ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. BRION

Représentations exceptionnelles des groupes semi-simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 18, nº 2 (1985), p. 345-387
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1985_4_18_2_345_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 18, 1985, p. 345 à 387

REPRÉSENTATIONS EXCEPTIONNELLES DES GROUPES SEMI-SIMPLES

PAR M. BRION

0. Introduction

Soit $\varphi : G \to GL(V)$ une représentation rationnelle de dimension finie du groupe semi-simple complexe G. Soit $\mathbb{C}[V]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V. Les problèmes de la classification à G-équivalence près des éléments de V, de la description de l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ des fonctions polynomiales G-invariantes sur V, et du G-module $\mathbb{C}[V]$, semblent très difficiles pour V quelconque. On est donc amené à étudier les représentations vérifiant des critères de régularité, par exemple : V est « corégulier », i. e. l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ est libre (engendrée par des éléments algébriquement indépendants), *cf.* [1]; ou V est « colibre », i. e. le $\mathbb{C}[V]^G$-module $\mathbb{C}[V]$ est libre (*cf.* [2]); ou chaque fibre de l'application $V \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[V]^G$ ne contient qu'un nombre fini de G-orbites (*cf.* [3]).

Dans ce travail, on étudie les G-modules V soumis à la condition très restrictive suivante : l'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$ est libre, où U est un sous-groupe unipotent maximal de G. Dans la première partie, on montre que si V est un tel G-module (*appelé « exceptionnel » par la suite*) alors toute adhérence X d'une G-orbite dans V est normale, à singularités rationnelles (on peut retrouver ainsi la normalité de diverses variétés déterminantielles). De plus, on peut calculer la dimension de X, connaissant l'algèbre $\mathbb{C}[X]^U$. Dans la deuxième partie, on classe les G-modules exceptionnels, où G est un groupe simple; les résultats sont rassemblés dans un tableau. Dans la troisième partie, on montre que si G est un groupe simple, V un G-module exceptionnel simple et X l'adhérence de la G-orbite de $x \in V$, alors le lieu singulier de X est le « bord » $X - Gx$ de X, sauf dans un cas (ce résultat est analogue à celui de H. Kraft et C. Procesi [4] pour la représentation adjointe de $SL_n(\mathbb{C})$, mais les cas traités ici sont plus simples). On peut retrouver également certaines classifications d'orbites, par exemple celles des spineurs en petite dimension. Enfin, dans la quatrième partie, on étudie certaines sous-variétés d'un G-module quelconque V, définies par l'annulation de covariants quadratiques. On retrouve et on généralise ainsi des propriétés des « variétés de complexes » (*cf.* [23]).

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [5] et généralisent une partie de ceux de [6].

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/85/02 345 43/$ 6.30/
© Gauthier-Villars

1. Propriétés des adhérences d'orbites

1.1. NOTATIONS. — Dans toute la suite, G est un groupe algébrique semi-simple, connexe et simplement connexe, sur $\mathbb{C}$, avec un sous-groupe unipotent maximal U. Soient T un tore maximal de G normalisant U, et $B=TU$ le sous-groupe de Borel de G contenant U. Notons R le système de racines de (G, T), avec une base $\mathscr{B}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ correspondant à B; soit P^{++} l'ensemble des poids dominants (pour ce choix de $\mathscr{B}$) avec $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ les poids fondamentaux. Si $\omega \in P^{++}$, on note $E(\omega)$ un G-module simple de plus grand poids ω. Si A est une partie d'un G-module M, on note $\langle G.A \rangle$ le G-module engendré par A. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on note $\mathbb{C}[E]$ l'algèbre des fonctions polynômes sur E, et $\mathbb{C}(E)$ le corps des fractions rationnelles sur E.

Soit V un G-module exceptionnel; alors T opère sur l'algèbre libre $\mathbb{C}[V]^U$ avec tous ses poids dans P^{++}, donc il existe des poids dominants $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et des polynômes U-invariants algébriquement indépendants $P_1, \ldots, P_n$ sur V tels que chaque P_i soit homogène de poids λ_i par rapport à T et que $\mathbb{C}[V]^U=\mathbb{C}[P_1, \ldots, P_n]$.

Remarque. — L'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ est engendrée par les P_i tels que $\lambda_i=0$. Soit A l'algèbre engendrée par les autres P_j; alors $\mathbb{C}[V]^U \simeq \mathbb{C}[V]^G \otimes A$, d'où $\mathbb{C}[V] \simeq \mathbb{C}[V]^G \otimes \langle G.A \rangle$ comme G-module. Donc *tout G-module exceptionnel est colibre.*

1.2. THÉORÈME. — *Si* V *est un* G-*module exceptionnel, alors l'adhérence (pour la topologie de Zariski) de toute* G-*orbite dans* V *est une variété normale, à singularités rationnelles.*

Démonstration. — Soient $x \in V$ et $X=\overline{Gx}$. Écrivons $\mathbb{C}[V]^U=\mathbb{C}[P_1, \ldots, P_n]$ comme précédemment.

Soit $\pi : \mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[X]$ la restriction; π induit une surjection T-équivariante $\pi : \mathbb{C}[V]^U \to \mathbb{C}[X]^U$. On peut donc supposer que les $\pi(P_i)$ sont non nuls pour $1 \leqslant i \leqslant m$, et engendrent $\mathbb{C}[X]^U$.

D'après le théorème 2 de [6], on a

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{j=1}^{l} c_j \varpi_j \quad \text{où} \quad 0 \leqq c_j \leqq 2 \quad \text{pour } 1 \leqq j \leqq l.$$

Soit $Q[\pi(P_1), \ldots, \pi(P_m)]=0$ une relation de dépendance algébrique entre les $\pi(P_i)$. On peut supposer Q isobare par rapport à T, c'est-à-dire

$$Q(X_1, \ldots, X_m)=\sum q_{a_1, \ldots, a_m} X_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m},$$

où $\sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j$ ne dépend pas de $(a_1, \ldots, a_m)$ tel que $q_{a_1, \ldots, a_m} \neq 0$. S'il existe j_0 et j_0' tels que $\lambda_{j_0}-2\varpi_{j_0'} \in P^{++}$, alors, d'après $(*)$, $\varpi_{j_0'}$ ne figure dans aucun λ_j pour $j \neq j_0$. par suite,

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j \equiv 2 a_{j_0} \varpi_{j_0'} \bmod \bigoplus_{i \neq j_0'} \mathbb{Z} \varpi_i$$

pour tout $(a_1, \ldots, a_m)$. Le degré de Q par rapport à X_{j_0} est donc indépendant du monôme figurant dans Q, donc

$$Q(X_1, \ldots, X_m) = X_{j_0}^{n_0} Q_1(X_1, \ldots, \hat{X}_{j_0}, \ldots, X_m).$$

Comme X est irréductible et $\pi(P_{j_0}) \neq 0$, on voit que $\pi(P_{j_0})$ n'intervient dans aucune relation irréductible entre les $\pi(P_i)$, $1 \leqq i \leqq m$.

On peut donc supposer, d'après (*), que tout λ_i est somme de poids fondamentaux distincts, avec des coefficients 0 ou 1. Définissons un graphe Γ par :

– l'ensemble des sommets de Γ est $\{1, \ldots, m\}$;

– $\{i, j\}$ est une arête de Γ si et seulement si un même poids fondamental figure à la fois dans λ_i et λ_j (on choisit alors un tel poids fondamental, noté $\varpi_{\{i, j\}}$).

Si $\{i, j\}$ est une arête de Γ, alors $\lambda_i + \lambda_j - 2\varpi_{\{i, j\}} \in P^{++}$ donc d'après (*), $\varpi_{\{i, j\}}$ n'apparaît dans aucun λ_k pour $k \notin \{i, j\}$. D'où

$$\sum_{t=1}^{m} a_t \lambda_t \equiv (a_i + a_j) \varpi_{\{i, j\}} \bmod \bigoplus_{\varpi_k \neq \varpi_{\{i, j\}}} \mathbb{Z} \varpi_k$$

pour tout $(a_1, \ldots, a_m)$. Par suite, $a_i + a_j$ ne dépend pas du monôme $X_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m}$ figurant dans Q. Si de plus $\{j, k\}$ est une arête de Γ, alors $a_i - a_k = (a_i + a_j) - (a_j + a_k)$ ne dépend pas du monôme $X_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m}$ figurant dans Q.

Soient maintenant i et j des sommets quelconques de Γ. On déduit immédiatement de ce qui précède que :

– si i, j sont liés par un chemin de longueur impaire dans Γ, alors $a_i + a_j$ ne dépend pas du monôme $X_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m}$ figurant dans Q.

– si i, j sont liés par un chemin de longueur paire dans Γ, alors $a_i - a_j$ ne dépend pas du monôme $X_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m}$ figurant dans Q.

Soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_s$ la décomposition de Γ en composantes connexes. Deux sommets de Γ sont dits *équivalents* si on peut les joindre par un chemin de longueur paire. On vérifie facilement que chaque Γ_i est formé d'au plus deux classes d'équivalence, qu'on note Γ_i' et Γ_i'' (éventuellement Γ_i'' peut être vide). Soient i' et i'' deux sommets de Γ_1', et j', j'' deux sommets de Γ_1''. D'après ce qui précède, $a_{i'} - a_{i''}$, $a_{j'} - a_{j''}$ et $a_{i'} + a_{j'}$ ne dépendent pas du monôme $X_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m}$ figurant dans Q. Il existe donc des entiers $d_i \geqq 0$ tels que

$$Q(X_1, \ldots, X_m) = \Big(\prod_{i \in \Gamma_1} X_i^{d_i}\Big) \sum q_{a_1, \ldots, a_m} \Big(\prod_{i \notin \Gamma_1} X_i^{a_i}\Big) \Big(\prod_{i \in \Gamma_1'} X_i^{a_{i'}}\Big) \Big(\prod_{j \in \Gamma_1''} X_j^{a_{j'}}\Big).$$

Comme les $\pi(P_i)$ sont non nuls, on peut supposer que tous les d_i sont nuls. Supposons de plus que Q fait intervenir X_i. Soit $\varphi : \mathbb{C}[X]^U \to \mathbb{C}[G]^U$ l'application telle que $\varphi(f)(g) = f(gx)$ pour $f \in \mathbb{C}[X]^U$ et $g \in G$. Alors φ est un T-morphisme, injectif car

$X=\overline{Gx}$. On a :

$$\sum q_{a_1,\ldots,a_m} \prod_{i\notin\Gamma_1} \varphi\circ\pi(P_i)^{a_i}\Big(\prod_{i\in\Gamma'_1} \varphi\circ\pi(P_i)^{a_{i'}}\Big)\Big(\prod_{j\in\Gamma''_1} \varphi\circ\pi(P_j)^{a_{j'}}\Big)=0,$$

avec $a_{i'}+a_{j'}$ indépendant de $(a_1,\ldots,a_m)$; posons $a_{i'}+a_{j'}=d$. Il existe donc un polynôme R en les $\varphi\circ\pi(P_j)$ $(j\notin\Gamma'_1)$ tel que $\prod_{i\in\Gamma'_1}\varphi\circ\pi(P_i)$ divise $R\times\prod_{j\in\Gamma''_1}\varphi\circ\pi(P_j)$; R est isobare par rapport à T.

D'après la définition des Γ_i, le poids λ de R par rapport à T n'a pas de poids fondamental en commun avec les poids des $\varphi\circ\pi(P_i)$, $i\in\Gamma'_1$.

Par suite, R et $\prod_{i\in\Gamma'_1}\varphi\circ\pi(P_i)$ n'ont pas de diviseur commun dans $\mathbb{C}[G]^U$.

Or $\mathbb{C}[G]$ est factoriel (*cf.* [7], Corollary 4.5) donc $\mathbb{C}[G]^U$ aussi; on en déduit que $\prod_{i\in\Gamma'_1}\varphi\circ\pi(P_i)$ divise $\prod_{j\in\Gamma''_1}\varphi\circ\pi(P_j)$ dans $\mathbb{C}[G]^U$. Comme Γ'_1 et Γ''_1 jouent des rôles symétriques, il existe une unité c de $\mathbb{C}[G]^U$ telle que $\Pi_{i\in\Gamma'_1}\varphi\circ\pi(P_i)=c\prod_{j\in\Gamma''_1}\varphi\circ\pi(P_j)$. L'action de T sur $\mathbb{C}[G]^U$ définit une $\mathbb{N}^l$-graduation de $\mathbb{C}[G]^U$ avec $\mathbb{C}[G]^U_0=\mathbb{C}[G]^G=\mathbb{C}$, donc les seules unités de $\mathbb{C}[G]^U$ sont les constantes. Comme φ est injective, on a finalement :

$$(**)\qquad \prod_{i\in\Gamma'_1}\pi(P_i)=c\prod_{j\in\Gamma''_1}\pi(P_j)\quad \text{pour un } c\in\mathbb{C}^*$$

de plus

$$\begin{aligned}Q[\pi(P_i),\ldots,\pi(P_m)]&=\sum q_{a_1},\ldots,a_m\prod_{i\notin\Gamma_1}\pi(P_i)^{a_i}.c^{a_{i'}}\Big(\prod_{i\in\Gamma_1}\pi(P_i)\Big)^{a_{i'}+a_{j'}}\\&=\Big(\prod_{i\in\Gamma_1}\pi(P_i)\Big)^d.\sum q_{a_1},\ldots,a_m\prod_{i\notin\Gamma_1}c^{a_{i'}}\pi(P_i)^{a_i}.\end{aligned}$$

Donc $(**)$ est la seule relation irréductible entre les $\pi(P_i)$, faisant intervenir $\pi(P_{i'})$ (en effet le polynôme $\Pi_{i\in\Gamma'_1}X_i-c\prod_{j\in\Gamma''_1}X_j$ est irréductible).

On en déduit que l'algèbre $\mathbb{C}[X]^U$ est isomorphe à un produit tensoriel d'algèbres de la forme $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_u,Y_1,\ldots,Y_v]/(X_1\ldots X_u-Y_1\ldots Y_v)$.

LEMME. — *L'hypersurface* Z *d'équation* $X_1\ldots X_u-Y_1\ldots Y_v=0$ *dans* $\mathbb{C}^{u+v}$ *est normale, à singularités rationnelles.*

Démonstration du lemme. — On vérifie aisément que Z est non singulière en codimension 1, donc normale. De plus le tore

$$\{(t_1,\ldots,t_u,\theta_1,\ldots,\theta_v)\in\mathbb{C}^{u+v}\,|\,\theta_1\ldots\theta_v=t_1\ldots t_u\neq 0\}$$

opère sur Z avec une orbite dense [celle de $(1, \ldots, 1)$]. Le lemme se déduit alors de [8], th. 14.

D'après le lemme, Spec $\mathbb{C}[X]^U$ est normale, à singularités rationnelles. On conclut en appliquant le résultat de Kraft utilisé dans [6] (démonstration du théorème 4).

1.3. Comme en 1.2, on peut associer un graphe Γ à chaque G-module exceptionnel V. (L'ensemble des sommets de Γ est un système générateur minimal de $\mathbb{C}[V]^U$ sur $\mathbb{C}[V]^G$; les arêtes relient deux sommets dont les poids contiennent un même poids fondamental.)

On verra dans la démonstration du théorème 3.1 que pour un groupe G simple, les composantes connexes de Γ sont o ou o———o. Par contre, si G n'est pas simple, on peut obtenir des graphes plus compliqués (pour des exemples, *voir* 3.5).

1.4. Le théorème suivant permet de calculer la dimension d'une G-orbite Y lorsque l'algèbre $\mathbb{C}[\overline{Y}]^U$ est connue :

THÉORÈME. — *Soit* X *une* G-*variété affine irréductible telle que* $\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}$. *Soient* $X_U = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]^U$; n_X *le nombre de racines positives orthogonales à tous les poids des éléments de* $\mathbb{C}[X]^U$, *et* n *le nombre de racines positives. Alors* $\dim X = \dim X_U + n - n_X$.

Démonstration. — On peut choisir un système générateur minimal $(a_1, \ldots, a_m)$ de $\mathbb{C}[X]^U$, formé d'éléments T-homogènes, tel que $a_1, \ldots, a_N$ soient algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$, et $a_{N+1}, \ldots, a_m$ algébriques sur $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_N]$, avec $N = \dim X_U$. Pour $1 \leqq i \leqq m$, soit λ_i le poids de a_i.

Soit α une racine orthogonale à $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Alors α est orthogonale à $\lambda_{N+1}, \ldots, \lambda_m$ (en effet si α n'est pas orthogonale à λ_j, on voit facilement que $a_1, \ldots, a_N, a_j$ sont algébriquement indépendants). Donc n_X est le nombre de racines positives orthogonales à $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. De plus, il est immédiat que $\mathbb{C}(X)$ est algébrique sur $\mathbb{C}(\langle G\{a_1, \ldots, a_N\}\rangle)$. Donc on peut supposer que $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_N]$ sans changer ni dim X, ni dim X_U, ni n_X.

Pour $\omega \in P^{++}$, notons $|\omega| = \sum_{\alpha \in R^+} (\omega, \alpha^\vee)$ et $\mathbb{C}[X]_{(\omega)}$ la somme des sous-G-modules de $\mathbb{C}[X]$ isomorphes à $E(\omega)$. Posons $\mathbb{C}[X]_n = \bigoplus_{|\omega| = n} \mathbb{C}[X]_{(\omega)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $E(\lambda) \subset \mathbb{C}[X]_n$; $E(\mu) \subset \mathbb{C}[X]_m$ et $E(\nu) \subset E(\lambda).E(\mu)$. Alors $E(\nu) \subsetneq E(\lambda) \otimes E(\mu)$ donc $\nu \leqq \lambda + \mu$, et $|\nu| \leqq |\lambda| + |\mu| = n + m$. Par suite,

$$\mathbb{C}[X]_n . \mathbb{C}[X]_m \subset \bigoplus_{p \leqq n+m} \mathbb{C}[X]_p.$$

Donc

$$\Big(\bigoplus_{n' \leqq n} \mathbb{C}[X]_{n'}\Big)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une filtration de $\mathbb{C}[X]$.

On en déduit que $\dim X$ est l'ordre en $z=1$ de la fraction rationnelle

$$F(z)=\sum_{n\geqq 0} z^n \dim \mathbb{C}[X]_n$$

(série convergente pour $|z|<1$).

