de \mathbb{C}^* sur les fibres de $T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$. (Voir §.4.3 ci-dessous pour plus de détails.)

Par exemple si $\Lambda = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*X / x=0, \eta=0\}$, le fibré $T^*\Lambda$ est muni des coordonnées (y, ξ, y^*, ξ^*) et on a :

$$H_1(\lambda, (y, \xi, y^*, \xi^*)) = (y, \lambda\xi, \lambda y^*, \xi^*)$$

$$H_0(\lambda, (y, \xi, y^*, \xi^*)) = (y, \xi, \lambda y^*, \lambda \xi^*).$$

Remarquons que la fonction $\sigma_{m-k}(\hat{\sigma}_k(Q))$ est bihomogène de degré $(m-k, m)$ pour (H_0, H_1) .

COROLLAIRE 2.2.6. — 1. $\sigma_{(i,j)}(P)$ est une fonction holomorphe bihomogène de degré (i, j) pour (H_0, H_1) sur $T^*\Lambda$.

2. $\sigma_{(i,j)}(P)$ est invariante par transformation canonique quantifiée i.e. avec les notations du corollaire 2.1.4 on a :

$$\sigma_{(i,j)}(\Phi(P)) = \sigma_{(i,j)}(P) \circ \tilde{\varphi}^{-1}.$$

3. Si P et Q sont deux opérateurs de \mathcal{E}_X , si $(i, j-i)$ [resp. $(k, l-k)$] appartient au bord distingué de $S_\Lambda(P)$ [resp. de $S_\Lambda(Q)$] et si $(i+k, j+l-i-k)$ appartient au bord distingué de $S_\Lambda(PQ)$ on a :

$$\sigma_{(i+k, j+l)}(PQ) = \sigma_{(i,j)}(P) \sigma_{(k,l)}(Q).$$

Lorsque $\Lambda = T_Y^*X$ on peut calculer facilement les symboles $\sigma_{(i,j)}$ dans un système de coordonnées :

Soient

$$Y = \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \in X / x = 0\}$$

et

$$\Lambda = T_Y^*X = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*X / x = 0, \eta = 0\}.$$

Si $P = \sum_{j \leq m} P_j(x, y, \xi, \eta)$ est un opérateur microdifférentiel défini au voisinage de Λ on développe (comme dans la démonstration du lemme 2.1.2) chaque fonction P_j en série de Taylor le long de Λ :

$$P_j(x, y, \xi, \eta) = \sum_{\alpha, \beta} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) x^\alpha \eta^\beta.$$

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ posons :

$$P_{ij}(y, \xi, y^*, \xi^*) = \sum_{|\alpha| + |\beta| = i} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) (-\xi^*)^\alpha y^{*\beta}.$$

P_{ij} est considéré comme une fonction sur $T^*\Lambda$ muni des coordonnées (y, ξ, y^*, ξ^*) .

Comme nous l'avons vu (lemme 2.1.2), $P \in F_\Lambda^u \mathcal{E}_X$ si $P_{ij} \equiv 0$ pour $j-i > \mu$ et $P \in \mathcal{E}_{X, m}$ si $P_{ij} \equiv 0$ pour $j > m$.

Si $S = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2 / P_{\lambda, \lambda+\mu} \neq 0\}$, $S_\Lambda(P)$ est la réunion des ensembles $A_{(\lambda, \mu)} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / v \leq \mu, u+v \leq \lambda+\mu\}$ pour $(\lambda, \mu) \in S$.

Si $P \in F_\Lambda^k \mathcal{E}_X \cap \mathcal{E}_X(m)$ on a :

$$\hat{\sigma}_k(P) = \sum_{j-i=k} P_{ij}(y, \xi, D_y, D_\xi)$$

et donc $\sigma_{m-k}(\hat{\sigma}_k(P)) = P_{m-k}$.

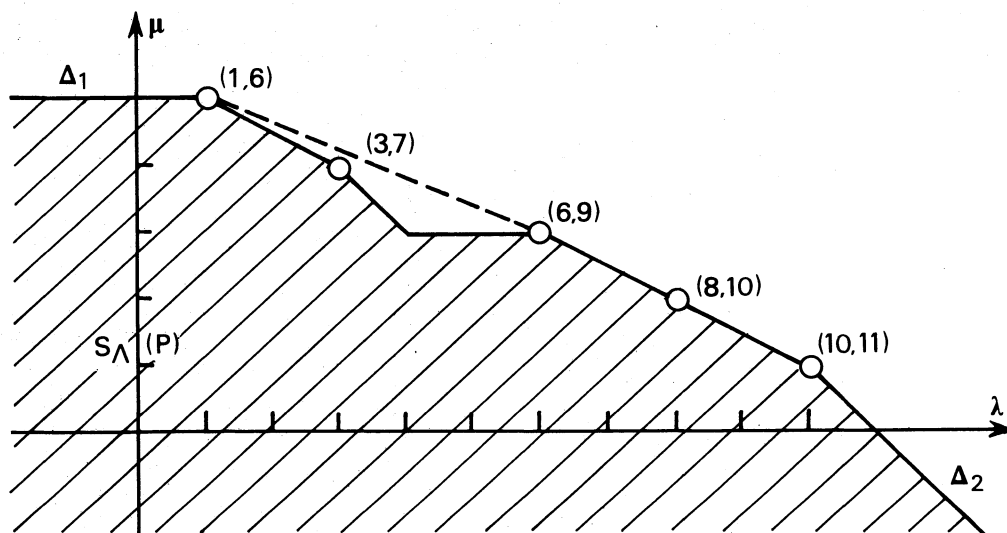
On déduit que pour tout (i, j) appartenant au bord distingué de $S_\Lambda(P)$ on a $\sigma_{(i,j)}(P) = P_{ij}$.

Par contre lorsque (i, j) n'appartient pas au bord distingué de $S_\Lambda(P)$ mais appartient à $S_\Lambda(P)$, les fonctions P_{ij} que nous avons définies ci-dessus ne sont plus invariantes par changement de coordonnées ou par transformation canonique et ne peuvent donc être définies de manière intrinsèque.

Ces calculs montrent encore que lorsque (i, j) est un point du bord de $N_\Lambda(P)$ [qui est l'enveloppe convexe de $S_\Lambda(P)$], le symbole $\sigma_{(i,j)}(P)$ n'est autre que la fonction P_{ij} que nous avons définie dans [15] (cf. aussi [14]).

Nous renvoyons à [15], §. 3, pour des calculs de $N_\Lambda(P)$ et des fonctions $\sigma_{(i,j)}(P)$ lorsque Λ n'est plus de la forme T^*X .

Dessignons un exemple :



(Les points marqués \odot sont les points du bord distingué de $S_\Lambda(P)$, le bord de $N_\Lambda(P)$ est indiqué en pointillé.)

Ce dessin peut représenter par exemple le polygône de Newton le long de $\Lambda = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*\mathbb{C}^2/x=0, \eta=0\}$ de l'opérateur

$$P(x, y, D_x, D_y) = D_x D_y^{10} + x^6 D_x^2 + y^2 D_y D_x^5 + x^3 D_x^7.$$

On a alors $\sigma_{(10,11)}(P) = \xi(y^*)^{10}$; $\sigma_{(6,9)}(P) = \xi^9(\xi^*)^6$; $\sigma_{(1,6)}(P) = y^2 \xi^5 y^*$; $\sigma_{(3,7)}(P) = x^3 \xi^7$; $\sigma_{(8,10)}(P) = 0$.

Dans la suite nous nous intéresserons essentiellement aux sommets du polygône de Newton $N_\Lambda(P)$.

Soit r un nombre rationnel, $1 \leq r \leq +\infty$, et soit D_r la droite d'appui de $S_\Lambda(P)$ de pente $-1/r$. (Pour $r=1$ et $r=\infty$, D_r est la droite qui contient Δ_r défini plus haut).

DÉFINITION 2.2.7. — 1. Pour $1 < r < \infty$, on note $\sigma_\Lambda^{(r)}(P)$ [resp. $\sigma_\Lambda^{(r)}(P)$] la fonction $\sigma_{(i,j)}(P)$ où $(i, j-i)$ est le point du segment $S_\Lambda(P) \cap D_r$ pour lequel i est maximum (resp. minimum).

2. Si $r=1$, $\sigma_{\Lambda}^{(1)}(P) = \sigma_{\Lambda}^{\{1\}}(P)$ désigne la fonction $\sigma_{(i,j)}(P)$ pour laquelle $(i, j-i)$ est l'extrémité de la demi-droite $\Delta_1 = D_1 \cap S_{\Lambda}(P)$ (donc j est l'ordre de P et i minimal tel que $P_{i,j} \neq 0$).

3. Si $r=\infty$, $\sigma_{\Lambda}^{(\infty)}(P) = \sigma_{\Lambda}^{\{\infty\}}(P)$ désigne la fonction $\sigma_{(i,j)}(P)$ pour laquelle $(i, j-i)$ est l'extrémité de la demi-droite $\Delta_{\infty} = D_{\infty} \cap S_{\Lambda}(P)$, c'est-à-dire la fonction $\sigma^{(\infty)}(P)$ définie plus haut.

Remarquons qu'il n'y a qu'un nombre fini de r pour lesquels $\sigma^{(r)}(P) \neq \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P)$, ce sont les pentes de $N_{\Lambda}(P)$.

Pour tout r et tous P, Q dans $\mathcal{E}_X|_{\Lambda}$ on a toujours :

$$\sigma_{\Lambda}^{(r)}(PQ) = \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P) \sigma_{\Lambda}^{(r)}(Q) \quad \text{et} \quad \sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(PQ) = \sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P) \sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(Q).$$

Remarque 2.2.8. — Dans [15], nous avons défini des symboles (r, s) pour $1 \leq s \leq r \leq +\infty$ de la manière suivante :

→ si $r=s$, $\sigma_{\Lambda}^{(r,s)}(P) = \sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P)$;

→ si $s < r$, $\sigma_{\Lambda}^{(r,s)}(P) = \sigma_{(i,j)}(P)$ où $(i, j-i)$ est l'intersection de D_r et D_s (avec $\sigma_{\Lambda}^{(r,s)}(P) = 0$ si $D_r \cap D_s$ n'est pas à coordonnées entières).

Exemple. — $X = \mathbb{C}$, $Y = \{0\}$, $\Lambda = T_{\{0\}}^* \mathbb{C}$, $P = x^2 D_x + 1$ (opérateur d'Euler).

→ si $1 \leq r < 2$, $\sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P) = \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P) = x^2 x^*$;

→ si $r=2$, $\sigma_{\Lambda}^{\{2\}}(P) = 1$; $\sigma_{\Lambda}^{(2)}(P) = x^2 x^*$;

→ si $2 < r \leq +\infty$, $\sigma_{\Lambda}^{\{r\}}(P) = \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P) = 1$.

3. Cycles microcaractéristiques

Dans [15], nous avons défini les variétés microcaractéristiques d'un \mathcal{E}_X -module cohérent le long d'une variété lagrangienne. Nous allons ici définir des variétés analogues et leur associer des cycles analytiques positifs.

3.1. VARIÉTÉ MICROCARACTÉRISTIQUE FORMELLE. — (Pour les notions de filtrations « noethériennes », « zariskiennes » et de « bonnes filtrations », nous renvoyons à [25]).

Suivant les notations du paragraphe 2, X est une variété analytique complexe, Λ une sous-variété lagrangienne homogène de T^*X ; le faisceau $\mathcal{E}_X|_{\Lambda}$ est muni de la filtration F_{Λ} dont le gradué $\text{gr}_{F_{\Lambda}} \mathcal{E}_X$ est localement isomorphe à $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ donc est un faisceau d'anneaux cohérent et noethérien.

PROPOSITION 3.1.1. — (i) Pour tout point θ de Λ , la filtration $(F_{\Lambda}^k \mathcal{E}_X)_{\theta}$ de $\mathcal{E}_{X,\theta}$ est noethérienne.

(ii) Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent muni d'une bonne $(F_{\Lambda}^k \mathcal{E}_X)$ -filtration, le gradué associé $\text{gr}_{F_{\Lambda}} \mathcal{M} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_{\Lambda}^k \mathcal{M} / F_{\Lambda}^{k+1} \mathcal{M}$ est un $(\text{gr}_{F_{\Lambda}} \mathcal{E}_X)$ -module cohérent.

Cette proposition est démontrée dans [15] dans le cadre des opérateurs 2-microdifférentiels. D'autre part, elle est démontrée pour les points de la section nulle de Λ dans [18] et on peut refaire ici exactement la même démonstration.

D'après la proposition 2.1.3, $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ est localement isomorphe à $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ et la filtration $G'(\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X)$ induite par la filtration usuelle de $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ (filtration par l'ordre des opérateurs différentiels) est indépendante du choix de l'isomorphisme. De plus l'isomorphisme

$$\text{gr}_G(\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X) \xrightarrow{\sim} \text{gr } \mathcal{D}_{(\Lambda)} \text{ est indépendant du choix de l'isomorphisme } \text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{(\Lambda)}.$$

L'application qui a un opérateur P de $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ associe son symbole principal définit un isomorphisme de $\text{gr } \mathcal{D}_{(\Lambda)}$ sur le faisceau $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ image directe par $\pi : T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$ du faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ qui sont polynomiales dans les fibres de π à coefficients dans $\mathcal{O}_{(\Lambda)}$.

(Si Λ est muni de coordonnées locales $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ et si $(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$ sont les coordonnées induites sur $T^*\Lambda$, alors $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]} \simeq \mathcal{O}_{(\Lambda)}[\theta^*, \dots, \theta_n^*]$).

Le faisceau $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ est donc muni d'une filtration canonique $G'(\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X)$ et le gradué associé $\text{gr}_G(\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X)$ s'identifie à $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$.

Localement $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ comme faisceau d'anneaux filtré, donc la filtration $G'(\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X)$ possède toutes les propriétés de la filtration usuelle de $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$.

En particulier cette filtration est noethérienne et si \mathcal{N} est un $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ -module cohérent muni d'une bonne filtration $G' \mathcal{N}$, le gradué associé gr_G est cohérent.

Par définition le cycle caractéristique d'un $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ -module \mathcal{N} est le cycle analytique défini par le $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent $\pi^{-1} \text{gr } \mathcal{N}$, gradué associé à une bonne filtration de \mathcal{N} . Ce cycle est indépendant du choix de la bonne filtration (cf. [25] par exemple).

De même, si \mathcal{N} est un $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ -module cohérent, pour toute bonne filtration $G' \mathcal{N}$, $\pi^{-1} \text{gr}_G \mathcal{N}$ est un $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent et on peut donc lui associer un cycle analytique. Ce cycle analytique est indépendant du choix de la bonne filtration (nous l'appellerons le cycle caractéristique de \mathcal{N}). En effet, si W est un sous-ensemble analytique de $T^*\Lambda$, l'application qui a un $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent dont le support est contenu dans W associe sa multiplicité le long de Λ est additive et donc d'après ([25], ch. II, prop. 1.3.1) l'application qui à \mathcal{N} associe la multiplicité de $\text{gr}_G \mathcal{N}$ le long de W est indépendante de la bonne filtration et additive.

Appliquant à nouveau le même raisonnement, on voit que si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent, le cycle caractéristique de $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M}$ est indépendant du choix de la bonne $F_\Lambda \mathcal{E}_X$ -filtration sur \mathcal{M} .

DÉFINITION 3.1.2. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module cohérent défini près de Λ . Le cycle microcaractéristique formel de \mathcal{M} le long de Λ , que l'on note $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$ est le cycle caractéristique de $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M}$ pour une bonne $F_\Lambda \mathcal{E}_X$ -filtration $F_\Lambda \mathcal{M}$ de \mathcal{M} .

La variété microcaractéristique formelle de \mathcal{M} le long de Λ est le support de $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$ et sera notée $\text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$.

PROPOSITION 3.1.3. — 1. $\text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique involutif bihomogène de $T^*\Lambda$.

2. $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$ est un cycle analytique positif.

3. Si $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de \mathcal{E}_X -modules cohérents et si $\text{codim}_{T^*\Lambda} \text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}) \geq d$ sur un ouvert U de $T^*\Lambda$ on a sur cet ouvert U :

$$[\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})]_d = [\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}')]_d + [\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}'')]_d.$$

($[\widetilde{\text{C}}]_d$ désigne la partie de degré d du cycle $\widetilde{\text{C}}$).

On a donc $\text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}') \cup \text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}'')$.

4. Si \mathcal{I} est un idéal cohérent de \mathcal{E}_X et $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{I}$ on a :

$$\text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}) = \{ \theta \in T^*\Lambda / \forall P \in \mathcal{I} \sigma_\Lambda^{(\infty)}(P)(\theta) = 0 \}.$$

Démonstration. — Localement $\text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$ est la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ -module et est donc un sous-ensemble analytique involutif de $T^*\Lambda$ ([24], ch. II, th. 5.3.2).

Les deux actions de \mathbb{C}^* sur $T^*\Lambda$ ont été définies au paragraphe 2.2. La première, H_1 , provient de l'action de \mathbb{C}^* sur Λ et donc la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ -module est homogène pour H_1 . La deuxième, H_0 , est celle de la structure de fibré cotangent de $T^*\Lambda$ et donc la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ -module (ou d'un \mathcal{D}_Λ -module) est homogène pour H_0 .

Remarquons que la variété $\text{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$ est la variété que nous notions $\text{Ch}_\Lambda^2(\infty, \infty)(\mathcal{M})$ dans [15], et que par ailleurs T. Monteiro a défini cette même variété dans [22].

3.2. VARIÉTÉS MICROCARACTÉRISTIQUES DE TYPE r . — Soit Λ une sous-variété lagrangienne homogène de T^*X et r un nombre rationnel tel que $1 < r < +\infty$.

