ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL HILSUM
GEORGES SKANDALIS

# Morphismes $K$-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 20, nº 3 (1987), p. 325-390
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_3_325_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4e série, t. 20, 1987, p. 325 à 390.

# MORPHISMES K-ORIENTÉS D'ESPACES DE FEUILLES ET FONCTORIALITÉ EN THÉORIE DE KASPAROV (d'après une conjecture d'A. Connes)

PAR Michel HILSUM ET Georges SKANDALIS

RÉSUMÉ. — Soient $(V_1, F_1)$ et $(V_2, F_2)$ deux variétés feuilletées et $f$ un morphisme d'espaces singuliers, K-orienté $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$. Nous construisons un élément $f!$ du groupe de Kasparov $KK(V_1/F_1; V_2/F_2)$ et calculons le produit de Kasparov de deux tels éléments. L'existence de $f!$, conjecturée par A. Connes [8] a déjà été établie dans des cas particuliers ([8], [4], [11]).

ABSTRACT. — Let $(V_1, F_1)$ and $(V_2, F_2)$ be two foliated manifolds and $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ a K-oriented morphism of quotient spaces. We associate to $f$ an element $f!$ of the Kasparov group $KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ and compute the Kasparov product of two such elements. The existence of $f!$ was conjectured by A. Connes [8]. Previous constructions of $f!$ in particular cases were given in [8], [4], [11].

## Introduction

Soit $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une application K-orientée de classe $C^\infty$, où $V_j/F_j$ désigne la « variété singulière » espace des feuilles du feuilletage $(V_j, F_j)$. Nous construisons un élément $f!$ du groupe de Kasparov $KK(V_1/F_1; V_2/F_2) \overset{\text{def}}{=} KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$, et calculons le produit de Kasparov $f! \otimes g!$ de deux tels éléments. Nous réalisons ainsi le programme défini par Alain Connes dans [8] (p. 593).

La construction de $f!$ dans le cas où le feuilletage $F_1$ est *trivial* a été donnée dans [8] (§ 11) et systématisée dans [11], où la fonctorialité $(g \circ f)! = f! \otimes g!$ avait été démontrée, et par P. Baum et A. Connes dans [4] où la même construction étendue au cas où $(V_1, F_1)$ est un feuilletage *propre* est utilisée.

Une conséquence de la construction de $f!$ est la suivante : soit $K^*_{top}(V_j, F_j)$ le groupe de K-théorie géométrique du feuilletage $(V_j, F_j)$ défini par P. Baum et A. Connes [4]. A l'application K-orientée $f$ est associé un homomorphisme

$$f_!^{top}: K^*_{top}(V_1, F_1) \to K^*_{top}(V_2, F_2).$$

L'élément $f! \in KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ considéré comme homomorphisme de groupes de K théorie, rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^*_{top}(V_1, F_1) & \xrightarrow{f_!^{top}} & K^*_{top}(V_2, F_2) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ K_*(C^*(V_1, F_1)) & \longrightarrow & K_*(C^*(V_2, F_2)) \end{array}$$

où $\mu: K^*_{top}(V_j, F_j) \to K_*(C^*(V_j, F_j))$ est l'homomorphisme défini dans [4]. L'existence de $f!$ rendant ce diagramme commutatif peut être utilisée en vue de montrer que $\mu$ est injective: si $x \in K^*_{top}(V_1, F_1)$ est tel que $\mu(f_!^{top}(x))$ n'est pas nul, alors $\mu(x)$ n'est pas nul.

Un important cas particulier est le cas de la projection $p: V/F \to pt$. Dans ce cas $p!$ définit un homomorphisme $K_*(C^*(V, F)) \to \mathbb{Z}$ tel que $p! \circ \mu = p_!^{top}: K^*_{top}(V, F) \to \mathbb{Z}$. En utilisant $p!$ on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit* L *un fibré vectoriel complexe sur* V, *équivariant pour l'action du groupoïde d'holomonie* G *de* (V, F). *Alors il existe un élément* $p_L \in KK(C^*(V, F); \mathbb{C})$ *tel que pour tout élément* $(M, E, f) \in K^*_{top}(V, F)$ *on ait*

$$\mu(M, E, f) \otimes p_L = \langle \mathrm{ch}(E) \cup \mathrm{ch}(f^*(L)) \cup \mathrm{T}d(M), [M] \rangle.$$

Ce théorème est un analogue en « K-homologie » du théorème 6.8 de [10]. Nous obtenons ainsi des homomorphismes de la K-théorie de $C^*(V, F)$ à valeurs entières alors que l'approche d'A. Connes par la cohomologie cyclique donne des valeurs complexes (ou réelles) [10]. Cependant, nous sommes obligés d'utiliser la C*-algèbre « max » du feuilletage (V, F) pour construire $p_L$, alors que l'élément de cohomologie cyclique de [10] est défini sur la C*-algèbre réduite. Signalons qu'alors que nous savons la coïncidence de ces deux homomorphismes sur le groupe $\mu(K^*_{top}(V, F))$, nous ne savons pas s'ils sont égaux sur $K_*(C^*(V, F))$.

Nous construisons d'abord $f!$ dans le cas où $f$ est une immersion ou une submersion. Pour le cas général nous utilisons une factorisation $f = p \circ i$ où $p$ est une submersion et $i$ une immersion (par exemple $V_1/F_1 \xrightarrow{i = (\mathrm{id} \times f)} (V_1 \times V_2/F_1 \times F_2) \xrightarrow{p} V_2/F_2$).

Si $i: V_1 \to V_2$ est une immersion (propre, injective) K-orientée, l'élément $i! \in KK(V_1; V_2)$ est le produit de Kasparov $i! = \beta_N \otimes [\exp]$ où N est le fibré normal, $\beta_N \in KK(V_1; N)$ est l'isomorphisme de Thom (*cf.* [30], § 5) et $[\exp] \in KK(N; V_2)$ est donné par l'inclusion $C_0(N) \subsetneq C_0(V_2)$ identifiant N à un voisinage tubulaire de $V_1$ dans $V_2$. L'élément $\beta_N$ se construit dans notre cadre grâce à la théorie de Kasparov équivariante (*cf.* [31]); un élément très proche a été utilisé dans [10]. La difficulté pour [exp] est qu'il n'existe pas en général d'application exponentielle équivariante par l'holonomie. Nous la remplaçons par un « groupoïde normal » analogue au groupoïde tangent d'A. Connes (*cf.* [9]). Ce groupoïde donne lieu à une suite exacte de C*-algèbres qui nous permet de construire l'élément cherché. Du fait qu'il repose sur une suite exacte de C*-algèbres l'élément $i!$ n'est bien défini que sous certaines hypothèses de nucléarité ([30], § 7). Sans cette hypothèse on obtient quand même un homomorphisme de groupes de K-théorie.

Pour expliquer la difficulté du cas des submersions, considérons la submersion $V/F \xrightarrow{p} pt$ et supposons qu'une transversale de (V, F) est donnée par l'action du groupe (dénombrable) $\Gamma$ dans la variété X par difféomorphismes. L'élément $p!$ devrait alors être donné par l'opérateur de Dirac sur X si celui-ci pouvait être rendu « presque invariant » par l'action de $\Gamma$ (i. e. $g\mathrm{D}g^{-1}-\mathrm{D}$ borné pour tout $g\in\Gamma$). Cependant une telle invariance supposerait que $\Gamma$ préserve une métrique riemannienne sur X. Pour traiter le cas général (i. e. le cas des feuilletages non riemanniens) nous utilisons d'abord l'astuce de [10] pour nous ramener au cas presque isométrique. Revenons alors à notre exemple ci-dessus où $\Gamma$ agit maintenant sur la variété X en préservant une structure presque isométrique. Celle-ci consiste en une suite exacte de $\Gamma$ fibrés $0\to \mathrm{E}'\to \mathrm{TX}\to \mathrm{E}\to 0$, telle que $\Gamma$ agit préservant une métrique invariante sur E′ et sur E. Soient alors $\mathrm{D}_{\mathrm{E}'}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}$ des opérateurs de Dirac « partiels » $\mathrm{D}_{\mathrm{E}'}$ ne différentiant que dans la direction E′ et $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}$ ne différentiant que dans une direction complémentaire à E′. Soit alors D l'opérateur différentiel *hypoelliptique* (*cf.* [26]) $\mathrm{D}=\mathrm{D}_{\mathrm{E}'}^5+\mathrm{D}_{\mathrm{E}}^3$. Pour tout $g\in\Gamma$, l'opérateur $g\mathrm{D}g^{-1}-\mathrm{D}$ est alors « D compact » (i. e. $(g\mathrm{D}g^{-1}-\mathrm{D})(\mathrm{D}^2+1)^{-1/2}$ est compact), et définit donc l'élément $p!$. Dans le texte, nous travaillons avec l'opérateur $\mathrm{D}(\mathrm{D}^2+1)^{-1/2}$ afin de ne considérer que des opérateurs bornés. Cet opérateur est un opérateur pseudodifférentiel de type $\rho$, $\delta$ de L. Hormander [25] ce qui nous amène dans un long appendice à redémontrer dans le cadre $\rho$, $\delta$ l'analogue de la suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels (*cf.* [36], [7]) prouvant que de tels opérateurs définissent des bimodules de Kasparov — et les analogues de trois lemmes de [11] permettant de calculer le produit de Kasparov de ces bimodules. Les opérateurs pseudodifférentiels de type $\rho$, $\delta$ ont été utilisés pour construire des éléments de KK-théorie par G.G. Kasparov (*cf.* [32], [33]).

L'organisation de ce papier est la suivante :

— Dans le premier paragraphe nous rappelons la définition d'une application K-orientée d'un espace de feuilles dans un autre.

— Dans le deuxième paragraphe nous rappelons la construction de certains éléments de groupes de Kasparov qui nous seront utiles par la suite.

— Dans les troisième et quatrième paragraphes nous construirons $f!$ dans le cas des immersions et des submersions et démontrons la fonctorialité $((g\circ f)!\otimes g!)$ dans ces cas.

— Dans le cinquième paragraphe nous examinons les différentes factorisations $f=p\circ i$, nous comparons les diverses définitions de $f!$ ainsi obtenues, et nous montrons que le défaut de fonctorialité est relié à l'élément $\gamma$ construit par G.G. Kasparov [31].

— Dans le sixième paragraphe nous nous intéressons au groupe géométrique et nous obtenons les résultats mentionnés ci-dessus.

— Dans le septième paragraphe nous faisons quelques remarques finales.

Enfin dans l'appendice nous présentons ce que nous utilisons dans le texte (au § 4) des opérateurs pseudo différentiels de type $\rho$. $\delta$.

Remarque sur les notations. — Dans tout le texte $\mathrm{C}^*(\mathrm{V}, \mathrm{F})$ désigne la C*-algèbre du groupoïde d'holonomie du feuilletage (V, F) i. e. l'algèbre notée $\mathrm{C}^*(\mathrm{G})$ dans [37] et non pas l'algèbre notée $\mathrm{C}^*(\mathrm{V}, \mathrm{F})$ par A. Connes [qui correspond à $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\mathrm{G})$ au sens de J. Renault [37], et que nous noterons $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\mathrm{V}, \mathrm{F})$].

## I. Définitions générales (*cf.* [8], §9 et [11], §IV)

Soient $(V_1, F_1)$ et $(V_2, F_2)$ deux feuilletages et soient $G_1$ et $G_2$ leurs groupoïdes d'holonomie (*cf.* [44], [7]). Une application $f$ de classe $C^\infty$ de $V_1/F_1$ dans $V_2/F_2$ est donnée par son graphe $G_f$ qui est une variété (non nécessairement séparée) de classe $C^\infty$ munie d'applications de classe $C^\infty$ $r: G_f \to V_1$ et $s: G_f \to V_2$ et d'actions de $G_1$ et de $G_2$ qui commutent entre elles telles que $r: G_f \to V_1$ est une fibration principale de groupoïde structural $G_2$-c'est-à-dire $r$ est surjective et pour tout $x$ et $y$ de $G_f$ tels que $r(x)=r(y)$, il existe un unique $\gamma$ dans $G_2$ avec $x\gamma=y$, et l'action de $G_2$ est propre.

Notons pour mémoire qu'on a :

$$\forall x \in G_f, \quad \forall \gamma_2 \in G_2 \qquad \text{tels que} \quad s(x)=r(\gamma_2), \qquad x\gamma_2 \in G_f$$

avec

$$r(x\gamma_2)=r(x), \qquad s(x\gamma_2)=s(\gamma_2).$$

Si $\gamma_1 \in G_1$ avec $s(\gamma_1)=r(x)$ alors

$$\gamma_1 x \in G_f \qquad \text{et} \qquad r(\gamma_1 x)=r(\gamma_1), \qquad s(\gamma_1 x)=s(x) \qquad \text{et} \qquad (\gamma_1 x)\gamma_2=\gamma_1(x\gamma_2).$$

La différentiabilité des actions de $G_1$ et $G_2$ s'exprime de la façon suivante :

Soit $G_1 \times_{V_1} G_f=\{(\gamma_1, x)\in G_1 \times G_f \text{ avec } r(x)=s(\gamma_1)\}$ et

$$G_f \times_{V_2} G_2=\{(x, \gamma_2)\in G_f \times G_2 \text{ avec } r(\gamma_2)=s(x)\}.$$

Ce sont des variétés comme $s: G_1 \to V_1$ et $r: G_2 \to V_2$ sont des submersions. Les applications $(\gamma_1, x) \to \gamma_1 x$ et $(x, \gamma_2) \to x\gamma_2$ sont de classe $C^\infty$.

A noter qu'alors $G_f$ est feuilleté par $F=(dr)^{-1}(F_1)$, que les espaces quotients $V_1/F_1$ et $G_f/F$ sont isomorphes par $r$ et que l'application $s$ définit un homomorphisme de groupoïdes du graphe du feuilletage $(G_f, F)$ à valeurs dans $G_2$ (*cf.* [11], lemme 4.2). On peut donc voir $f$ comme un homomorphisme du groupoïde d'holonomie d'une désingularisation de $V_1/F_1$ dans $G_2$ (ou dans le groupoïde d'une quelconque désingularisation de $V_2/F_2$).

Une façon équivalente de définir une application $f$ de $V_1/F_1$ dans $V_2/F_2$ est fournie par la notion de cocycle de $G_1$ à valeurs dans $G_2$, c'est-à-dire un recouvrement ouvert $\Omega_i$ de $V_1$ et des applications de classe $C^\infty$ $g_{i,j}$ :

$$G_{1,\Omega_j}^{\Omega_i} \to G_2 \qquad \text{où} \quad G_{1,\Omega_j}^{\Omega_i}=\{\gamma \in G_1,\ r(\gamma)\in\Omega_i \text{ et } s(\gamma)\in\Omega_j\}$$

tels que

$$\forall \gamma \in G_{1,\Omega_j}^{\Omega_i}, \qquad g_{j,i}(\gamma^{-1})=g_{i,j}(\gamma)^{-1}$$

et $\forall \gamma' \in G_{1,\Omega_k}^{\Omega_j}$ tel que

$$s(\gamma)=r(\gamma'), \qquad s(g_{i,j}(\gamma))=r(g_{j,k}(\gamma'))$$

et

$$g_{i,k}(\gamma\gamma')=g_{i,j}(\gamma)\,g_{j,k}(\gamma').$$

En d'autres termes soit $G'_1=\coprod_{i,j} G^{\Omega_i}_{1,\Omega_j}$, c'est un groupoïde, équivalent à $G_1$ (*cf.* [35], [22]), et $g$ un homomorphisme de $G'_1$ dans $G_2$ [donné par $g(\gamma, i, j)=g_{i,j}(\gamma)$]. Remarquons que si $g_{i,j}$ est un cocycle alors $r(g_{i,j}(\gamma))$ ne dépend que de $i$ et de $r(\gamma)$. Soit $f_i: \Omega_i \to V_2$ donnée par $f_i(r(\gamma))=r(g_{i,j}(\gamma))$. Quitte à remplacer le recouvrement $\Omega_i$ par un recouvrement plus fin, on peut supposer que les $\Omega_i$ sont des ouverts trivialisants de transversales $T_{1,i}$ et que les $f_i(\Omega_i)$ sont inclus dans des ouverts trivialisants de transversales $T_{2,i}$. Soient $T_1=\coprod T_{1,i}$ et $T_2=\coprod T_{2,i}$. Soit $g'_{i,j}: G^{T_{1,i}}_{1,T_{1,j}} \to G^{T_{2,i}}_{2,T_{2,j}}$ le projeté à la transversale de la restriction de $g_{i,j}$ à $G^{T_{1,i}}_{1,T_{1,j}}$. Notons que $T_j$ est une transversale de $(V_j, F_j)$ (c'est-à-dire une variété munie d'une application étale à valeurs dans $V_j/F_j$ au sens de [8], p. 594), que $T_1$ est fidèle (i. e. rencontre toutes les feuilles de $(V_1, F_1)$, et que $g'_{i,j}$ définit un homomorphisme $g': G^{T_1}_{1,T_1} \to G^{T_2}_{2,T_2}$ de classe $C^\infty$ (où $G^{T_i}_{i,T_i}=\coprod_{j,k} G^{T_{i,j}}_{i,T_{i,k}}$).

Notons enfin qu'on peut grandir $T_2$ et donc supposer que $T_2$ aussi est fidèle.

Nous pouvons alors introduire l'énoncé suivant :

1.1. Définition. — *Une application* $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ *de classe* $C^\infty$ *est définie par une des données équivalentes*

(i) *Un* $G_1$ *fibré principal* $G_f$ *sur* $V_1$ *de groupoïde structural* $G_2$.
(ii) *Un cocycle de* $G_1$ *dans* $G_2$.
(iii) *Un homomorphisme* $g: G'_1 \to G'_2$ *où* $G'_j$ *est équivalent à* $G_j$.
(iv) *Un homomorphisme* $\varphi: G^{T_1}_{1,T_1} \to G^{T_2}_{2,T_2}$ *où* $T_j$ *est une transversale fidèle de* $(V_j, F_j)$.

On a déjà vu comment (i) ⇒ (iii), (ii) ⇒ (iii) et (ii) ⇒ (iv). L'implication (iv) ⇒ (iii) résulte du fait que si T est une transversale fidèle de (V, F), $G^T_T$ est équivalent à G. Si $G'_j$ est équivalent à $G_j$ soit $G''_j$ l'espace qui réalise cette équivalence $r: G''_j \to V_j$ la fibration de groupoïde $G'_j$, et $s: G''_j \to V'_j$ la fibration de groupoïde $G_j (V'_j=G'^{(0)}_j)$. Posons $G_f=G''_1 \times_{G'_1} G''^{-1}_2$ : c'est le quotient de

$$\{(x_1, x_2)\in G''_1\times G''_2/g(s_1(x_1))=s_2(x_2)\}$$

par la relation

$$(x_1, x_2)\sim(x_1 y, x_2 g(y)),\qquad y\in G'_1,\quad r(y)=s(x_1).$$

Ceci montre comment (iii) implique (i). Pour passer du point de vue (i) au point de vue (ii) on utilise des sections locales de la fibration $G_f \xrightarrow{r} V_1$.

La composée de deux applications $f_3: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ et $f_1: V_2/F_2 \to V_3/F_3$ est donnée par son graphe $G_{f_1\circ f_3}=G_{f_3}\times_{G_2} G_{f_1}$ i. e. le quotient de $\{(x_3, x_1)\in G_{f_3}\times G_{f_1},\ s(x_3)=r(x_1)\}$ par la relation $(x_3, x_1)\sim(y_3, y_1) \Leftrightarrow \exists\,\gamma\in G_2$ avec $x_3\gamma=y_3$ et $\gamma y_1=x_1$.

Notons que, pour les points de vue (iii) et (iv) de la définition 1.1, étant donnés $G'_2$ ou $G^{T_2}_{2,T_2}$, il existe une transversale $T_1$ et un homomorphisme $g: G^{T_1}_{1,T_1} \to G'_2$ ou

$\varphi: G_{1,T_1}^{T_1} \to G_{2,T_2}^{T_2}$ (de classe $C^\infty$) réalisant $f_3$. Ceci montre qu'on peut calculer $f_1 \circ f_3$ en utilisant la composée d'homomorphismes bien choisis.

Étudions maintenant les cas particuliers des submersions et des immersions :

1.2. DÉFINITION. — *L'application* $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ *est dite une submersion si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(i) *L'application* $s: G_f \to V_2$ *est une submersion.*

(ii) *Le cocycle* $g_{i,j}: G_1 \to G_2$ *est transverse (i.e. les applications* $f_i: \Omega_i \to V_2$ *sont transverses à* $F_2$*).*

(iii) *L'homomorphisme* $g: G'_1 \to G'_2$ *est transverse (pour le feuilletage de* $G'_2$ *donné par* $r^{-1}(F'_2)$*).*

(iv) *L'homomorphisme* $\varphi: G_{1,T_1}^{T_1} \to G_{2,T_2}^{T_2}$ *est une submersion.*

Si $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ est une submersion alors le feuilletage $F_2$ se ramène en arrière par $f$ en un feuilletage $F'_2$ sur $V_1$. Dans ce cas $F_1 \subseteqq F'_2$ et toute la situation est exactement décrite par ce double feuilletage de $V_1$ et par l'application étale $V_1/F'_2 \to V_2/F_2$.

Nous ne donnons la définition des immersions qu'en fonction des données équivalentes (i) et (iv) de la défintion 1.1.

1.3. DÉFINITION. — *L'application* $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ *est dite une immersion si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(i) *On a* $dr^{-1}(F_1) = ds^{-1}(F_2)$ *(ce sont des sous-espaces de* $TG_f$*).*

(ii) *L'application* $\varphi: G_{1,T_1}^{T_1} \to G_{2,T_2}^{T_2}$ *est une immersion.*

1.4. *Remarques.* — (*a*) Si $f$ est une immersion on peut, quitte à modifier $T_2$, supposer que l'application $\varphi: T_1 \to T_2$ est une inclusion propre (c'est très facile de le faire localement de $T_{1,i}$ dans $T_{2,i}$. On l'obtient alors globalement en prenant $T_1 = \coprod T_{1,i}$ et $T_2 = \coprod T_{2,i}$).

(*b*) Pour toute application $f$, comme $r: G_f \to V_1$ est une submersion, $dr^{-1}(F_1)$ est un sous fibré intégrable de $TG_f$ et on a $dr^{-1}(F_1) \subseteqq ds^{-1}(F_2)$. Cependant $ds^{-1}(F_2)$ n'est pas toujours un fibré vectoriel car sa dimension peut varier. Nous dirons que $f$ est de *rang constant* si la dimension de $ds^{-1}(F_2)$ est constante. Dans ce cas $ds^{-1}(F_2)$ est un feuilletage sur $G_f$.

(*c*) D'un point de vue naïf une application de $V_1/F_1 \to V_2/F_2$ est une application $f: V_1 \to V_2/F_2$ qui passe au quotient $V_1/F_1$ i.e. constante sur les feuilles de $(V_1, F_1)$. Une application $f: V_1 \to V_2/F_2$ est donnée par son graphe $G_f$ qui est un $G_2$ fibré principal au-dessus de $V_1$. D'un point de vue ensembliste, $f$ passe au quotient si $dr^{-1}(F_1) \subseteqq ds^{-1}(F_2)$. Cependant cette condition n'est pas suffisante [1] et on doit supposer que $G_1$ agit dans $G_f$. Un exemple simple où ces deux notions sont distinctes est donné par le cas où $V_1$, feuilletée par une seule feuille, est une feuille à holonomie non triviale de $V_2/F_2$. Le graphe de l'inclusion est alors $G_f = G_2^{V_1} = \{\gamma \in G_2,\ r(\gamma) \in V_1\}$ mais le groupoïde $G_1 = V_1 \times V_1$ n'agit pas dans $G_f$. Notons qu'on ne doit pas confondre cette

[1] Elle l'est dans le cas où $f$ est une submersion (*cf.* [11], lemma 4.2).

application $f: V_1 \to V_2/F_2$ qui ne passe pas au quotient avec la composée $V_1 \to pt \to V_2/F_2$ de graphe $V_1 \times G_2^x$ (où $x \in V_1$ et $G_2^x = \{\gamma \in G_2, r(\gamma) = x\}$) qui, elle, passe bien sûr au quotient.

Plus généralement, si $V_1$ est une sous-variété de $V_2$, l'application $f$ de $V_1$ dans $V_2/F_2$ induite par l'inclusion $V_1 \subseteqq V_2$ « passe au quotient » si et seulement si

(i) $\forall x \in V_1$, $F_{1,x} \subseteqq F_{2,x}$.

(ii) Pour tout lacet $\gamma$ tracé dans une feuille de $(V_1, F_1)$, si son holonomie pour $(V_1, F_1)$ est triviale alors son holonomie pour $(V_2, F_2)$ l'est aussi. La condition (i) signifie que $f$ passe au quotient d'un point de vue ensembliste; la condition (ii) signifie que l'application $f$ induit un homomorphisme de groupoïdes $G_1 \to G_2$, où $G_j$ est le graphe (groupoïde d'holonomie) de $(V_j, F_j)$. Notons que si au lieu de considérer les groupoïdes d'holonomie on travaille avec le groupoïde du feuilletage (*cf.* [5]) le problème n'apparaitrait pas, la condition (ii) étant toujours vérifiée si on remplace « holonomie » par « homotopie ».

Le cas $V_1$ = feuille de $(V_2, F_2)$ à holonomie non triviale fournit un exemple où (i) n'implique pas (ii). Mais comme nous l'avons indiqué plus haut l'application $f: V_1 \to V_2/F_2$ peut être modifiée, gardant la même application d'un point de vue ensembliste et qui elle passe au quotient. Nous donnons maintenant un exemple où ceci ne se produit plus.

Soient $T_1$, $T_2$ deux difféomorphismes de $S^1$ tels que l'ensemble des points fixes de $T_1$ soit un intervalle $[a, b]$ $(a \neq b)$ et celui de $T_2$ un point $\{c\}$. Soit T le difféomorphisme de $\mathbb{T}^2$ donné par $T(x_1, x_2) = (T_1 x_1, T_2 x_2)$.

Soit $V_2$ le « mapping torus » de T i.e. le quotient $(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ où $\mathbb{Z}$ agit dans $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ par $T'(u, t) = (Tu, t+1)$. La partie $S^1 \times \{c\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ est invariante par T'. Soit $V_1$ son image dans $V_2$. Feuilletons $V_1$ et $V_2$ par l'action de $\mathbb{R}$ (par translations dans $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$). Soit $c' \in ]a, b[$ et $\tilde{\gamma}: [0, 1] \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ donné par $\tilde{\gamma}(t) = (c', c, t)$. Alors l'image de $\tilde{\gamma}$ dans $V_1$ est un lacet tracé dans une feuille de $(V_1, F_1)$. Son holonomie pour $(V_1, F_1)$ est triviale mais son holonomie pour $(V_2, F_2)$ ne l'est pas.

1.5. *Exemples.* — 1. L'identité $\mathrm{id}: V/F \to V/F$ dont le graphe $G_{\mathrm{id}}$ est le graphe (= le groupoïde d'holonomie) de (V, F).

2. La projection $p: V \to V/F$ dont le graphe est encore G. En général, si $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ et $f': V_1 \to V_2/F_2$, $f' = f \circ p_1$ on a $G_f = G_{f'}$.

3. La projection $V/F \to pt$ de graphe V. Notons que le graphe G de (V, F) agit dans $V = G^{(0)}$.

4. Si E est un fibré vectoriel réel sur V sur lequel le graphe G de (V, F) agit, E est muni d'un feuilletage horizontal $F_E$. Alors la section nulle définit une immersion $i_E: V/F \to E/F_E$, et la projection $E \to V$ définit une submersion $p_E: E/F_E \to V/F$ [le graphe de $i_E$ est égal au graphe de (V, F); celui de $p_E$ est égal au graphe de $(E, F_E)$].

5. Si $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ et $f': V_1/F_1 \to V_2'/F_2'$ sont deux applications alors $(f, f'): V_1/F_1 \to (V_2 \times V_2'/F_2 \times F_2')$ est donné par son graphe

$$G_{(f, f')} = G_f \times_{V_1} G_{f'} = \{(x, x')/r(x) = r(x')\}.$$

Si $f$ ou $f'$ est une immersion alors $(f, f')$ est une immersion. Un exemple important pour la suite est fourni par $(\mathrm{id}, f)\colon V_1/F_1 \to V_1 \times V_2/F_1 \times F_2$ où $f\colon V_1/F_1 \to V_2/F_2$.

6. Si $f\colon V_1/F_1 \to V_2/F_2$ et $f'\colon V'_1/F'_1 \to V'_2/F'_2$ alors

$$(f \times f')\colon \quad (V_1 \times V'_1/F_1 \times F'_1) \to (V_2 \times V'_2/F_2 \times F'_2)$$

est donné par $G_{f \times f'} = G_f \times G_{f'}$. Un exemple utile pour la suite est fourni par

$$(p \times \mathrm{id})\colon \quad (V_1 \times V_2,\ F_1 \times F_2) \to V_2/F_2.$$

Notons que $f = (p \times \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}, f)$.

K-ORIENTATIONS. — Les définitions ci-dessous sont dues à P. Baum.

Soit $\mathrm{Ml}_n^c$ le groupe $\mathrm{Ml}_n^c = (\mathrm{Ml}_n(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1))$ où $\mathrm{Ml}_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe *métalinéaire* i. e. le revêtement non trivial à deux feuillets du groupe des matrices réelles à déterminant positif $\mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$. Le compact maximal de $\mathrm{Ml}_n^c$ est $\mathrm{Spin}^c(n)$.

Soit E un G-fibré vectoriel réel de dimension $n$ sur V, où G est le graphe de (V, F). Le G fibré E est orienté si son groupe structural est réduit à $\mathrm{Gl}_n^+$, i. e. s'il existe un G fibré principal P de groupe structural $\mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ avec $E \cong P \times_{\mathrm{Gl}_n^+} \mathbb{R}^n$.

1.6. DÉFINITION (P. Baum). — *Le* G-*fibré* E *est dit* K-*orienté si son groupe structural est réduit à* $\mathrm{Ml}_n^c$.

Notons qu'en général un G-fibré n'a pas de structure métrique G-invariante, et donc on ne peut pas réduire le groupe structural à $\mathrm{Spin}^c(n)$.

1.7. PROPOSITION. — (*a*) *Si* E *est un* G-*fibré complexe alors* E *est* K-*orienté.*

(*b*) *Si* E *est* K-*orienté,* E* *est* K-*orienté.*

(*c*) *Pour tout* G-*fibré* E, $E \oplus E^*$ *est* K-*orienté.*

(*d*) *Si* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *est une suite exacte de* G *fibrés et si deux des fibrés* E, E′, E″ *sont* K-*orientés alors le troisième l'est.*

(*e*) *Si* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *est une suite exacte de* G *fibrés alors* $E' \oplus E''$ *est* K-*orienté si et seulement si* E *l'est.*

*Preuve.* — (*a*) On a un homomorphisme $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Ml}_{2n}^c$ qui prolonge l'homomorphisme $U(n) \to \mathrm{Spin}^c(2n)$ (*cf.* [2], [29]).

(*b*) L'automorphisme de $\mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ donné par $x \to {}^t x^{-1}$ se prolonge à $\mathrm{Ml}_n^c$.

(*c*) L'homomorphisme $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}_{2n}^+(\mathbb{R})$ donné par $x \to \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & {}^t x^{-1} \end{pmatrix}$ se relève en un homomorphisme $\mathrm{Gl}_n \to \mathrm{Ml}_{2n}^c$.

(*d*) Si E′ et E″ sont K-orientés on utilise l'homomorphisme $\begin{bmatrix} \mathrm{Ml}_{n'}^c & M_{n',n''}(\mathbb{R}) \\ 0 & \mathrm{Ml}_{n''}^c \end{bmatrix} \to \mathrm{Ml}_{n'+n''}^c$ pour montrer que E l'est. Si E′ et E sont K-orientés, on note que le produit fibré

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Ml}_{n'}^c & M_{n',n''}(\mathbb{R}) \\ 0 & \mathrm{Gl}_{n''}(\mathbb{R}) \end{bmatrix} \underset{\mathrm{Gl}_{n'+n''}}{\times} \mathrm{Ml}_{n'+n''}^c = \begin{bmatrix} \mathrm{Ml}_{n'}^c & M_{n',n''}(\mathbb{R}) \\ 0 & \mathrm{Ml}_{n''}^c \end{bmatrix}.$$

Si E et E″ sont K-orientés, on raisonne de la même façon ou on passe aux fibrés duaux.

(*e*) On a la suite exacte

$$0 \to E' \oplus E' \to E \oplus E' \oplus E'' \to E'' \oplus E'' \to 0$$

et donc par (*a*) et (*d*) $E \oplus E' \oplus E''$ est K-orienté.

On conclut en utilisant (*d*). ■

Soit $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ et soit E un $G_2$-fibré réel sur $V_2$. Alors $s^* E$ est un $G_2$-fibré sur $G_f$ sur lequel $G_1$ agit trivialement. Comme $G_f$ est un $G_2$-fibré principal, il existe un unique $G_1$-fibré E′ sur $V_1$ avec $r^* E' \cong s^* E$ (en tant que $G_1$, $G_2$ fibrés sur $G_f$). On pose $E' = f^* E$.