Or pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\dim \mathbb{C}[X]_n=\sum_{|\omega|=n} \dim \mathbb{C}[X]_{(\omega)}=\sum_{|\omega|=n} \dim \mathbb{C}[X]^U_\omega . \dim E(\omega)$$

De plus, comme $\mathbb{C}[X]^U=\mathbb{C}[a_1,\ldots,a_N]$, on voit que $\dim \mathbb{C}[X]^U_\omega$ est le nombre de $(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{N}^N$ tels que $x_1\lambda_1+\ldots+x_N\lambda_N=\omega$. Donc

$$F(z)=\sum_{x_1,\ldots,x_N} \dim E\left(\sum_{j=1}^N x_j\lambda_j\right)\times z\Big|^{\sum_{j=1}^N x_j\lambda_j}\Big|.$$

D'après la formule de Weyl (*cf.* [9], chap. VIII, § 9, th. 2) on a :

$$\dim E\left(\sum_{j=1}^N x_j\lambda_j\right)=\prod_{\alpha\in R^+} 1+\frac{\left(\sum_{j=1}^N x_j\lambda_j,\ \alpha\right)}{(\rho,\ \alpha)},$$

où $\rho=1/2\sum_{\alpha\in R^+}\alpha$.

Donc la fonction $(x_1,\ldots,x_N)\to\dim E\left(\sum_{j=1}^N x_j\lambda_j\right)$ est un polynôme à coefficients entiers positifs, dont le degré total est le nombre des $\alpha\in R^+$ telles que $(\alpha,\lambda_j)\neq 0$ pour au moins un $j\in[1,N]$; ce nombre est donc $n-n_X$.

Soient $d_1,\ldots,d_N$ des entiers positifs; posons $|\lambda_j|=u_j$ pour $1\leqq j\leqq N$. Alors

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{N}^N} x_1^{d_1}\ldots x_N^{d_N} z\Big|^{\sum_{j=1}^N x_j\lambda_j}\Big|=\prod_{j=1}^N\Big(\prod_{x_j\geqq 0} x_j^{d_j} z^{u_j x_j}\Big).$$

Or l'ordre en $z=1$ de $\sum_{x\geqq 0} x^d z^{ux}$ est égal à $d+1$, donc l'ordre en $z=1$ de

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{N}^N} x_1^{d_1}\ldots x_N^{d_N} z\Big|^{\sum_{j=1}^N x_j d_j}\Big|$$

est égal à $d_1+\ldots+d_N+N$. On conclut que l'ordre de $F(z)$ en $z=1$ est $n-n_X+N$, d'où le théorème.

2. Classification des G-modules exceptionnels (G simple)

Il est immédiat que tout sous-module d'un module exceptionnel est exceptionnel; il suffit donc de classer les G-modules exceptionnels « maximaux ».

2.1. Un G-module exceptionnel V est dit *maximal* si $V^G = \{0\}$ et si pour tout G-module $E \neq E^G$, $E \oplus V$ n'est pas exceptionnel.

THÉORÈME. — *Tout G-module exceptionnel est contenu dans un G-module exceptionnel maximal; le tableau I donne la liste des G-modules exceptionnels maximaux (à automorphisme du diagramme de Dynkin près), et la description de l'algèbre des U-invariants de ces modules.*

Montrons d'abord, sur des exemples, que tout G-module V figurant dans le tableau I est exceptionnel, et que le tableau I fournit bien les degrés et poids des générateurs de $\mathbb{C}[V]^U$. On se limitera aux cas où V est réductible; en effet les cas irréductibles ont été traités dans [6]. Par suite, d'après le tableau I, on peut supposer que G est un groupe classique.

On utilisera le :

LEMME. — *Soit V un G-module réductible figurant dans le tableau I. Soient* $P_1, \ldots, P_m$ *des polynômes U-invariants sur V, non G-invariants et dont les degrés et poids figurent dans le tableau I. Si les* P_i *sont deux à deux linéairement indépendants, et ne sont divisibles par aucun polynôme G-invariant, alors ils sont algébriquement indépendants sur* $\mathbb{C}(V)^G$.

Démonstration du lemme. — Remarquons d'abord que d'après le tableau I, le poids λ_i de chaque P_i est fondamental; les P_i sont donc des polynômes irréductibles. Si $Q(P_1, \ldots, P_m) = 0$ est une relation irréductible non triviale entre les P_i, à coefficients dans $\mathbb{C}[V]^G$ et faisant intervenir P_1, alors P_1 divise un polynôme non nul en $P_2, \ldots, P_m$, à coefficients dans $\mathbb{C}[V]^G$. Comme un même poids figure au plus deux fois dans la liste des λ_i, on en déduit qu'il existe un unique $j \geqq 2$ tel que $\lambda_1 = \lambda_j$, et que P_1 divise une puissance de P_j.

Donc P_1 et P_j sont proportionnels, ce qui est absurde.

2.2. G DE TYPE A_n, $n \geqq 1$, G est alors isomorphe à $SL_{n+1}(\mathbb{C})$.

Rappelons que si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ est une partition de longueur au plus $(n+1)$ et si s_λ est la fonction de Schur associée à λ (*cf.* [10]), alors $s_\lambda(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est la trace sur V_λ de $\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in G$, où

$$V_\lambda = E((\lambda_1 - \lambda_2)\varpi_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\varpi_2 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_{n+1})\varpi_n).$$

On peut donc calculer des produits tensoriels de G-modules à l'aide des formules sur le produit de fonctions de Schur. Par exemple, d'après [11], I, 5.17, on a

$$s_{(1)} s_{(1^r)} = s_{(1^{r+1})} + s_{(2,\, 1^{r-1})}$$

et

$$s_{(1^2)} s_{(1^r)} = s_{(1^{r+2})} + s_{(2,\, 1^{r+1})} + s_{(2^2,\, 1^r)},$$

d'où :

(i) $$E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_r) \supset E(\varpi_{r+1}) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq r \leqq n$$

et

(ii) $$E(\varpi_2) \otimes E(\varpi_r) \supset E(\varpi_{r+2}) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq r \leqq n-1$$

[on convient que $E(\varpi_{n+1}) = \mathbb{C}$].

Étudions par exemple le G-module $V = 2\,E(\varpi_n) \oplus E(\varpi_{n-1})$.

Supposons d'abord que n est pair, égal à $2p$.

D'après [6], Table, $\mathbb{C}[V]^U$ contient des éléments $\mathbb{N}^3 \times P^{++}$-homogènes, non nuls, de degrés et poids : $(0, 0, 1, \varpi_2)$, $(0, 0, 2, \varpi_4), \ldots, (0, 0, p, \varpi_{2p})$. On a de plus des U-invariants homogènes, non nuls, de degrés et poids $(1, 0, 0, \varpi_1)$ et $(0, 1, 0, \varpi_1)$. Donc d'après (i), il existe des U-invariants homogènes non nuls, de degrés et poids : $(1, 0, 1, \varpi_3)$, $(1, 0, 2, \varpi_5), \ldots, (1, 0, p-1, \varpi_{2p-1})$, $(1, 0, p, 0)$. De plus, on obtient un U-invariant homogène non nul de degrés et poids $(1, 1, 0, \varpi_2)$, d'où en appliquant (ii), des U-invariants homogènes non nuls, de degrés et poids $(1, 1, 1, \varpi_4)$, $(1, 1, 2, \varpi_6), \ldots, (1, 1, p-1, \varpi_{2p})$.

On vérifie à l'aide de [1], Table 1 *a*, 3, que $\mathbb{C}[V]^G$ est engendré par les éléments de degrés $(0, 1, p)$ et $(1, 0, p)$ trouvés précédemment. De plus les U-invariants ci-dessus de poids non nul ne sont divisibles par aucun polynôme G-invariant (en effet leur degré total est au plus p, et le degré minimal d'un G-invariant non constant est $p+1$) et sont deux à deux linéairement indépendants : en effet c'est vrai pour deux U-invariants de poids distincts, et deux U-invariants de même poids ont des degrés distincts.

D'après le lemme 2.1, les U-invariants trouvés précédemment sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$. Il ne reste plus qu'à montrer que l'algèbre A qu'ils engendrent est $\mathbb{C}[V]^U$.

Pour cela, on utilise l'identité suivante entre fonctions symétriques :

$$\sum_\lambda s_\lambda = \prod_i (1-x_i)^{-1} . \prod_{i<j} (1-x_i x_j)^{-1}$$

(*cf.* [11], I, 5, exemple 4).

D'autre part $\sum_{n \geqq 0} s_{(n)} = \prod_i (1-x_i)^{-1}$ d'après [11], I, 2.5.

Donc

$$\prod_i (1-x_i)^{-2} . \prod_{i<j} (1-x_i x_j)^{-1} = \sum_{\lambda,\, n} s_\lambda s_{(n)}.$$

Or d'après [11], I, 5.16, on a :

$$s_\lambda \sum_n s_{(n)} = \sum s_\mu,$$

où la sommation de droite est sur les μ telles que $\mu - \lambda$ soit une bande horizontale. On en déduit que le coefficient de s_μ dans $\prod_{i<j} (1-x_i x_j)^{-1}$ est C_μ = nombre de λ telles que $\mu - \lambda$ soit une bande horizontale, c'est-à-dire si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$: C_μ = nombre de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ telles que

$$0 \leqq \lambda_1 \leqq \mu_1; \qquad \mu_1 \leqq \lambda_2 \leqq \mu_2, \qquad \ldots, \qquad \mu_{p-1} \leqq \lambda_p \leqq \mu_p,$$

donc

$$C_{(\mu_1, \ldots, \mu_p)} = \prod_{i=1}^{p} (\mu_i - \mu_{i-1} + 1),$$

où l'on convient que $\mu_0 = 0$.