Soient p et q deux entiers positifs premiers entre eux tels que $r = p/q$.

DÉFINITION 3.2.1. — La filtration $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{E}_X$ de $\mathcal{E}_X|_\Lambda$ est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_{\Lambda, r}^k \mathcal{E}_X = \{ P \in \mathcal{E}_X|_\Lambda / N_\Lambda(P) \subset \{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / p\mu + q\lambda \leq k \} \}.$$

Notons $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ homogènes de degré j pour H_1 et polynomiales homogènes de degré i suivant les fibres de $T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$ [de sorte que $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]} = \bigoplus_{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$].

Par exemple lorsque $\Lambda = \{ (x, y, \xi, \eta) \in T^*X / x=0, \eta=0 \}$, alors dans les coordonnées (y, ξ, y^*, ξ^*) les fonctions de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$ s'écrivent $\sum_{|\alpha|+|\beta|=i} f_{\alpha\beta}(y, \xi) y^{*\alpha} \xi^{*\beta}$ avec $f_{\alpha\beta}$ holomorphe sur Λ et homogène de degré $j - |\alpha|$ en ξ .

D'après le corollaire 2.2.6, $\text{gr}_{F_r}^k \mathcal{E}_X = F_{\Lambda, r}^k \mathcal{E}_X / F_{\Lambda, r}^{k-1} \mathcal{E}_X$ s'identifie canoniquement à $\bigoplus_{p(j-i)+qi=k} \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$ et $\text{gr}_{F_r}^k \mathcal{E}_X = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}_{F_r}^k \mathcal{E}_X$ s'identifie à $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$, le produit des opérateurs dans \mathcal{E}_X induisant sur $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ le produit ordinaire des fonctions.

PROPOSITION 3.2.2. — (i) La filtration $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{E}_X$ est noethérienne pour tout $r \in]1, +\infty[$.

(ii) Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent muni d'une bonne $(F_{\Lambda, r}^* \mathcal{E}_X)$ -filtration, le gradué associé $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ est un $(\text{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X)$ -module cohérent.

Démonstration. — Comme la proposition 3.1.1, cette proposition est la conséquence des résultats de [15] mais on peut aussi la démontrer directement suivant les méthodes de [18].

Tout d'abord on peut se ramener à $\Lambda = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*X/x=0, \eta=0\}$ par une transformation canonique quantifiée et d'après [25], chap. II, proposition 1.1.7, il suffit de montrer que pour tout $\theta \in \Lambda$, l'anneau de Rees $A_\theta = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_{\Lambda, r}^k \mathcal{E}_{X, \theta} T^k$ est noethérien.

D'après le lemme 2.1.2, les éléments de A_θ sont représentés par des séries

$$P(T) = \sum_{\substack{pj + (q-p)i \leq k \\ |\alpha| + |\beta| = i}} p_{j, \alpha, \beta}^k(y, \xi) x^\alpha \eta^\beta T^k.$$

Dans cette série, la somme est finie en k , $p_{j, \alpha, \beta}^k$ est homogène de degré $j - |\beta|$ en ξ et pour chaque k fixé la série $\sum p_{j, \alpha, \beta}^k(y, \xi) x^\alpha \eta^\beta$ est le symbole d'un élément de \mathcal{E}_X .

Après le changement de variable $\tilde{x} = T^{q-p}x$ (et $\tilde{\xi} = T^{p-q}\xi$), $P(T)$ devient en posant $m = k + (q-p)(j-i)$:

$$P(T) = \sum_{qj \leq m} p_{j, \alpha, \beta}^k(y, \tilde{\xi}) \tilde{x}^\alpha \eta^\beta T^m$$

ce qui peut se réécrire, en sommant en (α, β) :

$$P(T) = \sum_{qj \leq m} p_j^m(y, \tilde{x}, \eta, \tilde{\xi}) T^m$$

où, à m fixé, $\sum_{qj \leq m} p_j^m(y, \tilde{x}, \eta, \tilde{\xi})$ est le symbole d'un opérateur microdifférentiel.

Si $q=1$, l'anneau A_θ est donc isomorphe à l'anneau de Rees $B_{\theta, m}^{\sim} T^m$ associé à la filtration usuelle de $\mathcal{E}_{X, \theta}$. Comme cette filtration est noethérienne ([24], chap. II ou [25], chap. II, proposition 2.2.1) d'après [25], chap. II, proposition 1.1.7, B_θ^{\sim} (et donc A_θ) est un anneau noethérien.

Si $q>1$ on a encore le même résultat à condition de remplacer la filtration usuelle de \mathcal{E}_X par la suivante :

$$\tilde{F}^m \mathcal{E}_{X, \theta} = \mathcal{E}_{X, \theta, [m/q]} \quad (\text{avec } [m/q] = \text{partie entière de } m/q).$$

Puisque $\text{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X \simeq \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$, si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent muni d'une bonne $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{E}_X$ -filtration, $\pi^{-1} \text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent et d'après la proposition 1.3.1, chap. II de [25] le cycle analytique associé à ce $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module est indépendant du choix de la bonne filtration.

On notera $\widetilde{\sum}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ ce cycle analytique et $\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ son support.

$\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique de $T^*\Lambda$ qui est homogène pour l'action $H_r(\lambda) = H_1(\lambda') \circ H_0(\lambda^{1-r})$ de \mathbb{C}^* sur $T^*\Lambda$ (H_1 et H_0 sont les actions définies au paragraphe 2.2.), mais en général $\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ n'est pas homogène dans les fibres de $T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$ c'est-à-dire pour H_0 contrairement aux sous-ensembles que nous allons définir ci-dessous. Remarquons encore que pour $X = \mathbb{C}$ et $\Lambda = T_{\{0\}}^* \mathbb{C}$, la filtration $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{D}_X$ est la filtration $F. \mathcal{D}$ de Malgrange [21].

Puisque $\mathrm{gr}_{F_r}^k \mathcal{E}_X$ s'identifie pour tout k à $\bigoplus_{pj+(q-p)i=k} \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$ on peut définir deux filtrations sur $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X$ en posant :

$$(3.2.1) \quad \forall l \in \mathbb{Z}, \quad G_+^l \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X = \bigoplus_{j-i \leq l} \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$$

$$(3.2.2) \quad \forall l \in \mathbb{Z}, \quad G_-^l \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X = \bigoplus_{j-i \geq l} \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j).$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ces filtrations induisent des filtrations G_+^k et G_-^k sur $\mathrm{gr}_{F_r}^k \mathcal{E}_X$ et on a :

$$\mathrm{gr}_{G_{\pm}^k}^l \mathrm{gr}_{F_r}^k \mathcal{E}_X = \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$$

si il existe $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $j-i=l$, $pj+(q-p)i=k$.

$$=0 \quad \text{sinon.}$$

PROPOSITION 3.2.3. — 1. La filtration $G_+^k(\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X)$ est croissante noethérienne.

2. La filtration $G_-^k(\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X)$ est décroissante noethérienne.

3. Si \mathcal{N} est un $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X$ -module cohérent muni d'une bonne $G_+^k(\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X)$ -filtration [resp. $G_-^k(\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X)$ -filtration], le gradué associé $\mathrm{gr}_{G_{\pm}^k} \mathcal{N}$ est un $\mathrm{gr}_{G_{\pm}^k} \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X = \bigoplus \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$ -module cohérent.

Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module cohérent défini au voisinage de Λ . Choisissons une bonne $F_{\Lambda, r} \mathcal{E}_X$ -filtration $F_r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} et notons $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ le $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X$ -module cohérent associé; choisissons à présent une bonne $G_{\pm}^k(\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X)$ -filtration, $G_{\pm}^k(\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M})$, le gradué associé $\mathrm{gr}_{G_{\pm}^k} \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ est un $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent.

Comme précédemment la proposition 1.3.1, chap. II, de [25] montre que le cycle analytique associé à $\pi^{-1} \mathrm{gr}_{G_{\pm}^k} \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ est indépendant des choix des bonnes filtrations $F_r \mathcal{M}$ et $G_{\pm}^k(\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M})$.

DÉFINITION 3.2.4. — Pour tout r rationnel tel que $1 < r < +\infty$, on définit les cycles microcaractéristiques de type (r) et de type $\{r\}$ de \mathcal{M} le long de Λ par :

$\widetilde{\mathrm{Ch}}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ est le cycle analytique associé au $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent $\pi^{-1} \mathrm{gr}_{G_-} \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M}$.

$\widetilde{\mathrm{Ch}}_{\Lambda}^{\{r\}}(\mathcal{M})$ est le cycle analytique associé au $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent $\pi^{-1} \mathrm{gr}_{G_+} \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M}$.

La variété microcaractéristique de type (r) , $\mathrm{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ [resp. de type $\{r\}$, $\mathrm{Ch}_{\Lambda}^{\{r\}}(\mathcal{M})$], de \mathcal{M} le long de Λ est le support de $\widetilde{\mathrm{Ch}}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ [resp. de $\widetilde{\mathrm{Ch}}_{\Lambda}^{\{r\}}(\mathcal{M})$].

Il nous reste à étudier le cas $r=1$. Dans ce cas la filtration $F_1 \mathcal{E}_X$ est la filtration usuelle par l'ordre des opérateurs :

$$\begin{aligned} F_1^m \mathcal{E}_X &= \mathcal{E}_{X, m} \big|_{\Lambda} \\ \mathrm{gr}_{F_1} \mathcal{E}_X &= \mathrm{gr} \mathcal{E}_X \big|_{\Lambda} = \mathcal{O}_{(T^*X)} \big|_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Par définition le cycle caractéristique d'un \mathcal{E}_X -module cohérent \mathcal{M} est le cycle analytique associé à $\mathrm{gr} \mathcal{M}$ (qui est un $\mathcal{O}_{(T^*X)}$ -module cohérent) pour une bonne filtration de \mathcal{M} .

Étant donné un cycle analytique \mathcal{C} sur T^*X au voisinage de Λ , on peut lui associer son cône tangent le long de Λ qui est un cycle analytique sur $T_{\Lambda}(T^*X)$.

Or si Λ est lagrangienne, l'isomorphisme hamiltonien $H: T^*(T^*X) \rightarrow T(T^*X)$ induit un isomorphisme $H: T^*\Lambda \rightarrow T_\Lambda(T^*X)$ (cf. [15], §.3.1.1) donc le cône tangent à \mathcal{C} le long de Λ peut être considéré comme un cycle analytique sur $T^*\Lambda$, on le notera $C_\Lambda(\mathcal{C})$.

DÉFINITION 3.2.5. — Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent de cycle caractéristique $\widetilde{\text{Ch}} \mathcal{M}$, le cycle microcaractéristique de \mathcal{M} le long de Λ est défini par :

$$\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(\mathcal{M}) = C_\Lambda(\widetilde{\text{Ch}} \mathcal{M}).$$

La variété microcaractéristique de \mathcal{M} le long de Λ est le support $\text{Ch}_\Lambda(\mathcal{M})$ de $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(\mathcal{M})$.

(Cette variété microcaractéristique a été définie par Kashiwara-Schapira [13] et nous ne faisons ici que reprendre cette définition.)

Pour définir $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(\mathcal{M})$ on peut aussi procéder suivant la même méthode que pour $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ en filtrant $\text{gr}_{F_1} \mathcal{E}_X = \mathcal{O}_{(T^*X)|\Lambda}$ par l'ordre d'annulation sur Λ , soit $G_\Lambda^*(\text{gr}_{F_1} \mathcal{E}_X)$ cette filtration. Étant donné un \mathcal{E}_X -module cohérent \mathcal{M} , on le munit d'une bonne filtration $F_1^* \mathcal{M}$, puis $\text{gr}_{F_1} \mathcal{M}$ d'une bonne $G^*(\text{gr}_{F_1} \mathcal{E}_X)$ -filtration et le gradué associé est un $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent dont on prend le cycle caractéristique.

Remarque sur les notations. — Pour uniformiser les énoncés quand $r=1$ ou $r=\infty$ nous noterons souvent :

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}) &= \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M}) \\ \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(1)}(\mathcal{M}) &= \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(1)}(\mathcal{M}) = \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.2.6. — 1. Pour tout r rationnel, $1 \leq r \leq +\infty$, $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles analytiques bihomogènes de $T^*\Lambda$, $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des cycles analytiques positifs.

Si $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de \mathcal{E}_X -modules cohérents et si sur un ouvert U de $T^*\Lambda$ la codimension de $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ [resp. de $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$] est supérieure ou égale à d on a sur cet ouvert U :

$$\begin{aligned} [\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})]_d &= [\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}')]_d + [\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}'')]_d \\ (\text{resp. } [\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})]_d &= [\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}')]_d + [\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}'')]_d). \end{aligned}$$

On a donc sur $T^*\Lambda$:

$$\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}') \cup \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}'')$$

et

$$\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}') \cup \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}'').$$

3. Si \mathcal{I} est un idéal cohérent de \mathcal{E}_X et $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{I}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) &= \{\theta \in T^*\Lambda / \forall P \in \mathcal{I} \sigma_\Lambda^{(r)}(P)(\theta) = 0\} \\ \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) &= \{\theta \in T^*\Lambda / \forall P \in \mathcal{I} \sigma_\Lambda^{(r)}(P)(\theta) = 0\}. \end{aligned}$$

La démonstration est la même que dans le cas $r=\infty$ du paragraphe précédent.

3.3. VARIÉTÉS MICROCARACTÉRISTIQUES DE TYPE (r, s) . — Soient r et s deux nombres rationnels tel que $1 \leq s < r \leq +\infty$, soient $r = p/q$ et $s = p'/q'$ leurs écritures sous forme irréductible (avec la convention $\infty = 1/0$).

Le faisceau $\mathcal{E}_X|_\Lambda$ est muni de deux filtrations $F_{\Lambda, r}^\bullet \mathcal{E}_X$ et $F_{\Lambda, s}^\bullet \mathcal{E}_X$, qui définissent donc une bifiltration par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \quad F_{\Lambda, r, s}^{ij} \mathcal{E}_X = F_{\Lambda, r}^{(j-i)+q^i} \mathcal{E}_X \cap F_{\Lambda, s}^{(j-i)+q'^i} \mathcal{E}_X.$$

Un opérateur de $\mathcal{E}_X|_\Lambda$ est donc dans $F_{\Lambda, r, s}^{i, j} \mathcal{E}_X$ si on polygône de Newton est contenu dans l'ensemble :

$$A_{r, s}^{i, j} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda + r\mu \leq i + r(j-i), \lambda + s\mu \leq i + s(j-i)\}.$$

Nous noterons $B_{r, s}^{ij}$ l'ensemble $A_{r, s}^{ij}$ privé de son sommet c'est-à-dire $B_{r, s}^{ij} = \{(\lambda, \mu) \in A_{r, s}^{ij} / (\lambda, \mu) \neq (i, j-i)\}$.

On peut alors définir le bigradué associé à $F_{\Lambda, r, s}^{\bullet\bullet} \mathcal{E}_X$ par :

$$\text{gr}_{F_{r, s}}^{ij} \mathcal{E}_X = F_{\Lambda, r, s}^{ij} \mathcal{E}_X / \bigcup_{(k, l-k) \in B_{r, s}^{ij}} F_{\Lambda, r, s}^{k, l} \mathcal{E}_X.$$

Suivant les notations du paragraphe précédent on a :

$$\text{gr}_{F_{r, s}}^{ij} \mathcal{E}_X \simeq \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}(i, j)$$

et

$$\text{gr}_{F_{r, s}} \mathcal{E}_X = \bigoplus_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2} \text{gr}_{F_{r, s}}^{ij} \mathcal{E}_X \simeq \pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}.$$

Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent défini au voisinage de Λ , on dit qu'une bifiltration $(\mathcal{M}_{ij})_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2}$ est bonne si, localement, elle est l'image de la bifiltration de \mathcal{E}_X^N par un morphisme surjectif.

$$\mathcal{E}_X^N \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

On montrerait comme dans le paragraphe précédent que si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent muni d'une bonne $F_{\Lambda, (r, s)} \mathcal{E}_X$ -bifiltration, le bigradué associé $\text{gr } \mathcal{M}$ est un $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module cohérent et que le cycle analytique positif de $T^*\Lambda$ associé à ce $\pi_* \mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ -module est indépendant du choix de la bonne filtration.

Nous noterons $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(r, s)(\mathcal{M})$ ce cycle analytique et $\text{Ch}_\Lambda(r, s)(\mathcal{M})$ son support.

Les résultats de la proposition 3.1.3 sont encore vrais pour $\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(r, s)(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}_\Lambda(r, s)(\mathcal{M})$ [la fonction $\sigma_\Lambda^{(\infty)}(P)$ étant remplacée par la fonction $\sigma_\Lambda^{(r, s)}(P)$ de la remarque 2.2.8.].

Soient r, s, r', s' quatre rationnels tels que $1 \leq s \leq s' < r' \leq r \leq +\infty$, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ on a $F_{\Lambda, (r, s)}^{(i, j)} \mathcal{E}_X \subset F_{\Lambda, (r', s')}^{(i, j)} \mathcal{E}_X$. Donc si $\mathcal{E}_X^N \rightarrow \mathcal{M}$ est un morphisme qui définit sur \mathcal{M} une bonne $F_{\Lambda, (r, s)} \mathcal{E}_X$ -bifiltration \mathcal{M}_{ij} et une bonne $F_{\Lambda, (r', s')} \mathcal{E}_X$ -bifiltration \mathcal{M}'_{ij} on aura pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ un morphisme $\mathcal{M}_{ij} \rightarrow \mathcal{M}'_{ij}$.