Une autre façon de voir $f^* E$ est de considérer le fibré E comme associé à un cocycle $i: G_2 \to Gl_n(\mathbb{R})$ et utiliser le cocycle composé $i \circ f$. Soit $\tau_j$ le fibré transverse à $(V_j, F_j)$ ($\tau_{j,x} = T_x V_j / F_{j,x}$ pour $x \in V_j$, $j = 1, 2$). Alors $\tau_j$ est un $G_j$-fibré.

1.8. Définition. — *L'application* $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ *est dite* K-*orientée si le* $G_1$-*fibré* $\tau_1^* \oplus f^* \tau_2$ *est* K-*orientée.*

Si $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ est une application de classe $C^\infty$, $df$ détermine un $G_1$-homomorphisme de $G_1$-fibrés $df: \tau_1 \to f^* \tau_2$. Alors $f$ est une immersion si et seulement si en tout $x \in V_1$ $(df)_x$ est injective et une submersion si $(df)_x$ est surjective.

1.9. Définition. — (*a*) *Si f est une immersion on pose* $N_f = f^* \tau_2 / df(\tau_1)$.

*Alors f est* K-*orienté si* $N_f$ *est* K-*orienté en tant que* $G_1$-*fibré.*

(*b*) *Si f est une submersion on pose* $K_f = \mathrm{Ker}(df)$.

*Alors f est* K-*orienté si* $K_f^*$ *est* K-*orienté.*

La cohérence entre les définitions 1.8 et 1.9 est assurée par la proposition 1.7 (*d*) et (*c*). On renvoie à [11] Appendice B pour les conventions sur les K-orientations d'une immersion, d'une submersion et d'une composée de deux applications.

1.10. *Remarque* (suggérée par A. Connes). — Il est légitime de comparer la notion de K-orientation que nous utilisons ici à la suivante : le fibré G équivariant E est K-orienté si sur BG il a une structure $\mathrm{Spin}^c_n$. Sans trop rentrer dans le formalisme cohomologique (*cf.* [19], [21], [39] pour des discussion détaillées) disons que l'obstruction à une K-orientation vit dans le groupe de cohomologie $H^2(G; \mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ est le faisceau des germes d'applications continues à valeurs dans U(1) : il s'agit du ramené en arrière par le cocycle (homomorphisme) $G \to Gl_n^+(\mathbb{R})$ qui correspond au fibré E, de la classe de $H^2(Gl_n^+(\mathbb{R}); U(1))$ associé à l'extension centrale

$$1 \to U(1) \to Ml_n^c \to Gl_n^+ \to 1.$$

L'obstruction à une structure $\mathrm{Spin}^c_n$ sur BG vit dans le groupe $H^2(BG; \mathcal{U}) \cong H^3(BG; \mathbb{Z})$. Cependant l'application naturelle $H^2(G; \mathcal{U}) \to H^2(BG; \mathcal{U})$ n'est pas un isomorphisme car les coefficients $\mathcal{U}$ ne sont pas discrets [2]. En fait l'application $H^3(G; \mathbb{Z}) \to H^3(BG; \mathbb{Z})$

[2] On a, en fait, un isomorphisme $H^2(G; \mathcal{U}) = H^2(BG; \mathcal{U}')$ où $\mathcal{U}'$ est le faisceau des germes d'applications continues à valeurs dans U(1), constantes sur les feuilles du feuilletage sur BG (*cf.* [21]).

est un isomorphisme (*cf.* [21]) mais comme $H^*(G; \mathscr{R}) \neq 0$ où $\mathscr{R}$ désigne le faisceau des germes d'applications continues à valeurs réelles on a $H^2(G; \mathscr{U}) \neq H^3(G; \mathbb{Z})$.

Notons que les notions analogues de K-orientation réelle coïncident comme les obstructions vivant dans les groupes $H^2(G; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H^2(BG; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et que l'application naturelle $H^2(G; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(BG; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Nous construisons maintenant explicitement un exemple où ces notions de K-orientation ne coïncident pas.

Soit (V, F) un feuilletage dont le groupoïde d'holonomie restreint à une transversale T est $G_T^T = T \rtimes_\alpha \mathbb{Z}^2$ où $\mathbb{Z}^2$ agit dans T (par exemple $T = \mathbb{T}^2$) avec un point fixe isolé $x_0$.

Soit E le fibré réel G-équivariant de dimension 3 sur V donné par le cocycle composé $G \xrightarrow{\sim} G_T^T \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\beta} \dot{SO}(3)$ où $\alpha$ est l'homomorphisme $(x, p) \to p$ $(x \in T, p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ et

$$\beta(1, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \beta(0, 1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient $j$ et $k$ des antécédents de $\beta(1, 0)$ et de $\beta(0, 1)$ dans $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$. On a $[j, k] = \varepsilon\left( = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in SU(2)\right)$ et donc l'obstruction à une K-orientation réelle est le ramené par $\alpha$ de l'élément $u \in H^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donné par la suite exacte $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \Gamma \to \mathbb{Z}^2 \to 1$ où $\Gamma$ est le « groupe de Heisenberg » des matrices $\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'obstruction à une K-orientation complexe est l'image par $\alpha^*$ de $v \in H^2(\mathbb{Z}^2; U(1))$ donné par $1 \to U(1) \to \Gamma' \to \mathbb{Z}^2 \to 1$ où

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; a, b \in \mathbb{Z}, \; c \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \quad .$$

Soit $i: \mathbb{Z}^2 \to G_T^T$ l'homomorphisme donné par le point $x_0$. On a $\alpha \circ i = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$. Comme $v \neq 0$, $i^* \alpha^*(v) \neq 0$ et donc $\alpha^*(v) \neq 0$ et le G-fibré E n'est pas K-orienté. Cependant, dans $BG = (T \times \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}^2$ l'obstruction à une structure $\mathrm{Spin}^c$ est le ramené en arrière par $\alpha: BG \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = B\mathbb{Z}^2$ d'un élément de $H^3(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}) = 0$.

Notons finalement que de la discussion ci-dessus résulte que si $E_0$ et $E_1$ sont des G-fibrés homotopes (i. e. il existe un $G \times [0, 1]$ fibré E de restrictions $E_0$ et $E_1$) une K-orientation *réelle* de $E_0$ détermine une K-orientation réelle de $E_1$. En particulier $E_0 \oplus E_1$ a une K-orientation réelle canonique, et donc une K-orientation complexe canonique et finalement une K-oreintation (complexe) de $E_0$ détermine une K-orientation (complexe) de $E_1$. Le (*e*) de la proposition 1.7 est un cas particulier de ce fait, les fibrés E et $E' \oplus E''$ étant canoniquement homotopes (notations de 1.7).

## II. Construction de quelques éléments de groupes de Kasparov associés à des fibres K-orientés (*cf.* [31] et [10])

Dans cette section G désigne, ou bien un groupoïde étale (i.e. G est une variété, $V = G^{(0)}$ est ouvert, $r$ et $s$ sont des morphismes étales de variétés), ou bien le groupoïde d'holonomie d'une variété feuilletée (V, F). Soit E un G-fibré vectoriel réel :

Nous systématisons la construction de ([10]. § V) : nous allons décrire une méthode permettant de construire des éléments de groupes de Kasparov qui nous seront essentiels par la suite :

1. Un élément $\gamma_E$ de $KK(C^*(G); C^*(G))$ qui correspond à l'obstruction $\gamma$ de G. G. Kasparov ([31], § 5) (définition 2.5),

2. Des éléments $\alpha'_E \in KK(C^*(G^E); C^*(G))$ et $\beta'_E \in KK(C^*(G); C^*(G^E))$ associés à une K-orientation de E et qui se réduisent à l'isomorphisme de Thom lorsque E possède une structure riemannienne G-invariante (définition 2.8) (*cf.* [30], § 5).

3. Soit W le G-fibré des formes quadratiques définies positives sur E. On retrouve les éléments $\tilde{\alpha}_E \in KK(C^*(G); C^*(G^W))$ et $\tilde{\beta}_E \in KK(C^*(G^W); C^*(G))$ (2.10) de [10], § V.

4. Soit L un fibré complexe G-équivariant. On définit un élément de multiplicité $[L] \in KK(C^*(G); C^*(G))$ (2.11) (*cf.* [10]).

Soit H un groupe de Lie, $i : G \to H$ un cocycle, A et B des H-algèbres. Le cocycle $i$ en fait des G-algèbres et on peut considérer les produits croisés $A \rtimes_i G$ et $B \rtimes_i G$ au sens de [38].

On construit alors un morphisme de $KK_H(A; B)$ dans $KK(A \rtimes_i G; B \rtimes_i G)$ qui est « naturel » relativement au produit de Kasparov, à la réduction du groupe structural et à la restriction de G à des fermés (ou des ouverts) saturés.

Dans les exemples ci-dessus, H est le groupe structural du fibré E, (i. e. $H = Gl_n(\mathbb{R})$, $Gl_n^+(\mathbb{R})$, $Gl_n(\mathbb{C})$, $Ml_n^c$) $i : G \to H$ le cocycle associé à E et on prend les H-algèbres commutatives $\mathbb{C}$, $C_0(\mathbb{R}^n)$, $C_0(H/K)$ où K est le compact maximal de H.

Notons que la construction que nous faisons ici se généralise *nec varietur* à un groupoïde G et un groupe H localement compacts.

Notation. — Soit $\pi : X \to V$ un fibré G-équivariant, X étant une variété $C^\infty$. On note $G^X$ le groupoïde $r^*(X) = \{(x, \gamma) \in X \times G,\ \pi(x) = r(\gamma)\}$; on a $G^{X(0)} = X$, $r(x, \gamma) = x$ et $s(x, \gamma) = \gamma^{-1} x$. $G^X$ est une variété.

Si G est un groupoïde étale, alors $G^X$ l'est aussi.

Si G est le groupoïde d'une variété feuilletée (V, F), son action sur X détermine un feuilletage horizontal F' sur X (de même dimension que F) et $G^X$ n'est autre que le groupoïde d'holonomie de (X, F').

Remarquons que la réciproque est fausse : l'existence sur X d'un feuilletage « parallèle » à F n'implique pas une action de G comme nous l'avons déjà vu dans la remarque 1.4 (*c*) en construisant une immersion au sens ensembliste de $V_1/F_1 \to V_2/F_2$ qui n'est pas une immersion au sens de la définition 1.3.

2.1. Soit H un groupe de Lie et un cocycle $i: G \to H$ : c'est-à-dire la donnée d'un recouvrement ouvert $(\Omega_j)_{j \in I}$ de $V = G^{(0)}$ et, pour tout $k$, $l \in I$, d'une application $i_{k,l}: G^{\Omega_k}_{\Omega_l} \to H$ telle que $i_{k,p}(\gamma_1 \gamma_2) = i_{k,l}(\gamma_1) i_{l,p}(\gamma_2)$, pour $\gamma_1 \in G^{\Omega_l}_{\Omega_k}$ et $\gamma_2 \in G^{\Omega_p}_{\Omega_l}$.

Il est équivalent de considérer le fibré principal G-équivariant P de groupe structural H construit à partir de la restriction $i_0$ de $i$ à V, les actions de G et H commutant.

Soit A une H-algèbre (i. e. une C*-algèbre ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduée) munie d'une action continue, involutive (et préservant le degré) de H); le fibré associé $P \times_H A$ de C*-algèbres sur V est G-équivariant et on peut former le produit croisé $C^*(G; P \times_H A)$ (*cf.* [38]); nous noterons $A \rtimes_i G$ cette dernière C*-algèbre.

Soit B une autre H-algèbre : nous allons décrire à partir de $i$ un morphisme de groupes de Kasparov :

$$i^*: \quad KK_H(A; B) \to KK(A \rtimes_i G; B \rtimes_i G).$$

Pour cela, soit $(\mathscr{E}_0, F_0)$ un bimodule de Kasparov représentant une classe $x \in KK_H(A; B)$; notons que H agit sur $\mathscr{E}_0$ et $g(F_0) - F_0$ est compact pour $g \in H$.

Pour simplifier, notons $\mathscr{E}_1 = P \times_H \mathscr{E}_0$, $A_1 = P \times_H A$, $B_1 = P \times_H B$ les fibrés G-équivariant associés sur V.

On peut supposer que le recouvrement $(\Omega_j)_{j \in I}$ associé à $i$ est localement fini et soit $(\varphi_j)$ une particion de l'unité associée à ce recouvrement. On a donc des trivialisations locales $\Theta_j \in C(\Omega_j; \mathscr{L}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_0))$ Soit $F_1$ l'élément de $C(V; \mathscr{L}(\mathscr{E}_1))$ défini par :

$$F_1 = \sum_{j \in I} \varphi_j \Theta_j^{-1} F_0 \Theta_j.$$

Fixons $j \in I$ et prenons $\xi = \Theta_j^{-1}(\xi_0)$ où $\xi_0 \in C_0(\Omega_j; \mathscr{E}_1)$.

Sur $\Omega_i \cap \Omega_j$, l'automorphisme $\Theta_j \circ \Theta_i^{-1}$ de $\mathscr{E}_0$ est dans l'image de l'action de H et donc on a pour un tel $\xi$ :

$$(\Theta_i(F_1 \xi))(x) = F_0(\xi_0(x)) + k_{i,j}(x)) \xi(x)$$

où $k_{i,j} \in C(\Omega_i \cap \Omega_j; \mathscr{K}(\mathscr{E}_0))$.

On a donc construit un champ d'opérateurs $F_1 \in C(V; \mathscr{L}(\mathscr{E}_1))$, tel que $F_1 - F_1^*$, $F_1^2 - 1$ et $[F_1, a]$ (pour $a \in C(V; A_1)$) soient localement compacts, i. e. éléments de $C(V; \mathscr{K}(\mathscr{E}_1))$. $F_1$ dépend du choix de recouvrement, mais l'image $\pi(F_1)$ dans $C_b(V; \mathscr{L}(\mathscr{E}_1))/C_b(V; \mathscr{K}(\mathscr{E}_1))$ n'en dépend pas.

De plus comme l'action de G dans $\mathscr{E}_0$ est factorisée à travers H, on a $\gamma \to F_{1, r(\gamma)} - \gamma(F_{1, s(\gamma)}) \in C_b(G; \mathscr{K}(r^* \mathscr{E}_1))$ pour $\gamma \in G$ (i. e $F_1$ est G-continu *cf.* [31]).

Notons que l'action de G dans $\mathscr{E}_1$ est continue.

Rappelons que $B \rtimes_i G$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre involutive $C_c(G_1; r^*(B_1))$ pour le produit :

$$bb'(\gamma) = \int_{r(\gamma') = r(\gamma)} b(\gamma') \gamma'(b(\gamma'^{-1} \gamma)) \qquad (cf.\ [38])$$

[dans le cas d'un groupoïde étale, il s'agit d'une somme discrète; dans le cas du groupoïde d'une variété feuilletée (V, F), $b$ et $b'$ sont des sections du fibré de 1/2 densités $r^*(\Omega^{1/2}(F)) \otimes s^*(\Omega^{1/2}(F)) \otimes r^*(B_1)$].

On a un produit hilbertien de $C_c(G; r^*(\mathscr{E}_1))$ à valeurs dans $B \rtimes_i G$ en posant pour $\xi, \eta \in C_c(G; r^*(\mathscr{E}_1))$ :

$$\langle \xi, \eta \rangle(\gamma) = \int_{s(\gamma') = r(\gamma)} \gamma'^{-1} \langle \xi(\gamma'), \eta(\gamma' \gamma) \rangle$$

Soit $\mathscr{E}$ le $B \rtimes_i G$ C*-module hilbertien complété pour ce produit; alors $A \rtimes_i G$ agit sur $\mathscr{E}$ et $F = r^*(F_1) \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et $a(F - F^*)$, $a(F^2 - 1)$, $[F, a]$ sont compacts, $\forall a \in A \rtimes_i G$.

On pose alors $i^*(x)$ = classe de $(\mathscr{E}, F)$ dans $KK(A \rtimes_i G; B \rtimes_i G)$ (où $x = [(\mathscr{E}_0, F_0)] \in KK_H(A; B)$).

On peut construire d'une autre façon $i^*(x)$ en considérant le groupoïde $G^P$ associé au fibré principal défini par $i : G \to H$. Le produit croisé $(A \otimes C^*(G^P)) \rtimes H$ est équivalent au sens de Morita à $A \rtimes_i G$.

A un élément $x \in KK_H(A, B)$ on peut associer un élément

$$\tilde{x} \in KK((A \otimes C^*(G^P)) \rtimes H; (B \otimes C^*(G^P)) \rtimes H)$$

provenant, par la construction de [31], de l'élément $\tau_{C^*(G^P)}(x)$ de

$$KK_H(A \otimes C^*(G^P); B \otimes C^*(G^P)).$$

Par les équivalences de Morita mentionnées, $\tilde{x}$ correspond à $i^*(x)$.

En utilisant alternativement ces deux constructions, on obtient les propriétés de naturalité suivantes :

2.2. Lemme (*cf.* [31], theorem 4, § 4 et 1, § 6). — *Pour* $x \in KK_H(A; B)$ *et* $y \in KK_H(B; C)$, *on a :*

$$i^*(x \otimes y) = i^*(x) \otimes i^*(y).$$

*De plus* $i^*(1_A) = 1_{A \rtimes_i G}$. ■

2.3. Lemme. — *Soient* $H_1$, $H_2$ *deux groupes de Lie*, $\varphi : H_1 \to H_2$ *un homomorphisme continu*, $i_1 : G \to H_1$ *un cocycle et* $i_2 = \varphi \circ i_1$.

*L'homomorphisme* $\varphi$ *induit un morphisme* $\varphi^* : KK_{H_2}(A; B) \to KK_{H_1}(A; B)$ *et pour* $x \in KK_{H_2}(A; B)$ *on a :*

$$i_1^*(\varphi^*(x)) = i_2^*(x). \blacksquare$$

2.4. Restriction a des fermés ou ouverts saturés. — Soit Y une sous-variété fermée de V, saturée par G et $\Omega = V \setminus Y$. On a alors une suite exacte :

$$0 \to C^*(G_\Omega^\Omega) \xrightarrow{j} C^*(G) \xrightarrow{h} C^*(G_Y^Y) \to 0.$$

L'homomorphisme $j$ est injectif car toute représentation de $C_c(G_\Omega^\Omega)$ se prolonge à $C_c(G)$ (*cf.* [37]) et $h$ est surjectif car $h(C^*(G))$ contient $C_c(G_Y^Y)$.

Soit $\pi$ une représentation de $C^*(G)$ nulle sur $j(C^*(G_\Omega^\Omega))$; par [37] une telle représentation s'obtient par intégration à partir d'un couple $(\mu, H)$ où $\mu$ est une mesure sur V quasi invariante et H est un G-fibré d'espaces de Hilbert. On a donc support $(\mu) \subset Y$ et $\pi$ définit alors par restriction une représentation de $C^*(G_Y^Y)$. Ceci montre que

$$C^*(G)/C^*(G_\Omega^\Omega) \cong C^*(G_Y^Y).$$

Soit alors $i : G \to H$ un cocycle, $i_Y$, $i_\Omega$ ses restrictions, et $x \in KK_H(A; B)$. Avec des notations évidentes, on a :

$$i^*(x) \otimes h_B = h_A \otimes i_Y^*(x)$$
$$i_\Omega^*(x) \otimes j_B = j_A \otimes i^*(x).$$

*Exemples.* — Nous supposons que H est connexe; soit $\gamma_H \in KK_H(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ l'élément construit par G. G. Kasparov ([31], § 5). Rappelons que nous avons les propriétés suivantes :

1. $\gamma_H$ est un idempotent : $\gamma_H \otimes \gamma_H = \gamma_H$.

2. $\gamma_H = 1_{\mathbb{C}}$ si H est moyennable (ou de Lorentz, *cf.* [33]).

3. Soit K le compact maximal de H. Le morphisme de restriction $\mathrm{rest}_H^K : KK_H(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \to KK_K(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ est un isomorphisme de

$$\mathrm{Im}(\gamma_H) = \{ x \in KK_H(\mathbb{C}; \mathbb{C}),\ x\gamma_H = \gamma_H x = x \} \text{ sur } KK_K(\mathbb{C}; \mathbb{C}).$$

4. Soient $H_1$, $H_2$ deux groupes de Lie connexes. On a

$$\gamma_{H_1 \times H_2} = p_1^*(\gamma_{H_1}) \otimes_{\mathbb{C}} p_2^*(\gamma_{H_2})$$

où $p_j : H_1 \times H_2 \to H_j$ est la projection.

5. Soit $\varphi : H_1 \to H_2$ un homomorphisme propre. On a :

$$\varphi^*(\gamma_{H_1}) = \gamma_{H_2}.$$

Pour simplifier, on note $\gamma_n$ l'élément $\gamma_{Gl_n^+}$ et soit E un G-fibré vectoriel orienté, $i : G \to Gl_n^+$ le cocycle associé ($n = \dim E$).

2.5. Définition. — *On pose* $\gamma_E = i^*(\gamma_n)$; *c'est un élément du groupe* $KK(C^*(G); C^*(G))$.

A partir des propriétés de $\gamma_H$ ci-dessus, et avec les notations précédentes, on a :

2.6. Proposition. — *On a les propriétés :*

1. $\gamma_E$ *est un idempotent :* $\gamma_E^2 = \gamma_E$.

2. *Si le groupe structural de* E *se réduit à un groupe moyennable (ou de Lorentz), on a :* $\gamma_E = 1$ (*c'est en particulier le cas si* E *possède une métrique riemannienne* G-*invariante*).

3. *Soit* $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ *une suite exacte de* G-*fibrés vectoriels.*

*On a :* $\gamma_E = \gamma_{E_1} \otimes \gamma_{E_2}$.

*Démonstration.* — Nous montrons (3).

Soit $n=\dim E$, $n_j=\dim E_j$, $j=1,2$ et $Gl^+_{n_1,\,n_2}$ le sous-groupe de $Gl^+_n$ des matrices triangulaires supérieures par blocs :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

où $a_j \in Gl^+_{n_j}$, $b \in M_{n_1,\,n_2}$. Soit $\psi : Gl^+_{n_1,\,n_2} \to Gl^+_{n_1} \times Gl^+_{n_2}$ l'homomorphisme $\psi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right)=(a_1,\,a_2)$.

Notons que $\gamma_{Gl^+_{n_1}\times Gl^+_{n_2}}=\gamma_{n_1}\otimes\gamma_{n_2}$.

Posons $\gamma_{n_1,\,n_2}=\gamma_{Gl^+_{n_1,\,n_2}}$. E est défini par un cocycle $i : G \to Gl^+_{n_1,\,n_2}$ et par le lemme 2.3, il suffit de montrer que $\psi^*(\gamma_{n_1}\otimes\gamma_{n_2})=\gamma_{n_1,\,n_2}$.

Soit $\varphi : Gl^+_{n_1}\times Gl^+_{n_2} \to Gl^+_{n_1,\,n_2}$ l'inclusion canonique.

Comme $\varphi$ est propre, on a $\varphi^*(\gamma_{n_1,\,n_2})=\gamma_{n_1}\otimes\gamma_{n_2}$.

Soit $\Theta_t$, $t\in[0,1]$, l'homomorphisme de $Gl^+_{n_1,\,n_2}$ défini par

$$\Theta_t\left(\begin{pmatrix} a_1 & b \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a_1 & tb \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Ceci réalise une homotopie entre $\varphi\circ\psi$ et l'homomorphisme identique de $Gl^+_{n_1,\,n_2}$. On a donc :

$$\gamma_{n_1,\,n_2}=(\varphi\circ\psi)^*(\gamma_{n_1,\,n_2})=\psi^*(\gamma_{n_1}\otimes\gamma_{n_2}). \ \blacksquare$$

2.7. *Remarque.* — Comme $E\oplus E$ est canoniquement orienté et que $\gamma_E=\gamma_{E\,\oplus\,E}$, on voit que $\gamma_E$ ne dépend pas de l'orientation. Ceci montre aussi qu'on peut définir $\gamma_E$ pour tout G-fibré vectoriel réel E (non nécessairement orienté) en posant $\gamma_E=\gamma_{E\,\oplus\,E}$.

Soit $\alpha'_n\in KK^n_{Ml^c_n}(C_0(\mathbb{R}^n);\,\mathbb{C})$ et $\beta'_n\in KK^n_{Ml^c_n}(\mathbb{C};\,C_0(\mathbb{R}^n))$ les uniques éléments qui vérifient les propriétés :

1. $\gamma_{Ml^c_n}\otimes\alpha'_n=\alpha'_n\otimes\gamma_{Ml^c_n}=\alpha'_n$, $\gamma_{Ml^c_n}\otimes\beta'_n=\beta'_n\otimes\gamma_{Ml^c_n}=\beta'_n$
2. $\mathrm{rest}^{\mathrm{Spin}^c(n)}_{Ml^c_n}(\beta'_n)$ et $\mathrm{rest}^{\mathrm{Spin}^c(n)}_{Ml^c_n}(\alpha'_n)$

sont les éléments de $KK^*_{\mathrm{Spin}^c(n)}$ inverse l'un de l'autre construits par Kasparov dans [30] (théorème 7, § 5) et qui constituent une formulation de l'isomorphisme de Thom dans la théorie de Kasparov.

2.8. DÉFINITION. — *Soit* E *un G-fibré vectoriel* K*-orienté*, i : $G\to Ml^c_n$ *le cocycle associé. On pose*

$$\alpha'_E=i^*(\alpha'_n)$$

$$\beta'_E=i^*(\beta'_n)$$

*On a* $\alpha'_E\in KK^n(C^*(G^E);\,C^*(G))$, $\beta'_E\in KK^n(C^*(G);\,C^*(G^E))$.

Par le lemme 2.2, on a :

2.9. PROPOSITION. — *On a les propriétés suivantes :*

1. *Avec les notations précédentes :* $\gamma_E \otimes \beta'_E = \beta'_E$, $\alpha'_E \otimes \gamma_E = \alpha'_E$ *et* $\beta'_E \otimes \alpha'_E = \gamma_E$.

2. *Soient* $E_1$ *et* $E_2$ *deux G-fibrés vectoriels K-orientés et* $E'_1 = \pi_1^*(E_2)$ *le fibré sur* $E_1$ *d'espace total* $E_1 \oplus E_2$. *On a l'égalité :*

$$\beta'_{E_1 \oplus E_2} = \beta'_{E_1} \otimes \beta'_{E_2}$$

(*fonctorialité de* $\beta'$). ■

2.10. $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ (cf. [10], § V). — Soit $n$ un entier et $m = n(n+1)/2$.

L'espace $X = Ml_n^c/\mathrm{Spin}^c(n)$ étant muni d'une structure $\mathrm{Spin}^c\, Ml_n^c$-équivariante, on a un élément inversible du groupe $KK^m_{Ml_n^c}(C_0(X); C_\tau(X))$ (avec les notations de [31], § 5). Soient alors $\tilde{\alpha}_n \in KK^m_{Ml_n^c}(C_0(X); \mathbb{C})$ le produit de Kasparov de cet élément avec $\alpha_{Ml_n^c} \in KK_{Ml^c}(C_\tau(X); \mathbb{C})$ de [31], § 5 et $\tilde{\beta}_n$ l'unique élément de $KK^m_{Ml_n^c}(\mathbb{C}; C_0(X))$ qui vérifie $\tilde{\alpha}_n \otimes \tilde{\beta}_n = 1_{C_0(X)}$.

Soit $i : G \to ML_n^c$ un cocycle, $E = i^*(\mathbb{R}^n)$ et $W = i^*(X)$ les G-fibrés associés sur V.

On pose alors :

$$\tilde{\alpha}_E = i^*(\tilde{\alpha}_n) \in KK^m(C^*(G^W); C^*(G))$$

$$\tilde{\beta}_E = i^*(\tilde{\beta}_n) \in KK^m(C^*(G); C^*(G^W)).$$

On a les égalités : $\gamma_E \otimes \tilde{\beta}_E = \tilde{\beta}_E$, $\tilde{\alpha}_E \otimes \gamma_E = \tilde{\alpha}_E$, $\tilde{\beta}_E \otimes \tilde{\alpha}_E = \gamma_E$ et $\tilde{\alpha}_E \otimes \tilde{\beta}_E = 1_{C^*(G^W)}$.

*Remarque.* — Pour construire $\tilde{\alpha}_E$ et $\tilde{\beta}_E$, on n'a pas besoin de supposer que E est K-orienté. Par exemple, si la dimension de E est paire, il suffit de supposer E orienté.

2.11. MULTIPLICITÉ (*cf.* [10], § 6). — Soit L un G-fibré complexe de dimension $m$, $i : G \to Gl_m(\mathbb{C})$ le cocycle associé. Soit $[\mathbb{C}^m] \in KK_{Gl_m(\mathbb{C})}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ l'unique élément donné par :

(i) $\mathrm{rest}^{U(m)}_{Gl_m(\mathbb{C})}([\mathbb{C}^m])$ considéré comme élément de $R(U(m)) = KK_{U(m)}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ est la représentation tautologique de $U(m)$ dans $\mathbb{C}^m$.

(ii) $\gamma_{Gl_m(\mathbb{C})} \otimes [\mathbb{C}^m] = [\mathbb{C}^m]$.

On pose alors $[L] = i^*([\mathbb{C}^m])$, qui est un élément de $KK(C^*(G); C^*(G))$.

2.12. *Remarque.* — La notion de cocycle de G à valeurs dans un groupe et celle de morphisme d'espaces feuilletés $f : V/F \to V'/F'$ sont deux exemples de cocycle de G à valeurs dans un groupoïde $\Gamma$. A un tel cocycle est associé un fibré principal X sur $V = G^{(0)}$, G-équivariant, de groupoïde structural $\Gamma$ (G et $\Gamma$ commutent sur X). Deux tels cocycles $i$ et $i' : G \to \Gamma$ coïncident si et seulement si les fibrés associés X et X′ sont isomorphes de façon équivariante par rapport à G, $\Gamma$. Ceci revient à dire que les deux cocycles $i$ et $i'$, sont « cobordants ».

## III. Fonctorialité dans le cas des immersions

Dans cette section, nous définissons pour une immersion K-orientée $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ l'élément $f\,! \in KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ et nous démontrons la fonctorialité de cette construction : soient $f_3 : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ et $f_1 : V_2/F_2 \to V_3/F_3$ deux immersions K-orientées et $f_2 = f_1 \circ f_3$ la composée; on a alors $f_2\,! = f_3\,! \otimes f_1\,!$.

Tout se passe en réalité sur les groupoïdes étales associés à des transversales fidèles $T_1$ et $T_2$ à, respectivement, $V_1/F_1$ et $V_2/F_2$. Notons pour simplifier $G_j$ le groupoïde restreint $G_{j,T_j}^{T_j}$. Rappelons que l'on peut supposer que $f$ induit un homomorphisme $\varphi : G_1 \to G_2$ et que l'immersion induite : $T_1 \to T_2$ est injective et propre (remarque 1.4); $\varphi$ est alors une immersion injective, K-orientée et $\varphi(G_1)$ est une sous-variété localement fermée de $G_2$. En utilisant le bimodule d'imprimitivité entre $C^*(V_j, F_j)$ et $C^*(C_j)$, on calcule $f\,!$ à partir d'un élément $\varphi\,! \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$.

$\varphi\,!$ est lui-même le produit de Kasparov de deux éléments :

Le premier est $\beta'_N \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ qui a été construit dans la définition 2.8, N étant le fibré normal de l'immersion $T_1 \to T_2$ qui est $G_1$-équivariant et K-orienté.

Pour le deuxième, on fait une construction qui se réduit, lorsque $G_1 = G_1^{(0)}$ est un groupoïde trivial, à l'application exponentielle qui est un difféomorphisme de N sur un ouvert de $G_2^{(0)}$. En général, il n'existe pas un tel difféomorphisme compatible avec l'action de $G_1$ et on est amené à construire directement un élément $\sigma_\varphi \in KK(C^*(G_1^N); C^*(G_2))$ à partir d'une extension de $C^*(G_1^N)$ par $C^*(G_2) \otimes C_0(]0,1])$. Cette extension utilise le groupoïde normal associé à $\varphi$, que nous commençons par définir (*cf.* [9]).

Nous supposons, pour définir $\sigma_\varphi$, que $C^*(G_1)$ est nucléaire (en K-théorie, cf remarque 3.17).

Dans le cas général, on a une forme plus faible de l'énoncé (*ibid.*).

3.1. Groupoide normal. — Soit X une sous-variété localement fermée de la variété Y, $N = TY/TX$ le fibré normal sur X. Sur l'ensemble $\mathcal{N} = N \times \{0\} \cup (Y \times ]0,1])$ on définit une structure de variété à bord par les cartes suivantes :

1. Sur $Y \times ]0,1]$, on a la structure produit.

2. Soient $\Omega \subset N$ et $U \subset Y$ deux ouverts contenant $x \in X$ et $\Theta : \Omega \to U$ une application exponentielle associée à une métrique riemannienne sur Y. On suppose que $\Omega$ contient la section nulle $i \circ \pi(\Omega)$ de la projection de $\Omega$ dans X. On a alors une bijection entre l'ouvert $\{(\xi, \lambda), \xi \in N, \lambda \in [0,1], \lambda\xi \in \Omega\}$ de $N \times [0,1]$ et l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(\Omega)) \cup (U \times ]0,1])$ définie par :

$$\tilde{\Theta}(\xi, \lambda) = \begin{cases} (\xi, 0) & \text{si } \lambda = 0 \\ (\Theta(\lambda\xi), \lambda) & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Montrons que les changements de carte sont $C^\infty$.