En remplaçant chaque x_i par $t.x_i$ dans l'égalité

$$\prod_i (1-x_i)^{-2} . \prod_{i<j} (1-x_i x_j)^{-1} = \sum_\mu C_\mu s_\mu$$

et en remarquant que chaque s_μ est homogène de degré $|\mu|$ (où $|(\mu_1, \ldots, \mu_p)| = \mu_1 + \ldots + \mu_p$) on obtient :

$$\prod_i (1-tx_i)^{-2} . \prod_{i<j} (1-t^2 x_i x_j)^{-1} = \sum_\mu C_\mu t^{|\mu|} s_\mu,$$

d'où

$$\prod_{1 \leqq i \leqq n+1} (1-tx_i)^{-2} . \prod_{1 \leqq i < j \leqq n+1} (1-t^2 x_i x_j)^{-1} = \sum_{l(\mu) \leqq n+1} C_\mu t^{|\mu|} s_\mu.$$

Graduons $\mathbb{C}[V]$ en attribuant le degré 1 à chaque $E(\varpi_{n-1})$ et 2 à $E(\varpi_{n-2})$; si g est la matrice $\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in G$, alors d'après [6], démonstration du théorème 1, on a :

$$\sum_{m \geqq 0} t^m \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}[V]_m}(g) = \frac{1}{\operatorname{dét}_V(1-tg)} = \prod_{1 \leqq i \leqq n+1} (1-tx_i)^{-2} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n+1} (1-t^2 x_i x_j)^{-1}.$$

Par suite,

$$\bigoplus_{m \geqq 0} t^m \mathbb{C}[V]_m \simeq \bigoplus_{0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} (\mu_i - \mu_{i-1} + 1)$$

$$\times t^{\mu_1 + \ldots + \mu_{n+1}} E((\mu_1 - \mu_2)\varpi_1 + \ldots + (\mu_{n-1} - \mu_n)\varpi_n)$$

$$= \bigoplus_{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} (a_i + 1) \; t^{a_1 + 2a_2 + \ldots + (n+1)a_{n+1}} E(a_1 \varpi_1 + \ldots + a_n \varpi_n).$$

La série de Poincaré de l'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$, $\mathbb{N}$-graduée comme précédemment et $\mathbb{N}^{n-1}$-graduée par l'action de T, est donc

$$\sum_{a_1, \ldots, a_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} (a_i + 1) t^{a_1 + 2a_2 + \ldots + (n+1)a_{n+1}} t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{a_i} (a_i + 1)(t^i t_i)^{a_i}\Big) \times \sum_{a_{n+1}} (a_{n+1} + 1) t^{(n+1)a_{n+1}}$$

$$= (1-tt_1)^{-2} (1-t^2 t_2)^{-2} \ldots (1-t^n t_n)^{-2} (1-t^{n+1})^{-2}.$$

D'autre part, l'algèbre A est engendrée par : deux éléments de degré 1 et poids ϖ_1; deux éléments de degré 2 et poids ϖ_2; ...; deux G-invariants de degré $1+2p=n+1$, donc sa série de Poincaré est égale à celle de $\mathbb{C}[V]^U$. On conclut que $A=\mathbb{C}[V]^U$.

Si n est impair, on prouve de même que précédemment que $\mathbb{C}[V]^U$ contient des éléments homogènes, algébriquement indépendants, dont les degrés et poids sont ceux du tableau I. On vérifie, en utilisant les calculs ci-dessus que ces éléments engendrent $\mathbb{C}[V]^U$.

TABLE I

Type de G	V	Degrés et poids de générateurs homogènes, algébriquement indépendants, de $\mathbb{C}[V]^U$
A_n	$2\,E(\varpi_1)\oplus 2\,E(\varpi_n)$ $(n\geqq 3)$	$(1, 0, 0, 0, \varpi_n)$, $(0, 1, 0, 0, \varpi_n)$, $(0, 0, 1, 0, \varpi_1)$, $(0, 0, 0, 1, \varpi_1)$ $(1, 1, 0, 0, \varpi_{n-1})$, $(0, 0, 1, 1, \varpi_2)$, $(1, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 0)$ $(0, 1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 0)$
	$E(2\,\varpi_n)$	$(1, 2\,\varpi_1)$, $(2, 2\,\varpi_2)$, ..., $(n, 2\,\varpi_n)$, $(n+1, 0)$
	$2\,E(\varpi_n)+E(\varpi_{n-1})$ $(n\geqq 2)$	$n=2p$, $p\geqq 1$ $(1, 0, 0, \varpi_1)$, $(1, 0, 1, \varpi_3)$, ..., $(1, 0, p-1, \varpi_{2p-1})$, $(1, 0, p, 0)$ $(0, 1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, 1, \varpi_3)$, ..., $(0, 1, p-1, \varpi_{2p-1})$, $(0, 1, p, 0)$ $(0, 0, 1, \varpi_2)$, $(0, 0, 2, \varpi_4)$, ..., $(0, 0, p-1, \varpi_{2p-2})$, $(0, 0, p, \varpi_{2p})$, $(1, 1, 0, \varpi_2)$, $(1, 1, 1, \varpi_4)$, ..., $(1, 1, p-1, \varpi_{2p})$ $n=2p+1$, $p\geqq 1$ $(1, 0, 0, \varpi_1)$, $1, 0, 1, \varpi_3)$, ..., $(1, 0, p, \varpi_{2p+1})$ $(0, 1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, 1, \varpi_3)$, ..., $(0, 1, p, \varpi_{2p+1})$ $(0, 0, 1, \varpi_2)$, $(0, 0, 2, \varpi_4)$, ..., $(0, 0, p, \varpi_{2p})$, $(0, 0, p+1, 0)$ $(1, 1, 0, \varpi_2)$, $(1, 1, 1, \varpi_4)$, ..., $(1, 1, p-1, \varpi_{2p})$, $(1, 1, p, 0)$
	$E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_n)\oplus E(\varpi_{n-1})$ $(n\geqq 3)$	$n=2p$, $p\geqq 2$ $(1, 0, 0, \varpi_{2p})$, $(1, 0, 1, \varpi_1)$, ..., $(1, 0, p-1, \varpi_{2p-1})$ $(0, 1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, 1, \varpi_3)$, ..., $(0, 1, p-1, \varpi_{2p-1})$, $(0, 1, p, 0)$ $(0, 0, 1, \varpi_2)$, $(0, 0, 2, \varpi_4)$, ..., $(0, 0, p-1, \varpi_{2p-2})$, $(0, 0, p, \varpi_{2p})$ $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, \varpi_2)$, ..., $(1, 1, p-1, \varpi_{2p-2})$ $n=2p+1$, $p\geqq 1$ $(1, 0, 0, \varpi_{2p+1})$, $(1, 0, 1, \varpi_1)$, ..., $(1, 0, p, \varpi_{2p-1})$ $(0, 1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, 1, \varpi_3)$, $(0, 1, p, \varpi_{2p+1})$ $(0, 0, 1, \varpi_2)$, $(0, 0, 2, \varpi_4)$, ..., $(0, 0, p, \varpi_{2p})$, $(0, 0, p+1, 0)$ $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, \varpi_2)$, ..., $(1, 1, p, \varpi_{2p})$
	$2\,E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_{n-1})$ $(n=2p+1,\ p\geqq 2)$	$(1, 0, 0, \varpi_{2p+1})$, $(1, 0, 1, \varpi_1)$, ..., $(1, 0, p, \varpi_{2p-1})$ $(0, 1, 0, \varpi_{2p+1})$, $(0, 1, 1, \varpi_1)$, ..., $(0, 1, p, \varpi_{2p-1})$ $(0, 0, 1, \varpi_2)$, $(0, 0, 2, \varpi_4)$, ..., $(0, 0, p, \varpi_{2p})$, $(0, 0, p+1, 0)$ $(1, 1, 0, \varpi_{2p})$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 2, \varpi_2)$, ..., $(1, 1, p, \varpi_{2p})$
A_1	$2\,E(\varpi_1)$	$(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, \varpi_1)$, $(1, 1, 0)$
A_3	$2\,E(\varpi_2)$	$(1, 0, \varpi_2)$, $(0, 1, \varpi_2)$, $(1, 1, \varpi_1+\varpi_3)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 1, 0)$
A_5	$E(\varpi_3)$	$(1, \varpi_3)$, $(2, \varpi_1+\varpi_5)$, $(3, \varpi_3)$, $(4, \varpi_2+\varpi_4)$, $(4, 0)$
B_n $(n\geqq 2)$....	$2\,E(\varpi_1)$	$(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, \varpi_1)$, $(1, 1, \varpi_2)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $1, 1, 0)$
B_2	$E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_2)$	$(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, \varpi_2)$, $(1, 1, \varpi_2)$, $(1, 2, \varpi_1)$, $(2, 0, 0)$
	$2\,E(\varpi_2)$	$(1, 0, \varpi_2)$, $(0, 1, \varpi_2)$, $(1, 1, \varpi_1)$, $(1, 1, 0)$