Ce morphisme induit un morphisme de $\pi_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ -module $\text{gr } \mathcal{M} \rightarrow \text{gr } \mathcal{M}'$ et comme $\text{gr}_{F(r, s)} \mathcal{E}_X \approx \text{gr}_{F(r', s')} \mathcal{E}_X$ on voit facilement que ce morphisme est surjectif.

On en déduit donc que l'on a toujours

$$\widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(r, s)(\mathcal{M}) \supseteq \widetilde{\text{Ch}}_\Lambda(r', s')(\mathcal{M})$$

et donc

$$\text{Ch}_\Lambda(r, s)(\mathcal{M}) \supset \text{Ch}_\Lambda(r', s')(\mathcal{M}).$$

De même si \mathcal{M}_{ij} est une bonne $F_{\Lambda, (r, s)} \mathcal{E}_X$ -bifiltration, la filtration $(F_r^k \mathcal{M})_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$F_r^k \mathcal{M} = \sum_{p \ (j-i) + qi = k} \mathcal{M}_{ij} \quad (r = p/q)$$

est une bonne $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{E}_X$ -filtration de \mathcal{M} .

Alors l'image dans $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ de $\sum_{\substack{p \ (j-i) + qi = k \\ j-i \geq l}} \mathcal{M}_{ij}$ définit pour chaque l un sous-ensemble

$G_-^l \text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ d'où une bonne $G_- \text{gr}_{F_r} \mathcal{E}_X$ -filtration sur $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$.

On obtient ainsi un morphisme surjectif :

$$\text{gr } \mathcal{M} \rightarrow \text{gr}_{G_-} \text{gr}_{F_r} \mathcal{M}.$$

On voit donc que, pour tout $s < r$, $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est contenu dans $\text{Ch}_\Lambda(r, s)(\mathcal{M})$.

De la même manière on montrerait que $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est contenu dans $\text{Ch}_\Lambda^{(s, r)}(\mathcal{M})$ pour tout $s > r$.

Si \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{E}_X/\mathcal{I}$, comme $\text{gr}_{G_-} \text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ est $\pi_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ -cohérent, il existe, pour chaque r , un nombre fini d'opérateurs P_1, \dots, P_{M_r} tels que

$$\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \{\theta \in T^* \Lambda / \forall j = 1, \dots, M_r, \sigma_\Lambda^{(r)}(P_j)(\theta) = 0\}.$$

Si s est tel que aucune pente des polygones de Newton des opérateurs P_1, \dots, P_{M_r} ne se trouve dans l'intervalle $[-1/s, 1/r[$ on aura pour $j = 1, \dots, M_r$

$$\sigma_\Lambda^{(r)}(P_j) = \sigma_\Lambda^{(r, s)}(P_j)$$

donc $\text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M}) \subset \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$, c'est-à-dire $\text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$.

Si \mathcal{M} est un module cohérent quelconque il est de la forme $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X u_1 + \dots + \mathcal{E}_X u_N$ et la proposition 3.1.3. montre que

$$\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \bigcup_{i=1, \dots, N} \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{E}_X u_i)$$

$$\text{et de même } \text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M}) = \bigcup_{i=1, \dots, N} \text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{E}_X u_i).$$

Donc pour tout \mathcal{E}_X -module cohérent \mathcal{M} il existe $r_0 < r$ tel que pour tout $s \in]r_0, r[$ on ait :

$$\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M}).$$

On montrerait de la même manière la propriété correspondante pour $\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ c'est-à-dire :

PROPOSITION 3.3.1. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module cohérent et r un nombre rationnel, $1 < r < +\infty$.

Il existe r_0 et r_1 rationnels, $1 < r_0 < r < r_1 < +\infty$ tels que pour tout $s \in]r_0, r[$ et tout $s' \in]r, r_1[$ on ait :

$$\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M})$$

$$\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda^{(s', r)}(\mathcal{M}).$$

Signalons que les constructions de ce paragraphe sont reprises de [14] où les variétés $\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M})$ sont définies pour les \mathcal{D}_X -modules.

PROPOSITION 3.3.2. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module cohérent défini au voisinage de Λ .

(a) Pour tout r tel que $1 \leq r \leq +\infty$, les variétés $\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ s'identifient aux variétés $\mathrm{Ch}_\Lambda^2(r, r)(\mathcal{M})$ de [15].

(b) Pour tout (r, s) tel que $1 \leq s < r < +\infty$, les variétés $\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M})$ s'identifient aux variétés $\mathrm{Ch}_\Lambda^2(r, s)(\mathcal{M})$ de [15].

Démonstration. — Ces variétés sont additives (au sens de la propriété 2 de la proposition 3.2.6 ci-dessus) donc il suffit de montrer la proposition lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{I}$ avec \mathcal{I} idéal cohérent de \mathcal{E}_X .

Dans ce cas la proposition 2.6.12 de [15] et la proposition 3.2.6 (3) ci-dessus montrent que l'on a :

$$\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda^2(r, r)(\mathcal{M}) = \{ \theta \in T^*\Lambda / \forall P \in \mathcal{I} \ \sigma_\Lambda^{(r)}(P)(\theta) = 0 \}$$

et de même :

$$\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda^2(r, s)(\mathcal{M}) = \{ \theta \in T^*\Lambda / \forall P \in \mathcal{I} \ \sigma_\Lambda^{(r, s)}(P)(\theta) = 0 \}.$$

3.4. INDICES CRITIQUES D'UN MODULE COHÉRENT. — Nous allons voir dans ce paragraphe que pour chaque \mathcal{E}_X -module cohérent, il n'y a qu'un nombre fini de variétés distinctes.

Considérons tout d'abord le cas d'un seul opérateur, c'est-à-dire $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$ avec $P \in \mathcal{E}_X$. Soient $1 = r_0 < r_1 < \dots < r_v = +\infty$ les indices critiques de P , c'est-à-dire les nombres rationnels r tels que $-1/r$ soit une pente du polygône de Newton de P .

Si $r \notin \{r_0, \dots, r_v\}$, la droite D_r du paragraphe 2.2 touche le polygône de Newton de P en un seul point et on a :

$$\mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \{ \theta \in T^*\Lambda / \sigma_\Lambda^{(r)}(P)(\theta) = 0 \}.$$

De même si r, s, r', s' sont situés entre deux indices critiques successifs ($r_j \leq s < s' < r' < r \leq r_{j+1}$) on aura $\sigma_{\Lambda}^{(r,s)}(P) = \sigma_{\Lambda}^{(r',s')}(P)$ et donc $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r,s)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_{\Lambda}^{(r',s')}(\mathcal{M})$.

Par contre si $r \in \{r_1, \dots, r_{v-1}\}$ ces ensembles sont distincts, $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$, $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r')}\mathcal{M}$ et $\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ sont définis respectivement par les équations $\sigma_{\Lambda}^{(r)}(P)(\theta) = 0$, $\sigma_{\Lambda}^{(r')}(P)(\theta) = 0$ et $\sum_{(i,j) \in D_r} \sigma_{(i,j)}(P) = 0$.

Dans le cas d'un \mathcal{E}_X -module cohérent quelconque \mathcal{M} , nous appellerons *indices critiques* de \mathcal{M} en un point x de Λ , les nombres rationnels r tels que, au voisinage de $\pi^{-1}(x)$, les variétés $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ soient distinctes. (π désigne la projection $T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$.) On ajoutera à ces indices critiques les nombres 1 et $+\infty$.

Remarquons que si r n'est pas un indice critique $\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ est un ensemble bihomogène et l'on a donc :

$$\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_{\Lambda}^{(r')}\mathcal{M}.$$

THÉORÈME 3.4.1. — *L'ensemble des indices critiques d'un \mathcal{E}_X -module cohérent est fini sur tout compact de Λ .*

Il est clair qu'il suffit de montrer le théorème dans le cas d'un module à un seul générateur, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{E}_X/\mathcal{J}$ pour \mathcal{J} idéal cohérent de \mathcal{E}_X . Dans ce cas nous allons montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4.2. — *Si \mathcal{J} est un idéal cohérent de \mathcal{E}_X , si $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{J}$ et si x est un point de Λ , il existe un voisinage V de x et un nombre fini d'opérateurs P_1, \dots, P_N de \mathcal{J} tels que pour tout r , $1 \leq r \leq +\infty$, on ait :*

$$\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) \cap \pi^{-1}(V) = \{\theta \in \pi^{-1}(V) / \forall j = 1, \dots, N \quad \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P_j)(\theta) = 0\}.$$

Si r n'est pas l'indice critique de l'un des P_i on aura $[\text{sur } \pi^{-1}(V)] :$

$$\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) \subset \{\theta \in T^*\Lambda / \forall j = 1, \dots, N \quad \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P_j)(\theta) = 0\} = \text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}).$$

D'après la remarque 3.2.7, $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ est le cône tangent à $\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ donc on aura $\sum_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$.

L'ensemble des indices critiques de \mathcal{M} sur V est donc un sous-ensemble de la réunion des ensembles d'indices critiques des P_j , $j = 1, \dots, N$, donc il est fini ce qui montre le théorème.

Pour r fixé, il existe (localement) un nombre fini P_1, \dots, P_M d'opérateurs de \mathcal{J} tels que :

$$\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \{\theta \in T^*\Lambda / \forall j = 1, \dots, M \quad \sigma_{\Lambda}^{(r)}(P_j)(\theta) = 0\}$$

donc pour montrer la proposition 3.4.2, il suffit de montrer qu'il existe localement une suite finie $r_0 < r_1 < \dots < r_{\mu}$ telle que pour tout r , $1 \leq r \leq +\infty$, il existe $r_j \in \{r_0, \dots, r_{\mu}\}$ vérifiant :

$$\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_{\Lambda}^{(r_j)}(\mathcal{M}).$$

Enfin d'après la proposition 3.3.2., il suffit de montrer qu'il existe localement une suite finie $1 = r_0 < r_1 < \dots < r_\mu = +\infty$ telle que pour tout (r, s) vérifiant $r_k \leq s < r \leq r_{k+1}$ on ait

$$\text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_\Lambda^{(r_{k+1}, r_k)}(\mathcal{M}).$$

La proposition 3.3.2. se déduit donc du lemme suivant :

LEMME 3.4.3.. — Soit \mathcal{J} un idéal cohérent de \mathcal{O}_X et $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Si V est un ouvert de $T^*\Lambda$ et (r, s) un couple tel que $1 \leq s < r \leq +\infty$, nous dirons que la propriété $\Pi(r, s)$ est vérifiée sur V si :

$$\forall (r', s') \quad s \leq s' < r' \leq r \quad \text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M}) \cap V = \text{Ch}_\Lambda^{(r', s')}(\mathcal{M}) \cap V.$$

(a) Pour tout r tel que $1 < r \leq +\infty$ et tout $\theta \in T^*\Lambda$, il existe s , $1 \leq s < r$, et V voisinage de θ tels que $\Pi(r, s)$ soit vérifiée sur V .

(b) Pour tout s tel que $1 \leq s < +\infty$ et tout $\theta \in T^*\Lambda$, il existe r , $s < r \leq +\infty$ et V voisinage de θ tels que $\Pi(r, s)$ soit vérifiée sur V .

Pour démontrer ce lemme nous utiliserons les opérateurs 2-microdifférentiels de [15] :

Pour tout couple (r, s) tel que $1 \leq s < r \leq +\infty$ nous avons défini un faisceau $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)$ sur $T^*\Lambda$, c'est un faisceau d'anneaux qui est plat sur $\pi^{-1}(\mathcal{O}_X|_\Lambda)$ (avec $\pi: T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$) et d'après la proposition 3.3.2, si \mathcal{M} est un \mathcal{O}_X -module cohérent $\text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{M})$ est le support du faisceau $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X|_\Lambda)} \pi^{-1}(\mathcal{M}|_\Lambda)$.

Si (r', s') vérifie $s \leq s' < r' \leq r$, $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}_\Lambda^2(r', s')$ et $\mathcal{E}_\Lambda^2(r', s')$ est plat sur $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)$. De plus les flèches $\pi^{-1}(\mathcal{O}_X|_\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)$, $\pi^{-1}(\mathcal{O}_X|_\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Lambda^2(r', s')$ et $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Lambda^2(r', s')$ sont compatibles.

Si \mathcal{J} est un idéal cohérent de \mathcal{O}_X , $\text{Ch}_\Lambda^{(r, s)}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ est l'ensemble des points θ de $T^*\Lambda$ tels que

$$[\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X|_\Lambda)} \pi^{-1}(\mathcal{J}|_\Lambda)]_\theta \neq \mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)_\theta.$$

Pour montrer la partie (a) du lemme [la partie (b) se montrant de manière analogue], il suffit de montrer que si \mathcal{J} est un idéal cohérent de \mathcal{O}_X , si r vérifie $1 < r \leq +\infty$ et si $\theta \in T^*\Lambda$, il existe un voisinage V de θ et s vérifiant $1 \leq s < r$ tels que :

Pour tout $\theta' \in V$, tout couple (r', s') qui vérifie $s \leq s' < r' \leq r$

$$\begin{aligned} & [\mathcal{E}_\Lambda^2(r', s') \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X|_\Lambda)} \pi^{-1}(\mathcal{J}|_\Lambda)]_{\theta'} = \mathcal{E}_\Lambda^2(r', s')_{\theta'} \\ \Rightarrow & [\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X|_\Lambda)} (\pi^{-1}(\mathcal{J}|_\Lambda))]_{\theta'} = \mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)_{\theta'}. \end{aligned}$$

Pour montrer ce résultat, il suffit de reprendre pas à pas la démonstration du théorème 2.9.12 de [15]. En effet, pour montrer que $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}$ est fidèlement plat sur \mathcal{E}_Λ^2 , on prouve dans cette démonstration que si I est un idéal de $\mathcal{E}_{\Lambda, \theta}^2$ on a

$$\mathcal{E}_{\Lambda, \theta}^{2\infty} \otimes I = \mathcal{E}_{\Lambda, \theta}^{2\infty} \Rightarrow I = \mathcal{E}_{\Lambda, \theta}^2.$$

On peut reprendre cette démonstration en remplaçant $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}$ par $\mathcal{E}_\Lambda^2(r', s')$ et \mathcal{E}_Λ^2 par $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)$.

La seule différence sera que si on prend un élément P non nul de \mathcal{J} , pour que son symbole $\sigma_\Lambda^{(r, s)}(P)$ ne soit pas nul il faut que s soit suffisamment proche de r . (Plus exactement qu'aucun indice critique de P ne se trouve dans l'intervalle $[s, r[$).

Comme la démonstration se fait en un nombre fini d'étapes on pourra toujours supposer s assez proche de r pour que cette condition soit vérifiée chaque fois.

Nous renvoyons donc le lecteur à la démonstration de [15], en signalant seulement que l'ingrédient essentiel est un théorème de division dans $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, s)$ (théorème 2.7.1 de [15]).

Nous remercions C. Sabbah d'avoir attiré notre attention sur le théorème 3.4.1 et suggéré d'utiliser un théorème de division pour le démontrer.

3.5. INVOLUTIVITÉ. — Soient $R = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} R_k$ un anneau filtré et $\text{gr } R = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}^k R$ son gradué.

Notons δ_k l'application canonique de R_k dans $\text{gr } R$. Le crochet de deux éléments de R est défini par $[x, y] = xy - yx$.

Supposons qu'il existe un entier q , $q \geq 1$, tel que R vérifie :

$$(Cq) \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad [R_n, R_m] \subset R_{n+m-q}.$$

Alors $\text{gr } R$ est commutatif et on peut définir (cf. Gabber [4]) une structure d'algèbre de Lie sur $\text{gr } R$ en posant :

$$\forall x \in R_n, \quad \forall y \in R_m, \quad H^{(q)}(\delta_n(x), \delta_m(y)) = \delta_{n+m-q}([x, y])$$

et en prolongeant $H^{(q)}$ à $\text{gr } R$ par bilinéarité.

Si R est un faisceau d'anneau sur un espace topologique T on dira que R vérifie (Cq) si pour tout $t \in T$, l'anneau R_t des germes de R en t vérifie (Cq) et on peut encore définir $H^{(q)}$ de la même manière.

Remarque. — Dans le cas usuel de la filtration des opérateurs différentiels par l'ordre on a $q = 1$.

LEMME 3.5.1. — Soient $r \in \mathbb{Q} \cap]1, \infty[$ et $r = p/q$ son écriture irréductible avec $1 \leq q < p$.

Le faisceau d'anneau filtré $\mathcal{E}_X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_{\Lambda, r}^k \mathcal{E}_X$ vérifie (Cq) et par l'isomorphisme

$\text{gr}_F \mathcal{E}_X \simeq \pi_* \mathcal{O}_{(T^* \Lambda)}$, $H^{(q)}$ s'identifie au crochet de Poisson des fonctions sur $T^* \Lambda$ défini par la structure symplectique de $T^* \Lambda$.

Démonstration. — Le problème étant local on peut se ramener comme dans la démonstration de la proposition 2.1.1 à $\Lambda = T_Y^* X$ pour Y sous-variété de X . (D'après le corollaire 2.1.4 une transformation canonique quantifiée respecte l'isomorphisme $\text{gr}_F \mathcal{E}_X \simeq \pi_* \mathcal{O}_{(T^* \Lambda)}$).