Soit $x_0 \in X$ : on peut écrire au voisinage de $x_0$, $N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et

$$\Omega = \mathbb{R}^p \times B_1^q \qquad (\text{où } B_\lambda^q = \{y \in \mathbb{R}^q, \|y\| \leq \lambda^{-1}\}),$$

et on a :

$$\tilde{\Theta}(x, y, \lambda) = \begin{cases} (x, y, 0) & \text{si } \lambda = 0 \\ (x, \lambda y, \lambda) & \text{si } \lambda \neq 0, \quad y \in B^q_\lambda. \end{cases}$$

Soit $\Theta'$ un autre tel difféormorphisme, on a $\Theta'(x, 0) = (x, 0)$ et $d\Theta'_{(x, 0)}(0, Y) = (A_x Y, Y)$ où $A_x \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ et donc il existe des fonctions $C^\infty$ $f_i (i = 1, 2, \ldots, q)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $g_{i,j}(i, j = 1, 2, \ldots, q)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telles que

$$\Theta'^{-1}(x, y) = (x + \sum_i y_i f_i(x, y), y + \sum_{i,j} y_i y_j g_{i,j}(x, y)).$$

On a alors, pour $\lambda \neq 0$ :

$$\tilde{\Theta}'^{-1} \circ \tilde{\Theta}(x, y, \lambda) = (x + \lambda \sum_i y_i f_i(x, \lambda y), y + \lambda \sum_{i,j} y_i y_j g_{i,j}(x, \lambda y), \lambda)$$

et on a $\tilde{\Theta}'^{-1} \circ \tilde{\Theta}(x, y, 0) = (x, y, 0)$, ce qui montre que $\tilde{\Theta}'^{-1} \circ \tilde{\Theta}$ est un difféomorphisme $C^\infty$ d'un voisinage de $(x_0, 0)$ dans $N \times [0,1]$ sur son image. Notons que N s'identifie (par $N \times \{0\}$) à une sous-variété fermée de $\mathcal{N}$.

Soit alors un homomorphisme injectif de groupoïdes étales $\varphi : G_1 \to G_2$ qui soit une immersion $C^\infty$ et telle que $\varphi(G_1)$ soit une sous-variété localement fermée de $G_2$ et soit N le fibré normal de l'immersion $\varphi_0 : G_1^{(0)} \to G_2^{(0)}$. N est $G_1$-équivariant et le groupoïde $G_1^N = r^*(N)$ est aussi l'espace total du fibré normal de $\varphi$.

Le groupoïde normal de $\varphi$ est la variété à bord $G = G_1^N \times \{0\} \cup (G_2 \times ]0,1])$ construite précédemment. G est un groupoïde comme réunion de deux groupoïdes et sa structure de variété est compatible à celle de groupoïde.

Comme $G_2 \times \{t\}$, $t \neq 0$ et $G_1^N \times \{0\}$ sont des fermés saturés de G, on a des homomorphismes d'évaluation

$$h_t : \quad C^*(G) \to C^*(G_2), \quad t \neq 0 \qquad \text{et} \qquad h_0 : \quad C^*(G) \to C^*(G_1^N).$$

On a vu au paragraphe 2.4, que l'on obtient alors une suite exacte

$$0 \to C^*(G_2 \times ]0,1]) \to C^*(G) \xrightarrow{h_0} C^*(G_1^N) \to 0.$$

Rappelons que nous supposons que $C^*(G_1)$ est nucléaire. Par un résultat de R. Zimmer [45], il est équivalent de dire que $G_1$ est moyennable ([37], définition 3.6). Il est clair alors que $G_1^N$ est aussi moyennable et donc $C^*(G_1^N)$ est aussi nucléaire.

Par G. G. Kasparov, ([30]. § 7), pour toute C*-algèbre nucléaire A, on a une suite exacte de groupes de KK-théorie :

$$\begin{tikzcd} KK^*(A;\, C^*(G)) \arrow[d, "\otimes [h_0]"'] & \\ & KK^*(A;\, C^*(G_2 \times ]0,1])) \arrow[ul] \\ KK^*(A;\, C^*(G_1^N)) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Or, pour toute C*-algèbre A, on a $KK^*(A;\, C^*(G_2\times ]0,1]))=0$, et donc l'homomorphisme de groupe induit par $\otimes [h_0]$ est inversible. En particulier, en prenant $A=C^*(G_1^N)$, on voit que $[h_0]$ est inversible en KK-théorie, i. e. il existe $[h_0]^{-1}\in KK(C^*(G_1^N);\, C^*(G))$ tel que $[h_0]\otimes [h_0]^{-1}=1_G$ *et* $[h_0]^{-1}\otimes [h_0]=1_{G_1^N}$.

3.2. DÉFINITION. — *Soit* $\varphi : G_1 \to G_2$ *un homomorphisme injectif d'image localement fermée qui soit une immersion de classe* $C^\infty$.

*On pose :*

$$\sigma_\varphi=[h_0]^{-1}\otimes [h_1].$$

3.3. *Remarque.* — 1. Pour avoir une suite exacte en KK-théorie et donc pour construire $[h_0]^{-1}$, *et* $\sigma_\varphi$, il suffit de supposer que $h_0$ admet un relèvement complètement positif (*cf.* [13], [42]).

2. Une autre façon de construire $\sigma_\varphi$ est de considérer la suite exacte

$$0\to C^*(G_2\times ]0,1[)\to C^*(G')\overset{h_0}{\to} C^*(G_1^N)\to 0$$

où $G'=G_1^N\times\{0\}\cup (G_2\times ]0,1[)$ est un sous-groupoïde ouvert de G. A cette suite exacte correspond un élément $\sigma'_\varphi\in KK^1(C^*(G_1^N);\, C^*(G_2\times ]0,1[))$. Soit alors $\alpha\in KK^1(C_0(]0,1[);\, \mathbb{C})$ l'inverse de l'élément de Bott (*cf.* [30], § 5). On a $\sigma_\varphi=-\sigma'_\varphi\otimes_{C_0(]0,1[)}\alpha$.

3.4. *Remarque.* — Supposons que $G_1=V_1$ et $G_2=V_2$ soient simplement des variétés (*i. e.* $G_j=G_j^{(0)}$) et soit $\Theta : N\to V_2$ un difféomorphisme exponentiel de N sur un ouvert U de $V_2$. Avec les notations ci-dessus $\tilde{\Theta} : N\times [0,1]\to \mathcal{N}$ définit une section de $h_0$ et donc $\sigma_\varphi=\Theta_*$.

Cette remarque s'applique encore dans le cas où il existe un difféomorphisme exponentiel $\Theta : G_1^N\to G_2$ qui soit un homomorphisme de groupoïdes.

3.5. *Exemple.* — Soit G un groupoïde étale et $0\to E_1\to E\to E_2\to 0$ une suite exacte de fibrés sur $G^{(0)}$, G-équivariants et K-orientés. Le fibré normal de l'immersion $E_1 \hookrightarrow E$ est $E_1\oplus E_2$ considéré comme fibré sur $E_1$ et on a donc un élément $\sigma\in KK(C^*(G^{E_1\oplus E_2});\, C^*(G^E))$.

Soit d'autre part $\beta'_E \in KK^*(C^*(G); C^*(G^E))$ et $\beta'_{E_1 \oplus E_2} \in KK^*(C^*(G); C^*(G^{E_1 \oplus E_2}))$ les éléments donnés par les K-orientations (définition 2.9).

3.6. Proposition. — *On a l'égalité :*

$$\beta'_E = \beta'_{E_1 \oplus E_2} \otimes \sigma.$$

*Démonstration.* — Le groupoïde normal $\tilde{G}$ associé à l'immersion $E_1 \subsetneq E$ est l'espace total d'un fibré $\tilde{E}$ sur $G \times [0,1]$ tel que $\tilde{E}_{|G \times \{0\}} = E_1 \oplus E_2$ et $\tilde{E}_{|G \times \{1\}} = 2$. C'est l'homotopie de E à $E_1 \oplus E_2$ de la démonstration de la proposition 2.6. Soit $\tilde{h}_t$ les homomorphismes d'évaluation de $C^*(\tilde{G})$ et $h_t$ ceux de $C^*(G \times [0,1])$; notons que l'élément $[h_t] \in KK(C^*(G \times [0,1]); C^*(G))$ ne dépend pas de $t$. Par 2.4, on a alors :

$$\beta'_E = [h_1]^{-1} \otimes \beta'_{\tilde{E}} \otimes [\tilde{h}_1] = \beta'_{E_1 \oplus E_2} \otimes [\tilde{h}_0]^{-1} \otimes [\tilde{h}_1] = \beta'_{E_1 \oplus E_2} \otimes \sigma \quad \blacksquare$$

$\varphi$! pour les groupoïdes étales.

3.7. Définition. — *Soit* $\varphi : G_1 \to G_2$ *un homomorphisme de groupoïdes étales. On suppose que* $\varphi$ *est une immersion de classe* $C^\infty$, *injective et* K-*orientée, et que* $\varphi(G_1)$ *est une sous-variété localement fermée de* $G_2$. *On suppose aussi que* $C^*(G_1)$ *est nucléaire. A partir des éléments* $\beta'_N \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ (*définition* 2.8) *et* $\sigma_\varphi \in KK(C^*(G_1^N); C^*(G_2))$, *on définit alors un élément* $\varphi$! de $KK^*(C^*(G_1), C^*(G_2))$ *par :*

$$\varphi! = \beta_N \otimes \sigma_\varphi.$$

3.8. Théorème. — *Soient* $\varphi_3 : G_1 \to G_2$, $\varphi_1 : G_2 \to G_3$ *deux homomorphismes de groupoïdes étales satisfaisant aux conditions de la définition* 3.7. *Alors* $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_3$ *vérifie ces mêmes conditions et on a l'égalité :*

$$\varphi_2! = \varphi_3! \otimes \varphi_1!.$$

*Démonstration.* — Soit $N_i$ le fibré normal $G_j$-équivariant de l'immersion induite $\varphi_{i\,|\,G_j^{(0)}} : G_j^{(0)} \to G_k^{(0)}$, avec $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ et $N'_1 = \varphi_3^*(N_1)$ la restriction du fibré $N_1$ à $G_1^{(0)}$. On a une suite exacte de fibrés $G_1$-équivariants :

$$0 \to N_3 \to N_2 \to N'_1 \to 0$$

et donc un élément $\sigma'_1 \in KK(C^*(G_1^{N_3 \oplus N'_1}); C^*(G_1^{N_2}))$ (*cf.* exemple 3.5) et on a une immersion K-orientée $N'_1 \subsetneq N_1$ de fibré normal $N_3$, d'où un élément

$$\sigma'_3 \in KK(C^*(G_1^{N_3 \oplus N'_1}); C^*(G_2^{N_1})).$$

On va démontrer dans les trois lemmes qui vont suivre la commutativité du diagramme suivant, où les flèches désignent des éléments de groupes de KK-théorie :

$$\begin{tikzcd}
 & G_1^{N_3} \arrow[rr, "\sigma_3"] \arrow[dr, "\beta'_{N'_1}"] & & G_2 \arrow[dr, "\beta'_{N_1}"] & \\
G_1 \arrow[ur, "\beta'_{N_3}"] \arrow[drr, "\beta'_{N_2}"'] & & G_1^{N_3} \oplus N'_1 \arrow[rr, "\sigma'_3"'] \arrow[d, "\sigma'_1"'] & & G_2^{N_1} \arrow[d, "\sigma_1"] \\
 & & G_1^{N_2} \arrow[rr, "\sigma_2"'] & & G_3
\end{tikzcd}$$

3.9. LEMME. — *On a* $\beta'_{N_2} = \beta'_{N_3} \otimes \beta'_{N'_1} \otimes \sigma'_1$.

*Démonstration.* — C'est la proposition 3.6 et la fonctorialité de $\beta'$ (Lemme 2.9). ■

3.10. LEMME. — *On a* $\beta'_{N'_1} \otimes \sigma'_3 = \sigma_3 \otimes \beta'_{N_1}$.

*Démonstration.* — Soient G et G′ les groupoïdes normaux des immersions $\varphi_3 : G_1 \hookrightarrow G_2$ et $\varphi'_1 : G_1^{N'_1} \to G_2^{N_1}$; G′ est l'espace total d'un fibré vectoriel N sur G, K-orienté, et par la naturalité, (§ 2.4) on a un diagramme commutatif où les flèches sont encore des éléments de KK-théorie :

$$\begin{tikzcd}
C^*(G_2) \arrow[r, "\beta'_{N_1}"] & C^*(G_2^{N_1}) \\
C^*(G) \arrow[u, "{[h_1]}"] \arrow[r, "\beta'_N"] \arrow[d, "{[h_0]}"'] & C^*(G') \arrow[u, "{[h'_1]}"'] \arrow[d, "{[h'_0]}"] \\
C^*(G_1^{N_3}) \arrow[r, "\beta'_{N'_1}"] & C^*(G_1^{N_3 \oplus N'_1})
\end{tikzcd}$$

■

3.11. LEMME. — *On a* $\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = \sigma'_3 \otimes \sigma_1$.

*Démonstration.* — L'ensemble

$$G = G_1^{N_3 \oplus N'_1} \cup (G_1^{N_2} \times ]0,1] \times \{0\}) \cup (G_2^{N_1} \times \{0\} \times ]0,1]) \cup (G_3 \times ]0,1] \times ]0,1])$$

est le groupoïde normal de l'immersion $H'_1 \hookrightarrow H_2$ où

– $H'_1$ est le groupoïde normal de l'immersion $G_1 \hookrightarrow G_2$

– $H_2$ est le groupoïde normal de l'immersion $G_1 \hookrightarrow G_3$.

Le fibré normal de l'immersion $H'_1 \hookrightarrow H_2$ s'identifie au groupoïde normal $H_1$ de l'immersion $G_1^{N'_1} \hookrightarrow G_2^{N_1}$.

Soit $\Gamma_1 = G_1^{N_2} \times \{0\} \cup (G_3 \times ]0,1])$ et $\Gamma_2 = G_1^{N_3 \oplus N'_1} \times \{0\} \cup (G_1^{N_2} \times ]0,1])$ les groupoïdes normaux des immersions $G_1 \to G_3$ et $G_1^{N_3} \to G_1^{N_2}$ qui s'identifient à des sous-groupoïdes fermés de G.

On a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'évaluation de C*-algèbres de groupoïdes :

$$
\begin{tikzcd}
C^*(G_2^{N_1}) & C^*(H_2) \arrow[l, "h_0^1"'] \arrow[r, "h_1^1"] & C^*(G_3) \\
C^*(H_1) \arrow[u, "f_1^1"] \arrow[d, "f_0^1"'] & C^*(G) \arrow[l, "q_0"'] \arrow[r, "q_1"] \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] \arrow[ul, "h_{(1,0)}"'] \arrow[ur, "h_{(1,1)}"] \arrow[dl, "h_{(0,0)}"] \arrow[dr, "h_{(1,0)}"'] & C^*(\Gamma_1) \arrow[u, "f_1^2"'] \arrow[d, "f_0^2"] \\
C^*(G_1^{N_3 \oplus N'_1}) & C^*(\Gamma_2) \arrow[l, "h_0^2"'] \arrow[r, "h_1^2"] & C^*(G_1^{N_2})
\end{tikzcd}
$$

Les éléments de KK-théorie $[h_{0,0}]$, $[f_0^i]$, $[h_0^i]$, $[p_0]$, $[q_0]$ sont inversibles et par définition on a

$$\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = [h_0^2]^{-1} \otimes [h_1^2] \otimes [f_0^2]^{-1} \otimes [f_1^2]$$

et donc par le diagramme précédent :

$$\sigma'_1 \otimes \sigma_2 = [h_{(0,0)}]^{-1} \otimes [h_{(1,1)}]$$

De même on a $\sigma'_3 \otimes \sigma_1 = [h_{(0,0)}]^{-1} \otimes [h_{(1,1)}]$, d'où l'égalité annoncée. ■

Ceci achève la démonstration du théorème 3.8. ■

3.12. *Remarque.* — Restriction de $\varphi!$ à un sous-groupoïde ouvert. Soit $\varphi : G_1 \to G_2$ une immersion injective et K-orientée de groupoïdes étales, N le fibré normal de $\varphi$ et deux sous-groupoïdes ouverts $G'_1 \subset G_1$, $G'_2 \subset G_2$ tels que $\varphi(G'_1) \subset G'_2$. On a alors l'égalité :

$$\varphi'! \otimes [j_2] = [j_1] \otimes \varphi!$$

où $\varphi' = \varphi_{|G'_1 \to G'_2}$ et $j_i : C^*(G'_i) \hookrightarrow C^*(G_i)$ est l'injection canonique.

Cela résulte de la naturalité de $\beta'$ (*cf.* 2.4) et de la commutativité du diagramme (avec des notations évidentes) :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & (C^*(G'_2 \times ]0,1]) & \to & C^*(G') & \to & C^*(G_1'^{N'}) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C^*(G_2 \times ]0,1]) & \to & C^*(G) & \to & C^*(G_1^N) & \to 0
\end{array}
$$

3.13. $f!$ POUR LES IMMERSIONS D'ESPACES DE FEUILLES. — Soit $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une immersion d'espaces feuilletés, K-orientée, et $T_1$, $T_2$ deux transversales fidèles à $V_1/F_1$ et $V_2/F_2$ telles que $f$ induise une immersion injective et propre (*cf.* remarque 1.4). Posons pour simplifier $G_j = G_{j,T_j}^{T_j}$ pour $j=1,2$. Alors $f$ induit un homomorphisme $\varphi : G_1 \to G_2$ qui est une immersion injective, K-orientée et telle que $\varphi(G_1)$ soit localement fermée dans $G_2$. En effet, pour tout $\gamma \in G_1$, l'holonomie de $\varphi(\gamma)$ est un germe de difféomorphisme de $T_2$ dont la restriction à $T_1$ est l'holonomie de $\gamma$, donc $\varphi$ est injective. D'autre part, soit $G'$ le sous-groupoïde de $G_2$, $G' = \{\gamma \in G_2,\ r(\gamma),\ s(\gamma) \in T_1, \text{ et } \gamma(T_1) \subset T_1\}$; c'est-à-dire qu'il existe U et U′ des voisinages de $r(\gamma)$ et $s(\gamma)$ dans $T_2$ et un difféomorphisme $h: U \to U'$ dont le germe en $r(\gamma)$ soit $\gamma$ et tel que $h(T_1 \cap U) = T_1 \cap U$. $G'$ est une sous-variété localement fermée de $G_{T_2}^{T_2}$ de dimension $\dim(T_1)$; $\varphi(G_1) \subset G'$ et comme $\varphi$ est étale de $G_1$ dans $G'$ dans $G'$, $\varphi(G_1)$ est un sous-groupoïde ouvert de $G'$. On a donc un élément $\varphi! \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$. Soit $\mathscr{E}^{T_j}$ le bimodule d'imprimitivité entre $C^*(V_j, F_j)$ et $C^*(G_j)$. Il définit un élément inversible $[\mathscr{E}^{T_j}]$ de $KK(C^*(V_j, F_j); C^*(G_j))$ et $[\mathscr{E}^{T_j}]^{-1} = [\mathscr{E}_{T_j}]$ (*cf.* [8], [24], [37]).

On a alors un élément de $KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ défini par :

$$[\mathscr{E}^{T_1}] \otimes \varphi! \otimes [\mathscr{E}_{T_2}].$$

3.14. LEMME. — *L'élément ci-dessus défini ne dépend pas du choix de la réduction de f aux transversales fidèles* $T_1$ *et* $T_2$.

*Démonstration.* — Soit $\varphi' : G'_1 \to G'_2$ une autre réduction comme ci-dessus associée à des transversales fidèles $T'_1$ et $T'_2$ aux feuilletages. En prenant la réunion $T_i \cup T'_i$ de ces transversales (pour $i=1,2$), on peut supposer que $G'_i$ est un sous-groupoïde ouvert et fermé de $G_i$. Soit $j_i$ l'injection $C^*(G'_i) \hookrightarrow C^*(G_i)$. On a alors $[\mathscr{E}_{T_i}] = [\mathscr{E}_{T_i}] \otimes [j_i]$ et $[\mathscr{E}^{T'_i}] = [j_i] \otimes [\mathscr{E}^{T_i}]$.

Utilisant alors la remarque 3.12, on a :

$$\begin{aligned}[\mathscr{E}_{T_1}] \otimes \varphi! \otimes [\mathscr{E}^{T_2}] &= [\mathscr{E}_{T'_1}] \otimes [j_1] \otimes \varphi! \otimes [\mathscr{E}^{T_2}] \\ &= [\mathscr{E}_{T'_1}] \otimes \varphi' \otimes [j_2] \otimes [\mathscr{E}^{T_2}] = [\mathscr{E}_{T'_i}] \otimes \varphi'! \otimes [\mathscr{E}^{T'_2}]. \ \blacksquare\end{aligned}$$

On peut alors poser :

3.15. DÉFINITION. — *Avec les notations précédentes, on définit*

$$f! \in KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2)) \ \textit{par}\ f! = [\mathscr{E}_{T_1}] \otimes \varphi! \otimes [\mathscr{E}^{T_2}]$$

*pour un choix* $\varphi$ *de réduction de f à des transversales fidèles.*

On a alors immédiatement :

3.16. THÉORÈME. — *Soit* $f_3 : V_1/F_1 \to V_2/F_2$, $f_1 : V_2/F_2 \to V_3/F_3$ *deux immersions* K-*orientées, de variétés feuilletées. On suppose que* $C^*(V_1, F_1)$ *et* $C^*(V_2, F_2)$ *sont nucléaires.*

*Alors* $f_2 = f_1 \circ f_3$ *est une immersion* K-*orientée et on a*

$$f_2! = f_3! \otimes f_1! \ \blacksquare$$

3.17. *Remarque.* — Nous examinons ici comment formuler les résultats précédents lorsque $C^*(V_1, F_1)$ n'est pas supposée nucléaire : le problème est dans la définition de $\sigma_\varphi$.

1. Il suffit en fait de supposer que $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire en K-théorie, et plus généralement que $\beta'_N$ est dans l'image de $KK_{nuc}$ [52]. En effet, $h_0$ définit toujours un isomorphisme de $KK_{nuc}(C^*(G_1); C^*(G))$ sur $KK_{nuc}(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ (*cf.* [52], proposition 2.7). On pose alors : $\varphi ! = \Theta(\sigma_\varphi(\beta''_N))$ où $\sigma_\varphi = (h_{1*}) \circ (h_{0*})^{-1}$ désigne l'homomorphisme de $KK_{nuc}(C^*(G_1); C^*(G_1^N))$ dans $KK_{nuc}(C^*(G_1); C^*(G_2))$ et $\beta''_N$ est tel que $\Theta(\beta''_N) = \beta'_N$ (où $\Theta : KK_{nuc} \to KK$ est l'homomorphisme de [52]).

Notons que $\beta'_N$ est dans l'image de $KK_{nuc}$ si et seulement si $\gamma_N$ l'est, ce qui est équivalent à dire, avec les notations de 2.10, que $C^*(G_1^W)$ est nucléaire en K-théorie.

2. Si on ne fait plus aucune hypothèse sur $C^*(V_1, F_1)$, on a quand même pour toute $C^*$-algèbre A nucléaire en K-théorie un homomorphisme

$$\sigma_\varphi^A : \quad KK(A; C^*(G_1^N)) \to KK(A; C^*(G_2))$$

donné par $\sigma_\varphi^A(x) = [h_0]_A^{-1}(x) \otimes [h_1]_A$

et on définit $f\,!^A$ comme élément du groupe

$$\mathrm{Hom}(KK(A; C^*(V_1, F_1)), KK(A; C^*(V_2, F_2))$$

et la fonctorialité s'écrit alors $f_2\,!^A = f_1\,!^A \circ f_3\,!^A$.

3. Si dans le théorème 3.16 on suppose que seulement $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire en K-théorie alors on a un homomorphisme

$$f_1\,!^{C^*(V_1, F_1)} : \quad KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2)) \to KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_3, F_3)).$$

Dans ce cas, $f_2\,!$ et $f_3\,!$ sont bien définis et on a :

$$f_1\,!^{C^*(V_1, F_1)}(f_3\,!) = f_2\,!.$$

Nous ne reviendrons pas là-dessus dans la suite, mais nous pouvons noter que les résultats que nous obtiendrons garderont un sens lorsque les hypothèses de nucléarité ne seront pas satisfaites.

3.18. *Remarque.* — Soit $f : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une immersion d'espaces feuilletés, de groupoïdes d'holonomie $G_1$ et $G_2$ et $i_2 : G_2 \to H$ un cocycle de $G_2$ à valeurs dans un groupe de Lie H (*cf.* 2.1). *La composée* $i_1 = i_2 \circ f$ définit un cocycle $i_1 : G_1 \to H$. Nous supposons que $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire.

Soit A une H-algèbre : à partir des algèbres $A \rtimes_{i_j} G_j$, $j = 1,2$, on peut refaire la construction précédente pour définir un élément

$$f_A\,! \in KK^m(A \rtimes_{i_1} G_1; A \rtimes_{i_1} G_2).$$

Pour $x \in KK_H^n(A; B)$, on a alors :

$$i_1^*(x) \otimes f_B\,! = (-1)^{mn} f_A\,! \otimes i_2^*(x).$$

3.19. *Remarque.* — La construction du groupoïde normal (§ 3.1) est analogue à celle du groupoïde tangent à une variété V due à A. Connes [9] : on retrouve cette dernière construction en considérant l'immersion $\varphi(x)=(x, x)$ de V dans $V \times V$ comme homomorphisme de groupoïdes représentant la submersion $V/F_1 \to V/F_2$, où $F_1=\{0\}$ et $F_2=TV$.

Ce sont là deux cas particuliers d'une construction plus générale d'un groupoïde normal associé à une immersion $\varphi: G_1 \to G_2$ de groupoïdes soit étales, soit d'holonomie de variétés feuilletées.

Remarquons d'abord que si $j: X \to Y$ est une immersion de classe $C^\infty$ de variétés, on peut construire la variété normale $N \times \{0\} \cup (Y \times ]0, 1])$ (*cf.* 3.1) sans supposer ni que $j(X)$ est localement fermée dans Y, ni que $j$ est injective. Pour simplifier, supposons que Y est une variété riemannienne complète et soit $\Theta: N \to Y$ l'application induite par l'application exponentielle. On a alors sur $N \times [0, 1]$ une relation d'équivalence $(\xi, \lambda) \sim (\xi', \lambda')$ si et seulement si $\lambda=\lambda'$ et si $\lambda=0$, $\xi=\xi'$, et si $\lambda \neq 0$, $\Theta(\lambda\xi)=\Theta(\lambda\xi')$. L'espace quotient $N \times [0, 1]/\sim$ est une variété $C^\infty$ et est en bijection ensembliste avec un ouvert de $N \times \{0\} \cup (Y \times ]0, 1])$. Cette variété est séparée si et seulement si $j$ est injective et X et Y sont séparées.

Cependant, si $\varphi: G_1 \to G_2$ est comme plus haut, on n'a pas forcément une structure de groupoïde sur la variété normale de $\varphi$. Il faut pour cela que $\Gamma$, l'espace du fibré normal de $\varphi$ hérite d'une structure de groupoïde.

Deux cas extrêmes de cette situation sont d'une part le cas où pour tout $x \in G_1^{(0)}$, la restriction $\varphi: G_1^x \to G_2^{\varphi(x)}$ est étale (ce qui est le cas si $G_1$ et $G_2$ sont des groupoïdes étales) et on a $\Gamma=G_1^N$; d'autre part le cas d'une variété doublement feuilletée $(V, F_1, F_2)$ avec $F_1 \subset F_2$. On a une submersion $f: V/F_1 \to V/F_2$ et une immersion induite de groupoïdes d'holonomie $\varphi: G_1 \to G_2$. Dans ce cas la structure de groupoïde sur $\Gamma=r^*(F_2/F_1)$ inclut la structure de groupe de ce fibré vectoriel : $\Gamma^{(0)}=V$ et pour $(X_1, \gamma_1)$, $(X_2, \gamma_2)$ éléments de $\Gamma$, avec $X_i \in (F_2/F_1)_{r(\gamma_i)}$, $r(\gamma_2)=s(\gamma_1)$, on a

$$(X_1, \gamma_1) \circ (X_2, \gamma_2)=(X_1+\gamma_1(X_2), \gamma_1\gamma_2).$$

Notons que par la transformation de Fourier, on a un isomorphisme entre $C^*(\Gamma)$ et $C^*(G_1^{(F_2/F_1)^*})$. On a, par la même construction que précédemment et en supposant $C^*(G_1)$ nucléaire, un élément de $KK^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$.

Cette définition est dûe essentiellement à A. Connes et coïncide avec la construction de $f!$ que nous ferons au paragraphe IV.

En effet, cette construction est fonctorielle (par la même démonstration que ci-dessus) donc il suffit de voir la coïncidence de ces deux éléments dans le cas presque isométrique. Soit $G=\Gamma \times \{0\} \cup (G_2 \times ]0, 1])$ le groupoïde normal de $\varphi$. Par un calcul différentiel asymptotique « $\rho, \delta$ » ([50], [51], [46], [48], [47]) on obtient un élément $x \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G))$ qui est une homotopie entre un symbole $\sigma$ et l'opérateur $P_\sigma$ de symbole $\sigma$; on a donc $h_{0*}(x)=[\sigma]$ et $h_{1*}(x)=[P_\sigma]$. En particulier pour le symbole $\sigma$ considéré au paragraphe IV, on a $[\sigma]=\beta'_{(F_2/F_1)^*}$ et $[P_\sigma]=f!$ et donc :

$$h_{1*}(h_{0*})^{-1}\beta'_{F_2/F_1}=f!$$

Voici un exemple d'homomorphisme $\varphi : G_1 \to G_2$ qui est une immersion et tel que $\Gamma$ ne soit pas un groupoïde. Soit (V, F) une variété feuilletée, de graphe G, E un fibré vectoriel sur V, non nécessairement G-équivariant, et $F' = p^{-1}(F)$ le feuilletage sur E, image réciproque de F par la projection $p : E \to V$. Par la section nulle, on a un homomorphisme $\varphi : G \to G' = G(E, F')$ qui est une immersion injective et propre, et cependant $\Gamma = r^* E$ n'admet une structure de groupoïde permettant de construire le groupoïde normal que si E est un fibré G-équivariant.

## IV. Fonctorialité dans le cas des submersions

Soit $f : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une submersion K-orientée.

Dans ce paragraphe nous construisons un élément $f! \in KK(V_1/F_1; V_2/F_2)$ (définition 4.6) et nous montrons la fonctorialité de cette construction (théorème 4.10). Pour ce faire, nous supposons d'abord que le $G_1$ fibré $f^{-1} F_2/F_1$ est presque isométrique, nous construisons $f!$ (définition 4.2) et montrons la fonctorialité (proposition 4.4) dans ce cas. Nous rappelons enfin comment le cas général se ramène au cas presque isométrique (*cf.* [10] § V).

Remarquons d'abord que si $f : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ est une submersion, et si $F'_2 = f^{-1}(F_2)$ est le ramené en arrière par $f$ de $F_2$ dans $V_1$ (*cf.* [20], p. 378 ou [11], § IV) alors $F_1$ est un sous-fibré de $F'_2$ et l'application $V_1/F'_2 \to V_2/F_2$ est étale.

Notons que le groupoïde d'holonomie $G_1$ de $(V_1, F_1)$ agit sur le fibré transverse $TV_1/F_1$ en préservant le sous-fibré $F'_2/F_1$. Et donc $G_1$ agit sur $F'_2/F_1$. Rappelons que $f$ est K-orientée si ce $G_1$ fibré est K-orienté i.e. son groupe structural se réduit à $Ml^c_n = \tilde{G}l^+_n \times_{\mathbb{Z}/2} U(1)$ (définition 1.9).

Rappelons aussi que le fibré $F'_2/F_1$ est dit presque isométrique s'il existe un sous-fibré $E'$ de $F'_2/F_1$, $G_1$ invariant, et tel que $E'$ et $E = (F'_2/F_1)/E'$ sont munis de structures isométriques invariantes-i.e. le groupe structural est réduit à $\begin{bmatrix} O_{n'} & M_{n', n-n'} \\ 0 & O_{n-n'} \end{bmatrix}$ (3).

Par [11] proposition 4.3, à l'application étale $V_1/F'_2 \to V_2/F_2$ il correspond un Hilbert $C^*(V_2, F_2)$-module $\mathscr{E}_f$ où $C^*(V_1, F'_2)$ agit par opérateurs compacts, et donc un élément $\varepsilon_f$ de $KK(C^*(V_1, F'_2); C^*(V_2, F_2))$ ([11] Corollary 4.4).

Il suffit donc de traiter le cas $p : V/F_1 \to V/F_2$ où $F_1$ et $F_2$ sont deux feuilletages de V avec $F_1 \subset F_2$.