Type de G	V	Degrés et poids de générateurs homogènes, algébriquement indépendants, de $\mathbb{C}[V]^U$
B_3	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3)$	$(1, 0, \varpi_1), (0, 1, \varpi_3), (1, 1, \varpi_3), (1, 1, \varpi_2), (2, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 2, 0)$
	$2E(\varpi_3)$	$(1, 0, \varpi_3), (0, 1, \varpi_3), (1, 1, \varpi_1), (1, 2, \varpi_2), (2, 0, 0), (0, 2, 0)$
B_4	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_4)$	$(1, 0, \varpi_1), (0, 1, \varpi_4), (1, 1, \varpi_4), (0, 2, \varpi_1), (1, 2, \varpi_2), (1, 2, \varpi_3)$ $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 2, 0)$
B_5	$E(\varpi_5)$	$(1, \varpi_5), (2, \varpi_1), (2, \varpi_2), (3, \varpi_5), (4, \varpi_3), (4, \varpi_4), (4, 0)$
C_n $(n \geqq 3)$	$2E(\varpi_1)$	$(1, 0, \varpi_1), (0, 1, \varpi_1), (1, 1, \varpi_2), (1, 1, 0)$
C_3	$E(\varpi_2)$	$(1, \varpi_2), (2, \varpi_2), (2, 0), (3, \varpi_1+\varpi_3), (3, 0)$
	$E(\varpi_3)$	$(1, \varpi_3), (2, 2\varpi_1), (3, \varpi_3), (4, 2\varpi_2), (4, 0)$
D_n $(n \geqq 4)$	$2E(\varpi_1)$	$(1, 0, \varpi_1), (0, 1, \varpi_1), (1, 1, \varpi_2), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 0)$
D_4	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3) \oplus E(\varpi_4)$	$(1, 0, 0, \varpi_1), (0, 1, 0, \varpi_3), (0, 0, 1, \varpi_4), (1, 1, 0, \varpi_4), (0, 1, 1, \varpi_1)$ $(1, 0, 1, \varpi_3), (1, 1, 1, \varpi_2), (1, 1, 1, \varpi_2), (2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0)$ $(0, 0, 2, 0), (1, 1, 1, 0)$
	$2E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3)$	$(1, 0, 0, \varpi_1), (0, 1, 0, \varpi_1), (0, 0, 1, \varpi_3), (1, 1, 0, \varpi_2), (1, 0, 1, \varpi_4)$ $(0, 1, 1, \varpi_4), (1, 1, 1, \varpi_3), (1, 1, 2, \varpi_2), (2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0)$ $(0, 0, 2, 0), (1, 1, 0, 0)$
D_5	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_4)$	$(1, 0, \varpi_1), (0, 1, \varpi_5), (1, 1, \varpi_4), (0, 2, \varpi_1)$ $(1, 2, \varpi_2), (2, 0, 0), (1, 2, 0)$
	$E(\varpi_4) \oplus E(\varpi_5)$	$(1, 0, \varpi_5), (0, 1, \varpi_4), (2, 0, \varpi_1), (0, 2, \varpi_1), (1, 1, \varpi_2), (2, 1, \varpi_5)$ $(1, 2, \varpi_4), (3, 1, \varpi_3), (1, 3, \varpi_3), (2, 2, \varpi_2), (1, 1, 0), (2, 2, 0)$
D_6	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_6)$	$(1, 0, \varpi_1), (0, 1, \varpi_6), (1, 1, \varpi_5), (2, 0, 0), (0, 2, \varpi_2), (1, 2, \varpi_1)$ $(1, 2, \varpi_3), (0, 3, \varpi_6), (0, 4, 0), (1, 3, \varpi_5), (0, 4, \varpi_4), (2, 2, \varpi_2)$ $(1, 4, \varpi_3), (2, 4, \varpi_4)$
G_2	$E(\varpi_1)$	$(1, \varpi_1), (2, 0)$
F_4	$E(\varpi_4)$	$(1, \varpi_4), (2, \varpi_4), (2, 0), (3, \varpi_3), (3, 0)$
E_6	$E(\varpi_6)$	$(1, \varpi_1), (2, \varpi_6), (3, 0)$
E_7	$E(\varpi_7)$	$(1, \varpi_7), (2, \varpi_1), (3, \varpi_7), (4, \varpi_6), (4, 0)$

(suite)

Cas de $V = 2E(\varpi_1) \oplus 2E(\varpi_n)$. — D'après [6], table, $S^p E(\varpi_1) \simeq E(p\varpi_1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Donc

$$S^p E(\varpi_1) \otimes S^q E(\varpi_1) \simeq E(p\varpi_1) \otimes E(q\varpi_1)$$
$$\simeq E((p+q)\varpi_1) \oplus E((p+q-2)\varpi_1+\varpi_2) \oplus \ldots \oplus E((p-q)\varpi_1+q\varpi_2)$$

si $p \geqq q$.

La série de Poincaré de l'algèbre $(\mathbb{N}^2 \times P^{++})$-graduée $\mathbb{C}[2E(\varpi_n)]^U$ est donc

$$\sum_{p,\,q} x^p y^q \Big(\sum_{\substack{0 \leqq r \leqq p \\ 0 \leqq r \leqq q}} t_1^{p+q-2r} t_2^r \Big) = \sum_{a,\,b,\,r} x^{a+r} y^{b+r} t_1^{a+b} t_2^r = (1-xt_1)^{-1}(1-yt_1)^{-1}(1-xyt_2)^{-1}.$$

Donc celle de $\mathbb{C}[2E(\varpi_1)]^U$ est

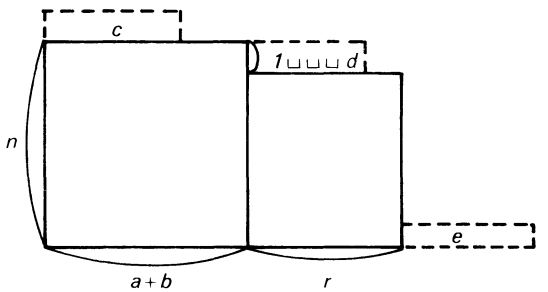
$$\sum_{a,\,b,\,r} x^{a+r} y^{b+r} t_n^{a+b} t_{n-1}^r$$

d'où

$$\sum_{u,\,v,\,w} x^u y^v z^w \mathbb{C}[2\,\mathrm{E}(\varpi_1) \oplus \mathrm{E}(\varpi_n)]_{u,\,v,\,w}$$

$$\simeq \sum_{a,\,b,\,r,\,w} x^{a+r} y^{b+r} z^w \mathrm{E}((a+b)\,\varpi_n + r\,\varpi_{n-1}) \otimes \mathrm{E}(w\,\varpi_1)$$

$$\simeq \sum_{\substack{a,\,b,\,r \\ c,\,d,\,e}\ \text{t. q. } c \leqq a+b \text{ et } d \leqq r} x^{a+r} y^{b+r} z^{c+d+e} \mathrm{E}((a+b-c+d)\,\varpi_n + (r-d)\,\varpi_{n-1} + e\,\varpi_1).$$



La série de Poincaré de $\mathbb{C}[2\,\mathrm{E}(\varpi_1) \oplus \mathrm{E}(\varpi_n)]^{\mathrm{U}}$ est donc

$$\sum_{\substack{c \leqq a+b \\ d \leqq r}} x^{a+r} y^{b+r} z^{c+d+e} t_1^e\, t_{n-1}^{r-d}\, t_n^{a+b-c+d}$$

$$= \sum_{c \leqq a+b} x^{a+d+d'} y^{b+d+d'} z^{c+d+e} t_1^e\, t_{n-1}^{d'}\, t_n^{a+b-c+d}$$

$$= (1-xyzt_n)^{-1}(1-zt_1)^{-1}(1-xyt_{n-1})^{-1} \sum_{c \leqq a+b} x^a y^b z^c t_n^{a+b-c}.$$

On vérifie facilement que

$$\sum_{c \leqq a+b} x^a y^b z^c t_n^{a+b-c} = \frac{1-xyz\,t_n}{(1-xz)(1-yz)(1-xt_n)(1-yt_n)},$$

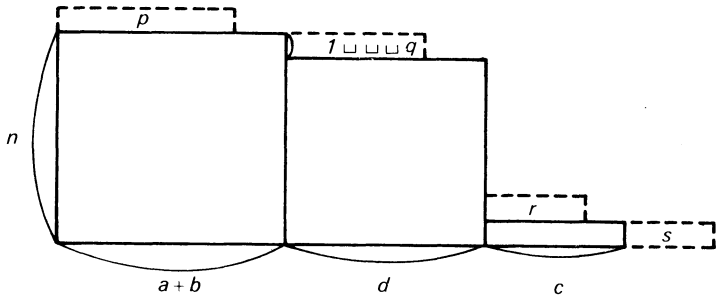
donc la série de Poincaré de $\mathbb{C}[2\,\mathrm{E}(\varpi_1) \oplus \mathrm{E}(\varpi_n)]^U$ est

$$(1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1}(1-x\,t_n)^{-1}(1-y\,t_n)^{-1}(1-z\,t_1)^{-1}(1-xy\,t_{n-1})^{-1}$$
$$= (1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1} \sum_{a,\,b,\,c,\,d} x^{a+d} y^{b+d} z^c t_1^c\, t_{n-1}^d\, t_n^{a+b}.$$