Pour montrer le lemme on peut donc se placer dans un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)$ de X tel que $Y = \{(x, y) \in X / x = 0\}$ et $\Lambda = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^* X / x = 0, \eta = 0\}$ et que $T^* \Lambda$ soit muni des coordonnées (y, ξ, y^*, ξ^*) . On reprend les calculs du

paragraphe 2.2:

Si $P = \sum_{j \in M} P_j(x, y, \xi, \eta)$ est un opérateur microdifférentiel défini au voisinage de Λ on développe chaque fonction P_j en série de Taylor:

$$(3.5.1) \quad P_j(x, y, \xi, \eta) = \sum_{\alpha, \beta} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) x^\alpha \eta^\beta$$

et on pose pour $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$:

$$(3.5.2) \quad P_{ij}(y, \xi, y^*, \xi^*) = \sum_{|\alpha| + |\beta| = i} P_{j, \alpha, \beta}(y, \xi) (-\xi^*)^\alpha y^{*\beta}.$$

L'opérateur P est dans $F_{\Lambda, r}^m \mathcal{E}_X$ si et seulement si $P_j \equiv 0$ pour $pj + (q-p)i > m$ et l'image de P dans

$$\mathrm{gr}_{F_r}^m \mathcal{E}_X = \bigoplus_{pj + (q-p)i = m} \pi_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}[i, j]$$

est égale à

$$\delta_m(P) = \sum_{pj + (q-p)i = m} P_{ij}(y, \xi, y^*, \xi^*).$$

Soient $Q \in F_{\Lambda, r}^n \mathcal{E}_X$ et $R = PQ$, la formule (1.1.4) montre que l'on a:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu}(y, \xi, y^*, \xi^*) = \sum_{\substack{\lambda = i+k - |\gamma| - |\delta| \\ \mu = j+l - |\gamma| - |\delta|}} \frac{1}{\gamma! \delta!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y^*} \right)^\delta P_{ij}(y, \xi, y^*, \xi^*) \\ \times \left(-\frac{\partial}{\partial \xi^*} \right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\delta Q_{kl}(y, \xi, y^*, \xi^*) \end{aligned}$$

et si $S = [P, Q]$ on aura donc:

$$\begin{aligned} S_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{\lambda = i+k - |\gamma| - |\delta| \\ \mu = j+l - |\gamma| - |\delta|}} \frac{1}{\gamma! \delta!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y^*} \right)^\delta P_{ij} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi^*} \right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\delta Q_{kl} \right. \\ \left. - \left(-\frac{\partial}{\partial \xi^*} \right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\delta P_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y^*} \right)^\delta Q_{kl} \right]. \end{aligned}$$

Dans cette somme les termes tels que $|\gamma| + |\delta| = 0$ sont nuls donc on a toujours

$$|\gamma| + |\delta| \geq 1$$

et

$$p\mu + (q-p)\lambda = [pj + (q-p)i] + [pl + (q-p)k] - q(|\gamma| + |\delta|) \leq m + n - q$$

ce qui montre que $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{E}_X$ vérifie (Cq). De plus pour $p\mu + (q-p)\lambda = m+n-q$ on aura $pj + (q-p)i = m$, $pl + (q-p)k = n$ et $|\gamma| + |\delta| = 1$ donc

$$\begin{aligned} \delta_{m+n-q}(S) = & \sum_{\alpha=1, \dots, d} \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}^*} \delta_m(P) \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \delta_n(Q) - \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \delta_m(P) \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}^*} \delta_n(Q) \\ & + \sum_{\alpha=1, \dots, d'} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}^*} \delta_m(P) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \delta_n(Q) - \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \delta_m(P) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}^*} \delta_n(Q) \end{aligned}$$

ce qui est bien le crochet de Poisson usuel pour les fonctions sur $T^*\Lambda$.

PROPOSITION 3.5.2. — Pour tout \mathcal{E}_X -module cohérent \mathcal{M} défini au voisinage de Λ et pour tout r tel que $1 < r < +\infty$, $\Sigma_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique involutif de $T^*\Lambda$.

Démonstration. — D'après le lemme précédent si $r = p/q$, la filtration $F_{\Lambda}^* \mathcal{E}_X$ vérifie (Cq) donc on peut appliquer le théorème I_q' de Gabber [4] qui montre que l'idéal de définition de $\Sigma_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ est stable par $H^{(q)}$ c'est-à-dire par le crochet de Poisson de $T^*\Lambda$.

PROPOSITION 3.5.3. — Pour tout \mathcal{E}_X -module cohérent \mathcal{M} défini près de Λ et pour tout r tel que $1 \leq r \leq +\infty$, $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles analytiques homogènes involutifs de $T^*\Lambda$.

Démonstration. — Si r n'est pas un indice critique de \mathcal{M} , on a $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \Sigma_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ donc ce sont des ensembles involutifs d'après la proposition précédente.

Si r est un indice critique, d'après le théorème 3.4.1, ce point critique est isolé donc il existe $s < r$, s non critique, tel que

$$\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_{\Lambda}^{(s)}(\mathcal{M}) = \Sigma_{\Lambda}^{(s)}(\mathcal{M})$$

et de même il existe $s > r$ tel que $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) = \Sigma_{\Lambda}^{(s)}(\mathcal{M})$ et on peut encore utiliser la proposition précédente.

Signalons que la proposition a été démontrée pour $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r,s)}(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ dans ([15], corollaire 3.1.13).

4. Modules holonomes et b -fonctions

Comme dans ce qui précède, X désignera une variété analytique complexe et Λ une sous-variété lagrangienne homogène de T^*X .

4.1. HOLONOMIE MICROLOCALE. — Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1.1. — Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent on a :

$$\begin{aligned} \forall r, \quad 1 \leq r \leq +\infty, \quad \dim \text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) &\leq \dim \text{Ch}(\mathcal{M}) \\ \dim \text{Ch}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) &\leq \dim \text{Ch}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

($\text{Ch} \mathcal{M}$ désigne la variété caractéristique de \mathcal{M} , c'est-à-dire son support comme \mathcal{E}_X -module).

COROLLAIRE 4.1.2. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonome.

(i) Pour tout r , $1 \leq r \leq +\infty$, $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}_\Lambda^{\{r\}}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles analytiques lagrangiens bihomogènes de $T^*\Lambda$.

(ii) Pour tout r , $1 < r < \infty$, $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique lagrangien de $T^*\Lambda$.

Démonstration du corollaire. — D'après les propositions 3.5.2 et 3.5.3, les ensembles considérés sont involutifs dans $T^*\Lambda$ donc il suffit de montrer qu'ils sont de dimension inférieure ou égale à $\dim \Lambda = \dim X$.

Or si \mathcal{M} est holonome, $\dim \text{Ch } \mathcal{M} = \dim X$ donc d'après le théorème 4.1.1 $\dim \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) \leq \dim \Lambda$ et $\dim \text{Ch}_\Lambda^{\{r\}}(\mathcal{M}) \leq \dim \Lambda$.

Enfin on remarque que $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est le cône tangent de $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ le long de Λ considéré comme section nulle de $T^*\Lambda$ donc $\dim \Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \dim \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$.

Remarques sur le théorème 4.1.1. — (i) Si $r=1$, $\text{Ch}_\Lambda^{\{1\}}(\mathcal{M})$ est le cône tangent à $\text{Ch}(\mathcal{M})$ le long de Λ et on a donc immédiatement : $\dim \text{Ch}_\Lambda^{\{1\}}(\mathcal{M}) = \dim \text{Ch}(\mathcal{M})$.

(ii) Dans le cas $r = +\infty$, et pour les \mathcal{D}_X -modules, c'est-à-dire pour la filtration de Kashiwara, J.-E. Björk a trouvé une démonstration purement algébrique de ce résultat.

(iii) Nous utilisons ce résultat (dans un article en collaboration avec P. Schapira [18]) dans le cas $r = \infty$, pour étudier l'image inverse des \mathcal{D}_X -modules holonomes.

Pour montrer le théorème, on remarque que d'après la proposition 3.3.2 $\text{Ch}_\Lambda^{\{r\}}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_\Lambda^2(r, r)(\mathcal{M})$ et que d'après le théorème 3.4.1, pour tout r et tout \mathcal{M} , il existe r' tel que $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_\Lambda^2(r', r')(\mathcal{M})$ donc on doit montrer le résultat pour la variété $\text{Ch}_\Lambda^2(r, r)(\mathcal{M})$.

Nous allons tout d'abord rappeler les propriétés des opérations 2-microdifférentiels [15] dont nous aurons besoin.

Pour tout r rationnel, $1 \leq r \leq +\infty$, $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ est un faisceau d'anneaux sur $T^*\Lambda$ et on a un morphisme injectif de faisceaux d'anneaux :

$$\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$$

(avec $\pi : T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$).

De plus $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ est plat sur $\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)$.

Par définition $\text{Ch}_\Lambda^2(r, r)(\mathcal{M})$ est le support du module

$$\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)} \pi^{-1}(\mathcal{M}|_\Lambda).$$

Le faisceau $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ est muni d'une filtration $(F^k \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))_{k \in \mathbb{Z}}$ et le gradué associé $\text{gr}_F \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ est lui-même muni d'une filtration $(G^l(\text{gr}_F \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)))_{l \in \mathbb{Z}}$. Le faisceau $\text{gr } \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r) = \text{gr}_G \text{gr}_F \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ est égal à $\bigoplus_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}(i, j)$ où $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}(i, j)$ désigne le sous-faisceau

de $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ qui sont bihomogènes de degré (i, j) suivant les deux actions naturelles H_0 et H_1 de \mathbb{C}^* sur $T^*\Lambda$ (cf. §. 2. 2).

(Remarquons que les filtrations induites sur $\mathcal{E}_{X|_\Lambda}$ par F^\bullet et par G^\bullet sont celles que nous avons notées au paragraphe 3 $F_{\Lambda, r}^\bullet$ et G_+^\bullet).

Le théorème 2.5.1 de [15] montre immédiatement le résultat suivant :

Pour tout $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ -module cohérent \mathcal{M} , il existe localement une résolution libre

$$0 \rightarrow (\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))^{N_k} \rightarrow \dots \rightarrow (\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))^{N_0} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

telle que la suite

$$0 \rightarrow (\text{gr } \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))^{N_k} \rightarrow \dots \rightarrow (\text{gr } \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))^{N_0} \rightarrow \text{gr } \mathcal{M} \rightarrow 0$$

soit exacte lorsqu'on met sur \mathcal{M} la filtration F^\cdot induite par celle de $(\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))^{N_0}$ et sur $\text{gr}_F \mathcal{M}$ la filtration induite par celle de $(\text{gr}_F \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))^{N_0}$.

Rappelons (Kashiwara [6]) que si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module cohérent on a :

$$\text{codim}_{T^*X}(\text{Ch } \mathcal{M}) \geq d \Leftrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}_X) = 0 \text{ pour } j < d.$$

Nous allons montrer que le même résultat est vrai pour $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$:

PROPOSITION 4.1.3. — Si \mathcal{M} est un $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ -module cohérent ($1 \leq r \leq +\infty$), on a pour tout $d \in \mathbb{N}$:

$$\text{codim}_{T^*\Lambda}(\text{supp } \mathcal{M}) \geq d \Leftrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)}^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)) = 0 \text{ pour } j < d.$$

($\text{Supp } \mathcal{M}$ désigne le support du module \mathcal{M}).

Le théorème 4.1.1 se déduit immédiatement de ce résultat.

Soit en effet \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module cohérent dont la variété caractéristique est de codimension d dans T^*X , alors pour $j < d$ on a $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}_X) = 0$.

Comme $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ est plat sur $\pi^{-1}\mathcal{E}_X$ on aura alors

$$\mathcal{E}xt_{\pi^{-1}\mathcal{E}_X}^j(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)) = 0 \text{ pour } j < d$$

c'est-à-dire

$$\forall j < d, \quad \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)}^j(\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)} \pi^{-1}(\mathcal{M}|_\Lambda), \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)) = 0$$

et donc d'après la proposition 4.1.3, $\text{codim}_{T^*\Lambda}(\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})) \geq d$.

Il nous reste à démontrer la proposition 4.1.3, pour cela nous allons suivre de très près Kashiwara [6].

LEMME 4.1.4. — Si \mathcal{M} est un $\mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$ -module cohérent on a

- (i) $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)) = 0$ si $j < \text{codim}_{T^*\Lambda}(\text{supp } \mathcal{M})$.
- (ii) $\text{codim}_{T^*\Lambda}(\text{supp } \mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r))) \geq j$.

Démonstration. — Pour alléger les notations nous poserons $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)$. Comme nous l'avons rappelé plus haut, il existe localement une résolution libre de \mathcal{M} :

$$0 \rightarrow (\mathcal{E}^2)^{N_k} \rightarrow (\mathcal{E}^2)^{N_{k-1}} \rightarrow \dots \rightarrow (\mathcal{E}^2)^{N_0} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

telle que la suite

$$0 \rightarrow (\operatorname{gr} \mathcal{E}^2)^{N_k} \rightarrow \dots \rightarrow (\operatorname{gr} \mathcal{E}^2)^{N_0} \rightarrow \operatorname{gr} \mathcal{M} \rightarrow 0$$

soit exacte.

Alors $\mathcal{E}xt^j(\operatorname{gr} \mathcal{M}, \operatorname{gr} \mathcal{E}^2)$ est le j -ième groupe de cohomologie de la suite transposée :

$$0 \rightarrow (\operatorname{gr} \mathcal{E}^2)^{N_0} \rightarrow (\operatorname{gr} \mathcal{E}^2)^{N_1} \rightarrow \dots \rightarrow (\operatorname{gr} \mathcal{E}^2)^{N_k} \rightarrow 0$$

qui est la suite graduée de la suite suivante :

$$0 \rightarrow (\mathcal{E}^2)^{N_0} \rightarrow (\mathcal{E}^2)^{N_1} \rightarrow \dots \rightarrow (\mathcal{E}^2)^{N_k} \rightarrow 0.$$

On a donc pour tout point θ de $T^*\Lambda$ ([15], théorème 2.5.1)

$$\mathcal{E}xt^j(\operatorname{gr} \mathcal{M}, \operatorname{gr} \mathcal{E}^2)_\theta = 0 \Rightarrow \mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2)_\theta = 0,$$

Comme $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ est plat sur $\operatorname{gr} \mathcal{E}^2$ on a :

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{T^*\Lambda}}^j(\mathcal{O}_{T^*\Lambda} \otimes \operatorname{gr} \mathcal{M}, \mathcal{O}_{T^*\Lambda})_\theta = 0 \Rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}^2}^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2)_\theta = 0$$

soit

$$\operatorname{support}(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{T^*\Lambda}}^j(\mathcal{O}_{T^*\Lambda} \otimes \operatorname{gr} \mathcal{M}, \mathcal{O}_{T^*\Lambda})) \supset \operatorname{support}(\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}^2}^j(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2)).$$

Comme $\operatorname{support}(\mathcal{M}) = \operatorname{support}(\mathcal{O}_{T^*\Lambda} \otimes \operatorname{gr} \mathcal{M})$, le lemme se déduit du même énoncé dans lequel on remplace \mathcal{E}^2 par $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$, ce qui est un résultat de géométrie analytique bien connu.

LEMME 4.1.5. — Soit V une composante irréductible de $\operatorname{support}(\mathcal{M})$ de codimension r . Alors $V \subset \operatorname{support}(\mathcal{E}xt^r(\mathcal{M}, \mathcal{E}_\Lambda^2(r, r)))$.

Démonstration. — Soit θ un point générique de V . Si $i < r$ on a $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2)_\theta = 0$ d'après le lemme 4.1.4 (i) (en θ on a $\operatorname{codim}(\operatorname{support} \mathcal{M}) = \operatorname{codim} V = r$).

Si $i > r$, d'après le lemme 6.7 (ii) on a :

$$\operatorname{codim}(\operatorname{support}(\mathcal{E}xt^i(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2))) > r$$

donc au point générique de V $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2)_\theta = 0$.

Si de plus $\mathcal{E}xt^r(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2)_\theta = 0$ on obtient $\mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2)_\theta = 0$ et donc

$$\mathcal{M}_\theta = \mathbb{R} \mathcal{H}om(\mathbb{R} \mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2), \mathcal{E}^2)_\theta = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

La proposition 4.1.3 se déduit immédiatement du lemme 4.1.4 (i) et du lemme 4.1.5.

4.2. b -FONCTION. — Comme au paragraphe 2 nous noterons e_Λ le champ d'Euler de Λ associé à l'action de \mathbb{C}^* .

THÉORÈME 4.2.1. — Soient \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonome, $F_\Lambda^* \mathcal{M}$ une bonne $F_\Lambda^* \mathcal{E}_X$ -filtration de \mathcal{M} définie sur un ouvert U de Λ et $\operatorname{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M}$ le gradué associé.

Pour tout ouvert relativement compact V de U , il existe un polynôme $b(T) \in \mathbb{C}[T]$ tel que sur V on ait,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad b(e_\Lambda + k) \operatorname{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{M} = 0$$

b est la b -fonction de \mathcal{M} par rapport à Λ .

Démonstration (cf. [18]). — Si \mathcal{M} est holonome, d'après le corollaire 4.1.2, $\operatorname{Ch}_\Lambda^{(\infty)}(\mathcal{M})$ est lagrangien c'est-à-dire que $\operatorname{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ -module holonome et donc $\mathcal{E}nd_{\mathcal{D}_{(\Lambda)}}(\operatorname{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M})$ est localement de dimension finie sur \mathbb{C} [5].

Or si $P \in \operatorname{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{E}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{(\Lambda)}[k]$, on a $P e_\Lambda = (e_\Lambda + k) P$ donc l'application $\varphi_\Lambda : \operatorname{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M} \rightarrow \operatorname{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M}$ définie par $\varphi_\Lambda|_{\operatorname{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{M}} = e_\Lambda + k$ est un élément de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{D}_{(\Lambda)}}(\operatorname{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{M})$ et donc, localement, il existe un polynôme b à coefficients dans ψ tel que $b(\varphi_\Lambda) = 0$.

Q.E.D.