Soit alors $0 \to E' \to F_2/F_1 \to E \to 0$ une structure presque isométrique sur le $G_1$ fibré $F_2/F_1$. A la K-orientation sur $F_2/F_1$ est associée une structure $\mathrm{Spin}^c$ sur le fibré $E^* \oplus E'^*$, i.e. un $G_1$ fibré complexe hermitien S de dimension $2^{[n/2]}$ (où $n$ est la dimension de $F_2/F_1$ et $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$) et d'un homomorphisme $G_1$ équivariant $c : E^* \oplus E'^* \to \mathscr{L}(S)$ vérifiant $c(\xi) = c(\xi)^*$, $c(\xi)^2 = \|\xi\|^2$ pour tout $\xi \in E^* \oplus E'^*$.

(3) La notion de structure presque isométrique utilisée ici est plus stricte que celle définie par A. Connes [10].

Si $n$ est pair, le $G_1$ fibré S est $\mathbb{Z}/2$ gradué et $c(\xi)$ est de degré 1 pour tout $\xi \in E^* \oplus E'^*$ (*cf.* [2], [23], [11] App. B).

Soit alors $\mathscr{E}_S$ le hilbert $C^*(V, F_2)$ module complété de $C_c(G_2; r^*(S) \otimes \Omega^{1/2})$ relativement au produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle (x) = \int \langle f_1(y), f_2(yx) \rangle$$

l'intégrale étant prise sur l'ensemble $\{ y \in G_2 / s(y) = r(x) \}$ – nous utilisons des demi-densités pour donner des formules intrinsèques. C'est le fibré noté $\mathscr{E}_{V,S}$ dans [11], § IV.

Comme $G_1$ agit dans S par transformations unitaires on obtient une représentation involutive $\pi$ de $C_c(G_1; \Omega^{1/2})$ dans $\mathscr{E}_S$ en posant

$$\pi(f) g(x) = \int f(y) y . g(y^{-1} x)$$

(l'intégrale est prise sur $\{ y \in G_1 / r(y) = r(x) \}$).

*Remarque.* – Pour donner un sens à cette intégration notons que

$$f(y) \in \Omega^{1/2}(F_{1, r(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{1, s(y)}),$$

que

$$\begin{aligned} g(y^{-1} x) \in S_{s(y)} \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, s(x)}) \\ = S_{s(y)} \otimes \Omega^{1/2}((F_2/F_1)_{s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{1, s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, s(x)}) \end{aligned}$$

et que

$$y . g(y^{-1} x) \in S_{r(y)} \otimes \Omega^{1/2}((F_2/F_1)_{r(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{1, s(y)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, s(x)})$$

Donc

$$f(y) . y . g(y^{-1} x) \in S_{r(x)} \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, r(x)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, s(x)}) \otimes \Omega(F_{1, s(y)})$$

Et donc $\int f(y) y . g(y^{-1} x)$ a un sens et est un élément de

$$S_{r(x)} \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, r(x)}) \otimes \Omega^{1/2}(F_{2, s(x)}).$$

Cette représentation $\pi$ s'étend à une représentation, notée encore $\pi$ de la $C^*$-algèbre $C^*(V, F_1)$ (*cf.* [37], [15]) [on rappelle que $C^*(V, F_1)$ désigne dans tout le papier le « $C^*$ max » de $(V, F_1)$].

Pour compléter la construction d'un élément de $KK^*(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$ il suffit de définir un opérateur $D \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_S)$ vérifiant les conditions $D = D^*$, $f(D^2 - 1) \in \mathscr{K}(\mathscr{E}_S)$, $[D, f] \in \mathscr{K}(\mathscr{E}_S)$ et D est de degré 1 si $n$ est pair.

L'opérateur $D \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_S)$ est pseudo-différentiel (i. e. $D \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(S))$) sa classe en KK-théorie est donnée par son symbole transverse $\sigma = \sigma(D) \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(S))$, que nous construisons maintenant.

Soit $p : (F_2/F_1)^* \to E'^*$ la transposée de l'inclusion $E' \subsetneq F_2/F_1$. Soit $s : E \to F_2/F_1$ une section et soit $q : (F_2/F_1)^* \to E^*$ la transposée de $s$. (Notons que $q$ n'est pas $G_1$ équivariante). Soit $\rho$ avec $1/2 < \rho < 1$.

On pose $b_q(x, \xi) = ((1 + \|p(\xi)\|^2 + \|q(\xi)\|^2)^{(\rho-1)/2} q(\xi), p(\xi)) \in (E^* \oplus E'^*)_x$, et $a_q(x, \xi) = (1 + \|b_q(x, \xi)\|^2)^{-1/2} c(b_q(x, \xi)) \in \mathscr{L}(S_x)$.

4.1. Lemme. — *La fonction $a_q$ est un symbole transverse transversalement elliptique* (définition A.7.4).

*Preuve.* — Notons que $1 - a_q^2 = (1 + \|b_q\|^2)^{-1} \in C_V((F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(S))$ (*cf.* Appendice, A.1).

Pour montrer que $a_q$ est un symbole de type $\rho$, $\delta$, on utilise que $b_q$ est un symbole d'ordre 1, de type 1, 0 pour écrire en coordonnées par une récurrence immédiate :

$$(D_x^k D_\xi^l) a_q = \sum_{i=0}^{|k|} \sum_{j=0}^{|l|} a_{k,l}^{i,j} \frac{P_{k,l}^{i,j}(b_q)}{(1 + \|b_q\|^2)^{i+j+(1/2)}}$$

où $P_{k,l}^{i,j}$ est un polynôme de degré $i+j+1$ et $a_{k,l}^{i,j}$ est un symbole d'ordre $i+j-|l|$, de type 1, 0. Les estimés découlent immédiatement de cette écriture et de ce que $(1 + \|\xi\|)^\rho \leqq (1 + \|b_q(\xi)\|^2)^{1/2}$.

Nous montrons maintenant que $a_q$ est un symbole transverse.

Si $q'$ est une autre projection $q' : (F_2/F_1)^* \to E^*$ transposée de la section $s'$, alors $q - q'$ étant nulle sur $E^*$ il existe $L \in \mathscr{L}(E'^*, E^*)$ avec $q - q' = L \circ p$.

Pour $\xi \in (F_2/F_1)^*$ posons $\|\xi\|_q = \sqrt{\|p(\xi)\|^2 + \|q(\xi)\|^2}$ et $\|\xi\|_{q'} = \sqrt{\|p(\xi)\|^2 + \|q'(\xi)\|^2}$. On a :

$$\left|\sqrt{1 + \|\xi\|_{q'}^2} - \sqrt{1 + \|\xi\|_q^2}\right| \leqq \|(q - q')(\xi)\| \leqq \|L_x\| \, \|p(\xi)\|$$

et comme pour $0 < \alpha < 1$ et $t \geqq -1$ on a $|(1+t)^\alpha - 1| \leqq |t|$ on déduit

$$\left|\left(\frac{1 + \|\xi\|_q^2}{1 + \|\xi\|_{q'}^2}\right)^{(1-\rho)/2} - 1\right| \leqq \frac{\|L_x\| \, \|p(\xi)\|}{(1 + \|\xi\|_{q'}^2)^{1/2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|(b_q - b_{q'})(x, \xi)\| &= \|q(\xi)(1 + \|\xi\|_q^2)^{(\rho-1)/2} - q'(\xi)(1 + \|\xi\|_{q'}^2)^{(\rho-1)/2}\| \\ &\leqq \|q(\xi) - q'(\xi)\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{(\rho-1)/2} + \|q'(\xi)\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{(\rho-1)/2} \frac{\|L_x\| \, \|p(\xi)\|}{(\|\xi\|_{q'}^2 + 1)^{1/2}} \\ &\leqq 2 \|L_x\| \, \|p(\xi)\| (1 + \|\xi_q\|^2)^{(\rho-1)/2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\|(b_q - b_{q'})(x, \xi)\| \leqq 2 \|L_x\| \, \|b_q(x, \xi)\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{(\rho-1)/2}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \|a_q - a_{q'}\| &\leqq \frac{\|b_q - b_{q'}\|}{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2}} + \frac{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2} - (\|b_{q'}\|^2 + 1)^{1/2}}{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2} (\|b_{q'}\|^2 + 1)^{1/2}} \|b_{q'}\| \\ &\leqq \frac{2 \|b_q - b_{q'}\|}{(\|b_q\|^2 + 1)^{1/2}} \leqq 4 \|L_x\| (1 + \|\xi\|_q^2)^{(\rho-1)/2}. \end{aligned}$$

Notons que $\gamma a_q(x, \xi) \gamma^{-1} = a_{\gamma q \gamma^{-1}}(r(\gamma), \gamma\xi)$ et que $\gamma \to \gamma q \gamma^{-1} - q$ est une section continue du fibré $r^* \mathscr{L}(E'^*, E^*)$. On a donc, pour tout $\varphi \in C_c(G_1)$,

$$(\gamma, \xi) \to \varphi(\gamma)\,[a_q(r(\gamma), \xi) - \gamma\, a_q(s(\gamma), \gamma^{-1}\xi)\gamma^{-1}]$$

est un élément de $C_0(r^*(F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(r^* S))$ et donc $a_q$ est un symbole transverse. ∎

Soit $D \in \Psi^*_\rho(V, F_2; \mathscr{L}(S))$ de symbole transverse la classe de $a_q$ (modulo les symboles tendant vers zéro à l'infini en $\xi$). Par le théorème A.7.5 on sait que $(\mathscr{E}_S, D)$ est un bimodule de Kasparov $(\mathscr{E}_S, D) \in \mathscr{E}(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$ (avec les notations de [8]).

4.2. Définition. — *Soit* $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ *une submersion presque isométrique et* K-*orientée. L'élément* $f\,!$ *associé à la* K-*orientation et à la structure presque isométrique est la classe dans* $KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ *du bimodule de Kasparov* $(\mathscr{E}_S \otimes \mathscr{E}_f, D \otimes 1)$.

Remarquons que $f\,!$ ne dépend pas du choix de $\rho$, deux choix différents donnant lieu à une homotopie évidente. Notons cependant que ce n'est pas une homotopie opératorielle [$\rho \to a_q^\rho$ n'est pas normiquement continu — cependant $a_q^\rho \in \mathscr{S}^0_{\rho_0, \delta_0}(V \times [\rho_0, \rho_1], (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(S))$ (si $1/2 < \rho_0 < \rho_1 < 1$)].

4.3. *Remarque*. — Nous dirons que $F'_2/F_1$ est presque isométrique au sens généralisé s'il existe une suite emboîtée de sous fibrés $G_1$ équivariants

$$F'_2/F_1 = E_k \supseteq E_{k-1} \supseteq \ldots \supseteq E_1 \supseteq E_0 = \{0\}$$

avec $E_j/E_{j-1}$ isométrique pour $j = 1, 2, \ldots, k$. Soient alors $s_j: E_j/E_{j-1} \to E_j$ des sections et $p_j: (F'_2/F_1)^* \to (E_j/E_{j-1})^*$ la transposée de $i_j \circ s_j$ où $i_j: E_j \to F'_2/F_1$ est l'inclusion.

Le fibré $F'_2/F_1$ est K-orienté si et seulement si le fibré $\bigoplus_{j=1}^{k} (E_j/E_{j-1})^*$ est muni d'une structure Spin$^c$ S.

On pose alors $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $\|\xi\|_s = (\Sigma \|p_j(\xi)\|^2)^{1/2}$

$$b_s(x, \xi) = \left( (\|\xi\|_s^2 + 1) \frac{\rho_j - 1}{2} p_j(\xi) \right)_{j=1, \ldots, k} \in \bigoplus_{j=1}^{k} (E_j/E_{j-1})^*$$

où $\rho_1 = 1 > \rho_2 > \ldots > \rho_k = \rho > 1/2$.

Finalement,

$$a_s(x, \xi) = (\|b_s(x, \xi)\|^2 + 1)^{-1/2}\, c(b_s(x, \xi)) \in \mathscr{L}(S_x).$$

Alors $a_s$ définit encore un symbole transverse transversalement elliptique, et donc un élément $f\,! \in KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$.

Bien sûr $f\,!$ ne dépend pas des sections $s_j$ comme son symbole principal n'en dépend pas. De plus, $f!$ ne dépend pas de la suite des $\rho_j$. Remarquons en outre que $f\,!$ ne dépend pas non plus des structures isométriques sur $E_j/E_{j-1}$, comme il y a une homotopie canonique entre deux telles structures.

Donc $f\,!$ ne dépend que de la K-orientation et — *a priori* — de la suite emboîtée de sous-fibrés $E_j$. Nous verrons plus bas que $f\,!$ ne dépend pas de cette suite de sous-fibrés.

Notons pour le moment que si la suite $E'_j$ est « plus fine » que la suite $E_j$, ces deux suites définissent le même $f\,!$.

Soient $f_3 : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ et $f_1 : V_2/F_2 \to V_3/F_3$ deux submersions K-orientées et presque isométriques. Alors $f_2 = f_1 \circ f_3$ est K-orientée (proposition 1.7) et presque isométrique au sens généralisé.

4.4. Proposition. — *Pour la* K-*orientation et la structure presque isométrique généralisée de $f_2$ induites par celles de $f_1$ et $f_3$, on a :*

$$f_2\,! = f_3\,! \otimes f_1\,!$$

*Preuve.* — Soit $F'_2 = f_3^{-1} F_2$ et $F'_3 = f_2^{-1} F_3$. On a $F_1 \subseteqq F'_2 \subseteqq F'_3 \subseteqq TV_1$. D'après la remarque A.7.6, il suffit de montrer $p_2\,! = p_3\,! \otimes p_1\,!$ où $p_3 : V_1/F_1 \to V_1/F'_2$, $p_1 : V_1/F'_2 \to V_1/F'_3$, $p_2 = p_1 \circ p_3 : V_1/F_1 \to V_1/F'_3$ sont les projections.

Soient $\sigma_3 \in \Sigma(V_1, (F'_2/F_1)^*; \mathscr{L}(S_3))$, $\sigma_1 \in \Sigma(V_1, (F'_3/F'_2)^*; \mathscr{L}(S_1))$ et $\sigma_2 \in \Sigma(V_1, (F'_3/F'_2)^*; \mathscr{L}(S_2))$ les symboles associés aux K-orientations et aux structures presque isométriques de $p_3$, $p_1$ et $p_2$ (rappelons que $S_2 = S_3 \hat{\otimes} S_1$ si la dimension de $F'_2/F_1$ ou celle de $F'_3/F'_2$ est paire et $S_2 = (S_3 \otimes S_1)^{(0)} \oplus (S_3 \otimes S_1)^{(1)}$ si ces deux dimensions sont impaires).

Mais pour un bon choix des constantes $\rho$ et $\rho_j$ définissant les $\sigma_j$, on a les conditions du théorème A.11 et donc $p_2\,! = p_3\,! \otimes p_1\,!$ ■

4.5. *Remarque.* — Si $f_3$ et $f_1$ sont munies de structures presque isométriques au sens généralisé, $f_2$ l'est aussi et la proposition 4.4 reste encore vraie (ainsi que sa preuve).

Soit maintenant $f : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une submersion K-orientée qu'on ne suppose plus presque isométrique.

Soit $F'_2 = f^{-1} F_2$ le feuilletage sur $V_1$ ramené en arrière par $f$ de $F_2$.

Soit W le fibré des formes quadratiques sur $F'_2/F_1$ et $p : W \to V_1$ la projection canonique. Comme $F'_2/F_1$ est un $G_1$-fibré, $G_1$ agit dans W et donc W est muni d'un feuilletage $F'_1$ tel que la feuille passant par $w \in W$ soit $\{\gamma w / \gamma \in G_1,\ s(\gamma) = p(w)\}$.

Soit $f' : W/F'_1 \to V_2/F_2$ la composée $f' = f \circ p$. Posons $F''_2 = p^{-1} F'_2 = f'^{-1} F_2$.

On a la suite exacte $0 \to \operatorname{Ker}(dp) \to F''_2/F'_1 \to p^*(F'_2/F_1) \to 0$.

Or $\operatorname{Ker}(dp)$ peut être muni de la structure isométrique induite pour la métrique $GL_n^+$ invariante sur $Gl_n^+/SO_n\,(=W_x)$ et tout point $w$ de W définit un produit scalaire sur $(F'_2/F_1)_{p(w)}$. Donc $F''_2/F'_1$ est presque isométrique.

De plus, le fibré $\operatorname{Ker} p$ est muni d'une structure $\mathrm{Spin}^c$ induite par la structure $\mathrm{Spin}^c$ $Ml_n^c$-invariante sur $Ml_n^c/\mathrm{Spin}^c(n) = W_x$ [comme la représentation $SO_n \to so_{(T_1}(Gl_n^+/SO_n))$ se remonte à $\mathrm{Spin}^c(n) \to \mathrm{Spin}^c((n(n+1))/2)$]. ($n = \dim F'_2/F_1$)..

Donc $f'$ est K-orientée.

Soit $\tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \in KK^{n(n+1)/2}(C^*(V_1, F_2); C^*(W, F'_1))$ l'élément construit en 2.10.

4.6 Définition. — *L'élément* $f\,! \in KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$ *est défini par* $f\,! = \tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \otimes f'\,!$ où $f' : W/F'_1 \to V_2/F_2$ *est muni de la structure presque isométrique* $0 \to \operatorname{Ker} dp \to F''_2/F'_1 \to p^*(F'_2/F_1) \to 0$ *et de la* K-*orientation* $S_{(\operatorname{Ker} dp)^*} \hat{\otimes} S_{p^*(F'_2/F_1)^*}$ *où* $S_{p^*(F'_2/F_1)^*}$ *est la structure* $\mathrm{Spin}^c_-$ *sur* $p^*(F'_2/F_1)^*$ *associée à la* K-*orientation de f.*

Montrons maintenant la cohérence des notations dans les définitions 4.2 et 4.6.

4.7. PROPOSITION. — *Si* $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ *est une submersion* K-*orientée et presque isométrique (au sens généralisé) les deux définitions de* $f!$ *coïncident.*

*Preuve.* — Soit $\tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*} \in KK^{n(n+1)/2}(C^*(W_1, F'_1); C^*(V_1, F_1))$ construit en 2.10 et tel que $\tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \otimes \tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*} = \gamma_{(F'_2/F_1)^*}$.

Notons (provisoirement) $f_!^{\text{iso}}$ le $f!$ donné par la définition 4.2.

On a : $\tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*} = p_!^{\text{iso}}$.

Or d'après la proposition 4.4 $f'^{\text{iso}}_! = p_!^{\text{iso}} \otimes f_!^{\text{iso}}$, donc

$$f! = (\tilde{\beta}_{(F'_2/F_1)^*} \otimes \tilde{\alpha}_{(F'_2/F_1)^*}) \otimes f_!^{\text{iso}} = \gamma_{(F'_2/F_1)^*} \otimes f_!^{\text{iso}}.$$

Mais comme $F'_2/F_1$ est presque isométrique son groupe structural se réduit à un sous-groupe moyennable de $Gl_n^+$ donc $\gamma_{(F'_2/F_1)^*} = 1_{C^*(V_1, F_1)}$. ■

*Remarque.* — Il résulte immédiatement de 4.7 que $f_!^{\text{iso}}$ ne dépend pas de la structure presque isométrique (*voir* remarque 4.3).

4.8. *Remarque.* — Soit $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une submersion K-orientée.

Soit $i_2 : G_2 \to H$ un cocycle où H est un groupe de Lie [$G_2$ désigne le graphe de $(V_2, F_2)$]. La composée $i_2 \circ f$ définit un cocycle $i_1 : G_1 \to H$. Soit A une H algèbre.

La même construction que ci-dessus permet de définir $f_A! \in KK^*(A \rtimes_{i_1} G_1; A \rtimes_{i_2} G_2)$ (on utilise des opérateurs pseudo-différentiels à coefficients dans A). Une autre façon de définir $f_A!$ est de considérer les fibrés principaux feuilletés $(P_1, F'_1)$ et $(P_2, F'_2)$ associés aux cocycles $i_1$ et $i_2$. Alors si $f_H : P_1/F'_1 \to P_2/F'_2$ est la submersion associée $f_H! \in KK_H(C^*(P_1, F'_1); C^*(P_2, F'_2))$.

Rappelons que $C^*(V_1, F_1)$ est équivalente au sens de Morita à $C^*(P_1, F'_1) \rtimes H$ et que $A \rtimes_i G_1$ est équivalente au sens de Morita à $(A \otimes_{\max} C^*(P_1, F'_1)) \rtimes H$. A travers ces équivalences de Morita on a :

$$f! = f_H! \rtimes H; \qquad f_A! = \tau_A(f_H!) \rtimes H.$$

Notons que si B est une autre H algèbre et que $x \in KK_H^j(A, B)$ on a

$$f_H! \otimes_{\mathbb{C}} x = (-1)^{jn} x \otimes_{\mathbb{C}} f_H! \qquad (n = \dim F'_2/F_1)$$

et donc

$$f_A! \otimes i_2^*(x) = (-1)^{jn} i_1^*(x) \otimes f_B!.$$

Notre but maintenant est de démontrer la fonctorialité de $f \to f!$ dans le cas de submersions non nécessairement presque isométriques. Pour cela nous aurons besoin d'un lemme :

Soient $n$ et $n'$ deux entiers et soient $H_{n,n'}$ le groupe $\begin{pmatrix} Ml_n^c & M_{n,n'} \\ 0 & Ml_{n'}^c \end{pmatrix}$,

$$K = \begin{pmatrix} \mathrm{Spin}^c(n) & 0 \\ 0 & \mathrm{Spin}^c(n') \end{pmatrix}$$

son compact maximal et

$$L=\begin{pmatrix}\mathrm{Spin}^c(n) & M_{n,n'}\\ 0 & \mathrm{Spin}^c(n')\end{pmatrix}\subseteq H_{n,n'}.$$

Soient

$$\tilde{\alpha}_L\in KK_L^{nn'}(C_0(L/K);\,\mathbb{C}),\qquad \tilde{\beta}_p\in KK_{Ml_p^c}^{p(p+1)/2}(\mathbb{C};\,C_0(Ml_p^c/\mathrm{Spin}^c(p)))$$

les éléments associés aux structures $\mathrm{Spin}^c$ équivariantes sur L/K et $Ml_p^c/\mathrm{Spin}^c(p)$ (*voir* 2.10).

Soient $j: H_{n,n'}\to Ml_{n+n'}^c$; $r: H_{n,n'}\to Ml_n^c$ et $r': H_{n,n'}\to Ml_{n'}^c$ les homomorphismes naturels.

Notons que $H_{n,n'}/K$ est égal (en tant $H_{n,n'}$ espace) à $Ml_{n+n'}^c/\mathrm{Spin}^c(n+n')$ et donc $j^*(\tilde{\beta}_{n+n'})=\tilde{\beta}_{H_{n,n'}}$.

4.9 Lemme. — *On a :*

$$j^*(\tilde{\beta}_{n+n'})\otimes_{C_0(H_{n,n'}/K)}\mathrm{ind}_L^{H_{n,n'}}(\tilde{\alpha}_L)=r^*(\tilde{\beta}_n)\otimes_{\mathbb{C}}r'^*(\tilde{\beta}_{n'})\in KK_{H_{n,n'}}^*(\mathbb{C};\,C_0(H_{n,n'}/L)).$$

*Preuve.* — Ces deux éléments sont stables par multiplication par $\gamma_{H_{n,n'}}(=r^*(\gamma_n)\otimes_{\mathbb{C}}r^*(\gamma_{n'})$ d'après la proposition 2.7), et leurs restrictions à K coïncident (c'est l'élément $i\,!$ en KK-théorie K-équivariante où $i$ est l'inclusion du point dans $H_{n,n'}/L$. On utilise la fonctorialité en KK-théorie équivariante par un groupe compact. Remarquons que les résultats et les démonstrations de [11] restent valables *nec varietur* dans ce cadre *cf.* [30]). ■

4.10. Théorème. — *Soient* $f_3: V_1/F_1\to V_2/F_2$ *et* $f_1: V_2/F_2\to V_3/F_3$ *des submersions* K-*orientées. Alors* $(f_1\circ f_3)!=f_3!\otimes f_1\,!$

*Preuve.* — Posons $f_2=f_1\circ f_3$. Notons $W_2$ le $G_2$ espace des formes quadratiques définies, positives sur $f_1^{-1}(F_3)/F_2$ et $\tilde{F}_2$ le feuilletage de $W_2$ associé à l'action de $G_2$. Notons $W_1$ (respectivement $W_1'$) le $G_1$ espace des formes quadratiques définies, positives sur $f_2^{-1}(F_3)/F_1$ [respectivement sur $f_3^{-1}(F_2)/F_1$ et sur $f_2^{-1}(F_3)/f_3^{-1}(F_2)$] et $\tilde{F}$(resp. $\tilde{F}_1'$) le feuilletage sur $W_1$ (resp. $W_1'$) associé à l'action de $G_1$.

Notons $p: W_1/\tilde{F}_1\to W_1'/\tilde{F}_1'$, $g_3: W_1'/\tilde{F}_1\to W_2/\tilde{F}_2$, $g_1: W_2/\tilde{F}_2\to V_3/F_3$ et $g_2: W_1'/\tilde{F}_1'\to V_3/F_3$ les submersions naturelles. Elles sont toutes trois K-orientées et presque isométriques naturellement.

Soit enfin $i: G_1\to H_{n,n'}$ ($n=\dim f_3^{-1}(F_2)/F_1$ et $n'=\dim f_1^{-1}(F_3)/F_2$) le cocycle associé aux K-orientations des fibrés $f_3^{-1}(F_2)/F_1$ et $f_1^{-1}(F_3)/F_2$.

On a $p\,!=i^*(\mathrm{ind}_L^{H_{n,n'}}(\tilde{\alpha}_L))$ et donc, d'après le lemme 4.9 et la proposition 4.4 on a $f_2\,!=i^*(r^*(\tilde{\beta}_n)\otimes_{\mathbb{C}}r'^*(\tilde{\beta}_{n'}))\otimes_{C^*(W_1',\tilde{F}_1')}g_2\,!$.

Notons $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ les fibrés $\mathrm{Spin}^c$ sur $W_1'$ de fibre

$$(E_1)_w=T_1(Ml_n^c/\mathrm{Spin}^c(n));\qquad (E_2)_w=T_1(Ml_{n'}^c/\mathrm{Spin}^c(n'));$$

$$(E_3)_w=(f_3^{-1}(F_2)/F_1)_x\qquad\text{et}\qquad (E_4)_w=(f_2^{-1}F_3)/f_3^{-1}F_2)_x$$

et soient $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ les structures $\mathrm{Spin}^c$ associées.

Remarquons que la K-orientation de $g_2$ est donnée par la structure $S_1 \hat{\otimes} S_2 \hat{\otimes} S_3 \hat{\otimes} S_4$ et que celle de $g_1 \circ g_3$ par $S_1 \hat{\otimes} S_3 \hat{\otimes} S_2 \hat{\otimes} S_4$.

Donc $g_3 ! \otimes g_1 ! = (g_1 \circ g_3) ! = \varepsilon g_2 !$ où $\varepsilon = (-1)^{nn'(n'+1)/2}$.

Donc

$$f_2 ! = \varepsilon\, i^* (r^* (\tilde{\beta}_n) \otimes_{\mathbb{C}} r'^* (\tilde{\beta}_{n'})) \otimes_{C^*(W'_1, F''_1)} g_3 ! \otimes_{C^*(W_2, F'_2)} g_1 !.$$

Soit $W''_1$ le $G_1$ espace des formes quadratiques sur $f_3^{-1}(F_2)/F_1$, $\tilde{F}''_1$ le feuilletage associé à l'action de $G_1$ et $g'_3 : W''_1/\tilde{F}''_1 \to V_2/F_2$ la projection. Soit $i_2 : G_2 \to \mathrm{Ml}^c_{n'}$ le cocycle associé au fibré $f_1^{-1}(F_3)/F_2$ et $i' : G(W''_1, \tilde{F}''_1) \to \mathrm{Ml}^c_{n'}$, $i' = i_2 \circ g'_3 = r' \circ i$.

On a par la remarque 4.8

$$i'^* (\tilde{\beta}_{n'}) \otimes_{C^*(W'_1, \tilde{F}_1)} g_3 ! = \varepsilon g'_3 ! \otimes i_2^* (\tilde{\beta}_{n'})$$

et donc

$$f_2 ! = \varepsilon (r \circ i)^* (\tilde{\beta}_n) \otimes i'^* (\tilde{\beta}_{n'}) \otimes g_3 ! \otimes g_1 ! = (r \circ i)^* \tilde{\beta}_n \otimes g'_3 ! \otimes i_2^* (\tilde{\beta}_{n'}) \otimes g_2 ! = f_3 ! \otimes f_1 ! \quad \blacksquare$$

4.11. *Remarque* (Naturalité de $f \to f!$). — Soit $f : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une submersion K-orientée et soit $W_2 \subseteq V_2$ une sous-variété fermée saturée pour le feuilletage $F_2$. Soit $W_1 = f^{-1}(W_2)$, c'est une sous-variété fermée de $V_1$ saturée pour le feuilletage $F_1$. Soit $G'_j \subseteq G_j$ le sous-groupoïde $G'_j = \{\gamma \in G_j / r(\gamma) \in W_j\} = \{\gamma \in G_j / s(\gamma) \in W_j\}$. Supposons, pour simplifier, que $G'_j$ est le groupoïde du feuilletage $(W_j, F_j)$.

Soit $p_j : C^*(V_j; F_j) \to C^*(W_j, F_j)$ donnée par $p_j(h) = h_{|G'_j}$ si $h \in C_c(G_j)$, et soit $f' : W_1/F_1 \to W_2/F_2$ la restriction de $f$ à $W_1/F_1$. On a

$$p_1^*(f' !) = p_{2*}(f !) \in KK(C^*(V_1, F_1); C^*(W_2, F'_2)).$$

4.12. *Remarque* (Cas d'une structure conforme invariante). — Soit $(V, F_1, F_2)$ une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subseteq F_2$ et supposons que le $G_1$ fibre $F_2/F_1$ est K-orienté et muni d'une structure conforme $G_1$ invariante. Dans ce cas, une construction d'Alain Connes donne aussi un élément de $KK^*(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$. Nous allons montrer que l'élément ainsi obtenu coïncide avec notre $f!$ ($f$ est la projection $V/F_1 \to V/F_2$). Commençons par rappeler la construction de A. Connes. Elle est donnée par un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 (de type 1, 0) longitudinal pour $F_2$ et de symbole principal transverse (pour $F_1$) $c(\xi)/\|\xi\|$ $(\xi \in (F_2/F_1)^*)$ où on a choisi une métrique (qui n'est pas $G_1$ invariante) sur $F_2/F_1$ telle que la structure conforme associée soit $G_1$ invariante, et où $c(\xi)$ désigne l'action dans le fibré S des spineurs. Il s'agit bien d'un symbole $G_1$ invariant, transversalement elliptique (A.7.4) qui détermine donc un élément $d \in KK^*(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$. Pour montrer que $d = f!$, considérons d'abord l'homomorphisme $\varphi : G_1 \to \mathbb{R}$ donné par $\varphi(\gamma) = \mathrm{Log}\|h(\gamma)\|$ où $h(\gamma) : (F_2/F_1)_{s(\gamma)} \to (F_2/F_1)_{r(\gamma)}$ est la restriction à $F_2/F_1$ de la différentielle de l'holonomie de $\gamma$ (c'est un homomorphisme car la structure conforme étant invariante, $\|h(\gamma)\|^2 = h(\gamma)^* h(\gamma)$). *Soit* $F'_1$ le feuilletage de $V_1 \times \mathbb{R}$ provenant de cet homomorphisme (la feuille de $F'_1$ passant par $(x, t) \in V \times \mathbb{R}$ est $\{(r(\gamma), t + \varphi(\gamma)) / \gamma \in G_1, s(\gamma) = x\}$). Soient $p_1 : V \times \mathbb{R}/F'_1 \to V \times \mathbb{R}/F_1 \times \mathbb{R}$;

$p_2 : V \times \mathbb{R}/F'_1 \to V \times \mathbb{R}/F_2 \times \mathbb{R}$ les projections. Comme $p_1 !$ est inversible, il suffit de montrer que $p_1 ! \otimes f ! = p_1 ! \otimes \tau_{\mathscr{K}(L^2(\mathbb{R}))} d$. On a, par le théorème 4.10, $p_1 ! \otimes f ! = p_2 !$. Comme le fibré ($F_2 \times \mathbb{R}/F'_1$ est presque isométrique, $p_2 !$ est donné par un opérateur pseudodifférentiel, longitudinal pour $F_2 \times \mathbb{R}$ dont le symbole transverse (pour $F'_1$) est

$$a(x, t, \xi, \eta) = (\| b(x, t, \xi, \eta) \|^2 + 1)^{-1/2} b(x, t, \xi, \eta)$$

où

$$b(x, t, \xi, \eta) = (\| e^t \xi \|^2 + \| \eta \|^2 + 1)^{(\rho - 1)/2} c(e^t \xi) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} c(\eta) \, (1/2 < \rho < 1,$$
$$x \in V,\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in (F_2/F_1)^*_x,\ \eta \in \mathbb{R}^*.$$

(La norme $\| \xi \|$ ne désigne pas ici une norme invariante mais une norme indépendante de $t$ telle que $e^t \| \xi \|$ soit invariante).