Pour calculer la série de Poincaré de l'algèbre $(\mathbb{N}^4 \times \mathrm{P}^{++})$-graduée $\mathbb{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{U}}$, il suffit donc de calculer

$$\sum_{a,\,b,\,c,\,d} x^{a+d} y^{b+d} z^c \mathrm{E}(c\,\varpi_1 + d\varpi_{n-1} + (a+b)\,\varpi_n) \otimes \sum_e t^e \mathrm{E}(e\,\varpi_1)$$

$$= \sum_{\substack{r \leqq c \\ q \leqq d \\ p \leqq a+b}} x^{a+d} y^{b+d} z^c t^{p+q+r+s} \mathrm{E}((s+c-r)\,\varpi_1 + r\,\varpi_2 + (d-q)\,\varpi_{n-1} + (a+b-p+q)\,\varpi_n).$$



La série de Poincaré de $\mathbb{C}[V]^U$ est donc

$$(1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1}\sum_{\substack{r\leqq c\\ q\leqq d\\ p\leqq a+b}} x^{a+d}y^{b+d}z^c t^{p+q+r+s}\times t_1^{s+c-r}t_2^r t_{n-1}^{d-q}t_n^{a+b-p+q}$$

$$=(1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1}\sum_{p\leqq a+b} x^{a+q+q'}y^{b+q+q'}z^{r+r'}\times t^{p+q+r+s}t_1^{s+r'}t_2^r t_{n-1}^{q'}t_n^{a+b-p+q}$$

$$=(1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1}(1-xyt\,t_n)^{-1}(1-xy\,t_{n-1})^{-1}$$
$$\times(1-zt\,t_2)^{-1}(1-z\,t_1)^{-1}(1-t\,t_1)^{-1}\sum_{p\leqq a+b} x^a y^b t^p t_n^{a+b-p}$$

$$=(1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1}(1-xy\,t_{n-1})^{-1}(1-zt\,t_2)^{-1}(1-z\,t_1)^{-1}$$
$$\times(1-t\,t_1)^{-1}(1-xt)^{-1}(1-y\,t)^{-1}(1-x\,t_n)^{-1}.$$

On en déduit qu'il existe des U-invariants homogènes non nuls, dont les degrés et poids sont ceux de la table. Le lemme 2.1 montre qu'ils sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$, et le calcul ci-dessus montre qu'ils engendrent $\mathbb{C}[V]^U$.

2.3. G DE TYPE C_n, $n\geqq 2$. — D'après [10], les G-modules (rationnels de dimension finie) simples sont indexés par les partitions de longueur au plus n; à la partition $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ correspond le G-module

$$\langle\lambda\rangle=\mathrm{E}\,((\lambda_1-\lambda_2)\,\varpi_1+(\lambda_2-\lambda_3)\,\varpi_2+\ldots+\lambda_n\,\varpi_n).$$

De plus

$$\langle\lambda\rangle\otimes\langle\mu\rangle=\bigotimes_{\zeta}\langle(\lambda/\zeta).(\mu/\zeta)\rangle$$

(*cf.* [12], Theorem II), où la sommation est étendue à toutes les partitions ζ telles que $\zeta\subset\lambda$ et $\zeta\subset\mu$, et où $(\lambda/\zeta).(\mu/\zeta)=\sum C_\nu\,\nu$ si $s_{\lambda/\zeta}.s_{\mu/\zeta}=\sum C_\nu s_\nu$.

Étudions le G-module $V=2\,\mathrm{E}(\varpi_1)$. D'après la table de [6], on a $S^n\mathrm{E}(\varpi_1)\simeq\mathrm{E}(n\,\varpi_1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'où, si $(n,m)\in\mathbb{N}^2$

$$\mathbb{C}[V]_{n,m}\simeq\mathrm{E}(n\,\varpi_1)\otimes\mathrm{E}(m\,\varpi_1)\simeq\langle(n)\rangle\otimes\langle(m)\rangle$$
$$=\bigotimes_{\zeta}\langle(n/\zeta).(m/\zeta)\rangle\simeq\bigotimes_{0\leqq p\leqq\inf(n,m)}\langle(n-p).(m-p)\rangle,$$

d'après la définition de λ/ζ (*cf.* [11], I, § 5).

Donc d'après [11], I, 5.16, on a si $n \leqq m$:

$$\mathbb{C}[V]_{n,m} \simeq \bigoplus_{0 \leqq p \leqq n} (\langle (n+m-2p) \rangle \oplus \langle (n+m-2p-1, 1) \rangle \oplus \ldots \oplus \langle (m-p, n-p) \rangle)$$

$$\simeq \bigoplus_{0 \leqq p \leqq n} \mathrm{E}((n+m-2p)\varpi_1) \oplus \mathrm{E}((n+m-2p-2)\varpi_1 + \varpi_2) \oplus \ldots$$

$$\oplus \mathrm{E}((m-n)\varpi_1 + (n-p)\varpi_2) \simeq \bigoplus_{0 \leqq p+q \leqq n} \mathrm{E}[(n+m-2p-2q)\varpi_1 + q\varpi_2].$$

La série de Poincaré de l'algèbre $(\mathbb{N}^2 \times \mathrm{P}^{++})$-graduée $\mathbb{C}[V]^U$ est donc

$$\sum_{\substack{0 \leqq p+q \leqq n \\ 0 \leqq p+q \leqq m}} x^n y^m t_1^{n+m-2p-2p} t_2^q$$

$$= \sum_{(a,b,p,q) \in \mathbb{N}^4} x^{a+p+q} y^{b+p+q} t_1^{a+b} t_2^q$$

$$= \sum_{(a,b,p,q) \in \mathbb{N}^4} (xt_1)^a (yt_1)^b (xy)^p (xyt_2)^q$$

$$= (1-xt_1)^{-1}(1-yt_1)^{-1}(1-xy)^{-1}(1-xyt_2)^{-1}.$$

Il existe donc des U-invariants homogènes non nuls, de degrés et poids $(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, \varpi_1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, \varpi_2)$. On voit, en utilisant le lemme 2.1, qu'ils sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$, et le calcul précédent montre qu'ils engendrent $\mathbb{C}[V]^U$.

2.4. G DE TYPE B_n OU D_n. — Soit $\mathfrak{B}_n$ (resp $\mathfrak{D}_n$) l'algèbre de Lie d'un groupe de type B_n (resp. D_n). Alors $\mathfrak{B}_{n-1} \subset \mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{B}_n$ pour tout $n \geqq 3$. Soit M un $\mathfrak{B}_n$-module (rationnel de dimension finie) simple de plus grand poids $g_1\varepsilon_1 + \ldots + g_n\varepsilon_n$ (avec les notations de [9], chap. VIII, § 13, n° 2 et 4). Alors d'après [13], p. 19, le $\mathfrak{D}_n$-module M est somme directe (avec multiplicités 1) des modules simples de plus grand poids $g'_1\varepsilon_1 + \ldots + g'_n\varepsilon_n$ (mêmes notations) où

$$|g'_n| \leqq g_n \leqq g'_{n-1} \leqq g_{n-1} \leqq \ldots \leqq g_2 \leqq g'_1 \leqq g_1,$$

et $(g_1 - g'_1, \ldots, g_n - g'_n) \in \mathbb{Z}^n$.

La longueur du $\mathfrak{D}_n$-module M est donc

$$(2g_n+1)(g_{n-1}-g_n+1)(g_{n-2}-g_{n-1}+1)\ldots(g_1-g_2+1)$$

comme $\mathfrak{B}_n$-module.

De même, soit N un $\mathfrak{D}_n$-module (rationnel de dimension finie) simple de plus grand poids $h_1\varepsilon_1 + \ldots + h_n\varepsilon_n$.

D'après [13], p. 19, le $\mathfrak{B}_{n-1}$-module N est somme directe (avec multiplicité 1) des modules simples de plus grand poids $h'_1\varepsilon_1 + \ldots + h'_{n-1}\varepsilon_{n-1}$ où

$$|h_n| \leqq h'_n \leqq h_{n-1} \leqq h'_{n-1} \leqq \ldots \leqq h_2 \leqq h'_1 \leqq h_1$$

et $(h_1 - h'_1, \ldots, h_{n-1} - h'_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

La longueur du $\mathfrak{B}_{n-1}$-module N est donc

$$(h_1-h_2+1)(h_2-h_3+1)\ldots(h_{n-2}-h_{n-1}+1)(\inf(h_{n-1}-h_n, h_{n-1}+h_n)+1).$$

D'autre part,

$$\mathrm{N}\simeq \mathrm{E}((h_1-h_2)\varpi_1+\ldots+(h_{n-2}-h_{n-3})\varpi_{n-2}$$

comme $\mathfrak{D}_n$-module.

On déduit de ce qui précède le :

LEMME. — (i) *Soit* M *un* $\mathfrak{B}_n$*-module simple de plus grand poids* $a_1\varpi_1+\ldots+a_n\varpi_n$*; alors la longueur du* $\mathfrak{D}_n$*-module* M *est* $(a_1+1)\ldots(a_n+1)$.