Si E_Λ est un opérateur de $\mathcal{E}_X|_\Lambda$ dont l'image dans $\operatorname{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$ est e_Λ on peut encore écrire le théorème 4.2.1 sous la forme suivante :

Pour tout ouvert V relativement compact dans U et toute section u de \mathcal{M} , il existe un polynôme $b(T) \in \mathbb{C}[T]$ et $P \in F_\Lambda^{-1} \mathcal{E}_X$ tel que

$$(4.2.1) \quad [b(E_\Lambda) + P]u = 0.$$

Si Λ est le fibré conormal à l'hypersurface $Y = \{(x, t) \in X/t=0\}$ l'équation (4.2.1) devient :

$$[b(t D_t) + t P(x, t, D_x, t D_t)]u = 0.$$

Le théorème 4.2.1 avait été démontré par Kashiwara-Kawai [11] lorsque \mathcal{M} est un module holonome régulier; dans ce cas ils avaient montré que l'on peut trouver b et P vérifiant (4.2.1) avec de plus P d'ordre inférieur ou égal au degré de P . (Si \mathcal{M} n'est pas régulier, l'ordre de P peut être quelconque).

Pour terminer ce paragraphe, montrons comment le théorème 4.2.1 permet de retrouver l'existence de la b -fonction de Kashiwara [6, 7]:

Étant donnés un \mathcal{D}_X -module holonome \mathcal{M} , une section u de \mathcal{M} et une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, Kashiwara montre qu'il existe un polynôme $b(T) \in \mathbb{C}[T]$ et un opérateur $P \in \mathcal{D}_X[s]$ tels que

$$(4.2.2) \quad b(s) f^s u = P(s, x, D_x) f^{s+1} u.$$

(Le polynôme classique de Bernstein-Sato s'obtient en prenant $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ et $u = 1$).

Mais, comme l'a fait remarquer Malgrange (cf. [19]), la formule (4.2.2) peut encore s'écrire de la manière suivante :

Soit $Z = \{(x, t) \in X \times \mathbb{C}/t=f(x)\}$ et soit \mathcal{N} le $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module holonome $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{Z|X \times \mathbb{C}}$, soit $v = u \otimes \delta(t-f(x))$ section de \mathcal{N} , alors la formule (4.2.2) est équivalente à :

$$(4.2.3) \quad [b(-D_t t) - P(-D_t t, x, D_x) t](u \otimes \delta(t-f(x))) = 0.$$

Sous cette forme on retrouve exactement la formule (4.2.1) appliquée à \mathcal{N} , v et $\Lambda = T^*_{X \times \{0\}}(X \times \mathbb{C})$.

4.3. b -FONCTIONS RELATIVES. — Rappelons quelques propriétés géométriques de la variété $T^*\Lambda$ (cf. [15], § 2.9).

Comme sous-variété homogène de T^*X , Λ est munie d'une action de \mathbb{C}^* que nous noterons $h: \mathbb{C}^* \times \Lambda \rightarrow \Lambda$, à laquelle est attaché un champ de vecteur, le champ d'Euler e_Λ . [Par définition, on a $e_\Lambda(f) = kf$ pour toute fonction sur Λ homogène de degré k pour h .]

La variété $T^*\Lambda$ est le fibré cotangent à Λ donc est munie d'une structure de variété symplectique homogène définie par la 1-forme canonique ω_0 . On notera Ω la 2-forme canonique $\Omega = d\omega_0$ et u_0 l'unique champ de vecteurs sur $T^*\Lambda$ tel que $\omega_0 = \Omega \lrcorner u_0$ (produit intérieur).

Ce champ de vecteur est le champ d'Euler d'une action de \mathbb{C} sur $T^*\Lambda$, qui n'est autre que la multiplication dans les fibres de $T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$ que nous avons notée H_0 au paragraphe 2.2.

Par ailleurs, comme nous l'avons signalé au paragraphe 2.2, l'action h de \mathbb{C}^* sur Λ induit une action H_1 de \mathbb{C}^* sur $T^*\Lambda$ distincte de H_0 . [Pour λ fixé $h(\lambda, \cdot)$ est un isomorphisme local de Λ et définit donc un isomorphisme local \tilde{H}_λ de $T^*\Lambda$, par définition H_1 est l'application composée $H_1(\lambda, \cdot) = \tilde{H}_\lambda \circ H_0(\lambda, \cdot)$.]

Soient u_1 le champ d'Euler associé à H_1 et $\omega_1 = \Omega \lrcorner u_1$, ω_1 est une 1-forme sur $T^*\Lambda$.

La variété $T^*\Lambda$ est donc munie d'une 2-forme Ω et de deux champs de vecteurs u_0 et u_1 , on pose $\theta_\Lambda = \Omega(u_0, u_1)$, c'est une fonction holomorphe sur $T^*\Lambda$. On notera S_Λ l'hypersurface de $T^*\Lambda$ définie par l'équation $\{\theta_\Lambda = 0\}$. (S_Λ ne dépend donc que de l'action h de \mathbb{C}^* sur Λ).

Nous avons défini au paragraphe 3.2, pour $r \in [1, +\infty]$, l'action $H_r(\lambda, \cdot) = H_1(\lambda^r, H_0(\lambda^{1-r}, \cdot))$ sur $T^*\Lambda$. A H_r sont associés le champ de vecteurs $u_r = ru_1 + (1-r)u_0$ et la 1-forme $\omega_r = r\omega_1 + (1-r)\omega_0$.

Si on se donne un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_p, \tau_1, \dots, \tau_q)$ de Λ pour lequel $h(\lambda; (x, \tau)) = (x, \lambda\tau)$ (ce qui est toujours possible après transformation canonique) on aura dans les coordonnées (x, τ, x^*, τ^*) de $T^*\Lambda$:

$$e_\Lambda = \sum_j \tau_j \frac{\partial}{\partial \tau_j}, \quad \omega_0 = \sum_i x_i^* dx_i + \sum_j \tau_j^* d\tau_j, \quad \omega_1 = \sum_i x_i^* dx_i - \sum_j \tau_j d\tau_j^*,$$

$$\Omega = \sum_i dx_i^* \wedge dx_i + \sum_j d\tau_j^* \wedge d\tau_j, \quad u_0 = \sum_i x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} + \sum_j \tau_j^* \frac{\partial}{\partial \tau_j^*},$$

$$u_1 = \sum_i x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*} + \sum_j \tau_j \frac{\partial}{\partial \tau_j}, \quad \theta_\Lambda = \sum_i \tau_i \tau_i^*.$$

$$H_0(\lambda; (x, \tau, x^*, \tau^*)) = (x, \tau, \lambda x^*, \lambda \tau^*)$$

$$H_1(\lambda; (x, \tau, x^*, \tau^*)) = (x, \lambda \tau, \lambda x^*, \tau^*)$$

$$H_r(\lambda; (x, \tau, x^*, \tau^*)) = (x, \lambda^r \tau, \lambda x^*, \lambda^{1-r} \tau^*).$$

On voit sur ces formules que θ_Λ est le symbole principal de l'opérateur différentiel e_Λ et que $d\theta_\Lambda = \omega_0 - \omega_1$ (cf. [15], proposition 2.9.5).

Remarquons que si Λ est définie au voisinage de la section nulle de T^*X , Λ est de la forme T_Y^*X comme on l'a vu précédemment et peut être muni de coordonnées $(x_1, \dots, x_p, \tau_1, \dots, \tau_q)$, les applications h , H_1 et H_0 se prolongent en des actions de \mathbb{C} sur Λ ou sur $T^*\Lambda$; on a encore $\theta_\Lambda = \langle \tau, \tau^* \rangle$ au voisinage de cette section nulle. Si Σ est une sous-variété lagrangienne bihomogène de $T^*\Lambda$, Ω s'annule sur Σ , u_0 et u_1 sont tangents à Σ donc θ_Λ s'annule sur Σ . Du corollaire 4.1.2 on déduit donc:

PROPOSITION 4.3.1. — Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -module holonome défini au voisinage de Λ , alors pour tout rationnel $r \in [1, +\infty]$ $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ sont contenus dans S_Λ .

Notons $\pi: T^*\Lambda \rightarrow \Lambda$ la projection canonique et $\tilde{\pi}: T^*\Lambda \rightarrow \Lambda \times \mathbb{C}$ l'application définie par $\tilde{\pi}(\zeta) = (\pi(\zeta), \theta_\Lambda(\zeta))$. Notons encore $p: \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \Lambda$ la projection.

THÉORÈME 4.3.2. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonome défini au voisinage de Λ et soit r un nombre rationnel, $r \in]1, +\infty[$.

L'image de $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ par $\tilde{\pi}$ est contenue dans un sous-ensemble analytique S_r de $\Lambda \times \mathbb{C}$ qui vérifie:

- (a) S_r est de codimension au moins 1 dans $\Lambda \times \mathbb{C}$.
- (b) S_r est algébrique dans les fibres de $p: \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \Lambda$.
- (c) Aucune composante irréductible de S_r n'est de la forme $p^{-1}(V)$ pour V sous-ensemble de Λ .
- (d) S_r est homogène pour l'action h_r de \mathbb{C}^* sur $\Lambda \times \mathbb{C}$ définie par

$$h_r(\lambda; (\eta, \mu)) = (h(\lambda'; \eta), \lambda\mu).$$

Démonstration. — D'après le corollaire 4.1.2, $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est une sous-variété lagrangienne de $T^*\Lambda$ donc de dimension $n = \dim \Lambda$. De plus $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est algébrique dans les fibres de π donc dans celles de $\tilde{\pi}$ (car θ_Λ est algébrique).

Les résultats classiques de la théorie de l'élimination montrent que si $S_r^0 = \tilde{\pi}(\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}))$, l'adhérence S_r de S_r^0 dans $\Lambda \times \mathbb{C}$ est un sous-ensemble analytique de dimension au plus n de $\Lambda \times \mathbb{C}$ qui de plus est algébrique dans les fibres de $p: \Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \Lambda$.

De plus $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ est homogène pour H_r et θ_Λ est homogène de degré 1 pour H_r donc S_r est homogène pour h_r .

En effet dans le système de coordonnées (x, τ) de Λ que nous avons considéré plus haut on a:

$$H_r(\lambda; (x, \tau, x^*, \tau^*)) = (x, \lambda^r \tau, \lambda x^*, \lambda^{1-r} \tau^*)$$

$$h_r(\lambda; (x, \tau, \mu)) = (x, \lambda^r \tau, \lambda\mu)$$

et

$$\tilde{\pi}((x, \tau, x^*, \tau^*)) = (x, \tau, \tau\tau^*).$$

Il reste à démontrer le point (c). Pour cela puisque S_r est l'adhérence de S_r^0 , il suffit de montrer que pour tout point η_0 de Λ on a $S_r^0 \cap p^{-1}(\eta_0) \neq p^{-1}(\eta_0)$. Soit

$\Sigma_{\eta_0} = \Sigma_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) \cap \pi^{-1}(\eta_0)$, on a $S_r^0 \cap p^{-1}(\eta_0) = \theta_{\Lambda}(\Sigma_{\eta_0})$ donc il suffit de montrer que pour tout $\eta_0 \in \Lambda$, θ_{Λ} est une application finie de $\Sigma_{\eta_0} \rightarrow \mathbb{C}$ ou encore que $d\theta_{\Lambda}$ est nulle sur l'espace tangent à la partie lisse de Σ_{η_0} .

Comme θ_{Λ} est nulle sur la section nulle de Λ on peut se limiter aux points η_0 de Λ situés hors de cette section nulle.

Fixons donc $\eta_0 \in \Lambda$ et notons $\tilde{\Sigma}_{\eta_0} = H_r(\mathbb{C}^*, \Sigma_{\eta_0})$ l'homogénéisé de Σ_{η_0} pour l'action H_r de \mathbb{C}^* . $\tilde{\Sigma}_{\eta_0}$ est un sous-ensemble analytique de $\Sigma_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ donc est isotrope. Soient ζ un point lisse de Σ_{η_0} et v un vecteur tangent à Σ_{η_0} en ζ . Le champ d'Euler u_r de H_r n'est pas parallèle à v donc ζ est un point lisse de $\tilde{\Sigma}_{\eta_0}$ et u_r et v sont deux vecteurs de l'espace tangent à $\tilde{\Sigma}_{\eta_0}$ qui est isotrope donc $\Omega(u_r, v) = 0$.

Or, par définition, $\omega_r = \Omega \lrcorner u_r$ donc $\omega_r(v) = \Omega(u_r, v) = 0$.

Par ailleurs ω_0 est nulle sur la fibre $\pi^{-1}(\eta_0)$ et comme on l'a vu plus haut $\omega_r = r\omega_1 + (1-r)\omega_0$ et $d\theta_{\Lambda} = \omega_0 - \omega_1$ donc

$$\omega_r|_{\pi^{-1}(\eta_0)} = -r d\theta_{\Lambda}|_{\pi^{-1}(\eta_0)}.$$

Ceci montre que $d\theta_{\Lambda}(v) = 0$ pour tout vecteur v de l'espace tangent à la partie lisse de Σ_{η_0} .

Q.E.D.

On peut mettre le théorème 4.3.2 sous une forme plus proche de celle du théorème 4.2.1.

COROLLAIRE 4.3.3. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonome défini au voisinage de Λ et soit $r \in]1, +\infty[\cap \mathbb{Q}$.

Pour tout ouvert V relativement compact de Λ , il existe un polynôme $b_r(T) \in \mathcal{O}_{\Lambda}[T]$ qui vérifie :

- (a) Il existe k tel que pour tout l le coefficient de T^l de $b_r(T)$ soit une fonction holomorphe sur V homogène de degré $(k-l)/r$.
- (b) Les coefficients de $b_r(T)$ sont premiers entre eux dans l'anneau des fonctions holomorphes.
- (c) Pour tout bonne $F_{\Lambda, r}^*$ -filtration $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{M}$ de \mathcal{M} on a sur $\pi^{-1}(V)$:

$$b_r(\theta_{\Lambda})[\mathrm{gr}_{F_{\Lambda, r}^*} \mathcal{M}] = 0.$$

Démonstration. — D'après le théorème 4.3.2, il existe un polynôme $\tilde{b}_r(T) \in \mathcal{O}_{\Lambda}[T]$ tel que $\Sigma_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M}) \subset \{\tilde{b}_r(\theta_{\Lambda}) = 0\}$.

Si $F_{\Lambda, r}^* \mathcal{M}$ est une bonne $F_{\Lambda, r}^*$ -filtration, $\Sigma_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ est le support de $\mathrm{gr}_{F_{\Lambda, r}^*} \mathcal{M}$ donc il existe un entier N tel que $[\tilde{b}_r(\theta_{\Lambda})]^N(\mathrm{gr}_{F_{\Lambda, r}^*} \mathcal{M}) = 0$.

L'entier N ne dépend que du cycle analytique $\tilde{\Sigma}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{M})$ donc est indépendant de la bonne filtration.

Enfin les propriétés (b) et (c) du corollaire se déduisent respectivement des propriétés (d) et (e) du théorème.

Nous dirons que $b_r(T)$ est une b -fonction relative de \mathcal{M} pour l'indice r .

L'ensemble des polynômes $b_r(T)$ qui vérifient le corollaire 4.3.3 est un idéal de $\mathcal{O}_\Lambda[T]$ qui en général n'est pas principal et ne peut définir une b -fonction relative unique.

Remarque. — Si r n'est pas un indice critique de \mathcal{M} (donc pour tout r sauf un nombre fini d'après la proposition 4.3.1) on a $\Sigma_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) = \text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M}) \subset S_\Lambda$ donc la variété S_r du théorème est contenue dans $\Lambda \times \{0\}$ et une b -fonction relative est $b_r(T) = T^m$.

Supposons que Λ est le fibré conormal à une hypersurface Y de X d'équation $Y = \{(x, t) \in X/t=0\}$. Si (x, τ) sont les coordonnées de Λ et (x, τ, x^*, τ^*) celles de $T^*\Lambda$, la fonction $b_r(x, \tau, \tau\tau^*)$ est l'image dans $\text{gr}_F \mathcal{E}_X$ de l'opérateur $B(x, D_\tau, tD_t)$.

Le corollaire peut encore s'exprimer sous la forme suivante :

Pour toute section u de \mathcal{M} , il existe un opérateur $B(x, t, D_t)$ indépendant de D_x (i. e. qui commute avec x_1, \dots, x_n), un opérateur $Q(x, t, D_x, D_t)$ et un entier k tels que :

$$(a) (B+Q)u=0;$$

$$(b) B \in F_{\Lambda, r}^k \mathcal{E}_X, B \notin F_{\Lambda, r}^{k-1} \mathcal{E}_X, Q \in F_{\Lambda, r}^{k-1} \mathcal{E}_X.$$

En fait b_r est homogène donc peut s'écrire de manière unique

$$b_r(x, \tau, \tau\tau^*) = \tau^\alpha \tau^{*\beta} q_r(x, \tau^{*p} \tau^{p-q})$$

avec $r=p/q$ (p, q entiers premiers entre eux) et $q_r(x, 0) \neq 0$.

Lorsque $X=\mathbb{C}$ et $\Lambda=T_{\{0\}}^*\mathbb{C}$, le polynôme $q_r(T^{p-q})$ est l'équation déterminante de Malgrange [21] et Ramis [23]. Cette équation détermine la croissance des solutions du système (Ramis [23]).

Dans le cas général l'opérateur $B(x, t, D_t)$ ne contenant pas de dérivation en x peut être considéré comme un opérateur différentiel (ou microdifférentiel) en une variable t à paramètres holomorphes en x . Nous verrons dans un article ultérieur [17] que grâce à cette propriété, l'opérateur B , ou plutôt l'équation déterminante q_r , contrôle la croissance des solutions du module \mathcal{M} comme dans le cas de la dimension 1 considéré par Ramis.

5. Prolongement du polygône de Newton

Dans le cas de la dimension 1, Ramis [23] montre que pour les opérateurs à coefficients polynomiaux on peut encore définir le polygône de Newton pour les indices $r \in [-\infty, 1]$.