L'égalité $p_2 ! = p_1 ! \otimes d$ découle alors directement du théorème A.11.

## V. Le cas général

Soit $f$: $V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une application K-orientée de classe $C^\infty$. Alors $f$ admet des factorisations $f = p \circ i$ où $i$: $V_1/F_1 \to V/F$ est une immersion K-orientée et où $p$: $V/F \to V_2/F_2$ est une submersion K-orientée (si $V_1/F_1$ est K-orientée on peut prendre $i$: $V_1/F_1 \to V_1/F_1 \times V_2/F_2$, $i = (\mathrm{id}, f)$ et $p$: $V_1/F_2 \times V_2/F_2 \to V_2/F_2$ la projection — si $V_1/F_1$ n'est pas K-orientée on considère le feuilletage ($V'_1$, $F'_1$) donné par l'action de $G_1$ sur l'espace total du fibré transverse à $F_1$; alors $i$: $V_1/F_1 \to V'_1/F'_1 \times V_2/F_2$ et $p$: $V'_1/F'_1 \times V_2/F_2 \to V_2/F_2$ sont K-orientées).

Dans le paragraphe 3 nous avons construit un élément $i ! \in KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V, F))$ [dans le cas où $C^*(V_1, F_1)$ est nucléaire]. Dans le paragraphe 4 nous avons défini un élément $p ! \in KK^*(C^*(V, F); C^*(V_2, F_2))$. On a envie de poser $f ! = i \otimes p !$. Deux questions se posent alors naturellement :

1° Comment $i ! \otimes p !$ dépend de la factorisation $f = p \circ i$?

2° Est-ce que $(f_1 \circ f_3) ! = f_3 ! \otimes f_1 !$?

Le prochain lemme est le pas essentiel à la réponse à ces deux questions.

Remarquons que toute application $f$ admet une factorisation $f = p \circ i$, mais pour que $f$ admette une factorisation $f = i \circ p$ (notation évidente) il faut et il suffit que $f$ soit de rang constant (remarque 1.4.*b*).

5.1. Lemme. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} & V/F \arrow[dr, "p_2"] & \\ V_1/F_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & V_2/F_2 \\ & V'/F' \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

*un diagramme commutatif d'applications* K-*orientées les* $i_j$ *étant des immersions et les* $p_j$ *des submersions.*

*Alors on a* $i_1 ! \otimes p_2 ! = \gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1 ! \otimes i_2 !$

Ici $N_{i_1}$ désigne le $G_1$ fibré normal à $i_1$ (voir 1.9 *a*) et $\gamma_{N_{i_1}}$ l'élément associé de $KK(C^*(V_1, F_1); C^*(V_1, F_1))$ (définition 2.5).

*Preuve.* — On peut se restreindre à des transversales. On a alors un diagramme commutatif de groupoïdes étales

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dr, "p_2"] & \\
G_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & G_2 \\
 & G' \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons $q: \Gamma_{i_1} \to \Gamma_{i_2}$ la submersion K-orientée associée à ce diagramme où les $\Gamma_{i_j}$ désignent les « groupoïdes normaux » associés aux immersions $i_j$ (*cf.* 3.1).

D'après le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & C^*(G_1^{N_{i_1}}) \arrow[d, "p_N!"] \arrow[rr, dashed, bend left, "\sigma_{i_1}"] & C^*(\Gamma_{i_1}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "q!"] & C^*(G) \arrow[d, "p_2!"] \\
C^*(G_1) \arrow[ur, "\beta'_{N_{i_1}}"] \arrow[dd, "p_1!"'] & C^*(G'^{N_{i_2}}) \arrow[rr, dashed, bend right, "\sigma_{i_2}"'] & C^*(\Gamma_{i_2}) \arrow[l] \arrow[r] & C^*(G_2) \\
 & & & \\
C^*(G') \arrow[uur, "\beta'_{N_{i_2}}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où les carrés sont commutatifs par la remarque 4.11, il suffit de montrer que le défaut de commutation du losange est $\gamma_{N_{i_1}}$ i. e. $\gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1 ! \otimes \beta'_{N_{i_2}} = \beta'_{N_{i_1}} \otimes p_N!$

Soient $\pi_1: G_1^{N_{i_1}} \to G_1$ et $\pi_2: G'^{N_{i_2}} \to G'$ les projections. Elles sont K-orientées par hypothèse et $\pi_j ! = \alpha'_{N_{i_j}}$ (définition 2.8). Comme $p_1 \circ \pi_1 = \pi_2 \circ p_N$ on a $\alpha'_{N_{i_1}} \otimes p_1 ! = p_N ! \otimes \alpha'_{N_{i_2}}$ (théorème 4.10). Multipliant à gauche par $\beta'_{N_{i_1}}$ et à droite par $\beta'_{N_{i_2}}$ on obtient

$$\gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1 ! \otimes \beta'_{N_{i_2}} = \beta'_{N_{i_1}} \otimes p_N ! \otimes \gamma_{N_{i_2}}.$$

Or par la remarque 4.8 $p_N ! \otimes \gamma_{N_{i_1}} = \gamma_{p_N^* (N_{i_2})} \otimes p_N !$ et par 2.2

$$\beta'_{N_{i_1}} \otimes \gamma_{p_N^* (N_{i_2})} = \gamma_{p_{1*} (N_{i_2})} \otimes \beta'_{N_{i_1}}.$$

Or $p_{1*}(N_{i_2})$ est un quotient de $N_{i_1}$ donc $\gamma_{p_1 (N_{i_2})} \otimes \gamma_{N_{i_1}} = \gamma_{N_{i_1}}$ (proposition 2.7) et comme $\gamma_{N_{i_1}} \otimes \beta'_{N_{i_1}} = \beta'_{N_{i_1}}$ on a $\gamma_{N_{i_1}} \otimes p_1 ! \otimes \beta'_{N_{i_2}} = \beta'_{N_{i_1}} \otimes p_N !$ ∎

Soit $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ de rang constant et $f = i_0 \circ p_0$ une décomposition de $f$ avec $i_0$ et $p_0$ K-orientées. Alors si $f = p \circ i = p' \circ i'$ sont deux décompositions de $f$, on a $i ! \otimes p ! = \gamma_{N_i} \otimes p_0 ! \otimes i_0 !$ et $i' ! \otimes p' ! = \gamma_{N_{i'}} \otimes p_0 ! \otimes i_0 !$ et donc $\gamma_{N_{i'}} \otimes i ! \otimes p ! = \gamma_{N_i} \otimes i' ! \otimes p' !$. Cette dernière égalité reste vraie même si $f$ n'est pas de rang constant :

5.2. PROPOSITION. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} & V/F \arrow[dr, "p"] & \\ V_1/F_1 \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & V_2/F_2 \\ & V'/F' \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

*un diagramme commutatif d'applications* K-*orientées, $i$ et $i'$ étant des immersions, $p$ et $p'$ des submersions. On a*

$$\gamma_{N_{i'}} \otimes i! \otimes p! = \gamma_{N_i} \otimes i'! \otimes p'!$$

*Preuve.* — Soit $V''/F''$ le produit fibré $V/F \times_{V_2/F_2} V'/F'$.

On a un diagramme commutatif d'applications K-orientées :

$$\begin{tikzcd} & & V/F \arrow[drr, "p"] & & \\ V'/F' \arrow[urr, "i"] \arrow[r, "i''"] \arrow[drr, "i'"'] & V''/F'' \arrow[ur, "q"] \arrow[rrr, "\pi"] \arrow[dr, "q'"] & & & V_2/F_2 \\ & & V_1/F_1 \arrow[urr, "p'"'] & & \end{tikzcd}$$

où $p$, $p'$, $q$, $q'$ sont des submersions et $i''$ une immersion.

On a $\pi! = q! \otimes p! = q'! \otimes p'!$ (théorème 4.10) et

$$\gamma_{N_{i''}} \otimes i! = i''! \otimes q!; \qquad \gamma_{N_{i''}} \otimes i'! = i''! \otimes q'! \qquad \text{(lemme 5.1).}$$

Donc $\gamma_{N_{i''}} \otimes i! \otimes p! = \gamma_{N_{i''}} \otimes i'! \otimes p'!$.

Mais l'application $q$ induit une suite exacte de fibrés

$$0 \to i''^{*}(\mathrm{Ker}\ q) \to N_{i''} \to N_i \to 0,$$

et comme $V''/F''$ est le produit fibré $\mathrm{Ker}\ q = q'^{*}(\ker p')$ et donc $i''^{*}(\mathrm{Ker}\ q) = i'^{*}(\ker p')$. Or $\gamma_{i'^{*}(\ker p')} \otimes i'! = i'! \otimes \gamma_{\ker p'}$ (remarque 3.18), $\gamma_{\ker p'} \otimes p'! = p'!$ (par la définition 4.6) et $\gamma_{N_{i''}} = \gamma_{N_i} \otimes \gamma_{i'^{*}(\ker p')}$ (proposition 2.7).

Donc

$$\gamma_{N_i} \otimes i'! \otimes p'! = \gamma_{N_{i''}} \otimes i'! \otimes p'! = \gamma_{N_{i''}} \otimes i! \otimes p! = \gamma_{N_{i'}} \otimes i! \otimes p!. \ \blacksquare$$

5.3. *Remarque.* — Nous avons utilisé dans la proposition 5.2 le produit fibré de deux feuilletages. Rappelons ici comment il se définit (*cf.* [11] preuve de la proposition 4.9).

Soient $p: V_1/F_1 \to V/F$ et $f: V_2/F_2 \to V/F$ des applications de classe $C^\infty$ telles que $p$ soit une submersion. Soient $G_p$ et $G_f$ les graphes de $p$ et $f$. Comme l'application $s: G_p \to V$

est une submersion le produit fibré $G_p \times_V G_f$ est une variété (de classe $C^\infty$) notée $G_h$. Remarquons que G (le graphe de V/F) agit proprement et librement sur $G_h$. Le quotient est donc une variété V′, et $G_h$ est le graphe d'une application $h$: V′ → V/F. Considérons les applications $(x_1, x_2) \to r(x_j)$ de $G_h$ dans $V_j (j=1,2)$. Elles passent au quotient par l'action de G et définissent donc des applications $f'$: V′ → $V_1$ et $p'$: V′ → $V_2$. Soit F′ le feuilletage de V′ dont la feuille passant par la classe de $(x_1, x_2) (\in G_h)$ soit l'ensemble des classes de $(\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2)$ où $\gamma_j \in G_j$, $s(\gamma_j)=r(x_j)$ $(j=1,2)$. Les applications $f'$ et $p'$ passent au quotient et définissent $f'$: V′/F′ → $V_1/F_1$ et $p'$:V′/F′ → $V_2/F_2$. C'est ce V′/F′ le produit fibré $V_1/F_1 \times_{V/F} V_2/F_2$.

La propriété universelle se vérifie comme suit :

Soient $G_{f_j}$ des $G_j$ fibrés principaux sur une variété $V_0$ définissant des applications $f_j$: $V_0/F_0 \to V_j/F_j$ $(j=1,2)$, et soit $u$: $G_{f_1} \times_{G_1} G_p \to G_{f_2} \times_{G_2} G_f$ un difféomorphisme commutant aux applications $r$ et $s$ (à valeurs dans $V_0$ et V) et aux actions de $G_0$ (à gauche) et de G (à droite). Soit alors $G_g = G_{f_1} \times_{V_0} G_{f_2}$.

Remarquons que pour tout $(x_1,x_2) \in G_g$ il existe $y_1 \in G_p$, $y_2 \in G_f$ avec $s(x_j)=r(y_j)$ (les applications $r$: $G_p \to V_1$ et $r$: $G_f \to V_2$ sont des fibrations principales, en particulier elles sont surjectives). Notons $x_1 \circ y_1$ la classe de $(x_1, y_1)$ dans $G_{f_1} \times_{G_1} G_p$ et $x_2 \circ y_2$ celle de $(x_2, y_2)$ dans $G_{f_2} \times_{G_2} G_f$. Comme $G_{f_2} \times_{G_2} G_f = G_{f \circ f_2}$ est un G fibré principal sur $V_0$, il existe un et un seul $\gamma \in G$ avec

$$u(x_1 \circ y_1) = (x_2 \circ y_2) . \gamma = x_2 \circ (y_2 \circ \gamma).$$

On a $s(y_1)=s(y_2 \circ \gamma)$ donc $(y_1, y_2 \circ \gamma) \in G_h$. Si $(y_1, y_2)$ et $(y'_1, y'_2) \in G_h$ sont tels que $u(x_1 \circ y_1)=(x_2 \circ y_2)$ et $u(x_1 \circ y'_1)=x_2 \circ y'_2$, comme $r(y_1)=r(y'_1)=s(x_1)$ il existe $\gamma \in G$ avec $y'_1 = y_1 \circ \gamma$ donc

$$u(x_1 \circ y'_1) = u((x_1 \circ y_1) \circ \gamma) = u(x_1 \circ y_1) \circ \gamma$$

et donc $y'_2 = y_2 \circ \gamma$.

Donc l'application $s$: $G_g \to V'$ donnée par $s(x_1, x_2)$ = classe de $(y_1, y_2)$ est bien définie. On vérifie que $G_g$ est un G′ fibré principal et qu'il définit donc une application $g$: $V_0/F_0 \to V'/F'$. De plus on vérifie que $f' \circ g = f_1$ et $p' \circ g = f_2$ ce qui montre la propriété universelle pour V′/F′.

Soit $f$: $V_1/F_1 \to V_2/F_2$ une application K-orientée. Soit $\tau_j$ le fibré transverse à $(V_j, F_j)$. Considérons les feuilletages $(V'_1, F'_1)$ et $(V''_1, F''_1)$ donnés par l'action de $G_1$ sur l'espace total des fibrés $\tau_1$ et $f^* \tau_2$. On a les factorisations $f=p' \circ i' = p'' \circ i''$ où $i'$: $V_1/F_1 \to V'_1/F'_1 \times V_2/F_2$ et $i''$: $V_1/F_1 \to V''_1/F''_1 \times V_2/F_2$ sont des immersions K-orientées et $p'$: $V'_1/F'_1 \times V_2/F_2 \to V_2/F_2$ et $p''$: $V''_1/F''_1 \times V_2/F_2 \to V_2/F_2$ sont des submersions K-orientées. Si de plus $V_1/F_1$ est K-orientée on a aussi la décomposition $f=p \circ i$ avec $i$: $V_1/F_1 \to V_1/F_1 \times V_2/F_2$ et $p$: $V_1/F_1 \times V_2/F_2 \to V_2/F_2$.

5.4. COROLLAIRE. — *On a* $i'! \otimes p'! = i''! \otimes p''!$ *et si* $V_1/F_1$ *est* K-*orientée* $i'! \otimes p'! = i! \otimes p!$

*Preuve.* — On a $N_{i'}=\tau_1 \oplus f^* \tau_2$, $N_{i''}=f^*(\tau_2 \oplus \tau_2)$ et $N_i=f^* \tau_2$. Donc $\gamma_{N_i}=\gamma_{N_{i''}}$ et $i! \otimes p!=i''! \otimes p''!$ (proposition 5.2). De plus $p''!=\gamma_{\tau_1} \otimes p''!$ et donc $i''! \otimes p''!=\gamma_{\tau_1} \otimes i''! \otimes p''!$ et comme $\gamma_{N_{i'}}=\gamma_{N_{i''}} \otimes \gamma_{\tau_1}$ on a $i'! \otimes p'!=i''! \otimes p''!$ ■

La proposition 5.2 montre qu'il n'y a pas de définition naturelle pour $f!$ dans le cas général (à moins de savoir que $\gamma_N=1$ pour tout $G_1$ fibré N, voir remarque 5.8). Cependant le corollaire 5.4 nous permet de donner la définition suivante :

5.5. DÉFINITION. — *Avec les notations ci-dessus on pose*

$$\Gamma(f)=i'! \otimes p'!$$

$(\Gamma(f) \in KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2)))$

Commençons par comparer $\Gamma(f)$ à $f!$ dans le cas où $f$ est une immersion ou une submersion.

5.6. COROLLAIRE. — *Si $f$ est une immersion ou une submersion* K-*orientée on a :*

$$\Gamma(f)=\gamma_{f^* \tau_2} \otimes f!.$$

*Preuve.* — Résulte immédiatement du lemme 5.1 ou de la proposition 5.2. ■

Le prochain résultat est une réponse à la question (2) du début de ce paragraphe.

5.7. PROPOSITION. — *Si* $f_3 : V_1/F_1 \to V_2/F_2$ *et* $f_1 : V_2/F_2 \to V_3/F_3$ *sont* K-*orientées on a*

$$\Gamma(f_3) \otimes \Gamma(f_1)=\gamma_{f_3^* \tau_2} \otimes \Gamma(f_1 \circ f_3).$$

*Preuve.* — Supposons, afin de simplifier les notations, que $V_1/F_1$, $V_2/F_2$ et $V_3/F_3$ sont K-orientés. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & V_1/F_1 \times V_2/F_2 \times V_3/F_3 \arrow[dr, "p'_3"] & & \\
 & V_1/F_1 \times V_2/F_2 \arrow[ur, "i'_1"] \arrow[dr, "p_3"] & & V_2/F_2 \times V_3/F_3 \arrow[dr, "p_1"] & \\
V_1/F_1 \arrow[ur, "i_3"] \arrow[rr, "f_3"'] & & V_2/F_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[rr, "f_1"'] & & V_3/F_3
\end{tikzcd}$$

Comme $p_3^* N_{i_1}=N_{i'_1}$ on a par le lemme 5.1 $i'_1! \otimes p'_3!=p_3! \otimes i_1!$ et donc

$$\Gamma(f_3) \otimes \Gamma(f_1)=i_3! \otimes i'_1! \otimes p'_3! \otimes p_1!=(i'_1 \circ i_3)! \otimes (p_1 \circ p'_3)!$$

(théorèmes 3.16 et 4.10).

Posons $f_2=f_1 \circ f_3$ et soit $f_2=p_2 \circ i_2$ sa décomposition canonique. Comme $N_{i_2}=f_2^* \tau_3$ et $N_{i'_1 \circ i_3}=f_3^* \tau_2 \oplus f_2^* \tau_3$ on a

$$\gamma_{N_{i_2}} \otimes (i'_1 \circ i_3)!=(i'_1 \circ i_3)! \quad \text{et} \quad \gamma_{N_{i'_1 \circ i_3}} \otimes i_2!=\gamma_{f_3^* \tau_2} \otimes i_2!.$$

Et donc, d'après la proposition 5.2 on a :

$$(i'_1 \circ i_3)! \otimes (p_1 \circ p'_3)! = \gamma_{f_3^* \tau_2} \otimes i_2! \otimes p_2! \quad \blacksquare$$

5.8. *Remarque.* — Il y a toute une famille d'exemples de feuilletages (V, F) pour lesquels on sait que $\gamma_E = 1$ pour tout G fibré vectoriel E :

(i) si V/F est propre i.e. si l'application $(r, s) : G \to V \times V$ est propre, alors tout G fibré E admet une structure euclidienne G invariante et donc $\gamma_E = 1$.

(ii) si (V, F) est équivalent à une action d'un groupe de Lie connexe et moyennable alors V/F est équivalent au sens de la KK théorie à l'action du compact maximal (par [31]) qui est alors propre.

(iii) de même si V/F est équivalent à une action de $SO(n, 1)$ par [33].

Comme $f!$ n'est bien défini que si $G_1$ est moyennable (ce qui n'est pas le cas pour (iii) ci-dessus) ([4]) nous espérons que l'affirmation suivante est vraie :

5.9. *Conjecture.* — Si V/F est moyennable alors $\gamma_E = 1$ pour tout G-fibré E.

Si cette conjecture est vraie on saurait que

(i) $f!$ ne dépend pas de la décomposition $f = p \circ i$ (5.2).

(ii) $(g \circ f)! = f! \otimes g!$ pour toutes $f$ et $g$ K-orientées (5.7).

Si cette conjecture n'est pas vraie, factorisant $\mathrm{id}_{V/F}$ à travers $V/F \xrightarrow{i} E/F' \xrightarrow{p} V/F$ on voit qu'on n'a pas la fonctorialité en général ($\mathrm{id}! = 1$; $i! \otimes p! = \gamma_E$).

5.10. *Remarque.* — Si on ne suppose pas V/F moyennable, cette conjecture est fausse :

Soit (V, F) un feuilletage dont la transversale est donnée par l'action de $SL_3(\mathbb{Z})$ dans le tore $\mathbb{T}^3$. L'algèbre $C^*(V, F)$ est alors équivalente au sens de Morita à

$$C(\mathbb{T}^3) \rtimes SL_3(\mathbb{Z}) \cong C^*(\mathbb{Z}^3 \rtimes SL_3(\mathbb{Z})).$$

Soit E le fibré provenant du cocycle $SL_3(\mathbb{Z}) \to SL_3(\mathbb{R})$. Si $\gamma_E$ était égal à 1 la projection $C(T^3) \rtimes SL_3 \to C(\mathbb{T}^3) \rtimes_{\mathrm{red}} SL_3(\mathbb{Z})$ i.e. la projection

$\lambda$: $C^*(\mathbb{Z}^3 \rtimes SL_3(\mathbb{Z})) \to C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{Z}^3 \rtimes SL_3(\mathbb{Z}))$ serait inversible en KK théorie, ce qui est faux par [12], remarque 2.7, *b*.

## VI. Relations avec le groupe de K-théorie géométrique

Dans [4] P. Baum et A. Connes définissent le groupe de K-théorie géométrique $K^*_{\mathrm{top}}(V, F)$ du feuilletage (V, F). Clairement, une application K-orientée $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ définit un homomorphisme $f_!^{\mathrm{top}}: K^*_{\mathrm{top}}(V_1, F_1) \to K^*_{\mathrm{top}}(V_2, F_2)$. Nous vérifions que l'élément $f!$ [ou $\Gamma(f)$] que nous avons construit dans les paragraphes précédents est une réalisation analytique de $f_!^{\mathrm{top}}$ (proposition 6.2). Regardant ensuite le cas de la projection

([4]) Notons que dans ce cas $C^*(G_1)$ est nucléaire en K-théorie et que $f!$ est donc bien défini par la remarque 3.17.

$p: V/F \to pt$, nous retrouvons un résultat de [10] (théorème 6.8) qui constitue un pas en vue de l'injectivité de l'application $\mu: K^*_{top}(V, F) \to K_*(C^*(V, F))$, avec une précision supplémentaire qui constitue un pas vers la surjectivité de $\mu$.

Rappelons (*cf.* [4]) que le groupe géométrique $K^*_{top}(V, F)$ se définit par générateurs et relations de la façon suivante :

Les générateurs sont les quadruplets $(M, F_M, x, f)$ où $(M, F_M)$ est un feuilletage *propre* (i. e. l'application $(r, s): G_M \to M \times M$ est propre où $G_M$ désigne le graphe de $(M, F_M)$), $x \in K_*(C^*(M, F_M))$ et $f: M/F_M \to V/F$ est K-orientée.

L'addition est donnée par somme disjointe.

Les relations sont données par

$$(M, F_M, x, f \circ g) \sim (M', F_{M'}, g_!(x), f)$$

où $g: M/F_M \to M'/F_{M'}$ est K orientée.

L'application $\mu: K^*_{top}(V, F) \to K_*(C^*(V, F))$ est donnée par

$$\mu(M, F_M, x, f) = f_!(x) = x \otimes f!.$$

Elle est bien définie à cause de la fonctorialité pour les feuilletages propres.

6.1. *Remarque.* — La définition que nous donnons du groupe géométrique n'est pas exactement celle donnée dans [4]. Le lien entre les deux vient de ce que pour un feuilletage propre $(M, F_M)$ la K-théorie $K_*(C^*(M, F_M))$ coïncide avec la K-théorie des fibrés $G_M$ équivariants sur M à support compact dans le quotient $M/F_M$ (qui n'est pas une variété mais une « orbifold »). La coïncidence de ces deux K-théories est une conséquence de l'égalité entre la K-théorie équivariante et celle du produit croisé pour une action de groupe compact (*cf.* [30], [18], [28]), toute « orbifold » étant équivalente à une action de $O_n$ (*cf.* [22]).

Si $f: V_1/F_1 \to V_2/F_2$ est une application K-orientée de classe $C^\infty$, elle définit $f_!^{top}: K^*_{top}(V_1, F_1) \to K^*_{top}(V_2, F_2)$ par la formule

$$f_!^{top}(M, F_M, x, g) = (M, F_M, x, f \circ g).$$

6.2. Proposition. — *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} K^*_{top}(V_1, F_1) & \xrightarrow{f_!^{top}} & K^*_{top}(V_2, F_2) \\ \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ K_*(C^*(V_1, F_1)) & \xrightarrow{\otimes f!} & K_*(C^*(V_2, F_2)) \end{array}$$

*est commutatif.*

Pour être plus précis, comme $f!$ n'est pas défini de façon unique (*cf.* § 5), pour toute décomposition $f = p \circ i$ où $i$ est une immersion et $p$ une submersion K-orientées on a $\forall x \in K^*_{top}(V_1, F_1)\ \mu(f_!^{top}(x)) = \mu(x) \otimes i! \otimes p!$. Notons que, dans le cas non moyennable, $\mu(x) \otimes i!$ est défini même si $i!$ ne l'est pas (remarque 3.17).

*Preuve.* — Si $(M, F_M, x, g)$ est un générateur du groupe géométrique, on a $(f \circ g)! = g! \otimes f!$ car $(M, F_M)$ est propre (remarque 5.8). ■

En particulier, si $x \in K^*_{top}(V_1, F_1)$ est tel que $\mu(f^{top}_!(x)) \neq 0$, alors $\mu(x)$ est non nul. Notons qu'il y a beaucoup de feuilletages pour lesquels on sait que $\mu$ est injective (tous les feuilletages provenant d'actions de groupes de Lie connexes). Si $(V_2, F_2)$ est un tel feuilletage, il suffit donc de savoir que $f^{top}_!(x) \neq 0$. En cela l'existence de $f!$ peut être utilisée pour démontrer l'injectivité de $\mu$ dans d'autres cas.

6.3. *Exemple.* — Soit H un groupe de Lie connexe de compact maximal K; soit $\alpha$ une action de classe $C^\infty$ de H dans une variété M. On suppose que K agit librement et que l'action est presque libre (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de 1 dans H qui ne rencontre aucun stabilisateur et que l'ensemble des points de M de stabilisateur trivial est un $G_\delta$ dense). La variété $V = M/K$ est alors munie d'un feuilletage $F_2$ (le revêtement d'holonomie des feuilles de $F_2$ s'identifie à H/K). Soit $F_1 \subset F_2$ un autre feuilletage de V; supposons pour simplifier que la submersion $q: V/F_1 \to V/F_2$ est K-orientée. L'application $\mu$ de $K^*_{top}(V, F_2) = K^*(F_2)$ à valeurs dans $K_*(C^*(V, F_2))$ est injective d'après un résultat de G–G. Kasparov ([31], § 6, théorème 2). Donc si $x \in K^*_{top}(V, F_1)$ est tel que $q^{top}_!(x) \neq 0$, alors $\mu(x) \neq 0$ par la proposition 6.2. En particulier, si $x \in K^*(F_1) \cong K^*(F_2)$ est non nul, alors $\mu(x) \in K_*(C^*(V, F_1))$ est non nul : cela signifie que la flèche ind: $K^*(F_1^*) \to K_*(C^*(V, F_1))$ de [7], [8], [11] est injective.

Un exemple d'une telle situation peut d'obtenir de la façon suivante : soit $\Gamma$ un sous-groupe discret sans torsion de H, $B = \Gamma \backslash H/K$ la variété quotient et $F_0$ un feuilletage sur B. Soit X une variété munie d'une action presque libre de $\Gamma$. Sur $V = X \times_\Gamma H/K$ on a un feuilletage $F_2$, quotient par $\Gamma$ du feuilletage de feuilles $\{x\} \times H/K$ de $X \times H/K$ (i.e. la suspension de l'action de $\Gamma$ sur X *cf.* [20] 1.8) et un feuilletage (parallèle à $F_0$), $F_1 = p_0^{-1}(F_0) \cap F_2$, où $p_0: V \to B$ est la fibration de fibre X.

Supposons que les revêtements d'holonomie des feuilles de $(B, F_0)$ soient simplement connexes et choisissons X ayant un point fixe $x_0$ pour $\Gamma$ (l'action restant presque libre). Le point $x_0$ détermine des immersions $i_0: B \to V$, $i: B/F_0 \to V/F_1$. En effet, le groupoïde d'holonomie de $(B, F_0)$ étant son groupoïde d'homotopie, on a remarqué en 1.4. *c*) que $i$ est alors bien définie.

En fait, pour que $i$ soit défini, il suffit de supposer que tout lacet tracé dans une feuille de $(B, F_0)$ dont l'holonomie est triviale, a une image triviale dans $\pi_1(B) = \Gamma$.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "q_0"'] & V \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "q"'] & B \\ B/F_0 \arrow[r, "i"'] & V/F_1 & \end{tikzcd}$$

Supposons pour simplifier que tous les fibrés apparaissant sont K-orientés. On a $p_0 \circ i_0 = \mathrm{id}_B$ donc $i_0!: K^*(B) \to K^*(V)$ est injective. On a vu que $q!$ est injective donc $q_0!$ est injective.

Par exemple, on a obtenu que l'homomorphisme d'indice Ind: $K^*(F^*) \to K_*(C^*(\mathbb{T}^n, F))$ est injectif pour tout feuilletage F du tore $\mathbb{T}^n$ à feuilles simplement connexes. Plus généralement, et avec les notations de [5], pour tout feuilletage du tore $\mathbb{T}^n$ l'homomorphisme Ind: $K^*(F^*) \to K_*(C^*_\pi(\mathbb{T}^n, F))$ est injectif. Notons que si les revêtements d'homotopie des feuilles sont contractiles $BG = \mathbb{T}^n$ (G est le groupoïde d'homotopie de $(\mathbb{T}^n, F)$ — noté $\pi$ dans [5]). On obtient alors l'injectivité (rationnelle) de $\mu$ et donc la « conjecture de Novikov pour les feuilletages » de Baum-Connes ([5], conjecture 6.2) est vérifiée (voir la remarque de la fin du paragraphe 6 de [5]). Notons cependant que dans ce cas et dans le cas plus général où $BG = B\pi$ avec $\pi$ groupe dénombrable la conjecture de Novikov pour $\pi$ implique clairement la conjecture de Baum-Connes pour G.

Plus généralement, soit $(V, F_1, F_2)$ une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subset F_2$, telle que les revêtements d'holonomie des feuilles de $(V, F_1)$ soient contractiles et les feuilles de $F_2$ soient à courbure sectionnelle négative ou nulle (au sens de [5]). Alors la conjecture de Baum-Connes est vérifiée pour $(V, F_1)$.

Considérons maintenant le cas de la projection $p$: $V/F \to pt$, qu'on supposera K-orientée. Dans ce cas $p! \in KK^*(C^*(V, F); \mathbb{C})$.

6.4. THÉORÈME(*cf.* [10] théorème 6.8). — *Soit* L *un* G-*fibré vectoriel complexe sur* V. *Alors il existe* $P_L \in KK^*(C^*(V, F); \mathbb{C})$ *tel que*
$\mu(M, F_M, x, f) \otimes p_L = (p \circ f)_!([f^*(L)] \otimes x) \in \mathbb{Z}$ *et, en particulier, si* $F_M$ *est trivial*

$$\mu(M, \{0\}, x, f) \otimes p_L = \langle \operatorname{ch}(x) . \operatorname{ch}(f^* L) . \operatorname{Td}(M), [M] \rangle.$$

*Preuve.* — On pose $p_L = [L] \otimes p!$ où $[L] \in KK(C^*(V, F))$ est défini en 2.11. Par la remarque 4.8 on a $f! \otimes [L] = [f^* L] \otimes f!$ donc

$$x \otimes f! \otimes [L] \otimes p! = x \otimes [f^* L] \otimes (p \circ f)!.$$

La deuxième égalité résulte du théorème de l'indice d'Atiyah et Singer [3] ■

Ce résultat implique le théorème 6.8 de [10], du moins dans le cas où $p! \in K^*(C^*_{red}(V; F))$, par exemple si (V, F) est moyennable (en mesure) (*cf.* [37], définition 3.6, p. 92 et proposition 3.2). Nous ne savons cependant pas si les deux homomorphismes de $K_*(C^*(V, F)) \to \mathbb{C}$, $q_L \circ \lambda_*$ et $\otimes p_L$ coïndicent [5] où $q_L \in K_*(C^*_{red}(V, F)) \to \mathbb{C}$ est l'homorphisme de [10] et $\lambda$: $C^*(V, F) \to C^*_{red}(V, F)$ est la surjection naturelle. Une difficulté qu'on rencontre en essayant de démontrer l'égalité entre ces deux homomorphismes est que les homomorphismes de base pour construire $q_L$ et $p_L$ ne sont pas les mêmes : l'homomorphisme correspondant à $p_L$ est le produit du cycle fondamental de A. Connes par la classe de Todd de $\tau$. Notons qu'en plus il n'y a pas unicité du fibré virtuel L (ou plutôt de $1/k\,[L]$) tel que $\operatorname{ch}[L] = k \operatorname{Td}(\tau)$ $k \in \mathbb{N}$).