(ii) *Soit* N *un* $\mathfrak{D}_n$*-module simple de plus grand poids* $a_1\varpi_1+\ldots+a_n\varpi_n$ *: alors la longueur du* $\mathfrak{B}_{n-1}$*-module* N *est* $(a_1+1)\ldots(a_{n-1}+1)(\inf(a_{n-1}, a_n)+1)$.

D'autre part, on vérifie facilement la liste suivante (où la flèche indique la restriction de $\mathfrak{B}_n$ à $\mathfrak{D}_n$, ou de $\mathfrak{D}_n$ à $\mathfrak{B}_{n-1}$) :

$$\mathfrak{B}_5,\quad \mathrm{E}(\varpi_5)\to\mathfrak{D}_5,\quad \mathrm{E}(\varpi_4)\oplus\mathrm{E}(\varpi_5);$$

$$\mathfrak{D}_5,\quad \mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_4)\to\mathfrak{B}_4,\quad \mathbb{C}\oplus\mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_4)\to$$

$$\mathfrak{D}_4,\quad 2\mathbb{C}\oplus\mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_3)\oplus\mathrm{E}(\varpi_4);$$

$$\mathfrak{D}_4,\quad \mathrm{E}(\varpi_3)\oplus\mathrm{E}(\varpi_4)\to\mathfrak{B}_3,\quad 2\mathrm{E}(\varpi_3);$$

$$\mathfrak{D}_4,\quad \mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_4)\to\mathfrak{B}_3,\quad \mathbb{C}\oplus\mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_3);$$

$$\mathfrak{D}_3,\quad \mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_3)\to\mathfrak{B}_2,\quad \mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_2);$$

$$\mathfrak{A}_3,\quad \mathrm{E}(\varpi_2)\oplus\mathrm{E}(\varpi_1)\ \text{ isomorphe à } \mathfrak{D}_3,\quad \mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_3).$$

Pour montrer que les G-modules du tableau I sont exceptionnels, avec des générateurs de leur algèbre des U-invariants dont les degrés et poids figurent dans la table, il suffit donc de le faire pour les G-modules suivants :

$$\mathrm{D}_6,\quad \mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_6);$$

$$\mathrm{D}_5,\quad \mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_4);$$

$$\mathrm{D}_4,\quad 2\,\mathrm{E}(\varpi_1)\oplus\mathrm{E}(\varpi_3)\qquad\text{et}\qquad \mathrm{D}_n \text{ ou } \mathrm{B}_n,\quad 2\,\mathrm{E}(\varpi_1),$$

puis d'utiliser le lemme ci-dessus pour calculer l'algèbre des U-invariants des autres modules du tableau I.

Montrons par exemple comment résoudre le cas de D_5; $\mathrm{E}(\varpi_4)\oplus\mathrm{E}(\varpi_5)$ à partir de B_5, $\mathrm{E}(\varpi_5)$.

Soient V le B_5-module $\mathrm{E}(\varpi_5)$ et U (resp. U′) un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe de type D_5 (resp. B_5). D'après la table de [6], la série de Poincaré de l'algèbre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^5$-graduée $\mathbb{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{U}'}$ est

$$\begin{aligned}(1-xt_5)^{-1}(1-x^2t_1)^{-1}(1-x^2t_2)^{-1}(1-x^3t_5)^{-1}&\\ \times(1-x^4t_3)^{-1}(1-x^4t_4)^{-1}(1-x^4)^{-1}&\\ =(1-x^4)^{-1}\sum_{(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{N}^6} x^{a+2b+2c+3d+4e+4f}\,t_1^b\,t_2^c\,t_3^e\,t_4^f\,t_5^{a+b}.&\end{aligned}$$

Donc d'après le lemme 2.4 (i), la série de Poincaré de l'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$, graduée par le degré total par rapport à V, est

$$(1-x^4)^{-1} \sum_{a,b,c,d,e,f} x^{a+2b+2c+3d+4e+4f}(b+1)(c+1)(e+1)(f+1)(a+d+1)$$
$$=(1-x^4)^{-1}\Big(\sum_{a,d}(a+d+1)x^{a+3d}\Big)\Big(\sum_b (b+1)x^{2b}\Big)$$
$$\times\Big(\sum_c (c+1)x^{2c}\Big)\Big(\sum_e (e+1)x^{4e}\Big)\Big(\sum_f (f+1)x^{4f}\Big).$$

On vérifie aisément que

$$\sum_{a,d}(a+d+1)x^{a+3d}=\frac{1-x^4}{(1-x)^2(1-x^3)^2}$$

donc la série de Poincaré de $\mathbb{C}[V]^U$ est

$$(1-x^4)^{-1}\times\frac{1-x^4}{(1-x)^2(1-x^3)^2}\times(1-x^2)^{-2}(1-x^2)^{-2}(1-x^4)^{-2}(1-x^4)^{-2}$$
$$=(1-x)^{-2}(1-x^2)^{-4}(1-x^3)^{-2}(1-x^4)^{-4}.$$

D'autre part, d'après [1], Table 3 *a*, 22, $\mathbb{C}[V]^{D_5}$ est engendrée par deux éléments homogènes algébriquement indépendants, de degrés (1, 1) et 2, 2).

De plus $\mathbb{C}[V]^U$ contient des éléments non nuls, homogènes, de degrés et poids :

– $(1, 0, \varpi_5)$, $(0, 1, \varpi_4)$;

– $(2, 0, \varpi_1)$, $(0, 2, \varpi_1)$ d'après la table de [6];

– $(1, 1, \varpi_2)$ car $E(\varpi_4)\otimes E(\varpi_5)\supset E(\varpi_2)$ (*cf.* [1], Table 3 *b*);

– $(2, 1, \varpi_5)$: en effet la multiplicité de $E(\varpi_5)$ dans $S^2E(\varpi_5)\otimes E(\varpi_4)$ est égale à

$$\dim \mathrm{Hom}_{D_5}(E(\varpi_5)\otimes E(\varpi_5), S^2E(\varpi_5))$$
$$=\dim \mathrm{Hom}_{D_5}(E(2\varpi_5)\oplus E(\varpi_2)\oplus E(\varpi_1), E(2\varpi_5)\oplus E(\varpi_1))=2$$

(pour la décomposition de $E(\varpi_5)\otimes E(\varpi_5)$, *cf.* [1], Table 3 *b*) donc $\mathbb{C}[V]^U$ contient un U-invariant de degrés et poids $(2, 1, \varpi_5)$, différent du produit des U-invariants de degrés et poids (1, 1, 0) et $(1, 0, \varpi_5)$:

– $(1, 2, \varpi_4)$ par symétrie;

– $(3, 1, \varpi_3)$: avec les notations de [6], prop. 2, si P (resp. Q) est de degrés et poids $(1, 0, \varpi_5)$ [resp. $(2, 1, \varpi_5)$] alors $(P, Q)_{\alpha_5}$ est un U-invariant non nul, de degrés (3, 1) et de poids $2\varpi_5-\alpha_5=\varpi_3$;

– $(1, 3, \varpi_3)$ par symétrie;

– $(2, 2, \varpi_2)$ car $S^2E(\varpi_5)\otimes S^2E(\varpi_5)\supset E(\varpi_1)\otimes E(\varpi_1)\supset E(\varpi_2)$.

On vérifie que d'après leur construction, les U-invariants précédents ne sont divisibles par aucun G-invariant non constant. D'après le lemme 2.1, ils sont donc algébriquement

indépendants sur $\mathbb{C}$. De plus, la série de Poincaré de l'algèbre qu'ils engendrent est bien

$$(1-x)^{-2}\,(1-x^2)^{-4}\,(1-x^3)^{-2}\,(1-x^4)^{-4},$$

donc cette algèbre est égale à $\mathbb{C}[V]^U$.

Montrons aussi comment résoudre le cas de B_4, $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_4)$ à partir de D_5, $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_4)$. Soient V' le $\mathfrak{D}_5$-module $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_4)$ et U (resp. U′) un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe de type B_4 (resp. D_5). En admettant les résultats du tableau I pour D_5, $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_4)$, la série de Poincaré de l'algèbre $\mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^5$-graduée $\mathbb{C}[V']^{U'}$est

$$\begin{aligned}[(1-xt_1)(1-yt_5)(1-xyt_4)(1-y^2t_1)(1-xy^2t_2)(1-x^2)(1-xy^2)]^{-1}\\ =(1-x^2)^{-1}(1-xy^2)^{-1}\sum_{(a,b,c,d,e)\in\mathbb{N}^5} x^{a+c+e}\times y^{b+c+2d+2e}t_1^{a+d}t_2^e t_4^c t_5^b,\end{aligned}$$

donc d'après le lemme 2.4 (ii), la série de Poincaré de l'algèbre $\mathbb{N}^2$-graduée $\mathbb{C}[V']^U$ est

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-1}(1-xy^2)^{-1}\sum x^{a+c+e}y^{b+c+2d+2e}(a+d+1)(e+1)(\inf(b,c)+1)\\ =(1-x^2)^{-1}(1-xy^2)^{-1}\left(\sum(a+d+1)x^a y^{2d}\right)\\ \times\left(\sum(e+1)(xy^2)^e\right)\left(\sum(\inf(b,c)+1)x^c y^{b+c}\right).\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\sum(a+d+1)x^a y^{2d}=\frac{1-xy^2}{(1-x)^2(1-y^2)^2}$$

et que

$$\sum(\inf(b,c)+1)x^c y^{b+c}=\frac{1}{(1-y)(1-xy)(1-xy^2)}.$$

La série de Poincaré de $\mathbb{C}[V']^U$ est donc

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-1}(1-xy^2)^{-1}\frac{1-xy^2}{(1-x)^2(1-y^2)^2}\cdot\frac{1}{(1-xy^2)^2}\cdot\frac{1}{(1-y)(1-xy)(1-xy^2)}\\ =(1-x)^{-2}(1-x^2)^{-1}(1-y)^{-1}(1-y^2)^{-2}(1-xy)^{-1}(1-xy^2)^{-3}.\end{aligned}$$

Soit V le $\mathfrak{B}_4$-module $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_4)$. Alors $V'\simeq\mathbb{C}\oplus V$ comme $\mathfrak{B}_4$-module, où $\mathbb{C}$ est contenu dans le $\mathfrak{D}_5$-module $E(\varpi_1)$.