Nous allons voir que l'on peut faire de même sur un fibré vectoriel en dimension supérieure. Nous considérerons le cas des opérateurs différentiels sur un fibré vectoriel dans le premier paragraphe et nous généralisons la construction au cas des opérateurs microdifférentiels dans le paragraphe 5.3.

5.1. POLYGÔNE DE NEWTON DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX.

— Dans ce paragraphe, nous supposons que X est un fibré vectoriel de base Y , nous identifions Y à la section nulle de X et nous noterons $p: X \rightarrow Y$ la projection canonique.

Le faisceau des fonctions holomorphes sur X polynomiales dans les fibres de p sera noté $\mathcal{O}_{[X]}$ et $\mathcal{D}_{[X]}$ désignera le faisceau des opérateurs différentiels sur X à coefficients dans $\mathcal{O}_{[X]}$.

On notera, pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_{[X]}[m]$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{[X]}$ des fonctions homogènes de degré m dans les fibres de p et, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}_{[X]}[m]$ le sous-faisceau de $\mathcal{D}_{[X]}$ des opérateurs différentiels homogènes de degré m , c'est-à-dire tel que

$$\mathcal{D}_{[X]}[m] \cdot \mathcal{O}_{[X]}[m'] \subset \mathcal{O}_{[X]}[m' + m].$$

Si e_X est le champ d'Euler du fibré vectoriel X , on a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{[X]}[m] &= \{f \in \mathcal{O}_{[X]} / e_X f = mf\} \\ \mathcal{D}_{[X]}[m] &= \{f \in \mathcal{D}_{[X]} / [e_X, P] = +mP\}.\end{aligned}$$

Les faisceaux $\mathcal{O}_{[X]}$ et $\mathcal{D}_{[X]}$ sont donc gradués par :

$$\mathcal{O}_{[X]} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{[X]}[m] \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{[X]} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{[X]}[m].$$

(On note toujours $\mathcal{D}_{X,m}$ le faisceau des opérateurs différentiels dont l'ordre usuel (i.e. le degré en $\partial/\partial x$) est inférieur ou égal à m). Soient Λ le fibré conormal à Y dans X , π_0 la projection $\Lambda \rightarrow Y$, et $F_\Lambda^* \mathcal{D}_X$ la filtration du paragraphe 2.1.1. Comme on est sur la section nulle cette filtration et l'isomorphisme $\text{gr}_{F_\Lambda}^k \mathcal{D}_X \rightarrow \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}[k]$ sont canoniques.

PROPOSITION 5.1.1. — Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'application canonique

$$F_\Lambda^{-m} \mathcal{D}_X \rightarrow \text{gr}_{F_\Lambda}^{-m} \mathcal{D}_X \rightarrow \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}[-m]$$

induit un isomorphisme $\mathcal{D}_{[X]}[m] \big|_Y \rightarrow \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}[-m]$.

On a donc un isomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$\varphi: p_* \mathcal{D}_{[X]} \rightarrow \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}$$

qui transforme la graduation de $\mathcal{D}_{[X]}$ en la graduation opposée à celle de $\mathcal{D}_{[\Lambda]}$.

Démonstration. — Choisissons des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q)$ de X telles que $Y = \{t = 0\}$ et que les coordonnées (t_1, \dots, t_q) soient linéaires.

Alors $e_X = \sum_{i=1}^q t_i D_{t_i}$ et les opérateurs de $\mathcal{D}_{[X]}[m]$ s'écrivent :

$$P = \sum_{|\beta| - |\gamma| = m} a_{\alpha\beta\gamma}(y) D_y^\alpha t^\beta D_t^\gamma.$$

On vérifie donc immédiatement que $\mathcal{D}_{[X]}[m] \subset F_\Lambda^{-m} \mathcal{D}_X$ et que si $(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_q)$ sont les coordonnées de Λ induites par (x, t) l'image de P dans $\pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}[-m]$ est égale à

$$(5.1.1) \quad \varphi(P) = \sum_{|\beta| - |\gamma| = m} a_{\alpha\beta\gamma}(\nu) D_y^\alpha (-D_t)^\beta \tau^\gamma.$$

(On voit que φ n'est autre que la transformation de Fourier).

DÉFINITION 5.1.2. — (i) La filtration $F_{-\infty}^* \mathcal{D}_{[X]}$ est définie sur $\mathcal{D}_{[X] | Y} = p_* \mathcal{D}_{[X]}$ par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_{-\infty}^k \mathcal{D}_{[X]} = \bigoplus_{m \leq k} p_* \mathcal{D}_{[X]}[m].$$

(ii) Si P est un opérateur de $p_* \mathcal{D}_{[X]}$ on définit le sous-ensemble $S^-(P)$ de \mathbb{R}^2 par :

$$(\lambda, \mu) \notin S^-(P) \Leftrightarrow \exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \quad k > \mu, l < \lambda + \mu, \quad P \in F_{-\infty}^{-k} \mathcal{D}_{[X]} + p_* \mathcal{D}_{[X]}, l.$$

(iii) On note $N^-(P)$ l'enveloppe convexe de $S^-(P)$ (partie négative du polygône de Newton de P).

Soient $S_\Lambda(P)$ et $N_\Lambda(P)$ les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 définis au paragraphe 2.2 pour $\Lambda = T_Y^* X$.

On pose $S^+(P) = S_\Lambda(P)$ et $N^+(P) = N_\Lambda(P)$ et on définit encore $S(P) = S^+(P) \cap S^-(P)$ et $N(P) = N^+(P) \cap N^-(P)$.

$N(P)$ est le polygône de Newton de P , c'est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 stable par les translations $(\lambda, \mu) \rightarrow (\lambda - a, \mu)$ pour $a \geq 0$.

Remarque. — Si P est un opérateur de \mathcal{D}_X qui n'est pas dans $\mathcal{D}_{[X]}$, c'est-à-dire si un des coefficients de P n'est pas polynomial, on a $N(P) = N^+(P)$ (ce qui justifie les notations du paragraphe 2).

Soit r un nombre rationnel ou $r = \pm \infty$ et $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, p et q premiers entre eux tels que $r = p/q$ [si $r = \pm \infty$ on prend $(p, q) = (\pm 1, 0)$].

DÉFINITION 5.1.3. — La filtration $F_r^* \mathcal{D}_{[X]}$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_r^k \mathcal{D}_{[X]} = \{P \in p_* \mathcal{D}_{[X]} / N(P) \subset \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / p\mu + q\lambda \leq k\}\}.$$

(Pour $r \geq 1$ la filtration F_r^* est la filtration $F_{\Lambda, r}^*$ du paragraphe 3.2).

Notons $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda / Y]}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ des fonctions holomorphes sur $T^* \Lambda$ et polynomiales dans les fibres de

$$\tilde{\pi}: T^* \Lambda = T^*(T_Y^* X) \rightarrow Y$$

et

$$\mathcal{O}_{[T^* \Lambda / Y]}(i, j) = \mathcal{O}_{[T^* \Lambda / Y]} \cap \mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}(i, j).$$

Les résultats du paragraphe 2.2 s'étendent *mutatis mutandis* au cas $r < 1$ et en particulier on a pour $-\infty < r < +\infty$ des isomorphismes

$$\mathrm{gr}_{F_r}^k \mathcal{D}_{[X]} = \bigoplus_{p\mu + (q-p)\lambda = k} \tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda / Y]}(\lambda, \mu).$$

Pour $r = -\infty$, on $\mathrm{gr}_{F_{-\infty}} \mathcal{D}_{[X]} = \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}$.

De même on montre :

PROPOSITION 5.1.4. — (i) Pour tout r , $-\infty \leq r \leq +\infty$, la filtration $F_r^* \mathcal{D}_{[X]}$ est noethérienne.

(ii) Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent muni d'une bonne $F_r^* \mathcal{D}_{[X]}$ -filtration, le gradué associé $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ est un $\text{gr}_{F_r} \mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent.

Si $r \neq \pm \infty$, $\text{gr}_{F_r} \mathcal{D}_{[X]} \simeq \tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda/Y]}$ donc $\tilde{\pi}^{-1} \text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ définit un cycle analytique de $T^* \Lambda$ qui est indépendant du choix de la bonne filtration d'après [25], chap. II proposition 1.3.1.

Nous noterons $\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$ ce cycle et $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ son support.

Comme au paragraphe 3.2 on peut définir des filtrations G_+^* et G_-^* sur $\text{gr}_{F_r} \mathcal{D}_{[X]} \simeq \tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{[T^* \Lambda/Y]}$ suivant les formules (3.2.1) et (3.2.2) et étendre à tout $r \neq \pm \infty$ la définition 3.2.4 des cycles $\widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$.

Enfin lorsque $r = \pm \infty$, la proposition 5.1.1 montre que l'on a des isomorphismes $\text{gr}_{F_{-\infty}} \mathcal{D}_{[X]} \simeq \pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]} \simeq \text{gr}_{F_{\infty}} \mathcal{D}_{[X]}$ et si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent muni d'une bonne $F_r \mathcal{D}_{[X]}$ -filtration ($r = \pm \infty$), nous noterons $\widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M}) = \widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ le cycle caractéristique de $\text{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ considéré comme $\pi_{0*} \mathcal{D}_{[\Lambda]}$ -module cohérent.

Nous avons ainsi défini les cycles analytiques bihomogènes $\widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ de $T^* \Lambda$ pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$, ainsi que leurs supports $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$.

PROPOSITION 5.1.5. — Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent et si $\Lambda = T_Y^* X$, alors pour tout $r > 1$ on a :

$$\widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M}) = \widetilde{\text{Ch}}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{M})$$

et

$$\widetilde{\text{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M}) = \widetilde{\text{Ch}}_{\Lambda}^{(r)}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{M}).$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que \mathcal{D}_X et $\mathcal{D}_{[X]}$ ont le même complété pour les filtrations $F_{\Lambda, r}^*$ et $F_r^* \mathcal{D}_{[X]}$ et d'appliquer alors le lemme 2.6.0 de [15].

Nous dirons que r est un indice critique de \mathcal{M} en un point x de Λ si r est égal à $+\infty$ ou à $-\infty$ ou si r est un nombre rationnel tel que les variétés $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$, $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ soient distinctes au voisinage de $\pi^{-1}(x)$ ($\pi: T^* \Lambda \rightarrow \Lambda$).

THÉORÈME 5.1.6. — L'ensemble des indices critiques d'un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent est fini sur tout compact de Λ .

Démonstration. — Si $r \geq 1$, le théorème se déduit immédiatement du théorème 3.4.1 et de la proposition 5.1.5.

Il reste à étudier le cas $r \leq 1$. Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 3.4.1, il suffit de montrer que si \mathcal{J} est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{[X]}$, il existe un nombre fini d'opérateurs P_1, \dots, P_N de \mathcal{J} tels que pour tout r , $\sigma^{(r)}(\mathcal{J})$ soit engendré par les fonctions $\sigma^{(r)}(P_1), \dots, \sigma^{(r)}(P_N)$. ($\sigma^{(r)}(\mathcal{J})$ désigne le $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ -module engendré par les fonctions $\sigma^{(r)}(Q)$ pour Q élément de \mathcal{J}).

Fixons un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q)$ de X telles que $Y = \{t_1 = \dots = t_q = 0\}$, alors Λ a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_q)$ et $T^* \Lambda (x, \tau, x^*, \tau^*)$.

Notons $K = \mathcal{O}_{[X]}[t_1^{-1}, \dots, t_q^{-1}]$ l'anneau des fonctions méromorphes sur $\{t_1 = 0\} \cup \dots \cup \{t_q = 0\}$ et $K \mathcal{D}_{[X]} = K \otimes_{\mathcal{O}_{[X]}} \mathcal{D}_{[X]}$.

Il est clair que l'on peut encore définir les filtrations F_r^* sur l'anneau $K \mathcal{D}_{[X]}$. Le gradué associé sera le localisé le long de $\{\tau_1^* = 0\} \cup \dots \cup \{\tau_q^* = 0\}$ du gradué de $\mathcal{D}_{[X]}$, c'est-à-dire l'anneau $\tilde{K} = \mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}[\tau_1^{*-1}, \dots, \tau_q^{*-1}]$.

D'autre part on peut définir sur $K \mathcal{D}_{[X]}$ la transformation ψ associée au changement de variables $s_i = 1/t_i$ pour $i = 1, \dots, q$. On aura $\psi(t_i) = 1/s_i$ et $\psi(D_{t_i}) = -s_i^2 D_{s_i}$, on constate que ψ échange les filtrations $F_r^*, K \mathcal{D}_{[X]}$ et $F_{2-r}^*, K \mathcal{D}_{[X]}$.

Soit \mathcal{J} un idéal cohérent de $K \mathcal{D}_{[X]}$, il existe un idéal \mathcal{I} de $\mathcal{D}_{[X]}$ tel que $\mathcal{J} = K \otimes_{\mathcal{O}_{[X]}} \mathcal{I}$ et donc il existe des opérateurs P_1, \dots, P_N de $\mathcal{J} \cap \mathcal{D}_{[X]}$ tels que pour tout $r \geq 1$, $\sigma^{(r)}(\mathcal{J})$ soit engendré par $\sigma^{(r)}(P_1), \dots, \sigma^{(r)}(P_N)$. Grâce à la transformation ψ on a encore le même résultat pour $r \leq 1$.

Si \mathcal{I} est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{[X]}$, il existe donc des opérateurs P_1, \dots, P_N de \mathcal{I} tels que pour tout $r \in]-\infty, +\infty[$, $\sigma^{(r)}(K \otimes \mathcal{I}) = \tilde{K} \otimes \sigma^{(r)}(\mathcal{I})$ soit engendré par $\sigma^{(r)}(P_1), \dots, \sigma^{(r)}(P_N)$.

Il existe donc un nombre fini d'indices r_1, \dots, r_M tels que en dehors des hypersurfaces $\tau_1^* = 0, \dots, \tau_q^* = 0$ les variétés $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{M})$ soient distinctes. En faisant un changement de variables sur (t_1, \dots, t_q) on déplace ces hypersurfaces et on voit que le résultat est vrai en dehors de la variété $\tau_1^* = \dots = \tau_q^* = 0$.

Pour terminer la démonstration on considère le fibré $\hat{X} = X \times \mathbb{C}$ sur la même base Y et le $\mathcal{D}_{[X]}$ -module $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$.

Il est facile de voir que pour tout r on a :

$$\text{Ch}^{(r)}(\hat{\mathcal{M}}) = \text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M}) \times \{(\sigma, \sigma^*) \in T^*(T_{\{0\}}^* \mathbb{C}) / \sigma = 0\}$$

et

$$\Sigma^{(r)}(\hat{\mathcal{M}}) = \Sigma^{(r)}(\mathcal{M}) \times \{(\sigma, \sigma^*) \in T^*(T_{\{0\}}^* \mathbb{C}) / \sigma = 0\}.$$

D'après ce qui précède le théorème est vrai pour $\hat{\mathcal{M}}$ en dehors de $\sigma^* = 0$ donc il est vrai pour \mathcal{M} .

PROPOSITION 5.1.7. — (i) Pour $r \in]-\infty, +\infty[$, $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique involutif de $T^* \Lambda$.

(ii) Pour $r \in]-\infty, +\infty[$, $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles analytiques involutifs bihomogènes de $T^* \Lambda$.

Démonstration. — Le point (i) se montre en appliquant le théorème I' de Gabber [4]. Or d'après le théorème 5.1.6, pour tout r il existe r' tel que $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M}) = \Sigma^{(r')}(\mathcal{M})$ (cf. démonstration de la proposition 3.5.2) et de même il existe r'' tel que $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M}) = \Sigma^{(r'')}(\mathcal{M})$ ce qui montre (ii).

Remarquons encore que puisque X est un fibré vectoriel sur Y on a un isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} T_Y X$. Or comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1 on a aussi un isomorphisme canonique $T^*(T_Y X) \xrightarrow{\sim} T^*(T_Y^* X)$ donc si $\Lambda = T_Y^* X$ on a un isomorphisme $T^* X \simeq T^* \Lambda$ et il est facile de voir que par cet isomorphisme on échange $\Sigma^{(1)}(\mathcal{M})$ et la variété caractéristique de \mathcal{M} $\text{Ch}(\mathcal{M}) = \text{Ch}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{M})$.

Nous allons à présent montrer l'analogue du théorème 4.1.1. La dimension que nous devons considérer ici n'est plus la dimension locale de la variété caractéristique mais la dimension globale de cette variété sur les fibres de $p: X \rightarrow Y$.

Soient $\tilde{\pi}_0: T^*X \rightarrow Y$ et $\tilde{\pi}: T^*\Lambda \rightarrow Y$ les projections canoniques ($\Lambda = T_Y^*X$).

Si S est un ensemble analytique notons $d(S; x)$ la dimension locale de S au point x .

Pour $\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent et $y \in Y$ posons :

$$d_y(\mathcal{M}) = \sup_{\tilde{\pi}_0(x)=y} \{d(\text{Ch}(\mathcal{M}); x)\}$$

$$\text{et pour } -\infty < r < +\infty \quad d_y^{(r)}(\mathcal{M}) = \sup_{\tilde{\pi}(x)=y} \{d(\Sigma^{(r)}(\mathcal{M}); x)\}.$$

D'après la remarque ci-dessus on a toujours $d_y(\mathcal{M}) = d_y^{(1)}(\mathcal{M})$.

THÉORÈME 5.1.7. — *Pour tout $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent \mathcal{M} , tout point y de Y et tout r tel que $-\infty < r < +\infty$ on a :*

$$d_y^{(r)}(\mathcal{M}) \leq d_y(\mathcal{M})$$

(avec égalité pour $r \in [0, 1]$).