Si on a l'égalité de ces deux homomorphismes on obtient que l'homomorphisme $q_L$ est à valeurs entières sur l'image de $\lambda_*$ et que l'homomorphisme $\otimes p_L$ est nul sur le noyau de $\lambda_*$.

(5) Ils coïncident sur l'image de $\mu$.

Remarquons finalement que si $x \in K^*_{top}(V, F)$ est tel que $\mu(x) \otimes p_L \neq 0$ pour un certain L, alors $\mu(x)$ n'est pas indéfiniment divisible dans $K_*(C^*(V, F))$. Ce résultat est un petit pas en vue de la surjectivité de $\mu$.

## VII. Remarques finales

7.1. LE CAS OÙ $f$ N'EST PAS K-ORIENTÉE. — Il y a des cas où, bien que $f$ ne soit pas K-orientée, on peut construire des éléments de KK-théorie associés à $f$. Si, par exemple, $f$ est une submersion orientée, on peut utiliser le symbole de l'opérateur de signature transverse au lieu de celui de l'opérateur de Dirac. La même construction qu'au quatrième paragraphe donne encore un élément de $KK^*(C^*(V_1, F_1); C^*(V_2, F_2))$. Si V/F est orientée, la submersion $p: V/F \to pt$ est orientée, et la construction ci-dessus permet de retrouver dans ce cadre le théorème 6.8 de [10].

Plus généralement, soit $(W_1, F'_1)$ le feuilletage horizontal sur l'espace total du $G_1$ fibré $\tau_1^* \oplus f^* \tau_2$. Alors la composée $f': W_1/F'_1 \to V_2/F_2$ de la projection $W_1 \to V_1$ par $f$ est toujours K-orientée. Appelons K-polarisation de $f$ un élément de $KK(C^*(V_1, F_1); C^*(W_1, F'_1))$.

Si $\sigma$ est une K-polarisation de $f$ posons $\Gamma(f, \sigma) = \sigma \otimes \Gamma(f')$. Notons qu'une K-orientation $\tau$ détermine une K-polarisation $\sigma(\tau)$ (l'élément $\beta'_N$ du paragraphe 2) et qu'on a $\Gamma(f, \sigma(\tau)) = \Gamma(f)$. De même une orientation détermine une K-polarisation, considérant l'élément de $KK^n_{Gl_n^+}(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^n))$ dont la restriction à $SO_n$ est le symbole de l'opérateur de signature.

7.2. CAS DES ACTIONS DE GROUPES. — Il est clair que tous les résultats décrits aux paragraphes précédents se retrouvent dans plusieurs contextes autres que les espaces de feuilles de feuilletages :

Si $G_1$ et $G_2$ sont les groupoïdes étales et $f: G_1 \to G_2$ est un cocycle K-orienté on peut construire un élément $f! \in KK^*(C^*(G_1); C^*(G_2))$ [du moins si $C^*(G_1)$ est nucléaire]. En particulier si $\Gamma$ est un groupe (moyennable) discret agissant sur les variétés $V_1$ et $V_2$ par difféomorphismes, et si $f: V_1 \to V_2$ est une application de classe $C^\infty$, $\Gamma$ équivariante et K orientée de façon $\Gamma$ équivariante, on obtient un élément $f! \in KK^*(C(V_1) \rtimes \Gamma; C(V_2) \rtimes \Gamma)$. Si $f$ est une submersion $f!$ est en fait un élément de $KK^*_\Gamma(V_1; V_2)$; par contre, dans le cas des immersions nous ne savons par si $f!$ provient d'un élément de $KK^*_\Gamma(V_1; V_2)$, car nous ne connaissons pas de résultats de suite exacte en KK-théorie $\Gamma$-équivariante. Pour cette raison nous souhaiterions avoir une définition plus directe de $f!$ dans le cas des immersions

7.3. COHOMOLOGIE DE GEL'FAND FUCHS. — Dans [10] A. Connes arrive à construire des cocycles cycliques associés à des éléments de la cohomologie de Gel'fand Fuchs comme homomorphismes de $K_*(C^*(V, F)) \to \mathbb{C}$ ([10] theorem 8.1). Nous aurions voulu obtenir ces homomorphismes comme éléments de K-homologie à coefficients réels. Le problème est le suivant : étant donnée une forme transverse $\omega$, invariante par holonomie, et fermée sur V, construire un élément de K-homologie à coefficients réels qui lui corresponde (*cf.* [10] remark 6.15). En général nous ne savons pas le résoudre.

Remarquons cependant que si $\omega$ est de degré maximal [i. e. degré $(\omega)$ = codimension (F)] elle définit un courant de Ruelle-Sullivan [43], donc une trace sur $C^*(V, F)$ [7] et donc un homomorphisme $K_*(C^*(V, F)) \to \mathbb{C}$. Remarquons aussi que si $\omega$ n'est plus de degré maximal mais est non nulle en tout point et produit de 1-formes, elle définit un feuilletage $F'$ (l'annulateur de ces 1-formes) avec $F \subseteqq F'$, et un courant de Ruelle-Sullivan sur $(V, F')$. Soit $f$: $V/F \to V/F'$ la projection, si $V/F$ est orientée, $f$ l'est, et on sait alors construire (*cf.* 7.1) un élément $\Gamma(f) \in KK(V/F; V/F')$. Il n'y a plus alors qu'à le composer avec la trace sur $C^*(V, F')$ (une trace définissant un élément de K-homologie à coefficients réels).

Notons pour terminer que si T est une transversale fidèle de (V, F) difféomorphe à un ouvert (non nécessairement connexe) de $\mathbb{R}^q$ alors $G_T^T$ est un sous-groupoïde ouvert de $\Gamma_q$ et $C^*(G_T^T)$ est une sous-algèbre de la $C^*$-algèbre (non séparable !) $C^*(\Gamma_q)$, où $\Gamma_q$ désigne le groupoïde d'Haefliger des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^q$ (*cf.* [20]). On a donc un élément de $KK(C^*(V, F); C^*(\Gamma_q))$. Le problème est de construire des homomorphismes $K_*(C^*(\Gamma_q)) \to \mathbb{R}$ associés aux classes de $H^*(WO_q)$ ou plus généralement $H^*(B\Gamma_q)$. C'est ce problème qui a été résolu dans [10] au moyen de la cohomologie cyclique [du moins en ce qui concerne $H^*(WO_q)$]. Nous en aimerions une solution en K homologie (à coefficients réels) qui pourrait, peut-être, apporter des précisions supplémentaires.

## APPENDICE

### Opérateurs pseudodifférentiels transversalement elliptiques

Dans cet appendice nous définissons des opérateurs transversalement elliptiques qui nous permettent de construire l'élément $f!$ où $f$: $V_1/F_1 \to V_2/F_2$ est une submersion K-orientée et presque isométrique. Enfin nous calculons le produit de Kasparov de deux opérateurs transversalement elliptiques.

Le principal problème que nous rencontrons ici est que nous ne pouvons pas nous restreindre aux symboles homogènes (comme c'est le cas dans [3], [36], [1], [7], [11] etc.). Nous utiliserons ici une sorte de réceptable maximal : les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 et de type $(\rho, \delta)$ *cf.* [25]. Nous montrons pour ces opérateurs un analogue de la suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels (*cf.* [36], § XVI, [7] § 9.1) et, pour calculer les produits de Kasparov, nous généralisons les lemmes techniques de [11], § 1 (lemmes 1.7, 1.8 et 1.9).

Nous commençons cet appendice en rappelant les définitions des symboles « $\rho$, $\delta$ ». Ensuite nous prouvons la suite exacte associée : d'abord dans le cas de $\mathbb{R}^n$, ensuite dans le cas des variétés, dans le cas des familles et enfin dans le cas des feuilletages. Nous donnons ensuite la définition des opérateurs transversalement elliptiques et montrons successivement les analogues des trois lemmes de [11] cités plus haut.

#### Sommaire de l'appendice

## A.1. Symboles de type $\rho$, $\delta$ (cf. [25], [27])

Soit V une variété de classe $C^\infty$ de dimension $n$ et T un fibré vectoriel réel de dimension $n'$ de classe $C^\infty$ sur V. Soient $m$, $\rho \in \mathbb{R}$ avec $1/2 < \rho \leqq 1$, et posons $\delta = 1 - \rho$.

Soit $a$ une fonction complexe de classe $C^\infty$ définie sur l'espace total T. Rappelons ([25], p. 84) que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute carte : $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^{n'} \to T$ ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$; $\varphi$ application de fibrés), pour tout compact K de $\Omega$ et pour toute paire $p \in \mathbb{N}^n$, $q \in \mathbb{N}^{n'}$ de multiindices, il existe une constante C avec

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial \xi^q}(a \circ \varphi)(x, \xi)\right| \leqq C(1 + \|\xi\|)^{m - \rho|q| + \delta|p|}$$

pour tout $x$, $\xi$ avec $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^{n'}$.

(ii) Il existe un recouvrement de V par des cartes vérifiant (i).

On dit alors que $a$ est un symbole d'ordre $m$ et de type $\rho$, $\delta$. Si $a$ est un symbole, son support Supp$(a)$ est l'adhérence dans V de l'ensemble

$$\{ x \in V \mid \exists \xi \in T_x / a(x, \xi) \neq 0 \}.$$

Soit $\mathscr{S}^m_{\rho, \delta}(V, T)$ l'espace des symboles $m$, $\rho$, $\delta$ à support compact.

Remarquons que $\mathscr{S}^0_{\rho, \delta}$ est une sous algèbre involutive de l'algèbre $C_b(T)$ des fonctions continues bornées sur l'espace total de T. Notons $\bar{\mathscr{S}}^0_{\rho, \delta}$ l'adhérence de $\mathscr{S}^0_{\rho, \delta}$ dans $C_b(T)$ et $\bar{\mathscr{S}}^0$ l'adhérence de l'union des $\mathscr{S}^0_{\rho, \delta}$ $(1/2 < \rho \leqq 1,\ \delta = 1 - \rho)$.

On pose $\Sigma_{0, \rho}(V, T) = \bar{\mathscr{S}}^0_{\rho, \delta}/C_0(T)$ où $C_0(T)$ désigne l'espace des fonctions continues nulles à l'infini dans T (remarquons que comme $C^\infty_c(T) \subseteqq \mathscr{S}^0_{1, 0}$ où $C^\infty_c(T)$ désigne l'algèbre des fonctions $C^\infty$ à support compact, on a $C_0(T) \subseteqq \bar{\mathscr{S}}^0_{\rho, \delta}$).

Si la variété V n'est pas compacte, on est amené à considérer aussi des symboles non nuls à l'infini. Ainsi on note

$$C_V(T) = \{ a \in C_b(T) / a\varphi \in C_0(T),\ \forall \varphi \in C_0(V) \},$$
$$\bar{\mathscr{S}}^0_{V, \rho} = \{ a \in C_b(T) / a\varphi \in \bar{\mathscr{S}}^0_{\rho, \delta}(V, T),\ \forall \varphi \in C_0(V) \}$$

et on pose $\Sigma_\rho(V, T) = \bar{\mathscr{S}}^0_{V, \rho}/C_V(T)$.

Si E désigne un fibré complexe hermitien de classe $C^\infty$ sur V on peut aussi parler de symboles de type $\rho$, $\delta$ agissant sur le fibré E. On définit ainsi $\mathscr{S}^m_{\rho, \delta}(V, T; \mathscr{L}(E))$ et les algèbres $\Sigma_{0, \rho}(V, T; \mathscr{L}(E))$ et $\Sigma_\rho(V, T; \mathscr{L}(E))$.

Enfin notons que si T′ est un sous fibré de T, on a des opérateurs de restriction surjectifs $\mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(V, T; \mathscr{L}(E)) \to \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(V, T'; \mathscr{L}(E))$ et donc

$$\Sigma_{0,\rho}(V, T; \mathscr{L}(E)) \to \Sigma_{0,\rho}(V, T'; \mathscr{L}(E)) \quad \text{et} \quad \Sigma_{\rho}(V, T; \mathscr{L}(E)) \to \Sigma_{\rho}(V, T'; \mathscr{L}(E)).$$

(Pour voir la surjectivité de la restriction, choisissons une métrique sur T, et écrivons $T = T' \oplus T''$ où $T'' = T'^{\perp}$; si $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(V, T'; \mathscr{L}(E))$ alors $b \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(V, T; \mathscr{L}(E))$ où

$$b(x, (\xi', \xi'')) = \chi\left(\frac{\|\xi''\|^2}{1+\|\xi'\|^2+\|\xi''\|^2}\right) a(x, \xi')$$

où $\chi \in C^\infty([0, 1])$ est nulle au voisinage de 1 et vaut 1 au voisinage de 0).

## A.2. La suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ([25], [27])

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$.

La formule

$$(P_a f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\langle x-x', \xi\rangle} a(x, x', \xi) f(x')\, dx'\, d\xi$$

définit un opérateur $P_a : C^\infty(\Omega) \to C^\infty_c(\Omega)$.

Propriétés :

A.2.1. Si $a(x, x, \xi) = 0$, $\forall x \in \Omega$ et $\forall \xi \in (\mathbb{R}^n)^*$, il existe

$$b \in \mathscr{S}^{m-\rho+\delta}_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \qquad \text{avec} \quad P_a = P_b.$$

A.2.2. Si $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}$ et $a' \in \mathscr{S}^{m'}_{\rho,\delta}$ alors il existe $b \in \mathscr{S}^{m+m'-\rho+\delta}_{\rho,\delta}$ avec $P_a P_{a'} = P_{aa'} + P_b$.

A.2.3. On a : $P_{a*} = (P_a)^*$ où $a^*(x, x', \xi) = \overline{a(x', x, \xi)}$.

A.2.4. Si $\varphi : \Omega \to \Omega'$ est un difféormorphisme et $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(\Omega' \times \Omega', (\mathbb{R}^n)^*)$ alors il existe $b \in \mathscr{S}^{m-\rho+\delta}_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec $\varphi^* P_a (\varphi^*)^{-1} = P_{a'} + P_b$ où $\varphi^* : C^\infty(\Omega') \to C^\infty(\Omega)$ est donnée par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ et $a' \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ est donnée par $a'(x, x', \xi) = a(\varphi(x), \varphi(x'), {}^t(d\varphi)^{-1}_x(\xi))$.

A.2.5. Si $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ alors $P_a$ est continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Si la classe de $a$ dans $\Sigma_{0,\rho}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ est nulle alors $P_a \in \mathscr{L}(L^2(\Omega))$ est compact. En particulier si $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}$, $m < 0$, alors $P_a$ est compact.

A.2.6. Soit $\pi : \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \to \Sigma_{0,\rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ donnée par $\pi(a) =$ (classe de $\Delta(a)$), où $(\Delta(a) \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est donnée par $\Delta(a)\ (x, \xi) = a(x, x, \xi)$. On obtient, combinant A.2.1 et A.2.5 que si $\pi(a) = 0$ alors $P_a \in \mathscr{K}(L^2(\Omega))$. La réciproque est aussi vraie et on a, pour tout $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ $\|q(P_a)\| = \|\pi(a)\|$ où $q$ est la projection de $\mathscr{L}(L^2(\Omega))$ dans l'algèbre de Calkin $\mathscr{L}(L^2(\Omega))/\mathscr{K}(L^2(\Omega))$.

A.2.7. Soit $\Psi^*_{0,\rho}(\Omega)$ l'adhérence dans $\mathscr{L}(L^2(\Omega))$ de l'algèbre (A.2.2) involutive (A.2.3) des opérateurs de la forme $P_a$, $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ $(1/2 < \rho \leqq 1,\ \delta = 1-\rho)$ $\Psi^*_{0,\rho}(\Omega)$ contient les opérateurs régularisants, donc les compacts. On a par A.2.6 la suite exacte

$$0 \to \mathscr{K}(L^2(\Omega)) \to \Psi^*_{0,\rho}(\Omega) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_{0,\rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \to 0$$

où $\sigma(P_a) = \pi(a)$.

On renvoie à [25] pour la preuve de toutes les assertions ci-dessus. Nous ferons d'ailleurs la preuve de certaines de ces assertions dans le cas, plus général, des familles d'opérateurs pseudodifférentiels.

### A.3. La suite exacte des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété

L'invariance de l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels et de l'application $\sigma$ par les difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ (propriété A.2.4) permet de définir les opérateurs pseudodifférentiels sur la variété V de classe $C^\infty$ : ce sont les opérateurs de la forme $\sum_{j=1}^{m} P_j + k$ où les $P_j$ sont des opérateurs de la forme $P_a$ dans une carte et $k \in C_c^\infty(V \times V)$ est régularisant. On a la suite exacte

$$0 \to \mathscr{K}(L^2(V)) \to \Psi^*_{0,\rho}(V) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_{0,\rho}(V, T^*V) \to 0$$

On définit aussi (si V n'est pas compacte)

$$\mathscr{K}_V(L^2(V)) = \{ T \in \mathscr{L}(L^2(V)) \mid \varphi T \in \mathscr{K}(L^2(V)),\ T\varphi \in \mathscr{K}(L^2(V)),\ \forall \varphi \in C_0(V) \}$$
$$\Psi^*_\rho(V) = \{ T \in \mathscr{L}(L^2(V)) \mid \varphi T \in \Psi^*_{0,\rho}(V),\ T\varphi \in \Psi^*_{0,\rho}(V)),\ \forall \varphi \in C_0(V) \}.$$

On a la suite exacte

$$0 \to \mathscr{K}_V(L^2(V)) \to \Psi^*_\rho(V) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_\rho(V, T^*V) \to 0.$$

Si E est un fibré hermitien de classe $C^\infty$ sur V, on peut définir les opérateurs pseudodifférentiels agissant dans E et les algèbres $\Psi^*_{0,\rho}(V; \mathscr{L}(E))$ et $\Psi^*_\rho(V; \mathscr{L}(E))$.

On a alors les suites exactes

$$0 \to \mathscr{K}(L^2(V; E)) \to \Psi^*_{0,\rho}(V; \mathscr{L}(E)) \to \Sigma_{0,\rho}(V, T^*V; \mathscr{L}(E)) \to 0$$
$$0 \to \mathscr{K}(L^2(V; E)) \to \Psi^*_\rho(V; \mathscr{L}(E)) \to \Sigma_\rho(V, T^*V; \mathscr{L}(E)) \to 0.$$

### A.4. Familles d'opérateurs pseudodifférentiels ([27], [3]-IV, [7], [11])

Soit Y une variété de classe $C^\infty$, peut être à bord, et soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n \times Y$. Posons

$$\Omega^{(2)} = \{ (x, x', y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y / (x, y) \in \Omega,\ (x', y) \in \Omega \}$$

Soit $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$. La formule

$$(\mathrm{P}_a f)(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\langle x-x', \xi\rangle} a(x, x', y, \xi) f(x', y)\, dx'\, d\xi$$

définit un opérateur $\mathrm{P}_a : \mathrm{C}^\infty(\Omega) \to \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$.

On a les propriétés suivantes :

A.4.1. Si $a(x, x, y, \xi) = 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$ et $\forall \xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ alors il existe $b \in \mathscr{S}^{m-\rho+\delta}_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec $\mathrm{P}_a = \mathrm{P}_b$.

A.4.2. Si $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}$ et $a' \in \mathscr{S}^{m'}_{\rho,\delta}$, il existe $b \in \mathscr{S}^{m+m'-\rho+\delta}_{\rho,\delta}$ avec $\mathrm{P}_a \mathrm{P}_{a'} = \mathrm{P}_{aa'} + \mathrm{P}_b$.

A.4.3. On a $\mathrm{P}_{a^*} = (\mathrm{P}_a)^*$ où $a^*(x, x', y, \xi) = \overline{a(x', x, y, \xi)}$.

A.4.4. Si $\varphi : \Omega \to \Omega'$ est un difféomorphisme de la forme $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(y))$ et si $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(\Omega'^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ alors il existe $b \in \mathscr{S}^{m-\rho+\delta}_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec

$$\varphi^* \mathrm{P}_a (\varphi^*)^{-1} = \mathrm{P}_{a^\varphi} + \mathrm{P}_b$$

où

$$a^\varphi(x, x', y, \xi) = a(f(x, y), f(x', y), g(y), {}^t(d_x f)^{-1}(x, y)(\xi)).$$

A.4.5. Sur $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ on définit le produit scalaire à valeurs dans $\mathrm{C}_0(\mathrm{Y})$ donné par $\langle f, g\rangle(y) = \int \overline{f(x, y)}\, g(x, y)\, dx$. Soit $\mathscr{E}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \mathscr{E}$ le C*-module Hilbertien sur $\mathrm{C}_0(\mathrm{Y})$ complété de $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ pour ce produit scalaire.

Si $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ alors $\mathrm{P}_a$ définit un opérateur sur $\mathscr{E}$, i. e. $\mathrm{P}_a \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$.

En effet $\mathrm{P}^y_a$ est un opérateur borné de $\mathrm{L}^2(\Omega_y)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega_y)$ (par A.2.5 on a posé $\Omega_y = \{x \in \mathbb{R}^n / (x, y) \in \Omega\}$) et en fait $\mathrm{P}^y_a$ est uniformément borné. On a $\mathrm{P}_a(\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)) \subseteq \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ donc $\mathrm{P}_a(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{E}$. On utilise alors A.4.3.

A.4.6. LEMME. — *Si* $a \in \mathscr{S}^m_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ *avec* $m < 0$ *alors* $\mathrm{P}_a \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$.

*Preuve.* — Si $m < -n$ on peut dans la formule donnant $\mathrm{P}_a$ intégrer d'abord par rapport à $\xi$ et obtenir $(\mathrm{P}_a f)(x, y) = \int k(x, x', y) f(x')\, dx'$ où $k$ est continu et à support compact et définit donc une famille continue d'opérateurs de Hilbert Schmidt et donc $\mathrm{P}_a \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$.

Dans le cas général on a $(\mathrm{P}^*_a \mathrm{P}_a)^{\mathrm{N}} = \mathrm{P}_b$ où $b \in \mathscr{S}^{2\mathrm{N}m}_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$. On choisit alors N avec $2\mathrm{N}m < -n$. ■

Soit K un compact de $\Omega$ et soit $\chi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\chi\|_2 = 1$ et pour tout $(x, y) \in \mathrm{K}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \geqq 1$, le support de la fonction $x' \to \chi(\lambda(x - x'))$ soit inclus dans $\Omega_y = \{x' / (x', y) \in \Omega\}$.

Pour $(x, y, \xi) \in \mathrm{K} \times (\mathbb{R}^n)^*$ posons $\eta_{x,y,\xi}(x') = e^{i\langle x', \xi\rangle}(\|\xi\| + 1)^{n/4}\, \chi((\|\xi\| + 1)^{1/2}(x - x'))$. Alors $\eta_{x,y,\xi} \in \mathrm{L}^2(\Omega_y)$ et $\|\eta_{x,y,\xi}\|_2 = 1$.

A.4.7. LEMME. — 1. *Si* $k \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ *alors la fonction* $(x, y, \xi) \to \langle \eta_{x,y,\xi}, k_y \eta_{x,y,\xi}\rangle$ *appartient à* $\mathrm{C}_0(\mathrm{K} \times (\mathbb{R}^n)^*)$.

2. *Si* $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$, *posons*

$$b(x, y, \xi) = \langle \eta_{x,y,\xi}, (\mathrm{P}_a)_y \eta_{x,y,\xi} \rangle.$$

*Alors la fonction* $(x, y, \xi) \to a(x, x, y, \xi) - b(x, y, \xi)$ *appartient à* $\mathrm{C}_0(\mathrm{K} \times (\mathbb{R}^n)^*)$.

*Preuve.* — 1. Il est clair que $\eta_{x,y,\xi} \to 0$ faiblement quand $\xi \to \infty$, uniformément sur K. D'où l'assertion pour $k = \theta_{\eta,\eta'}$. Le cas général s'en déduit.

2. Soit $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, \mathbb{R}^n)$, et posons

$$a'(x, x', y, \xi) = a(x, x, y, \xi)\, c(x, x', y)$$

où $c \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega^{(2)})$ est égale à 1 dans un voisinage du support de $a$. Alors $\mathrm{P}_a - \mathrm{P}_{a'} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$ par A.4.1 et le lemme A.4.6, et donc $b - b' \in \mathrm{C}_0(\mathrm{K} \times \mathbb{R}^n)$ par la partie 1 (notation évidente). On a, pour $\|\xi\|$ assez grand

$$\begin{aligned} b'(x, y, \xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle z-u, \xi'-\xi\rangle} a(z, z, y, \xi')\, \chi((1+\|\xi\|)^{1/2}(x-z)) \\ &\qquad \times \chi((1+\|\xi\|)^{1/2}(x-u))\,(1+\|\xi\|)^{n/2}\, du\, d\xi'\, dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle z-x, \xi'-\xi\rangle} a(z, z, y, \xi')\, \overline{\chi((1+\|\xi\|)^{1/2}(x-z))}\, \hat{\chi}\left(\frac{\xi-\xi'}{(1+\|\xi\|)^{1/2}}\right) d\xi'\, dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle v, \zeta\rangle} a\left(x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, y, \xi + (1+\|\xi\|)^{1/2}\zeta\right) \\ &\qquad \times \overline{\chi(v)}\, \hat{\chi}(\zeta)\, dv\, d\zeta. \end{aligned}$$

Mais on a :

$$a(x, x, y, \xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\langle v, \zeta\rangle} a(x, x, y, \xi)\, \overline{\chi(v)}\, \hat{\chi}(\zeta)\, dv\, d\zeta.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\mathrm{K}'$ un compact de $(\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n \times [(\mathbb{R}^n)^* \setminus \mathrm{K}']} 2\|a\|_\infty |\chi(v)|\, |\hat{\chi}(\zeta)|\, dv\, d\zeta < \varepsilon/2.$$

Comme $|\mathrm{D}_x a| \leqq k\, \|\xi\|^\delta$ et $|\mathrm{D}_\xi a| < k'\, \|\xi\|^{-\rho}$ on a

$$\lim_{\|\xi\| \to \infty} a\left(x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, x + \frac{v}{(\|\xi\|+1)^{1/2}}, y, \xi + (\|\xi\|+1)^{1/2}\zeta\right) - a(x, x, y, \xi) = 0$$

uniformément sur $\mathrm{K} \times \operatorname{Supp} \chi \times \mathrm{K}'$. Et donc pour $\|\xi\|$ suffisamment grand $\|a(x, x, y, \xi) - b'(x, y, \xi)\| < \varepsilon$. ■

Soit $\pi : \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*) \to \Sigma_{0,\rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ donné par $\pi(a) =$ classe de $\Delta(a)$ où $\Delta(a) \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ est défini par $\Delta(a)\,(x, y, \xi) = a(x, x, y, \xi)$.

A.4.8. Proposition. — *Soit* $q : \mathscr{L}(\mathscr{E}) \to \mathscr{L}(\mathscr{E})/\mathscr{K}(\mathscr{E})$ *la projection.*

*Alors pour tout* $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, \mathbb{R}^n)$ *on a* $\|\pi(a)\| = \|q(\mathrm{P}_a)\|$.

*Preuve.* — L'inégalité $\|\pi(a)\| \leqq \|q(\mathrm{P}_a)\|$ résulte du lemme A.4.7.

Pour avoir l'inégalité $\|\pi(a)\| \geqq \|q(\mathrm{P}_a)\|$, il suffit de prouver que pour $|\lambda| > \|\pi(a)\|$, $\lambda + \mathrm{P}_a$ est inversible modulo $\mathscr{K}(\mathscr{E})$, car par A.4.2, A.4.3 et le lemme A.4.6, $\mathrm{P}_a$ est essentiellement normal.

Soit $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ avec $\varphi = 1$ sur le support de $a$ i. e.

$$\varphi(x, y,)\, a(x, x', y, \xi) = a(x, x', y, \xi) = a(x, x', y, \xi)\, \varphi(x', y)$$

pour tout $(x, x', y, \xi) \in \Omega^{(2)} \times (\mathbb{R}^n)^*$. On a $\varphi\, \mathrm{P}_a = \mathrm{P}_a\, \varphi = \mathrm{P}_a$ où $\varphi$ est considéré comme opérateur de multiplication. Il suffit de trouver $\mathrm{Q}_\lambda$ avec $(\mathrm{P}_a + \lambda)\mathrm{Q}_\lambda - \varphi \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ et $\mathrm{Q}_\lambda(\mathrm{P}_a + \lambda) - \varphi \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ car alors $\mathrm{Q}_\lambda + (1 - \varphi)/\lambda$ est un inverse de $\mathrm{P}_a + \lambda$ modulo $\mathscr{K}(\mathscr{E})$.

Pour $\xi$ suffisamment grand $|\lambda + a(x, x, y, \xi)|$ est supérieur à $|\lambda| - \|\pi(a)\|/2$. Soit alors $b'_\lambda \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ tel que la fonction $(x, y, \xi) \to b'_\lambda(x, y, \xi)\,(a(x, x, y, \xi) + \lambda) - \varphi(x, y)$ soit à support compact, et soit $b_\lambda \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$ avec $b_\lambda(x, x, y, \xi) = b'_\lambda(x, y, \xi)$.

Alors $\mathrm{Q}_\lambda = \mathrm{P}_{b_\lambda}$ satisfait l'équation ci-dessus par A.4.2, A.4.1 le lemme A.4.6 et le fait que $\mathrm{P}_{\varphi'} = \psi$ où $\varphi'(x, x', y, \xi)$ ne dépend pas de $\xi$ et $\psi(x, y) = \varphi'(x, x, y, \xi)$. ■

Soit $\Psi^*_{0,\rho}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'adhérence dans $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ de l'algèbre des opérateurs de la forme $P_a(a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*))$. On a un homomorphisme $\sigma : \Psi^*_{0,\rho}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \Sigma_{0,\rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*)$ donné par $\sigma(\mathrm{P}_a) = \pi(a)$. La proposition A.4 implique immédiatement :

A.4.9. Corollaire. — *L'application* $\sigma$ *ainsi définie s'étend par continuité en un* $*$*-homomorphisme.*

*On a la suite exacte*

$$0 \to \mathscr{K}(\mathscr{E}) \to \Psi^*_{0,\rho}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \Sigma_{0,\rho}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*) \to 0.$$

*Preuve.* — D'après A.4.8 la seule chose qui reste à démontrer est que $\mathscr{K}(\mathscr{E}) \subseteqq \Psi^*_{0,\rho}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Si $k \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega^{(2)})$ l'opérateur de convolution qu'il définit $\left(kf(x, y) = \int k(x, x', y) f(x', y)\, dx'\right)$ est évidemment dans $\Psi^*_{0,\rho}$. Or l'adhérence de $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega^{(2)})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ est $\mathscr{K}(\mathscr{E})$. ■

A.4.10. *Remarque.* — Soit $y_p$ une suite d'éléments de Y avec $d(y_p, y_q) \geqq 2^{-p} + 2^{-q}$. Soit $\xi_p \in (\mathbb{R}^n)^*$ avec $\|\xi_p\|^\delta \geqq 2^p$ et $\chi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R})\ \chi(t) = 0$ pour $t \geqq 1$ et $\chi(t) = 1$ pour $t \leqq 0$. Soit $x_p$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ avec $(x_p, y_p) \in \Omega$.

On pose :

$$a(x, x', y, \xi) = \sum_{p=1}^{+\infty} \chi((\|x - x_p\|^2 + \|x' - x_p\|^2 + d(y, y_p)^2)\|\xi_p\|^{2\delta})\, \chi(\|\xi - \xi_p\|^2 \|\xi_p\|^{-2\rho})$$

Alors $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\delta}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*)$. Pour tout $y \in \mathrm{Y}$ $a_y \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega_y \times \Omega_y \times (\mathbb{R}^n)^*)$ donc $(\mathrm{P}_a)_y \in \mathscr{K}(\mathrm{L}^2(\Omega_y))$ $(\Omega_y = \{x/(x, y) \in \Omega\})$. Cependant $\pi(a) \neq 0$ donc $\mathrm{P}_a \notin \mathscr{K}(\mathscr{E})$. Notons qu'un tel phénomène ne se produit pas avec des opérateurs de type (1, 0).