Démonstration :

1. *Cas $0 \leq r \leq 1$.*

Si $r \in [0, 1]$, on a $F_r^k \mathcal{D}_{[X]} = 0$ pour $k < 0$, c'est-à-dire que la filtration F_r^* est alors discrète au sens de Björk [2], chap. 2.

D'après le théorème 7.1, chap. 2 de [2], $d_y^{(r)}(\mathcal{M})$ est alors le plus grand entier d tel que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{[X]}}^{2n-d}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{[X]})$ soit non nul sur $p^{-1}(y)$.

$d_y^{(r)}(\mathcal{M})$ est donc indépendant de $r \in [0, 1]$.

(Remarquons que dans l'appendice du chapitre 2 de [2], Björk montre l'égalité ci-dessus pour $r=1/2$ et $r=1$ lorsque Y est un point).

2. *Cas $r > 1$.*

Dans ce cas on se ramène immédiatement au théorème 4.1.1 par la proposition 5.1.5.

3. *Cas $r < 0$.*

Nous allons nous ramener au cas précédent en utilisant la transformation φ de la proposition 5.1.1.

Λ est un fibré vectoriel sur Y donc on peut considérer les filtrations $F_r^* \mathcal{D}_{[\Lambda]}$ et la formule 5.1.1 montre immédiatement que pour tout k et tout r on a :

$$\varphi(F_r^k \mathcal{D}_{[X]}) = F_{1-r}^k \mathcal{D}_{[\Lambda]}.$$

On en déduit que pour tout $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent \mathcal{M} et tout $r \in]-\infty, +\infty[$ on a :

$$d_y^{(r)}(\mathcal{M}) = d_y^{(1-r)}(\varphi(\mathcal{M})).$$

Si $r < 0$, on a $1-r > 1$ donc d'après le cas 2 :

$$d_y^{(r)}(\mathcal{M}) = d_y^{(1-r)}(\varphi(\mathcal{M})) \leq d_y(\varphi(\mathcal{M})) = d_y^{(0)}(\varphi(\mathcal{M})) = d_y^{(1)}(\mathcal{M}).$$

COROLLAIRE 5.1.8. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonôme en tout point de X (i.e. la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{D}_{[X]}} \mathcal{M}$ est lagrangienne).

Alors pour tout r , les ensembles $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$, $\text{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles analytiques lagrangiens de $T^*\Lambda$.

Le corollaire 5.1.8 montre que l'on peut étendre les résultats du paragraphe 4.3 au cas $r \leq 1$:

Notons, comme au paragraphe 4.3, θ_Λ le symbole principal du champ d'Euler e_Λ de Λ et $\mathcal{O}_{[\Lambda]}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Λ , polynomiales dans les fibres de $p: \Lambda \rightarrow Y$.

COROLLAIRE 5.1.9. — Soient \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonome sur X , $r \in]-\infty, +\infty[$ et $F_r^* \mathcal{M}$ une bonne $F_r^* \mathcal{D}_{[X]}$ -filtration.

Pour tout ouvert relativement compact V de Y , il existe un polynôme $b_r(T) \in \mathcal{O}_{[\Lambda]}[T]$, dont les coefficients sont premiers entre eux si $r \neq 0$, tel que

$$b_r(\theta_\Lambda)(\text{gr}_{F_r^*} \mathcal{M}) = 0 \quad \text{sur } p^{-1}(V).$$

(La démonstration est identique à celle du théorème 4.3.2, et du corollaire 4.3.3 sauf pour le point c du théorème qui n'est vrai que si $r \neq 0$.)

Il reste à étudier le cas $r = -\infty$. Mais comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 5.1.7, la transformation ϕ permet de ramener ce cas à $r = +\infty$ et alors le théorème 4.2.1 donne :

PROPOSITION 5.1.10. — Soient \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module holonôme sur X et $F_{-\infty} \mathcal{M}$ une bonne $F_{-\infty} \mathcal{D}_{[X]}$ -filtration.

Pour tout ouvert relativement compact V de Y , il existe un polynôme $b(T) \in \mathbb{C}[T]$ tel que sur $p^{-1}(V)$ on ait :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad b(e_\Lambda - k)(\text{gr}_{F_{-\infty}}^k \mathcal{M}) = 0.$$

5.2. THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE. — Nous montrons ici un théorème d'équivalence entre variétés lagrangiennes munies d'un opérateur microdifférentiel particulier (proposition 5.2.2) qui nous permettra ensuite de microlocaliser les constructions du paragraphe 5.1.

Soient X une variété analytique complexe et Λ une sous-variété lagrangienne homogène lisse de $T^*\Lambda$. Soit e_Λ le champ d'Euler de Λ .

DÉFINITION 5.2.1. — Un opérateur microdifférentiel Θ sera dit adapté à Λ si Θ est d'ordre 1 et si son image dans $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X \simeq \mathcal{D}_{(\Lambda)}$ est égale à $(-e_\Lambda - 1)$.

Un opérateur Θ est donc adapté à Λ si et seulement si :

- (i) Θ est un opérateur d'ordre 1;
- (ii) dans un système de coordonnées son symbole $\Theta = \theta_1(x, \xi) + \theta_0(x, \xi) + \dots$ vérifie :
 - (a) $\theta_1|_\Lambda = 0$ et $\theta_0|_\Lambda = 0$
 - (b) $d\theta_1 = \omega_X$ modulo $I_\Lambda \Omega^1$

(ω_X est la 1-forme canonique de T^*X et I_Λ l'idéal de définition de Λ).

Sous cette forme la définition 5.1 est très voisine de celle de [11].

PROPOSITION 5.2.2. — Soient Θ et Θ' deux opérateurs microdifférentiels adaptés à une variété lagrangienne Λ .

Il existe une transformation canonique quantifiée qui conserve Λ et qui transforme Θ en Θ' .

On peut supposer de plus que l'isomorphisme induit par cette transformation sur $\mathrm{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X \simeq \mathcal{D}_{(\Lambda)}$ est l'identité et dans ce cas la transformation canonique quantifiée est unique.

Pour montrer cette proposition nous devons rappeler un résultat sur les équations de type de Fuchs :

LEMME 5.2.3. — Soit u un champ de vecteur sur $X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, muni des coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ qui est de la forme :

$$u = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p b_j(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

où les fonctions a_i ($i=1, \dots, n$) [resp. b_j ($j=1, \dots, p$)] sont des fonctions holomorphes définies près de $(0, 0)$ qui s'annulent à l'ordre 2 (resp. à l'ordre 1) sur la sous-variété $Y = \{(x, y) \in X / x=0\}$.

Alors pour toute fonction $g(x, y)$ nulle sur Y , toute fonction $\varphi(y)$ holomorphe sur Y et tout n -uplet $(\psi_1(y), \dots, \psi_k(y))$ de fonctions holomorphes sur Y , les systèmes :

$$(5.1) \quad \begin{cases} u(f) = gf \\ f(x, y)|_{x=0} = \varphi(y) \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \begin{cases} u(f) = f \\ f(x, y)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y)|_{x=0} = \psi_k(y), \quad k=1, \dots, n \end{cases}$$

ont chacun une et seule solution holomorphe près de $(0, 0)$.

Démonstration. — Notons $\hat{\mathcal{O}}_{X|Y}$ l'espace des séries formelles $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha(y) x^\alpha$ où les fonctions f_α sont holomorphes sur un même ouvert de Y .

D'après Bengel-Gérard [1] (théorèmes 3.3 et 4.4) si $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X|Y}$ vérifie $u(f) = 0$ ou $u(f) = f$, elle est holomorphe au voisinage de $(0, 0)$. Il suffit donc de montrer le lemme 5.3 dans $\hat{\mathcal{O}}_{X|Y}$.

Développant les fonctions $a_i(x, y)$ et $b_j(x, y)$ en séries de Taylor en x on vérifie immédiatement l'existence et l'unicité des fonctions f_α . Par exemple dans le cas de (1) on aura :

$$f_0(y) = \varphi(y)$$

puis pour $|\alpha| > 0$, f_α sera combinaison linéaire des fonctions f_β telles que $|\beta| < |\alpha|$.

LEMME 5.2.4. — Soient X une variété analytique complexe munie de coordonnées (x_1, \dots, x_n, t) et Λ le conormal à l'hypersurface $\{t=0\}$, i.e. $\Lambda = \{(x, t, \xi, \tau) \in T^*X / t=0,$

$\xi=0\}$. On se place au voisinage de Λ en dehors de la section nulle c'est-à-dire que l'on suppose $\tau \neq 0$.

Soit $f(x, t, \xi, \tau) = t + q(x, t, \xi, \tau)$ où q est une fonction holomorphe homogène de degré 0 en (ξ, τ) , nulle à l'ordre 2 sur Λ .

Il existe une transformation canonique homogène (unique) qui se réduit à l'identité sur Λ et qui transforme la fonction $f(x, t, \xi, \tau)\tau$ en $t\tau$.

Démonstration. — Cherchons cette transformation sous la forme

$$(x, t, \xi, \tau) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\xi}, \tilde{\tau}).$$

On veut $\tilde{t}\tilde{\tau} = \tau f(x, t, \xi, \tau)$ on aura donc :

$$\tilde{t} = af \quad \text{et} \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{a}$$

avec a homogène de degré 0 en (ξ, τ) et $a|_{\Lambda} = 1$.

L'équation $\{\tilde{\tau}, \tilde{t}\} = 1$ donne :

$$1 = \{\tilde{\tau}, \tilde{t}\} = \left\{ \frac{\tau}{a}, af \right\} = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial t}(af) - \tau \{a, f\} \right]$$

soit puisque $f = t + q$:

$$t \frac{\partial a}{\partial t} + q \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial t} - \tau \frac{\partial a}{\partial \tau} + \tau H_q(a) = 0$$

(H_q désigne le champ hamiltonien de q donc par définition $H_q(a) = \{q, a\}$).

Si a est homogène de degré 0 on aura

$$\left(\text{en notant } \xi \frac{\partial}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right), \quad \tau \frac{\partial a}{\partial t} + \xi \frac{\partial a}{\partial \xi} = 0$$

et a devra vérifier les équations suivantes :

$$(5.3) \quad t \frac{\partial a}{\partial t} + \xi \frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial t} a + q \frac{\partial a}{\partial t} + \tau H_q(a) = 0$$

$$(5.4) \quad a|_{t=0, \xi=0} = 1.$$

D'après le lemme 5.2.3, il existe une et une seule fonction a vérifiant ces équations.

Le champ de vecteur $\tau(\partial/\partial\tau) + \xi(\partial/\partial\xi)$ commute avec l'opérateur de (5.3) car q est homogène de degré 0 en (ξ, τ) donc $\tau(\partial a/\partial\tau) + \xi(\partial a/\partial\xi)$ vérifie l'équation (5.3) avec une trace nulle sur Λ , l'unicité de la solution du lemme 5.3 montre que $\tau(\partial a/\partial\tau) + \xi(\partial a/\partial\xi) = 0$ c'est-à-dire que a est homogène de degré 0 en (ξ, τ) .

Si $\tilde{t} = af$ et $\tilde{\tau} = \tau/a$ avec a solution de (5.3)-(5.4) on a donc $\{\tilde{\tau}, \tilde{t}\} = 1$, \tilde{t} est homogène de degré 0 et $\tilde{\tau}$ homogène de degré 1 en (ξ, τ) , enfin $\tilde{\tau}|_{\Lambda} = \tau$.

On aura

$$H_{\tau} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\tau}{a^2} H_a$$

$$H_{\tau} = a H_f + f H_a = -a \frac{\partial}{\partial \tau} + a H_q + f H_a$$

et donc

$$\tilde{t} H_{\tau} + \tilde{\tau} H_{\tau} = t \frac{\partial}{\partial t} - \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + q \frac{\partial}{\partial t} + \tau H_q.$$

Posons $u = t \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + q \frac{\partial}{\partial t} + \tau H_q$, alors sur les fonctions homogènes de degré λ en (ξ, τ) on aura :

$$\tilde{t} H_{\tau} + \tilde{\tau} H_{\tau} = u - \lambda.$$

Appliquant de nouveau le lemme 5.3, on voit qu'il existe des fonctions uniques $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n$ qui vérifient :

$$\begin{aligned} i=1, \dots, n & \quad \begin{cases} u(\tilde{x}_i) = 0 \\ \tilde{x}_i|_{\Lambda} = x_i \end{cases} \\ i=1, \dots, n & \quad \begin{cases} u(\tilde{\xi}_i) = \tilde{\xi}_i \\ \tilde{\xi}_i|_{\Lambda} = 0, & \frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial t}|_{\Lambda} = 0, & \frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial \xi_i}|_{\Lambda} = 1 \\ \frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial \xi_k} = 0, & k \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme pour la fonction a , les équations précédentes impliquent que les fonctions $\tilde{x}_i, i=1, \dots, n$ (resp. $\tilde{\xi}_i, i=1, \dots, n$) sont homogènes de degré 0 (resp. de degré 1) en (ξ, τ) .

De plus H_{τ} commute avec $\tilde{t} H_{\tau} + \tilde{\tau} H_{\tau}$ on aura donc, pour tout i , $u(H_{\tau}(\tilde{x}_i)) = 0$ et $H_{\tau}(\tilde{x}_i)|_{\Lambda} = 0$. L'unicité de la solution des ces équations donne donc $H_{\tau}(\tilde{x}_i) = 0$ et donc $H_{\tau}(\tilde{x}_i) = 0$.

On montrerait de même que, pour tout i , $H_{\tau}(\tilde{\xi}_i) = 0$ et $H_{\tau}(\tilde{\xi}_i) = 0$ puisque les crochets de Poisson $\{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\}, \{\tilde{\xi}_i, \tilde{\xi}_j\}, \{\tilde{\xi}_i, \tilde{x}_j\}$ sont nuls pour tout (i, j) sauf $\{\tilde{\xi}_i, \tilde{x}_i\}$ qui vaut 1 pour $i=1, \dots, n$.

Nous avons donc défini des coordonnées symplectiques $(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\xi}, \tilde{\tau})$ telles que $\tilde{t} \tilde{\tau} = f \tau$ et $(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{\xi}, \tilde{\tau}) = (x, t, \xi, \tau)$ sur Λ .

De plus la démonstration a montré que les fonctions $(\tilde{t}, \tilde{\tau}, \tilde{x})$ et par conséquent $\tilde{\xi}$ sont déterminées de manière unique.

Démonstration de la proposition 5.2.2. — Plaçons nous tout d'abord en dehors de la section nulle de T^*X . Par une transformation canonique quantifiée on peut transformer Λ en $\Lambda_0 = \{(x, t, \xi, \tau) \in T^*X / t=0, \xi=0\}$ avec $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$.

On peut alors supposer que $\Theta' = t D_t$.

Le symbole principal de Θ vérifie les hypothèses du lemme 5.2.4 donc après une nouvelle transformation canonique quantifiée on peut supposer que le symbole principal de Θ est égal à $t \tau$.

Pour terminer la démonstration, il suffit à présent de montrer qu'il existe un opérateur microdifférentiel R inversible d'ordre 0 près de Λ tel que $R \Theta = t D_t R$.

Tout opérateur microdifférentiel R d'ordre 0 défini au voisinage de Λ peut s'écrire sous la forme :

$$R(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j \geq 0} R_j(x, D_x, t D_t) D_t^{-j}$$

où R_j est un opérateur différentiel d'ordre au plus j . Inversement une telle série définit un opérateur microdifférentiel au voisinage de Λ si et seulement si il existe des constantes C_0, C_1 et δ strictement positives telles que :

$$\forall j \geq 0, \quad N(R_j D_t^{-j}, \delta) \leq C_0 C_1^j$$

$N(P, T)$ désignant la norme formelle de Boutet de Monvel-Kree [3].

De même les hypothèses faites sur Θ permettent d'écrire :

$$\Theta = t D_t + \sum_{j > 0} Q_j(x, D_x, t D_t) D_t^{-j}.$$

(On a $Q_0 = 0$ car Θ et $t D_t$ ont même image dans $\text{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X$).

L'équation $R \Theta = t D_t R$ devient :

$$\forall j > 0, \quad j R_j D_t^{-j} = \sum_{0 \leq k < j} R_k D_t^{-k} Q_{j-k} D_t^{k-j}.$$

Prenant $R_0 = 1$, on peut ainsi déterminer R_j par récurrence sur j et la norme formelle étant multiplicative on aura :

$$N(R_j D_t^{-j}, \delta) \leq \frac{1}{j} \sum_{0 \leq k < j} N(R_k D_t^{-k}, \delta) N(Q_{j-k} D_t^{-j+k}, \delta)$$

donc si $N(Q_j D_t^{-j}, \delta) \leq C_0 C_1^j$, $N(R_j D_t^{-j}, \delta)$ vérifiera la même relation et donc $R = \sum_{j \geq 0} R_j D_t^{-j}$ est bien un opérateur microdifférentiel d'ordre 0, il est inversible près de Λ car $R_0 = 1$.

Puisque $R_0 = 1$, l'isomorphisme induit sur $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ est l'identité.

Inversement si R_0 induit l'identité sur $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ il est constant donc R est déterminé à une constance multiplicative près et la transformation $P \rightarrow R^{-1} P R$ est unique.

Il reste à étudier le cas de la section nulle. Dans ce cas Λ est le conormal à une sous-variété de X et on peut donc supposer que $\Lambda = T_Y^* X$ avec $Y = \{(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_p) \in X/t=0\}$. On vérifie facilement qu'il existe un changement de variables qui

transforme Θ en $\Theta_0 = \sum t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \varphi(x, t)$ avec $\varphi(x, 0) = 0$. Alors si $a(x, t)$ est la fonction qui vérifie $\Theta_0(a) = 0$, $a(x, 0) = 1$, on aura $a^{-1} \Theta a = t D_r$.