### A.5. Opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux sur un feuilletage ([7], [11])

L'invariance de l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels et de l'application $\sigma$ par les difféomorphismes *distingués* de $\mathbb{R}^n \times Y$ (propriété A.4.4), permet de définir les opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux sur la variété feuilletée (V, F) de classe $C^\infty$ : ce sont les opérateurs de la forme $\sum_{j=1}^{m} P_j + k$ où les $P_j$ sont des familles de la forme $P_a$ dans une carte feuilletante et $k \in C_c^\infty(G)$ est régularisant (au sens de [7], § 7). On a la suite exacte :

$$0 \to C^*(V, F) \to \Psi^*_{0,\rho}(V, F) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_{0,\rho}(V, F^*) \to 0.$$

Si V n'est pas compacte on définit aussi

$$C_V(V, F) = \{ T \in M(C^*(V, F))/\varphi T \in C^*(V, F),\ T\varphi \in C^*(V, F),\ \forall \varphi \in C_0(V) \}$$

où $M(C^*(V, F))$ est l'algèbre des multiplicateurs de $C^*(V, F)$ — l'algèbre $C_0(V)$ est considérée ici comme sous algèbre de $M(C^*(V, F))$;

$$\Psi^*_\rho(V, F) = \{ T \in M(C^*(V, F))/\varphi T \in \Psi^*_{0,\rho}(V, F),\ T\varphi \in \Psi^*_{0,\rho}(V, F),\ \forall \varphi \in C_0(V) \}.$$

On a la suite exacte (*cf.* [11], proposition 4.6) :

$$0 \to C^*_V(V, F) \to \Psi^*_\rho(V, F) \to \Sigma_\rho(V, F^*) \to 0.$$

Si E est un fibré hermitien de classe $C^\infty$ sur V, on peut définir les opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux agissant dans E et les algèbres $C^*(V, F; \mathscr{L}(E))$, $C^*_V(V, F; \mathscr{L}(E))$, $\Psi^*_{0,\rho}(V, F; \mathscr{L}(E))$ et $\Psi^*_\rho(V, F; \mathscr{L}(E))$. On a les suites exactes :

$$0 \to C^*(V, F; \mathscr{L}(E)) \to \Psi^*_{0,\rho}(V, F; \mathscr{L}(E)) \to \Sigma_{0,\rho}(V, F^*; \mathscr{L}(E)) \to 0$$
$$0 \to C^*_V(V, F; \mathscr{L}(E)) \to \Psi^*_\rho(V, F; \mathscr{L}(E)) \to \Sigma_\rho(V, F^*; \mathscr{L}(E)) \to 0.$$

### A.6. Familles d'opérateurs pseudifférentiels et connexions

Posons $\Omega = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^n \times Y$ et soit $p : \Omega \to \Omega_2$ la projection. Soient $E_1$ et $E_2$ des fibrés hermitiens sur $\Omega$ et $\Omega_2$ respectivement. Soit $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$) le C*-module hilbertien sur $C_0(Y)$ [resp. $C_0(\mathbb{R}^n \times Y)$, $C_0(Y)$] complété de $C_c^\infty(\Omega; E_1 \hat{\otimes} p^* E_2)$ [resp. $C_c^\infty(\Omega; E_1)$, $C_c^\infty(\Omega_2; E_2)$] pour le produit scalaire donné par $\langle f, g \rangle (y) = \int \langle f(x, y), g(x, y) \rangle dx$ où l'intégration est prise sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$) et $y \in Y$ (resp. $y \in \mathbb{R}^n \times Y$, $y \in Y$).

Notons que $C_0(\mathbb{R}^n \times Y)$ agit sur $\mathscr{E}_2$ et qu'on a $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \hat{\otimes}_{C_0(\mathbb{R}^n \times Y)} \mathscr{E}_2$. Soit $P_2$ une famille pseudodifférentielle $P_2 \in \Psi^*_\rho(\Omega_2, \mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_2))$ et $f \in C_0(\mathbb{R}^n \times Y)$. Par A.4.9, $[f, P_2] \in \mathscr{K}(\mathscr{E}_2)$. Notre but ici est de trouver quelles familles pseudodifférentielles $P \in \Psi^*_\rho(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ sont des $P_2$ connexions pour $\mathscr{E}_1$ ([11], définition A.1).

Rappelons que si $\eta_1 \in \mathscr{E}_1$, $T_{\eta_1} \in \mathscr{L}(\mathscr{E}_2, \mathscr{E})$ est donné par $T_{\eta_1}(\eta_2) = \eta_1 \hat{\otimes} \eta_2$ et $T^*_{\eta_1}(\eta'_1 \hat{\otimes} \eta_2) = \langle \eta_1, \eta'_1 \rangle \eta_2$.

A.6.1. Lemme (*cf.* [11] lemma 1.7). — *Soit* $P \in \Psi^*_\rho(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ *et* $\eta_1$, $\eta'_1 \in \mathscr{E}_1$. *Posons* $P_2 = T^*_{\eta_1} P T_{\eta'_1}$. *Alors* $P_2 \in \Psi^*_{0, \rho}(\Omega_2, \mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_2))$ *et si* $\sigma(P)$ *est la classe modulo* $C_\Omega(\Omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ *de* $a \in C_b(\Omega \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ *alors* $\sigma(P_2)$ *est la classe modulo* $C_{\Omega_2}(\Omega_2 \times (\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_2))$ *de* $a_2$ *donné par*

$$a_2(x_2, y, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}^m} \langle \eta_1(x_1, x_2, y), a(x_1, x_2, y, 0, \xi_2) \eta'_1(x_1, x_2, y) \rangle \, dx_1.$$

*Preuve.* — Par un argument de densité on peut supposer que $\eta_1$ et $\eta'_1 \in C^\infty_c(\Omega; E_1)$, et donc que $\eta'_1 = f \eta'_1$ où $f \in C^\infty_c(\Omega)$. Comme $P T_{f\eta'_1} = P f T_{\eta'_1}$, on peut donc supposer que $P \in \Psi^*_{0, \rho}(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$ et, par un argument de densité, que $P = P_b$ pour $b \in \mathscr{S}^0_{\rho, \delta}((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} p^* E_2))$. On a alors

$$P_2(f)(x_2, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i \langle x_2 - x'_2, \xi_2 \rangle} b'(x_2, x'_2, y, \xi_2) f(x'_2, y) \, dx'_2 \, d\xi_2$$

où

$$b'(x_2, x'_2, y, \xi_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int e^{i \langle x_1 - x'_1, \xi_1 \rangle} \times \langle \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) \eta'_1(x'_1, x'_2, y) \rangle \, dx'_1 \, d\xi_1 \, dx_1$$

Si on remplace $b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$ par $\chi(x'_1) b(x_1, x_2, x_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$ où $\chi = 1$ sur le support de $b$ et de $\eta'_1$, on ne change P (et donc $P_2$) que par un opérateur compact. On peut donc supposer que $b$ ne dépend pas de $x'_1$. On a alors

$$b'(x_2, x'_2, y, \xi_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int e^{i \langle x_1, \xi_1 \rangle} \times \langle \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) (\eta'_1)^\wedge_{x_1}(\xi_1, x'_2, y) \rangle \, d\xi_1 \, dx_1$$

où $(\eta'_1)^\wedge_{x_1}$ désigne la transformée de Fourier de $\eta'_1$ par rapport à $x'_1$.

Par dérivation sous le signe $\int$, il est clair que $b' \in \mathscr{S}^0_{\rho, \delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_2))$. Donc $P_2 = P_{b'} \in \Psi^*_0$.

Posons

$$b''(x_2, x'_2, y, \xi_2) = \int < \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_2, y, 0, \xi_2) \eta'_1(x_1, x_2, y) \rangle \, dx_1$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int e^{i \langle x_1, \xi_1 \rangle} \langle \eta_1(x_1, x_2, y), b(x_1, x_2, x'_2, y, 0, \xi_2) (\eta'_1)^\wedge_{x_1}(\xi_1, x_2, y) \rangle \, d\xi_1 \, dx_1$$

On a

$$(b'-b'')(x_2, x'_2, y, \xi_2)=\int e^{i\langle x_1, \xi_1\rangle}$$

$$\times\langle \eta_1(x_1, x_2, y), \int_0^1 \langle (d_{\xi_1} b)(x_1, x_2, x'_2, y, t\xi_1, \xi_2), \xi_1\rangle dt\,(\eta'_1)^{\wedge}_{x_1}(\xi_1, x_2, y)\rangle d\xi_1\, dx_1$$

Mais $\|(d_{\xi_1} b)(x_1, x_2, x'_2, y, t\xi_1, \xi_2)\| < k(1+\|\xi_2\|)^{-\rho}$, et donc $\lim_{\xi_2\to\infty}\|b'-b''\|=0$. On en déduit que $\sigma(P_2)$ est la classe modulo $C_{\Omega_2}(\Omega_2\times(\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_2))$ de la restriction de $b''$ à la diagonale c'est-à-dire du $a_2$ de l'énoncé. ■

De ce lemme on déduit immédiatement :

A.6.2. PROPOSITION. — (*a*) *Si* $P\in\Psi^*_\rho(\Omega, \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}p^*E_2))$ *vérifie* $\sigma_P(x_1, x_2, y, 0, \xi_2)=0$ *alors* P *est une zéro connexion i.e. pour tout* $T\in\mathscr{K}(\mathscr{E}_1)$, $(T\otimes 1)\, P\in\mathscr{K}(\mathscr{E})$ *et* $P(T\hat{\otimes}1)\in\mathscr{K}(\mathscr{E})$.

(*b*) *Soit* $P\in\Psi^*_\rho(\Omega, \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_1, \hat{\otimes}p^*E_2))$ *et soit* $a\in C_b(\Omega\times(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}p^*E_2))$ *dont la classe modulo* $C_\Omega$ *soit* $\sigma(P)$; *s'il existe* $a_2\in C_b(\Omega_2\times(\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_2))$ *tel que* $a(x_1, x_2, y, 0, \xi_2)-1_{E_1}\hat{\otimes}a_2(x_2, y, \xi_2)\in C_\Omega(\Omega\times(\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}p^*E_2))$ *alors* P *est une* $P_2$ *connexion où* $P_2\in\Psi^*_\rho(\Omega_2, \mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_2))$ *satisfait* $\sigma(P_2)=$ *classe modulo* $C_{\Omega_2}$ *de* $a_2$.

*En particulier, pour tout* $T\in\mathscr{K}(E_1)$, $[T\otimes 1, P]\in\mathscr{K}(\mathscr{E})$.

*Preuve.* — Résulte du lemme A.6.1 et de [11] (remarque A.6.4 et proposition A.2). ■

## A.7. Opérateurs pseudodifférentiels transverses et bimodules de Kasparov

Soit V une variété et $F_1$ et $F_2$ deux sous-fibrés intégrables de TV avec $F_1\subseteq F_2$. Appelons $G_1$, $G_2$ les groupoïdes d'holonomie des feuilletages $(V, F_1)$ et $(V, F_2)$. Notons qu'on a un homomorphisme naturel $h: G_1\to G_2$, qui est une immersion de classe $C^\infty$. Nous allons définir les opérateurs pseudodifférentiels longitudinaux pour $F_2$ et transverses pour $F_1$.

Soit E un fibré hermitien sur V et supposons que $G_1$ agit dans E par isométries.

Soit $\mathscr{E}=\mathscr{E}(V, F_2; E)$ le $C^*$-module hilbertien sur $C^*(V, F_2)$, complété de $C_c^\infty(G_2; r^*E\otimes\Omega^{1/2})$ par rapport au produit scalaire [à valeurs dans $C_c^\infty(G_2; \Omega^{1/2})$]

$$\langle f, f'\rangle=\int_{s(\gamma_1)=r(\gamma),\ \gamma_1\in G_2}\langle f(\gamma_1), f'(\gamma_1\gamma)\rangle$$

(on utilise des demies densités pour définir cette intégrale).

L'algèbre $C^*(V, F_1)$ ([6]) agit sur $\mathscr{E}$ grâce à l'action de $G_1$ sur $E$ : si $f \in C_c^\infty(G_1; \Omega^{1/2})$, $g \in C_c^\infty(G_2; r^* E \otimes \Omega^{1/2})$ alors

$$f.g(\gamma) = \int_{r(\gamma_1) = r(\gamma),\ \gamma_1 \in G_1} f(\gamma_1)[\gamma_1 . g(h(\gamma_1^{-1})\gamma)]$$

(*voir* le début du paragraphe IV pour une discussion des demi-densités utilisées ici).

A.7.1. DÉFINITION. — *Soit* $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E))$. *Le symbole transverse* $\sigma_{F_1^\perp}(P) \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E))$ *est la restriction de* $\sigma(P)$ *à* $F_1^\perp = (F_2/F_1)^* (\subseteq F_2^*)$.

Soit $\sigma \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E))$, et soit $a \in C_b((F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E))$ de classe $\sigma$. Alors $r^*(\sigma) \in \Sigma_\rho(G_1, r^*(F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(r^* E))$ et $s^*(\sigma) \in \Sigma_\rho(G_1, s^*(F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(s^* E))$ sont les classes de $r^*(a)$ et $s^*(a)$ (où $(r^*(a))(\gamma, \xi) = a(r(\gamma), \xi)$).

Soit $\sigma \in \Sigma_\rho(G_1, s^*(F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(s^* E))$ et soit $a \in C_b(s^*(F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(s^* E))$ de classe $\sigma$. On note $\sigma^\sim \in \Sigma_\rho(G_1, r^*(F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(r^* E))$ la classe de $a^\sim$ donné par $a^\sim(\gamma, \xi)(\eta) = \gamma . a(\gamma, \gamma^{-1}\xi)(\gamma^{-1}.\eta)$ où $\gamma \in G_1$, $\xi \in (F_2/F_1)^*_{r(\gamma)}$, $\eta \in E_{r(\gamma)}$ (on utilise l'action de $G_1$ dans $(F_2/F_1)^*$, provenant de l'action de $G_1$ dans $TV/F_1$ laissant $F_2/F_1$ invariant).

A.7.2. DÉFINITION. — *L'opérateur* $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E))$ *est dit* transverse *si son symbole transverse est* $G_1$ *invariant i.e. si* $r^*(\sigma_{F_1^\perp}(P)) = s^*(\sigma_{F_1^\perp}(P))^\sim$.

Utilisant la proposition A.6.2 on obtient :

A.7.3. PROPOSITION. — *Soit* $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E))$.

(*a*) *Si le symbole transverse de* P *est nul alors pour tout* $T \in C^*(V, F_1)$, $PT \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ *et* $TP \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$.

(*b*) *Si* P *est transverse, alors pour tout* $T \in C^*(V, F_1)$, $[P, T] \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$.

*Preuve.* — Comme $C^*(V, F_1)$ est engendrée par les $C^*(\Omega, F_1)$ où $\Omega$ est un ouvert trivialisant (*cf.* par exemple [15], lemme 1.8) il suffit de supposer que $T \in C^*(\Omega, F_1)$ où $\Omega$ est un ouvert trivialisant pour $(F_1, F_2)$, i.e. $\Omega \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$, où $F_1 = \mathbb{R}^m \times \{0\} \times \{0\}$ et $F_2 = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (comme sous-espaces du fibré tangent). Utilisant l'action de $G_1(\Omega)$ dans E on identifie E à $p^* E_2$ où $p : \Omega \to \Omega_2 = \mathbb{R}^n \times Y$ est la projection et $E_2 = j^* E$ où $j : \Omega_2 \to \Omega$ est une section de $p$ de classe $C^\infty$ (par exemple la section nulle); l'action de $G_1(\Omega)$ dans $p^* E_2$ est alors triviale. On peut de plus supposer que le support de T est compact dans $\Omega$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $\varphi T = T \varphi = T$. Écrivons

$$P = (1-\varphi) P (1-\varphi) + P\varphi(2-\varphi) + [\varphi, P](1-\varphi) = (1-\varphi) P (1-\varphi) + (P' + K_1) + K_2$$

où $K_1, K_2 \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ et $P' \in \Psi_0^*(\Omega, F_2; \mathscr{L}(E))$ est tel que $\sigma_{P'} = \varphi(2-\varphi)\sigma_P$. Alors $(T \hat{\otimes} 1)(1-\varphi) P (1-\varphi) = (1-\varphi) P (1-\varphi) T \hat{\otimes} 1 = 0$ et on conclut grâce à la proposition A.6.2. ∎

([6]) Rappelons que dans tout le papier $C^*(V, F)$ désigne la $C^*$-algèbre « max » de $(V, F)$; notons qu'en général l'action de $C^*(V, F_1)$ dans $\mathscr{E}_{\text{red}}(V, F_2; E)$ ne passe pas au quotient $C^*_{\text{red}}(V, F_1)$ (prendre par exemple $F_2 = TV$).

La proposition A.7.3 permet de construire des bimodules de Kasparov :

A.7.4. DÉFINITION. — *Soit* $(V, F_1, F_2)$ *une variété doublement feuilletée avec* $F_1 \subset F_2$. *On appelle* symbole transversalement elliptique *de type* $\rho$ *une paire* $(E, \sigma)$ *où*

(*a*) $E$ *est un* $G_1$ *fibré hermitien* $\mathbb{Z}/2$ *gradué sur* $V$, *i.e. un fibré hermitien sur* $V$ *muni d'une action isométrique de* $G_1$ *préservant le degré;*

(*b*) $\sigma \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E))$ *est* $G_1$*-invariant, de degré* 1 *et* $\sigma^2 = 1$.

Il résulte immédiatement de la proposition A.7.3 :

A.7.5. THÉORÈME. — *Soit* $(V, F_1, F_2)$ *une variété doublement feuilletée avec* $F_1 \subseteq F_2$.

(*a*) *Si* $(E, \sigma)$ *est un symbole transversalement elliptique de type* $\rho$ *et si* $D \in \Psi^*_\rho(V, F_2; \mathscr{L}(E))$ *est tel que* $\sigma_{F_1^\perp}(D) = \sigma$ *alors* $(\mathscr{E}(V, F_2; E), D)$ *est un* $C^*(V, F_1)$, $C^*(V, F_2)$ *bimodule de Kasparov.*

(*b*) *La classe de* $(\mathscr{E}, D)$ *dans* $KK(C^*(V, F_1); C^*(V, F_2))$ *ne dépend que de* $(E, \sigma)$ *et est invariante par homotopie. Notons* $\Psi(E, \sigma)$ *cette classe.*

Une homotopie ici signifie une paire $(E, \sigma)$ où $E$ est un $G_1 \times [0, 1]$ fibré hermitien $\mathbb{Z}/2$-gradué sur $V \times [0, 1]$ et $\sigma \in \Sigma_\rho(V \times [0, 1], p^*(F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E))$ est $G_1 \times [0, 1]$ invariant, de degré 1 et $\sigma^2 = 1$ où $p : V \times [0, 1] \to V$ est la projection.

*Preuve.* — Résulte immédiatement de la proposition A.7.3. L'invariance par homotopie résulte de la surjectivité de l'application

$$\sigma_{F_1^\perp} : \quad \Psi^*_\rho(V \times [0, 1], F_2; \mathscr{L}(E)) \to \Sigma_\rho(V \times [0, 1], (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E)). \ \blacksquare$$

A.7.6. *Remarque.* — Soit $(V, F_1, F_2)$ une variété doublement feuilletée et soit $f : W \to V/F_1$ une submersion. Soient $F'_1 = f^{-1}(F_1)$ et $F'_2 = f^{-1}(F_2)$ les feuilletages de $W$ ramenés en arrière par $f$.

Soit $(E, \sigma)$ un symbole transversalement elliptique pour $(V, F_1, F_2)$. Alors le fibré $f^* E$ est bien défini et est un $G'_1$ fibré sur $W$ [où $G'_1$ désigne le graphe de $(W, F'_1)$]. Comme $\sigma$ est $G_1$ invariant on peut aussi définir le symbole $f^*(\sigma)$ :

Soit $W_i$ un recouvrement ouvert de $W$ et $f_i : W_i \to V$ des applications définissant $f$.

Soit $\varphi_i$ une partition de l'unité subordonnée à $W_i$ et posons $f^*(\sigma) = \sum_i \varphi_i f_i^*(\sigma)$. Comme $f_i^*(\sigma) = f_j^*(\sigma)$ sur $W_i \cap W_j$, $f^*(\sigma)$ ne dépend pas des $\varphi_i$.

Évidemment $(f^* E, f^*(\sigma))$ est un symbole transversalement elliptique pour $(W, F'_1, F'_2)$. [Remarquons que $f^*(F_2/F_1)$ s'identifie naturellement à $F'_2/F'_1$.]

Notons $\mathscr{E}_j (j = 1, 2)$ les $C^*(W, F'_j)$, $C^*(V, F_j)$ bimodules induits par $f$ (*cf.* [11], § IV). Comme $C^*(W, F'_j)$ agit dans $\mathscr{E}_j$ par opérateurs compacts ([11], proposition 4.3) $\mathscr{E}_j$ définit un élément $[\mathscr{E}_j]$ de $KK(C^*(W, F'_j; C^*(V, F_j))$. Il est alors facile de voir qu'on a :

$$\psi(f^* E, f^*(\sigma)) \otimes [\mathscr{E}_2] = [\mathscr{E}_1] \otimes \psi(E, \sigma)$$

[i.e. que si $D'$ est tel $\sigma_{F'_1{}^\perp}(D') = f^*(\sigma)$ alors $D' \otimes 1_{\mathscr{E}_2}$ est une $\mathscr{E}_1$ connexion pour $D$ où $D$ vérifie $\sigma_{F_1^\perp}(D) = \sigma$, ce qui résulte de la proposition A.7.3].

Nous calculons maintenant le produit de Kasparov de deux opérateurs pseudodifférentiels transverses.

### A.8. Opérateurs pseudodifférentiels transverses et connexions

Soit $(V, F_1, F_2)$ une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subseteq F_2$. Soient $E_1$, $E_2$ deux fibrés hermitiens sur V et supposons que $G_1$ agit sur $E_2$ par isométries.

Soit $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}(V, F_1; E_1)$ le $C^*$-module hilbertien sur $C^*(V, F_1)$ complété de $C_c^\infty(G_1; r^* E_1 \otimes \Omega^{1/2})$, et $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(V, F_2; E_2)$.
Posons $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \hat{\otimes}_{C^*(V, F_1)} \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(V, F_2; E_1 \hat{\otimes} E_2)$ [$\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}$ sont des $C^*$-modules hilbertiens sur $C^*(V, F_2)$].

Soit $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_2))$ un opérateur transverse. Par la proposition A.7.3, pour tout $T \in C^*(V, F_1)$, $[P, T] \in \mathscr{K}(\mathscr{E}_2)$. Notre but est de trouver des P-connexions pour $\mathscr{E}_1$.

A.8. Proposition. — *Soit* $P \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_2))$ *un opérateur transverse et* $\tilde{P} \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ *tel que* $\sigma_{F_1^\perp}(\tilde{P}) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \sigma_{F_1^\perp}(P) \in \Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$.
*Alors* $\tilde{P}$ *est une* P *connexion pour* $\mathscr{E}_1$.

*Preuve.* — Il résulte directement de la proposition A.6.2 que si $\sigma_{F_1}(\tilde{P}) = 0$ alors $\tilde{P}$ est une zéro-connexion (*voir* la preuve de A.7.3). Il suffit donc de prouver qu'il existe $\tilde{P}_0 \in \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)$ avec $\sigma_{F_1^\perp}(\tilde{P}_0) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \sigma_{F_1}(P)$ et $\tilde{P}_0$ est une P connexion (*cf.* [11], proposition A.2.*b*).

Si $E_1$ est le fibré trivial $\mathbb{C}^n$, il suffit de prendre

$$\tilde{P}_0 = 1_n \hat{\otimes} P \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_2)) = \Psi_\rho^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$$

qui est une connexion par [11] (preuve de proposition A.2.*a*).

Si $E_1$ n'est pas trivial, on écrit $E_1 = p\,\mathbb{C}^n$ où $p \in C^\infty(V; M_n(\mathbb{C}))$ et $p(x)$ est projecteur pour tout $x \in V$. On pose alors $\tilde{P}_0 = p(1_n \hat{\otimes} P)\,p$ qui est une P connexion par [11] (preuve de proposition A.2.*a*), et est pseudodifférentiel avec le bon symbole car $p$ est pseudodifférentiel de symbole $p$. ■

### A.9. Le produit d'une zéro connexion par un (pseudodifférentiel)$\hat{\otimes}$ 1

Soit $(V, F_1, F_2)$ une variété doublement feuilletée avec $F_1 \subset F_2$. Soient $E_1$, $E_2$ deux fibrés hermitiens sur V et supposons que $G_1$ agit sur $E_2$ par isométries. On pose encore

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}(V, F_1; E_1), \qquad \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(V, F_2; E_2), \qquad \mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \hat{\otimes}_{C^*(V, F_2)} \mathscr{E}_2.$$

Soit

$$P \in \Psi_\rho^*(V, F_1; \mathscr{L}(E_1)), \qquad Q \in \Psi_{\rho'}^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$$

avec $\sigma_{F_1^\perp}(Q) = 0$. Nous montrons ici que $(P \hat{\otimes} 1)\,Q \in \Psi_{\rho\rho'}^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ et que $\sigma((P \hat{\otimes} 1)\,Q) = (\sigma(P) \hat{\otimes} 1)\,\sigma(Q)$. Commençons par donner un sens à cette formule :

A.9.1. Lemme. — (*a*) *Si* $a \in C_0(F_1^*; \mathscr{L}(E_1))$ *et* $b \in \mathscr{S}_{\rho', \delta'}^0(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ *est tel que* $b|_{F_1^\perp} \in C_0((F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ *alors* $((a \circ p) \hat{\otimes} 1_{E_2})\, b \in C_0(F_2^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ *où* $p : F_2^* \to F_1^*$ *est la transposée de l'inclusion* $F_1 \to F_2$.

(*b*) *Si* $a \in \mathscr{S}_{\rho, \delta}^0(V, F_1^*; \mathscr{L}(E_1)$ *et* $b$ *est comme ci-dessus alors* $((a \circ p) \hat{\otimes} 1_{E_2})\, b \in \bar{\mathscr{S}}_{\rho'', \delta''}^0(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ *où* $\rho'' = \rho\rho'$ $\delta'' = 1 - \rho''$.

(Rappelons que $\bar{\mathscr{S}}^0_{\rho,\delta}$ désigne l'adhérence pour la norme $\| \ \|_\infty$.)

*Preuve.* — (*a*) Fixons une norme euclidienne sur $F_2$, et soit $s : F_1^* \to F_2^*$ la section associée.

Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour $\xi_1 \in F_1^*$, $\|\xi_1\| \geqq M$ on ait $\|a(x, \xi_1)\| \leqq \varepsilon / \|b\|_\infty$.

Soit

$$K = \operatorname*{Sup}_{\xi_2 \in F_2^*} \|\xi_2\|^{\rho'} \|D_\xi b(x, \xi_2)\|$$

($K<+\infty$ par définition de $\mathscr{S}^0_{\rho', \delta'}$). Pour $\xi_1 \in F_1^*$, $\|\xi_1\| \leqq M$ et $\xi_2 \in F_1^\perp = (F_2/F_1)^*$ on a :

$$\|b(x, s(\xi_1)+\xi_2)\| \leqq \|b(x, \xi_2)\| + \frac{KM}{\|\xi_2\|^{\rho'}}$$

et donc il existe $M'$ tel que pour

$$\|\xi_2\| \geqq M' \qquad \text{et} \qquad \|\xi_1\| \leqq M, \qquad \|b(x, s(\xi_1)+\xi_2)\| < \frac{\varepsilon}{\|a\|_\infty}.$$

Donc pour $\xi \in F_2^*$, $\|\xi\|^2 \geqq M^2 + M'^2$, on a $\|(a(x, p(\xi)) \hat{\otimes} 1_{E_2})\, b(x, \xi)\| < \varepsilon$.

(*b*) Comme $a$ et $b$ sont à support compact dans V on peut supposer que V est compacte.

Soit $h \in \mathscr{S}^0_{\rho', \delta'}(V, F_2^*)$ donné par

$$h(x, \xi) = \frac{\|p(\xi)\|^2}{\|p(\xi)\|^2 + (1+\|\xi\|^2)^{\rho'}}, \qquad \xi \in F_2^* \quad (\textit{cf.}\ \text{preuve du lemme 4. 1}).$$

Soit $b \in \mathscr{S}^0_{\rho', \delta'}(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ avec $b|_{F_1^\perp} \in C_0$.

Alors, pour tout $\xi_1 \in F_1^*$ et $\xi_2 \in F_1^\perp$ on a

$$\|b(x, s(\xi_1)+\xi_2)\| \leqq \inf\left(\|b\|_\infty, \|b(x, \xi_2)\| + \frac{K\|\xi_1\|}{(1+\|\xi_2\|^2)^{\rho'/2}}\right)$$

où $K = \sup_{\xi \in F_2^*} (1+\|\xi\|^2)^{\rho'/2} \|(D_\xi b)(x, \xi)\|\ (<+\infty)$.

Si $\|\xi_1\|^2 \geqq (1+\|\xi_2\|^2)^{\rho'}$, alors $h(x, s(\xi_1)+\xi_2) \geqq 1/3$ et

$$\|b(x, s(\xi_1)+\xi_2)\|^2 \leqq \|b\|^2_\infty \leqq 3\|b\|^2_\infty\, h(x, s(\xi_1)+\xi_2).$$

Si $\|\xi_1\|^2 \leqq (1+\|\xi_2\|^2)^{\rho'}$, alors

$$\|b(x, s(\xi_1)+\xi_2)\|^2 \leqq 2\|b(x, \xi_2)\|^2 + \frac{2K^2\|\xi_1\|^2}{(1+\|\xi_2\|^2)^{\rho'}}$$
$$\leqq 2h(x, s(\xi_1)+\xi_2)(\|b(x, \xi_2)\|^2 + 3K^2) + b'(x, s(\xi_1)+\xi_2)$$

où

$$b'(x, s(\xi_1)+\xi_2) = 2\|b(x, \xi_2)\|^2 (1-h(x, s(\xi_1)+\xi_2))$$

est dans $C_0(F_2^*)$. Donc, pour tout $\xi$ de $F_2^*$, on a l'inégalité :

$$\| b(\xi) \|^2 \leqq 6(\| b \|_\infty^2 + K^2) h + b'.$$

Soit $A_{\rho'} = \{ \sigma \in \Sigma_{\rho'}(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)) / \sigma_{F_1 \perp} = 0 \}$.

Nous avons montré que l'image $\pi(h)$ de $h$ dans $A_{\rho'}$ est strictement positive (*cf.* [30], 7, § 1). Donc il en est de même pour $\exp(-1/h)$. Or $((a \circ p) \hat{\otimes} 1) \exp(-1/h) \in \mathscr{S}^0_{\rho'', \delta''}$. ■

Ce lemme prouve que si $\sigma_1 \in \Sigma_\rho(V, F_1^*; \mathscr{L}(E_1))$ est la classe de $a_1$ et $\sigma_2 \in \Sigma_{\rho'}(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$, avec $\sigma_{2 \mid F_1 \perp} = 0$ est la classe de $a_2$ alors $((a_1 \circ p) \otimes 1) a_2 \in \bar{\mathscr{S}}^0_{\rho'', \delta''}$ et la classe de $((a_1 \circ p) \hat{\otimes} 1) a_2$ dans $\Sigma_{\rho''}(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)$ ne dépend que de $\sigma_1$ et $\sigma_2$ ($\rho'' = \rho\rho'$). Notons la $(\sigma_1 \hat{\otimes} 1) \sigma_2$.

A.9.2. LEMME (*cf.* [11] lemma 1.8.) *Soit* $P \in \Psi_\rho^*(V, F_1; \mathscr{L}(E_1))$ *et* $Q \in \Psi_{\rho'}^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ *de symbole transverse* $\sigma_{F_1^\perp}(Q) = 0$. *Alors*

$$(P \hat{\otimes} 1) Q \in \Psi_{\rho''}(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)) \qquad \textit{et} \qquad \sigma((P \hat{\otimes} 1) Q) = (\sigma(P) \hat{\otimes} 1) \sigma(Q)$$

($\rho'' = \rho\rho'$ *est supposé* $> 1/2$).

*Preuve.* — On doit montrer que $\varphi(P \hat{\otimes} 1) Q \in \Psi^*_{0, \rho''}$ pour tout $\varphi \in C_0(V)$. Il suffit de le prouver pour $\varphi \in C_c^\infty$ avec support dans un ouvert trivialisant $\Omega \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$. Comme $(\mathscr{K}(\mathscr{E}_1) \hat{\otimes} 1) Q \subseteq \mathscr{K}(\mathscr{E})$ (proposition A.8), il suffit de montrer que $(P \hat{\otimes} 1) Q \in \Psi^*_{0, \rho''}(\Omega, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n); \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ pour tout $P \in \Psi^*_{0, \rho}(\Omega, \mathbb{R}^m; \mathscr{L}(E_1))$, et $Q \in \Psi^*_{0, \rho}(\Omega, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ de symbole transverse nul. En utilisant la stricte positivité du symbole $\exp(-1/h)$ du lemme A.9.1, on peut supposer $Q = HQ'$ où $H = P_b$ où $b \in \mathscr{S}^0_{\rho', \delta'}((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$ est donné par

$$b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2) = f'_2(x_1) f_2(x'_1, x_2, x'_2, y) \exp\left( -\left( 1 + \frac{(1 + \| \xi_1 \|^2 + \| \xi_2 \|^2)^{\rho'}}{\| \xi_1 \|^2} \right) \right)$$

$$f'_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \; f_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n)^2 \times Y).$$

Il suffit alors de prouver que $(P \hat{\otimes} 1) H \in \Psi^*_{0, \rho\rho'}(\Omega, \mathbb{R}^m; \mathscr{L}(E_1))$ et a le bon symbole. On peut aussi oublier le fibré $E_1$, en le supposant par exemple trivial sur $\Omega$ et raisonnant pour chaque élément de matrice.

Par un argument de densité on peut supposer $P = P_{\tilde{a}}$ où

$$\tilde{a}(x_1, x_2, x'_1, y, \xi_1) = a(x_1, x_2, y, \xi_1) f_1(x'_1 - x_1),$$

$$f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m), \; f_1(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad a \in \mathscr{S}^0_{\rho, \delta}.$$

On peut en outre supposer que $f'_2 = 1$ sur le support de $\tilde{a}$.

Posons

$$\tilde{h}(\xi_1, \xi_2) = \exp\left( -\left( 1 + \frac{(1 + \| \xi_1 \|^2 + \| \xi_2 \|^2)^{\rho'}}{\| \xi_1 \|^2} \right) \right)$$

$$((\mathrm{P}\otimes 1)\,\mathrm{H})(g)(x_1, x_2, y)$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n}\int e^{i(\langle x_1-x'_1,\,\xi_1\rangle+\langle x'_1-x''_1,\,\xi'_1\rangle+\langle x_2-x'_2,\,\xi_2\rangle)}a(x_1, x_2, y, \xi_1)$$
$$f_1(x'_1-x_1)\,f_2(x''_1, x_2, x'_2, y)\,\tilde{h}(\xi'_1, \xi_2)\,g(x''_1, x'_2, y)\,dx''_1\,dx'_2\,d\xi'_1\,d\xi_2\,dx'_1\,d\xi_1$$

Posons

$$a'(x_1, x_2, y, \xi'_1)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m}\int e^{i\langle x_1-x'_1,\,\xi_1-\xi'_1\rangle}a(x_1, x_2, y, \xi_1)\,f(x'_1-x_1)\,dx'_1\,d\xi_1$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m}\int a(x_1, x_2, y, \xi'_1+\eta)\,\hat{f}(\eta)\,d\eta$$

de sorte que

$$(\mathrm{P}\otimes 1)\,\mathrm{H}(g)(x_1, x_2, y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+n}\int e^{i(\langle x_1-x''_1,\,\xi'_1\rangle+\langle x_2-x'_2,\,\xi_2\rangle)}a'(x_1, x_2, y, \xi'_1)$$
$$\times f_2(x''_1, x_2, x'_2, y)\,\tilde{h}(\xi'_1, \xi_2)\,g(x''_1, x'_2, y)\,dx''_1\,dx'_2\,d\xi'_1\,d\xi_2.$$

Montrons que $a'\in\mathscr{S}^0_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{Y}, (\mathbb{R}^m)^*)$. Par dérivation sous le signe $\int$ il suffit d'estimer $\int(1+\|\xi_1+\eta\|)^r\,|\hat{f}(\eta)|\,d\eta$ pour $r\in\mathbb{R}$. Or on a $(1+\|\xi_1+\eta\|)^r\leqq(1+\|\eta\|)^{|r|}(1+\|\xi_1\|)^r$, et comme $\hat{f}$ est à décroissance rapide

$$\int(1+\|\xi_1+\eta\|)^r\,|\hat{f}(\eta)|\,d\eta\leqq k_r(1+\|\xi_1\|)^r.$$

Donc $a'\in\mathscr{S}^0_{\rho,\,\delta}$. Mais alors $a'\tilde{h}\in\mathscr{S}^0_{\rho'',\,\delta''}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathrm{Y}, (\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^*)$ comme on l'a déjà noté à la fin de la preuve de A.9.1, et donc

$$c\in\mathscr{S}^0_{\rho'',\,\delta''}((\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^2\times\mathrm{Y};\,(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^*)$$

où

$$c(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)a'(x_1, x_2, y, \xi_1)\,\tilde{h}(\xi_1, \xi_2)\,f_2(x'_1, x_2, x'_2, y).$$

Et donc $(\mathrm{P}\otimes 1)\,\mathrm{Q}=\mathrm{P}_c\in\psi^*_{0,\,\rho''}$.

Notons enfin que

$$(a'-a)(x_1, x_2, y, \xi_1)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int(a(x_1, x_2, y, \xi_1+\eta)-a(x_1, x_2, y, \xi_1))\,\hat{f}(\eta)\,d\eta$$

Donc

$$\|(a'-a)(x_1, x_2, y, \xi_1)\|\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int\|\eta\|\,|\hat{f}(\eta)|\,d\eta\int_0^1\mathrm{K}(1+\|\xi_1+t\eta\|)^{-\rho}\,dt$$
$$\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int\|\eta\|\,|\hat{f}(\eta)|\,d\eta\int_0^1\mathrm{K}(1+\|\xi_1\|)^{-\rho}(1+\|t\eta\|)^{\rho}\,dt$$
$$\leqq\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\mathrm{K}(1+\|\xi_1\|)^{-\rho}\int\|\eta\|(1+\|\eta\|)^{\rho}\,|\hat{f}(\eta)|\,d\eta.$$

Donc $a'-a \in C_0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y \times (\mathbb{R}^m)^*)$ et donc par le lemme A.9.1 (*a*)

$$(a'-a)\, b \in C_0((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$$

Donc $\sigma((P\hat{\otimes}1)\, Q) = (\sigma(P)\hat{\otimes}1)\, \sigma(Q)$. ■

De ce lemme nous déduisons la généralisation au cadre $\rho$, $\delta$ du fait que $P\hat{\otimes}1$ est dans l'adhérence des pseudodifférentiels d'ordre $\alpha>0$ si P est un pseudodifférentiel d'ordre $\alpha$ (*cf.* [3-I], p. 514 (5.4) ou [36], p. 270, Theorem 7).

A.9.3. Corollaire. — *Si* $a \in \mathscr{S}^{\alpha}_{\rho,\,\delta}((\mathbb{R}^m)^2 \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m)^*)$ *et*

$$b \in \mathscr{S}^{-\alpha}_{\rho',\,\delta'}((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*) \text{ avec } \alpha>0$$

*alors* $P_a P_b \in \Psi^*_{0,\,\rho''}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$ *et* $\sigma(P_a P_b)$ *est la classe de* $(a \circ p)\, b$ restreint *à la diagonale où* $p : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^m)^*$ *est la projection.*

*Preuve.* — Soit $a' \in \mathscr{S}^{\alpha}_{1,\,0}((\mathbb{R}^m)^2 \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m)^*)$ et $b' \in \mathscr{S}^{-\alpha}_{1,\,0}((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times Y, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^*)$ des symboles elliptiques au voisinage du support de $a$ et $b$, homogènes en dehors d'un compact. Alors par [3.I] (5.4, p. 514) $(P_{a'}\otimes 1)\, P_{b'} \in \Psi^*_{0,\,1}$ et son symbole principal est la restriction de $(a' \circ p)\, b'$ à la diagonale, et est donc une zéro connexion. On écrit alors

$$P_a = P_{a''}\, P_{a'} + P_c \; (a'' \in \mathscr{S}^0_{\rho,\,\delta},\; c \in \mathscr{S}^0_{\rho,\,\delta})$$

et

$$P_b = P_{b'}\, P_{b''} + P_d \; (b'' \in \mathscr{S}^0_{\rho',\,\delta'},\; d \in \mathscr{S}^{-\infty}).$$

Alors $(P_c \otimes 1)\, P_b \in \mathscr{K}$ (car $P_b \in \mathscr{K}$) et $(P_{a''}\, P_{a'} \otimes 1)\, P_d \in \mathscr{S}^{-\infty} \subseteq \mathscr{K}$. Enfin

$$(P_{a''}\, P_{a'} \otimes 1)\, P_{b'}\, P_{b''} = (P_{a''} \otimes 1)((P_{a'} \otimes 1)\; P_{b'})\, P_{b''} \in \Psi^*_{0,\,\rho}$$

par A.9.2. ■

## A.10. Le commutateur d'une connexion et d'un (pseudodifférentiel) $\hat{\otimes}1$

Nous nous plaçons dans la même situation que ci-dessus :

A.10.1. Lemme (*cf.* [11] lemma 1.9). — *Soit* $P \in \Psi^*_{\rho}(V, F_1; \mathscr{L}(E_1))$ *et* $Q \in \Psi^*_{\rho'}(F, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ *tel que* $\sigma(Q) = 1_{E_1} \hat{\otimes} \sigma'$ *où* $\sigma' \in \Sigma_{\rho'}(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_2))$ *est tel que* $\sigma'_{F_1^\perp}$ *soit* $G_1$ *invariant* (cf. définition A.7.2). *Si* $\rho\rho' > 1/2$, *alors* $[P\hat{\otimes}1, Q] \in \mathscr{K}_V(\mathscr{E})$ (*i.e.* $\forall \varphi \in C_0(V)$, $\varphi[P\hat{\otimes}1, Q] \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ *et* $[P\hat{\otimes}1, Q]\, \varphi \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$).

*Preuve.* — Soit $\Omega \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times Y$ un ouvert trivialisant et $\varphi \in C_c(\Omega)$. On doit démontrer que $\varphi[P\hat{\otimes}1, Q] \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ et comme $[\varphi, Q] \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$, il suffit de montrer que $[\varphi P\hat{\otimes}1, Q] \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$. Remplaçons P par $\varphi P$, comme $[\mathscr{K}(\mathscr{E}_1)\hat{\otimes}1, Q] \subseteq \mathscr{K}(\mathscr{E})$ (proposition A.8) on peut supposer $P \in \Psi^*_{0,\,\rho}(\Omega, F_1; \mathscr{L}(E_1))$ et par un argument de densité que $P = P_a$ où $a \in \mathscr{S}^0_{\rho,\,\delta}((\mathbb{R}^m)^2 \times \mathbb{R}^n \times Y, (\mathbb{R}^m)^*; \mathscr{L}(E_1))$. Soit $Q' \in \Psi^*_{\rho'}(\Omega, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2))$ tel que $\sigma(Q')$ soit la restriction à $\Omega$ de $\sigma(Q)$. Comme $P\hat{\otimes}1 = \varphi(P\hat{\otimes}1)\, \varphi$ pour un $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ et que

$$\varphi\, Q' \in \Psi^*_{0,\,\rho'}(\Omega, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)) \subseteq \Psi^*_{0,\,\rho'}(V, F_2; \mathscr{L}(E_1 \hat{\otimes} E_2)),\; [P\hat{\otimes}1, Q'] \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$$

et

$$[P\hat{\otimes}1, Q]-[P\hat{\otimes}1, Q']=P\hat{\otimes}1)(\varphi Q-\varphi Q')-(Q\varphi-Q'\varphi)(P\hat{\otimes}1)\in\mathscr{K}(\mathscr{E}).$$

Il suffit donc d'évaluer $[P\hat{\otimes}1, Q']$. Soient $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ et $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\times Y)$ tels que $P=fg\,P=P\,fg$. Notons que $[P\hat{\otimes}1, Q'(1-fg)]\in\mathscr{K}(\mathscr{E})$.

Notons que $Q''=g\,Q'$ a encore un symbole transverse invariant et que, par le lemme A.9.2 $[P\hat{\otimes}1, Q'']$ ne dépend modulo les compacts que du symbole transverse de $Q''$. Par un argument de densité on peut supposer que $\sigma_{F_1^\perp}(f\,Q''-P_b)=0$ où $b\in\mathscr{S}^0_{\rho',\,\delta'}((\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^2\times Y, (\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$ est de la forme

$$b(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)=1_{E_1}\hat{\otimes}f(x_1)\chi(x_1-x'_1)\,b_2(x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$$

où $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ avec $\chi(0)=1$ et $b_2\in\mathscr{S}^0_{\rho',\,\delta'}((\mathbb{R}^n)^2\times Y, (\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)^*; \mathscr{L}(E_2))$.

Soit $b'(x_1, x_2, x'_1, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)=1_{E_1}\hat{\otimes}\chi(x_1-x'_1)\,b_2(x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)$. Bien que $b'$ ne soit pas à support compact, l'invariance par translations dans $\mathbb{R}^m$ montre que l'opérateur $P_{b'}: C_c^\infty(\Omega; E_1\hat{\otimes}E_2)\to C^\infty(\Omega; E_1\hat{\otimes}E_2)$ s'étend en un opérateur $P_{b'}\in\mathscr{L}(\mathscr{E})$ et que pour tout $f'\in C_c^\infty(\Omega) f'\,P_{b'}\in\Psi^*_{0,\,\rho}$ et a comme symbole $f'\,\sigma(Q')$, $P_{b'}\in\Psi^*(\Omega, F; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$ et $\sigma_{F_1^\perp}(P_{b'})=\sigma_{F_1^\perp}(Q'')$. Il suffit donc de prouver que $[P_a\hat{\otimes}1, P_{b'}]\in\mathscr{K}(\mathscr{E})$.

Nous supposerons $a$ et $b'$ homogènes pour la graduation de $E_1$ et $E_2$, et que les fibrés $E_1$ et $E_2$ sont trivialisés le long de $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned}
P_{b'}(P_a\hat{\otimes}1)(g)(x_1, x_2, y)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n}\int e^{i(\langle x_1-x'_1,\xi_1\rangle+\langle x'_1-x''_1,\xi'_1\rangle+\langle x_2-x'_2,\xi_2\rangle)}(-1)^{\partial a\partial b'}\\
\{a(x'_1, x''_1, x'_2, y, \xi'_1)&\hat{\otimes}\chi(x_1-x'_1)\,b_2(x_2, x'_2, y, \xi_1, \xi_2)\}\times g(x''_1, x'_2, y)\,dx''_1\,d\xi'_1\,dx'_1\,dx'_2\,d\xi_1\,d\xi_2\\
&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n}\int e^{i(\langle x_1-x'_3,\xi_3\rangle+\langle x'_3-x''_1,\xi'_3\rangle+\langle x_2-x'_2,\xi_2\rangle)}(-1)^{\partial a\partial b'}\\
&\quad\times\{a(x_1+x''_1-x'_3, x''_1, x'_2, y, \xi_3)\hat{\otimes}\chi(x'_3-x''_1)\,b_2(x_2, x'_2, y, \xi'_3, \xi_2)\}\\
&\quad\times g(x''_1, x'_2, y)\,dx''_1\,d\xi_3\,dx'_3\,dx'_2\,d\xi'_3\,d\xi_2
\end{aligned}$$

où on a posé $x'_3=x_1+x''_1-x'_1$, $\xi'_3=\xi_1$, $\xi_3=\xi'_1$. Donc

$$\begin{aligned}
&[P_a\hat{\otimes}1, P_{b'}](g)(x_1, x_2, y)\\
&\quad=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n}\int e^{i(\langle x_1-x'_1,\xi_1\rangle+\langle x'_1-x''_1,\xi'_1\rangle+\langle x_2-x'_2,\xi_2\rangle)}\chi(x'_1-x''_1)\\
&\quad\{[a(x_1, x'_1, x_2, y, \xi_1)-a(x_1+x''_1-x'_1, x''_1, x'_2, y, \xi_1)]\hat{\otimes}\,b_2(x_2, x'_2, y, \xi'_1, \xi_2)\}\\
&\quad\times g(x''_1, x'_2, y)\,dx''_1\,d\xi'_1\,dx'_1\,dx'_2\,d\xi_1\,d\xi_2.
\end{aligned}$$

Soit $N\in\mathbb{N}$ à préciser plus bas et écrivons le développement de Taylor

$$\begin{aligned}
&a(x_1, x'_1, x_2, y, \xi_1)-a(x_1+x''_1-x'_1, x''_1, x'_2, y, \xi_1)\\
&\quad=\sum_{k=1}^{N-1}\sum_j a_j^k(x_1, x'_1, x_2, y, \xi_1)\,p_j^k(x''_1-x'_1, x'_2-x_2)
\end{aligned}$$

$$+\sum_j a_j^{\mathrm{N}}(x_1, x_1', x_1'', x_2, x_2', y, \xi_1)\, p_j^{\mathrm{N}}(x_1''-x_1', x_2'-x_2)$$

où les $p_j^k$ forment une base des polynômes homogènes de degré $k$ et $a_j^k \in \mathscr{S}_{\rho,\,\delta}^{k\delta}$.

En intégrant par parties (intégrant par rapport à $\xi_1'$ et $\xi_2$ l'expression

$$p_j^k(x_1''-x_1', x_2'-x_2)\, e^{i(\langle x_1'-x_1'', \xi_1'\rangle + \langle x_2-x_2', \xi_2\rangle)}$$

et dérivant $b_2$) on trouve :

$$[\mathrm{P}_a \hat{\otimes} 1, \mathrm{P}_b] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \sum_j (\mathrm{P}_{a_j^k} \hat{\otimes} 1)\, \mathrm{P}_{b_j^k} + \sum_j \mathrm{R}_j^{\mathrm{N}} \qquad \text{où} \quad b_j^k \in \mathscr{S}_{\rho',\,\delta'}^{-k\rho'}$$

et donc par le corollaire A.9.3 $(\mathrm{P}_{a_j^k} \hat{\otimes} 1)\, \mathrm{P}_{b_j^k} \in \mathscr{K}(\mathscr{E})$ et

$$(\mathrm{R}_j^{\mathrm{N}} g)(x_1, x_2, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i\varphi} \{ a_j^{\mathrm{N}} \hat{\otimes} \chi(x_1'-x_1'')\, b_j^{\mathrm{N}}(x_2, x_2', y, \xi_1', \xi_2) \}$$
$$\times g(x_1'', x_1', y)\, dx_1''\, d\xi_1'\, dx_1'\, dx_2'\, d\xi_1\, d\xi_2$$

où $a_j^{\mathrm{N}} \in \mathscr{S}_{\rho,\,\delta}^{\mathrm{N}\delta}$ et $b_j^{\mathrm{N}} \in \mathscr{S}_{\rho',\,\delta'}^{-\mathrm{N}\rho'}$ (notons que le support de $a_j^{\mathrm{N}}$ n'est pas compact mais $a_j^{\mathrm{N}} \otimes \chi\, b_j^{\mathrm{N}}$ est à support compact en $(x_1, x_1', x_1'', x_2, x_2', y)$). Mettons le $\chi$ dans le $a_j^N$ et posons $z=(x_1, x_1'', x_2, x_2', y)$.

On a, en intégrant par rapport à $x_1'$ :

$$(\mathrm{R}_j^{\mathrm{N}} g)(x_1, x_2, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i\varphi'(z, \xi_1, \xi_1', \xi_2)}\, (a_j^{\mathrm{N}})\hat{\ }(z, \xi_1, \xi_1-\xi_1')$$
$$\hat{\otimes}\, b_j^{\mathrm{N}}(z, \xi_1', \xi_2)\, g(x_1'', x_2', y)\, dx_1''\, dx_2'\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_1'.$$

Dérivant $a_j^{\mathrm{N}}$ par rapport à $x_1'$ avant la transformation de Fourier on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists\, \mathrm{C}_k \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^n)$

$$\| (a_j^{\mathrm{N}})\hat{\ }(z, \xi_1, \xi_1-\xi_1') \| \leqq \mathrm{C}_k(x_2') \frac{(1+\|\xi_1\|)^{(k+\mathrm{N})\delta}}{(1+\|\xi_1-\xi_1'\|)^k}.$$

Montrons que pour N assez grand l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n} \int e^{i\varphi'} (a_j^{\mathrm{N}})\hat{\ }(z, \xi_1, \xi_1-\xi_1') \hat{\otimes}\, b_j^{\mathrm{N}}(z, \xi_1', \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_1'$$

est uniformément convergente, et converge donc vers

$$\psi(z) \in \mathrm{C}_c((\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)^2 \times \mathrm{Y}; \mathscr{L}(\mathrm{E}_1 \hat{\otimes} \mathrm{E}_2)).$$

Alors $\mathrm{R}_j^{\mathrm{N}}$ sera l'opérateur de convolution par $\psi$ et donc compact.

Mais

$$\| b_j^{\mathrm{N}}(z, \xi_1', \xi_2) \| \leqq \frac{\mathrm{C}'}{(\|\xi_1'\|^2 + \|\xi_2\|^2 + 1)^{\mathrm{N}\rho/2}}$$

et donc si

$$N>\frac{n}{\rho'},\qquad b_j'^N=\int \| b_j^N(z,\xi_1',\xi_2)\| d\xi_2 \leqq \frac{C''}{(\|\xi_1'\|+1)^{N\rho'-n}}.$$

Sur la partie de $(\mathbb{R}^m)^*\times(\mathbb{R}^m)^*$ donnée par $\|\xi_1-\xi_1'\|\leqq\|\xi_1'\|$ on a $\|\xi_1\|\leqq 2\|\xi_1'\|$ et $\|a_j^N b_j'^N\|\leqq \tilde{C}''(1+\|\xi_1'\|)^{N(\delta-\rho')+n}$ et donc pour $N>(2m+n)/(\rho'-\delta)$, $a_j^N b_j'^N$ est uniformément intégrable.

Sur la partie donnée par $\|\xi_1-\xi_1'\|\geqq\|\xi_1'\|$ on a

$$\|\xi_1\|\leqq 2\|\xi_1-\xi_1'\| \qquad \text{et} \qquad \|(a_j^N) b_j'^N\|<\tilde{c}''(1+\|\xi_1-\xi_1'\|)^{(N+k)\delta-k}$$

qui est intégrable si $(N+k)\delta-k\leftarrow 2m$ i.e. si $k>(2m+N\delta)/\rho$. Et donc pour $N>(2m+n)/(\rho'-\delta)$ l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+n}\int e^{i\varphi}(a_j^N)\,\hat{}\,(z,\xi_1,\xi_1-\xi_1')\hat{\otimes} b_j^N(z,\xi_1',\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d_1'$$

est (absolument) uniformément convergente. ■

Des lemmes A.9.2 et A.10.1 il découle directement :

A.10.2. PROPOSITION. — *Soit* $P\in\Psi_\rho^*(V, F_1; \mathscr{L}(E_1))$ *et* $Q\in\Psi_{\rho'}^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$ *tel que* $\sigma_{F_1^\perp}(Q)=1_{E_1}\hat{\otimes}\sigma'$ *où* $\sigma'\in\Sigma_\rho(V, (F_2/F_1)^*; \mathscr{L}(E_2))$ *est* $G_1$ *invariant. Alors* $[P\hat{\otimes}1, Q]\in\Psi_{\rho''}^*(V, F_2; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$ *et*

$$\sigma([P\hat{\otimes}1, Q])=[\sigma(P)\hat{\otimes}1, \sigma(Q)]\,(\rho''=\rho\rho'>1/2).$$

*Preuve.* — Soit $\sigma=\sigma(Q)\in\Sigma_{\rho'}(V, F_2^*; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$ et soit $b\in C_b(F_2^*; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$ dans la classe $\sigma$. Soit $e:\mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2)\to 1\hat{\otimes}\mathscr{L}(E_2)$ l'espérance conditionnelle, $b'=b-e\circ b$ et $b''=e\circ b$. Soit $Q'\in\Psi_{\rho'}^*(V, F; \mathscr{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$ de symbole la classe de $b'$. Alors le symbole de $Q''=Q-Q'$ est la classe de $b''$.

On a par A.10.1 $[P\hat{\otimes}1, Q'']\in\mathscr{K}_V$ et par A.9.2 $[P\hat{\otimes}1, Q']\in\Psi^*$ et a le bon symbole. ■

### A.11. Produit de Kasparov de deux opérateurs pseudodifférentiels transverses elliptiques

Il résulte immédiatement des propositions A.8, A.10.2 et de [11] (theorem A.3) :

A.11. THÉORÈME. — *Soit* $(V, F_1, F_2, F_3)$ *une variété triplement feuilletée avec* $F_1\subseteq F_2\subseteq F_3$. *Soit* $(E_3, \sigma_3)$ *un symbole transversalement elliptique pour* $(V, F_1, F_2)$ *et* $(E_1, \sigma_1)$ *un symbole transversalement elliptique pour* $(V, F_2, F_3)$. *Posons* $E_2=E_3\hat{\otimes}E_1$. *Soit* $\sigma_2\in\Sigma(V, (F_3/F_1)^*; \mathscr{L}(E_2))$ *un symbole* $G_1$ *invariant et tel que*

(*a*) $\sigma_2|_{F_2^\perp}=1_{E_3}\hat{\otimes}\sigma_1$.

(*b*) $[\sigma_3\hat{\otimes}1, \sigma_2]\geqq 0$.

*Alors* $\psi(E_2, \sigma_2)$ *est un produit de Kasparov de* $\psi(E_3, \sigma_3)$ *par* $\psi(E_1, \sigma_1)$. ■

*Remarque.* — Dans les conditions de ce théorème, un symbole $\sigma_2$ est appelé un cup-produit de $\sigma_1$ par $\sigma_3$ (*cf.* [11], définition 1.6).

Terminons cet appendice par une remarque :

A.12. *Remarque.* — Les symboles que nous considérons à la section 4 sont de type $(\rho, 0)$. La classe des symboles de type $(\rho, 0)$ n'est pas invariante par difféomorphismes (*cf.* [25], remark, p. 85). Cependant les symboles que nous considérons restent de type $(\rho, 0)$ dans toute carte feuilletante. Beaucoup de preuves dans cet appendice sont plus simples pour des symboles de type $(\rho, 0)$. Notons aussi que pour ces symboles il suffit de supposer $\rho > 0$ (et non plus $\rho > 1/2$). En particulier si on travaillait avec des symboles $(\rho, 0)$, on n'aurait pas à supposer une condition supplémentaire pour le produit d'un opérateur pseudodifférentiel $\otimes 1$ par une 0 connexion (dans la partie A.9 on devait supposer outre $\rho > 1/2$ la condition $\rho\rho' > 1/2$).

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. F. ATIYAH, Elliptic Operators and Compact Groups (Lecture Notes in Math., n° 401, *Springer-Verlag*, 1974).

[2] M. F. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO, *Clifford Modules* (*Topology*, vol. 3, 1964, p. 3-38).

[3] M. F. ATIYAH et I. M. SINGER, *The Index of Elliptic Operators, I et III*, (*Annals of Math.*, vol. 87, 1968, p. 484-530 et p. 546-604, *IV*, *Annals of Math.*, vol. 93, 1971, p. 119-138).

[4] P. BAUM et A. CONNES, *Geometric K-Theory for Lie Groups and Foliations Preprint I.H.E.S.*, 1982.

[5] P. BAUM et A. CONNES, *Leafwise Homotopy Equivalence and Rational Pontrjagin Classes*, *Preprint*, *I.H.E.S.*, 1983.

[6] R. BOTT, *On Characteristic Classes in the Framework of Gel'fand-Fuchs Cohomology* (*Astérisque*, vol. 32-33, 1976, p. 113-139).

[7] A. CONNES, *Sur la théorie non commutative de l'intégration* (*Lecture Notes in Math.*, n° 725, 1979, p. 19-143).

[8] A. CONNES, *A Survey of Foliations and Operator Algebras in* Operator Algebras and Applications (*Proc. Symp. in Pure Math.*, A.M.S., vol. 38, part. I, 1982, p. 521-628).

[9] A. CONNES, *Non-Commutative Differential Geometry*, chapter III (à paraître).

[10] A. CONNES, *Cyclic Cohomology and the Transverse Fundamental Class of a Foliation in* Geometric Methods in Operator Algebras, H. ARAKI and E. G. EFFROS éd., *Pitman Research Notes in Math.*, n° 123, Longman/Wiley, 1986, p. 52-144).

[11] A. CONNES et G. SKANDALIS, *The Longitudinal Index Theorem for Foliations* (*Pub. of R.I.M.S.*, *Kyoto*, vol. 20, n° 6, 1984, p. 1139-1183).

[12] J. CUNTZ, *K-Theoretic Amenability for Discrete Groups* (*J. Reine ang. Math.*, vol. 344, 1983, p. 180-195).

[13] J. CUNTZ et G. SKANDALIS, *Mapping Cones and Exact Sequences in KK-theory* (*J. of Operator Theory*, vol. 15, 1986, p. 163-180).

[14] J. DIXMIER et A. DOUADY, *Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algèbres* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 91, 1963, p. 227-284).

[15] T. FACK et G. SKANDALIS, *Sur les représentations et idéaux de la C*-algèbre d'un feuilletage* (*J. of Operator Theory*, vol. 8, 1983, p. 95-129).

[16] I. M. GEL'FAND et D. FUCHS, *The Cohomology of the Lie Algebra of Formal Vector Fields* (*Izv. Ann. S.S.S.R.*, vol. 34, 1970, p. 327-342).

[17] C. GODBILLON et J. VEY, *Un invariant des feuilletages de codimension* 1 (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 273, 1971).

[18] P. GREEN, *Equivariant K-theory and Crossed-product C*-algebras, in* Operator Algebras and Applications (*Proc. Symp. in Pure Math.*, A.M.S., vol. 38, part. I, 1982, p. 337-338).

[19] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique* (*Tohôku Math. J.*, vol. 9, 1957, p. 119-221).

[20] A. HAEFLIGER, *Variétés Feuilletées* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16, 1962, p. 367-397).

[21] A. HAEFLIGER, *Differentiable cohomology, Cours au C.I.M.E.*, 1976.

[22] A. HAEFLIGER, *Groupoïde d'holonomie et classifiants* (*Astérisque*, vol. 116, 1984, p. 70-97).

[23] J. HAYDEN et R. PLYMEN, *On the Invariants of Serre and Dixmier-Douady, Preprint I.H.E.S.*, 1983.

[24] M. HILSUM et G. SKANDALIS, *Stabilité des C*-algèbres de feuilletages* (*Ann. de l'Institut Fourier, Grenoble*, vol. 33, fasc. 3, 1983, p. 201-208).

[25] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators, I* (*Acta Math.*, 127, 1971, p. 79-183).

[26] L. HÖRMANDER, *On the Index of Pseudodifferential Operators, Elliptische Differential Gleischungen Band II*, Koll., Berlin, 1969.

[27] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators, vol. I, II, III, IV, *Grundlehren der Math. Wis, Springer Verlag* (1983).

[28] P. JULG, *K-théorie du produit croisé d'une C*-algèbre par un groupe compact* (*Thèse de 3^e cycle*, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1982).

[29] M. KAROUBI, K-Theory, an Introduction (*Grundlehren des Math. Wis., Springer-Verlag*, 1978).

[30] G. G. KASPAROV, *Operator K-Functor and Extensions of C*-algebras* (*Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, Ser. Math., vol. 44, 1980, p. 571-636).

[31] G. G. KASPAROV, *K-theory, group C*-algebras and higher signatures*, conspectus, part. 1.2, *Preprint, Chernogolovka*, 1981.

[32] G. G. KASPAROV, *The Index of Invariant Elliptic Operators, K-Thoery and Lie Group Representation* (*Dokl. Akad. Nauk, S.S.S.R.*, 1983, p. 533-537).

[33] G. G. KASPAROV, *Lorentz Groups: K-Theory of Unitary Representations and Crossed Products* (*Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 275, 1984, p. 541-545; *Soviet Math. Dokl.*, vol. 29, 1984, p. 256-260).

[34] B. LAWSON, *Foliations* (*Bull. of A.M.S.*, vol. 80, 1974, p. 369-418).

[35] P. MULHY, J. RENAULT et D. WILLIAMS, *Equivalence and Isomorphisms of Groupoïd C*-Algebras, Preprint*, 1985.

[36] R. S. PALAIS, Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem (*Annals of Math. Studies*, vol. 57, *Princeton*, 1965).

[37] J. RENAULT, A Groupoïd Approach to C*-Algebras (*Lecture Notes in Math.*, n° 793, *Springer-Verlag*, 1980).

[38] J. RENAULT, *Représentations des produits croisés d'algèbre de groupôdes, Prépublication* Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1985.

[39] C. ROGER, *Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages, Prépublication* E.N.S.J.F., Paris.

[40] D. RUELLE et D. SULLIVAN, *Currents, Flows and Diffeomorphisms* (*Topology*, vol. 14, 1975, p. 319-327).

[41] G. SKANDALIS, *Some Remarks on KK-Theory* (*J. of Funct. Anal.*, vol. 56, n° 3, 1984, p. 337-347).

[42] G. SKANDALIS, *Exact Sequences for the Kasparov Groups of Graded Algebras* (*Can. J. Math.*, vol. 37, n° 2, 1985, p. 193-216).

[43] D. SULLIVAN, *Cycles and the Dynamical Studies of Foliated Manifolds* (*Invent. Math.*, vol. 36, 1976, p. 225-255).

[44] H. E. WINKELKEMPER, *The Graph of a Foliation* (*Ann. Global Anal. and Geom.*, vol. 1, n° 3, 1983, p. 53-75).

[45] R. J. ZIMMER, *On the von Neumann Algebra of an Ergodic Group Action* (*Proc. of the A.M.S.*, vol. 66, n° 2, 1977, p. 289-293).

[46] L. Alvarez-Gaumé, *Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 90, 1983, p. 161-173).

[47] E. Getzler, *Pseudodifferential Operators on Supermanifolds and the Atiyah-Singer Index Theorem* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 92, 1983, p. 163-178).

[48] E. Witten, *Supersymmetry and Morse Theory* (*J. Diff. Geom.*, vol. 17, 1982, p. 661-692).

[49] G. G. Kasparov, *Topological Invariants of Elliptic Operators I: K-homology* (*Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 9, 1975, p. 751-792).

[50] H. Widom, *Families of Pseudo Differential Operators*, in Topics in Functional Analysis I. Gohberg et H. Kac éd. (*Adv. in Math.*, supp. ser. n° 3, 1978).

[51] H. Widom, *A Complete Symbolic Calculus for Pseudodifferential Operators* (*Bull. Sci. Math.*, vol. 104, 1980, p. 19-63).

[52] G. Skandalis, *Une notion de nucléarité en K-théorie* (d'après J. Cuntz), *Prépublication*, 1986.

(Manuscrit reçu le 13 octobre 1986,
révisé le 16 mars 1987).

M. Hilsum,
G. Skandalis,
Collège de France, Annexe,
Équipe d'A. Connes,
3, rue d'Ulm,
75005 Paris.