On remarque donc que sur la section nulle la transformation de la proposition 5.2 est composée d'un changement de variables et de la conjugaison par une fonction inversible ce qui rentre dans le cadre des transformations canoniques quantifiées.

COROLLAIRE 5.2.5. — Soient Λ et Λ' deux sous-variétés lagrangiennes de T^*X , Θ et Θ' des opérateurs microdifférentiels adaptés respectivement à Λ et à Λ' , α et α' des points de Λ et Λ' respectivement situés hors de la section nulle de T^*X .

Alors il existe une transformation canonique quantifiée d'un voisinage de α sur un voisinage de α' qui envoie Λ sur Λ' et Θ sur Θ' .

5.3. POLYGÔNE DE NEWTON DES OPÉRATEURS MICRODIFFÉRENTIELS. — Soient X une variété analytique complexe et Λ une sous-variété lagrangienne homogène lisse de T^*X .

Soit Θ un opérateur microdifférentiel adapté à Λ (définition 5.2.1).

Pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{X, \Theta}[m] &= \{P \in \mathcal{E}_X / [\Theta, P] = mP\} \\ \mathcal{E}_{X, \Theta} &= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}_{X, \Theta}[m].\end{aligned}$$

Le faisceau $\mathcal{E}_{X, \Theta}$ est un sous-faisceau d'anneaux de \mathcal{E}_X qui est muni de la graduation $\bigoplus \mathcal{E}_{X, \Theta}[m]$ et de la filtration $(\mathcal{E}_{X, \Theta, m})_{m \in \mathbb{Z}}$ induite par la filtration usuelle par l'ordre de \mathcal{E}_X , on peut donc généraliser les définitions du paragraphe 5.1 :

DÉFINITION 5.3.1. — (a) Le faisceau $\mathcal{E}_{X, \Theta}|_{\Lambda}$ est muni de la filtration $F_{-\infty}^* \mathcal{E}_{X, \Theta}$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_{-\infty}^k \mathcal{E}_{X, \Theta} = \bigoplus_{m \leq k} \mathcal{E}_{X, \Theta}[m]|_{\Lambda}.$$

(b) Si P est un élément de $\mathcal{E}_{X, \Theta}$ défini au voisinage de Λ , $S^-(P)$ est le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par :

$$(\lambda, \mu) \notin S^-(P) \Leftrightarrow \exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \quad k > \mu, l < \lambda + \mu, \quad P \in F_{-\infty}^{-k} \mathcal{E}_{X, \Theta} + (\mathcal{E}_{X, \Theta, l})|_{\Lambda}.$$

(c) $N^-(P)$ est l'enveloppe convexe de $S^-(P)$, $N^+(P)$ est égal au polygône de Newton $N_{\Lambda}(P)$ du paragraphe 2.2 et enfin $N(P) = N^+(P) \cap N^-(P)$.

(d) Si $r = p/q$ avec p et q premiers entre eux et $q \geq 0$ la filtration $F_r^* \mathcal{E}_{X, \Theta}$ est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_r^k \mathcal{E}_{X, \Theta} = \{P \in \mathcal{E}_{X, \Theta} |_{\Lambda} / N(P) \subset \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / p\lambda + q\mu \leq k\}\}.$$

Si l'on se place dans la situation du paragraphe 5.1, c'est-à-dire si X est un fibré vectoriel de base Y , on peut prendre $\Lambda = T^*_Y X$ et $\Theta_0 = e_X$ (champ d'Euler du fibré vectoriel) et on notera alors $\mathcal{E}_{[X]} = \mathcal{E}_{X, \Theta_0}$. Dans ce cas la restriction à la section nulle de T^*X du faisceau $\mathcal{E}_{[X]}$ est le faisceau $\mathcal{D}_{[X]}$ du paragraphe 5.1.

Fixons des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_q)$ de X telles que $Y = \{t = 0\}$ et que (t_1, \dots, t_q) soient des coordonnées linéaires des fibres de $p : X \rightarrow Y$. Les opérateurs

de $\mathcal{E}_{[X]}$ définis près de $\Lambda = T_Y^*X$ sont les opérateurs de \mathcal{E}_X dont le symbole $P = \sum_{j \leq m} P_j(x, t, \xi, \tau)$ dans les coordonnées ci-dessus est tel que les fonctions P_j sont polynomiales en t et non nulles seulement pour un nombre fini de j .

En particulier lorsque X est un fibré vectoriel de rang 1, on a $\mathcal{E}_{[X]}[0]|_{\Lambda} = \pi_0^{-1} \mathcal{D}_{[X]}[0]$ ($\pi_0 : \Lambda \rightarrow X$) et pour tout opérateur de $\mathcal{E}_{[X]}|_{\Lambda}$ il existe m tel que $D_t^m P$ soit dans $\pi_0^{-1} \mathcal{D}_{[X]}$.

Les résultats du paragraphe précédent montrent que en dehors de la section nulle de T^*X on peut toujours échanger (localement) deux couples (Λ, Θ) et (Λ', Θ') de variétés lagrangiennes munies d'opérateurs microdifférentiels adaptés par une transformation canonique quantifiée.

Dans les démonstrations qui vont suivre on pourra donc toujours se ramener au cas particulier où Λ est le fibré conormal T_Y^*X pour un fibré vectoriel X de rang 1 sur Y et où Θ est le champ d'Euler associé.

Pour ce qui est du voisinage de la section nulle, Λ est alors de la forme T_Y^*X pour Y sous-variété de X et on peut par un changement de variables (proposition 5.2.2), se ramener à X fibré vectoriel sur Y (plus nécessairement de rang 1) et à Θ champ d'Euler de X , c'est-à-dire à la situation étudiée dans le paragraphe 5.1.

Considérons tout d'abord le cas d'un fibré vectoriel X de rang 1 sur Y .

Comme nous l'avons vu ci-dessus, pour tout opérateur P de $\mathcal{E}_{[X]}|_{\Lambda}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $D_t^m P \in \pi_0^{-1} \mathcal{D}_{[X]}$, on en déduit facilement le lemme suivant :

LEMME 5.3.2. — Soient X un fibré vectoriel de rang 1 sur Y , $\Lambda = T_Y^*X$, et $\pi_0 : \Lambda \rightarrow Y$ la projection canonique.

(a) $\mathcal{E}_{[X]}|_{\Lambda}$ est plat sur $\pi_0^{-1}(\mathcal{D}_{[X]}|_Y)$ et cohérent.

(b) Si \mathcal{M} est un $\mathcal{E}_{[X]}$ -module cohérent défini près de Λ il existe un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent \mathcal{N} tel que :

$$(5.3.1) \quad \mathcal{M}|_{\Lambda} = (\mathcal{E}_{[X]}|_{\Lambda}) \otimes_{\pi_0^{-1}(\mathcal{D}_{[X]}|_Y)} (\pi_0^{-1} \mathcal{N}|_Y).$$

(c) Soient \mathcal{M} un $\mathcal{E}_{[X]}$ -module cohérent et \mathcal{N} un $\mathcal{D}_{[X]}$ -module cohérent qui vérifie (5.3.1).

Soit $F_r^* \mathcal{M}$ une bonne F_r^* $\mathcal{E}_{[X]}$ -filtration sur $\mathcal{M}|_{\Lambda}$ et $F_r^* \mathcal{N}$ la bonne F_r^* $\mathcal{D}_{[X]}$ -filtration qu'elle induit sur $\mathcal{N}|_Y$. On a alors :

$$\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M} = (\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_{[X]}) \otimes_{(\pi_0^{-1} \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{D}_{[X]})} (\pi_0^{-1} \mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{N}).$$

Revenons à présent au cas général :

PROPOSITION 5.3.3. — Soient Λ une sous-variété lagrangienne de T^*X et Θ un opérateur microdifférentiel adapté à Λ .

(a) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ ($r \neq \pm \infty$), on a

$$\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_{X, \Theta} = \mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}.$$

En particulier si $r > 1$ on a $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_{X, \Theta} = \mathrm{gr}_{F_{\Lambda, r}} \mathcal{E}_X$.

(b) $\mathrm{gr}_{F_\infty} \mathcal{E}_{X, \Theta} = \mathrm{gr}_{F_{-\infty}} \mathcal{E}_{X, \Theta} = \mathrm{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X \simeq \mathcal{D}_{(\Lambda)}$.

(Rappelons que l'isomorphisme $\mathrm{gr}_{F_\Lambda} \mathcal{E}_X \simeq \mathcal{D}_{(\Lambda)}$ n'est défini qu'à un automorphisme intérieur près).

PROPOSITION 5.3.4. — Soient r rationnel, $r \neq \pm \infty$, \mathcal{M} un $\mathcal{E}_{X, \Theta}|_\Lambda$ -module cohérent et $F_r^* \mathcal{M}$ une bonne $F_r^* \mathcal{E}_{X, \Theta}$ -filtration de \mathcal{M} .

Alors $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{[T^* \Lambda]}$ -module cohérent et le cycle analytique $\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$ qui lui est associé est indépendant du choix de la bonne filtration.

De plus si $r > 1$, on a $\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M}) = \tilde{\Sigma}_\Lambda^{(r)}(\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{E}_{X, \Theta}} \mathcal{M})$ (où le deuxième cycle est celui du paragraphe 3.2).

Ces deux propositions se montrent sans difficulté en se ramenant au cas d'un fibré vectoriel de rang 1 puis en utilisant le lemme 5.3.2 et les résultats du paragraphe 5.1.

Les formules (3.2.1) et (3.2.2) définissent des filtrations G_+ et G_- sur $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{E}_{X, \Theta}$ qui permettent de définir les cycles analytiques $\widetilde{\mathrm{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{\mathrm{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ suivant la définition 3.2.4.

Enfin lorsque $r = \pm \infty$, on définit $\widetilde{\mathrm{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ comme cycle caractéristique du $\mathcal{D}_{(\Lambda)}$ -module $\mathrm{gr}_{F_r} \mathcal{M}$ associé à une bonne $F_r^* \mathcal{E}_{X, \Theta}$ -filtration de \mathcal{M} . (Ici encore le cycle ne dépend pas du choix de la bonne filtration).

$\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\mathrm{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ désignant respectivement les supports des cycles analytiques $\tilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$, $\widetilde{\mathrm{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{\mathrm{Ch}}^{(r)}(\mathcal{M})$.

PROPOSITION 5.3.5. — Soit \mathcal{M} un $\mathcal{E}_{X, \Theta}|_\Lambda$ -module cohérent.

(i) Pour tout r rationnel, $r \neq \pm \infty$, $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique involutif de $T^* \Lambda$.

(ii) Pour tout r , $-\infty \leq r \leq +\infty$, $\mathrm{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ et $\mathrm{Ch}^{(r)}(\mathcal{M})$ sont des sous-ensembles analytiques involutifs bihomogènes de $T^* \Lambda$.

Pour \mathcal{M} $\mathcal{E}_{X, \Theta}|_\Lambda$ -module cohérent et $y \in \Lambda$ nous poserons :

$$d_y(\mathcal{M}) = \sup \{ d \in \mathbb{N} / \mathcal{E} \mathrm{xt}_{\mathcal{E}_{X, \Theta}}^{2n-d}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X, \Theta})_y \neq 0 \}$$

(n est la dimension de X)

et pour $-\infty < r < +\infty$, π projection $T^* \Lambda \rightarrow \Lambda$:

$$d_y^{(r)}(\mathcal{M}) = \sup_{\pi(x)=y} \{ d(\Sigma^{(r)}(\mathcal{M}); x) \}.$$

Remarque 5.3.6. — Si X est un fibré vectoriel de base Y , la projection $p : X \rightarrow Y$ définit une structure de fibré vectoriel $\tilde{p} : T^* X \rightarrow \Lambda = T_Y^* X$ et dans ce cas on a :

$$d_y(\mathcal{M}) = \sup_{p(x)=y} \{ d(\mathrm{Ch}(\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{E}[X]} \mathcal{M}); x) \}.$$

Pour montrer ce résultat on utilise le lemme 5.3.2 si X est de rang 1 et on ramène le cas général à ce cas particulier en remarquant que si $p : X \rightarrow Y$ et $p' : X' \rightarrow Y'$ sont des fibrés vectoriels on peut définir une transformation canonique qui échange $\Lambda = T_Y^* X$ et

$\Lambda' = T_Y^* X'$ et qui est définie globalement dans les fibres de $\tilde{p}: T^* X \rightarrow \Lambda$ et $\tilde{p}': T^* X \rightarrow \Lambda'$, il s'agit d'une transformation de Legendre partielle (cf. [24], chap. II, exemple 3.3.4).

THÉOREME 5.3.7. — Pour tout $\mathcal{E}_{X, \mathfrak{e}}$ -module cohérent \mathcal{M} , tout point $y \in \Lambda$ et tout r tel que $-\infty < r < +\infty$ on a :

$$d_y^{(r)}(\mathcal{M}) \leq d_y(\mathcal{M}).$$

(Comme précédemment ce théorème se ramène au théorème 5.1.7 par transformation canonique quantifiée et utilisation du lemme 5.3.2.)

On dira qu'un $\mathcal{E}_{X, \mathfrak{e}}$ -module \mathcal{M} est holonome sur un ouvert V de Λ si $d_y(\mathcal{M}) = \dim X$ pour $y \in V$.

Dans le cas d'un fibré vectoriel $p: X \rightarrow Y$, cela signifie encore que le \mathcal{E}_X -module $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{E}_{[X]}} \mathcal{M}$ est holonome sur $\tilde{p}^{-1}(V)$.

Du théorème 5.3.7 on déduit que les corollaires 5.1.8 et 5.1.9 et la proposition 5.1.10 sont encore vrais pour les $\mathcal{E}_{X, \mathfrak{e}}$ -modules holonomes et donc que l'on a encore existence de b -fonctions pour tout r .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BENDEL et R. GERARD, *Formal and Convergent Solutions of Singular Partial Differential Equations* (*Manuscripta Math.*, vol. 38, 1982, p. 343-373).
- [2] J.-E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North Holland Math. Library, 1979.
- [3] L. BOUTET DE MONVEL et P. KREE, *Pseudo-Differential Operators and Gevrey Classes* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 17, 1967, p. 295-323).
- [4] O. GABBER, *The Integrability of the Characteristic Variety* (*American Journal of Math.*, vol. 103, 1981, p. 445-468).
- [5] M. KASHIWARA, *On the Maximally Overdetermined System of Linear Differential Equation I* (*Publ. R.I.M.S.*, Kyoto, vol. 10, 1975, p. 563-579).
- [6] M. KASHIWARA, *B-functions and holonomic systems* (*Inventiones Math.*, vol. 38, 1976, p. 33-53).
- [7] M. KASHIWARA, *On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations II*, (*Inventiones Math.*, vol. 49, 1978, p. 121-135).
- [8] M. KASHIWARA, *Systems of Microdifferential Equations* (*Progress in Math.*, vol. 34, Birkhäuser, 1983).
- [9] M. KASHIWARA, *Vanishing Cycles and Holonomic-Systems of Differential Equations*, (*Lecture Notes in Math.*, n° 1016, Springer, 1983, p. 134-142).
- [10] M. KASHIWARA et T. KAWAI, *On Holonomic Systems of Microdifferential Equations III, System with Regular Singularities* (*Publ. R.I.M.S.*, Kyoto, vol. 17, 1981, p. 813-979).
- [11] M. KASHIWARA et T. KAWAI, *Second Microlocalization and Asymptotic Expansions* (*Lecture Notes in Physics*, n° 126, Springer, 1980, p. 21-76).
- [12] M. KASHIWARA et T. OSHIMA, *Systems of Differential Equations with Regular Singularities and their Boundary Value Problems* (*Ann. of Math.*, vol. 106, 1977, p. 145-200).
- [13] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Problème de Cauchy dans le domaine complexe* (*Invent. Math.*, vol. 46, 1978, p. 17-38).
- [14] G. LAUMON, *\mathcal{D} -modules filtrés* (*Astérisque*, vol. 130, Soc. Math. France, 1985, p. 56-129).
- [15] Y. LAURENT, *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe* (*Progress in Math.*, vol. 53, Birkhäuser, 1985).
- [16] Y. LAURENT, *Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes* (*Astérisque*, Soc. Math. France, vol. 130, 1985, p. 352-364).

- [17] Y. LAURENT, *Calcul d'indices et développements asymptotiques des solutions de systèmes holonomes* (en préparation).
- [18] Y. LAURENT et P. SCHAPIRA, *Images inverses des modules différentiels* (*Comp. Math.*, vol. 61, n° 2, 1987, p. 229-251).
- [19] B. MALGRANGE, *Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence* (*Astérisque*, Soc. Mat. France, vol. 101-102, 1983, p. 243-267).
- [20] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles* (*L'Enseignement Mathématique*, t. XX, n° 1-2, 1974, p. 147-176).
- [21] B. MALGRANGE, *Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières*, Prépublication de l'Université de Grenoble, 1979.
- [22] T. MONTEIRO-FERNANDES, *Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels* (*Astérisque*, Soc. Math. France, vol. 140-141, 1986).
- [23] J.-P. RAMIS, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires* (*Memoirs of the Am. Math. Soc.*, vol. 48, n° 296).
- [24] M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA, *Hyperfonctions and Pseudo-Differential Equations* (*Lecture Notes in Math.*, n° 287, Springer, 1973, p. 265-529).
- [25] P. SCHAPIRA, *Microdifferential Systems in the Complex Domain* (*Grundlehren der Math.*, vol. 269, Springer, 1985).
- [26] C. SABBABH, *\mathcal{D} -modules et cycles évanescents* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 11 décembre 1986,
révisé le 25 mai 1987).

Y. LAURENT,
Université Paris-Sud,
Mathématiques, Bât. n° 425,
91405 Orsay Cedex.