La série de Poincaré de $\mathbb{C}[V]^U$ est donc

$$(1-x)^{-1}\,(1-x^2)^{-1}\,(1-y)^{-1}\,(1-y^2)^{-2}\,(1-xy)^{-1}\,(1-xy^2)^{-3}.$$

D'autre part on obtient, par restriction à V des U′-invariants de V′ figurant dans le tableau I, des U-invariants non nuls, de degrés et poids : $(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, \varpi_4)$, $(1, 1, \varpi_4)$,

$(0, 2, \varpi_1)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 2, \varpi_2)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$. Les G-invariants figurant dans cette liste sont algébriquement indépendants et engendrent $\mathbb{C}[V]^G$ d'après [1], Table 3 *a*, 18. De plus si P (resp. Q) est de degrés et poids $(0, 1, \varpi_4)$ [resp. $(1, 1, \varpi_4)$] alors $(P,Q)_{\alpha_4}$ est non nul, de degrés et poids $(1, 2, \varpi_3)$ car $2\varpi_4-\alpha_4=\varpi_3$. En utilisant le lemme 2.1, on vérifie que les U-invariants ci-dessus sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$; la série de Poincaré de l'algèbre $\mathbb{N}^2$-graduée A qu'ils engendrent est donc

$$(1-x)^{-1}\,(1-y)^{-1}\,(1-xy)^{-1}\,(1-y^2)^{-2}\,(1-xy^2)^{-3}\,(1-x^2)^{-1},$$

donc $A=\mathbb{C}[V]^U$.

Il ne reste plus qu'à traiter les cas de D_6, $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_6)$; D_5, $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_4)$; D_4, $2E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_3)$; D_n ou B_n, $2E(\varpi_1)$. On se bornera au cas (le plus difficile) de D_6, $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_6)$. Soient G de type D_6 et $V=E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_6)$.

D'après [1], Table 3 *a*, 28, l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ est engendrée par des éléments homogènes, algébriquement indépendants, A de degrés (2, 0) et B de degrés (0, 4). De plus, d'après la table de [6], on a :

$$\mathbb{C}[E(\varpi_1)]\simeq\mathbb{C}[A]\otimes(\bigotimes_{n\geqq 0}E(n\varpi_1))$$

et

$$\mathbb{C}[E(\varpi_6)]\simeq\mathbb{C}[B]\otimes[\bigoplus_{a,b,c,d}E(a\varpi_2+b\varpi_4+(c+d)\varpi_6)]$$
$$\simeq\mathbb{C}[B]\otimes(\bigoplus_{a,b,c}(c+1)E(a\varpi_2+b\varpi_4+c\varpi_6)),$$

comme G-modules.

Donc $\mathbb{C}[A]\simeq\mathbb{C}[A, B]\otimes H$ comme G-module, où

$$H=(\bigoplus_{n\geqq 0}E(n\varpi_1))\otimes(\bigoplus_{a,b,c}(c+1)E(a\varpi_2+b\varpi_4+c\varpi_6)).$$

Soit $\bar{G}$ le revêtement universel de $SO_{12}(\mathbb{C})$; alors G est un sous-groupe distingué d'indice 2 de $\bar{G}$. D'après [10], à une partition $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_6)$ est associé un $\bar{G}$-module simple noté $[\lambda]$.

Si $\lambda_6=0$, alors

$$[\lambda]\simeq E\,((\lambda_1-\lambda_2)\,\varpi_1+(\lambda_2-\lambda_3)\,\varpi_2+(\lambda_3-\lambda_4)\,\varpi_3+(\lambda_4-\lambda_5)\,\varpi_4+\lambda_5\,(\varpi_5+\varpi_6))$$

comme G-module.

Si $\lambda_6\neq 0$, alors

$$[\lambda]\simeq E\,((\lambda_1-\lambda_2)\,\varpi_1+\ldots+(\lambda_4-\lambda_5)\,\varpi_4+(\lambda_5-\lambda_6)\,\varpi_5+(\lambda_5+\lambda_6)\,\varpi_6)$$
$$\oplus\,E\,((\lambda_1-\lambda_2)\,\varpi_1+\ldots+(\lambda_4-\lambda_5)\,\varpi_4+(\lambda_5-\lambda_6)\,\varpi_6+(\lambda_5+\lambda_6)\,\varpi_5)$$

comme G-module.

On a aussi un $\bar{G}$-module simple $[\Delta;\lambda]$, et

$$[\Delta;\lambda]\simeq E((\lambda_1-\lambda_2)\,\varpi_1+\ldots+(\lambda_4-\lambda_5)\,\varpi_4+(\lambda_5-\lambda_6)\,\varpi_5+(\lambda_5+\lambda_6+1)\,\varpi_6)$$
$$\oplus\, E\,((\lambda_1-\lambda_2)\,\varpi_1+\ldots+(\lambda_4-\lambda_5)\,\varpi_4+(\lambda_5+\lambda_6+1)\,\varpi_5+(\lambda_5-\lambda_6)\,\varpi_6)$$

comme G-module.

Soit

$$K=(\bigoplus_{n\geqq 0} E(n\varpi_1))\otimes[(2\bigoplus_{a,b} E(a\varpi_2+b\varpi_4))$$
$$\oplus\bigoplus_{c>0}(a+1)\,E(a\varpi_2+b\varpi_4+c\varpi_5)\bigoplus_{c>0}(a+1)\,E(a\varpi_2+b\varpi_4+c\varpi_6)].$$

Alors K est un $\bar{G}$-module, et si σ est la symétrie du diagramme de Dynkin de G, alors $K\simeq H\oplus\sigma(H)$. De plus

$$K=(\sum_{n\geqq 0}[n])\otimes[2\sum_{u\geqq v\geqq 0}[u,u,v,v]$$
$$+\sum_{u\geqq v\geqq w\geqq 0}(2w+1)[u,u,v,v,w,w]$$
$$+\sum_{u\geqq v\geqq w\geqq 0}(2w+2)[\Delta;u,u,v,v,w,w]]$$

car

$$[u,u,v,v,w,w]\simeq E\,((u-v)\,\varpi_2+(v-w)\,\varpi_4+2\,w\,\varpi_5)$$
$$\oplus\, E\,((u-v)\,\varpi_2+(v-w)\,\varpi_4+2\,w\,\varpi_6)$$

si $u\geqq v\geqq w>0$, et

$$[\Delta;u,u,v,v,w,w]\simeq E\,((u-v)\,\varpi_2+(v-w)\,\varpi_4+(2\,w+1)\,\varpi_5)$$
$$\oplus\, E\,((u-v)\,\varpi_2+(v-w)\,\varpi_4+(2\,w+1)\,\varpi_6)$$

si $u\geqq v\geqq w\geqq 0$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et λ une partitiobn, on a d'après [12]

$$[n]\otimes[\lambda]=\sum_{\zeta}[(n/\zeta).(\lambda/\zeta)]$$

avec des notations analogues à celles de 2.3.

Comme $(n/\zeta)\neq 0$ si et seulement si on a $\zeta=(m)$ où $0\leqq m\leqq n$, on a :

$$[n]\otimes[\lambda]=\sum_{0\leqq m\leqq n}(n-m).(\lambda/m),$$

d'où

$$(\sum_{n\geqq 0}[n])\otimes[\lambda]=\sum_{\substack{a\geqq 0\\ b\geqq 0}}[(a).(\lambda/b)].$$

D'autre part, d'après [11], I. 5. 16, on a :

$$(\lambda/b)=\sum \mu,$$

où la somme est étendue aux partitions μ telles que $\lambda-\mu$ soit une bande horizontale de longueur b, donc

$$\sum_{b\geqq 0}(\lambda/b)=\sum_{\lambda-\mu \text{ bande horizontale}}\mu.$$

En particulier, si $\lambda=(u, u, v, v, w, w)$, on a

$$\sum_{b\geqq 0}(\lambda/b)=\sum_{u\geqq\mu_2\geqq v\geqq\mu_4\geqq w\geqq\mu_6\geqq 0}(u, \mu_2, v, \mu_4, w, \mu_6).$$

Donc

$$\Big(\sum_{n\geqq 0}[n]\Big)\otimes[u, u, v, v, w, w]=\sum_{\substack{u\geqq\mu_2\geqq v\geqq\mu_4\geqq w\geqq\mu_6\geqq 0\\ a\geqq 0}}[(a).(u, \mu_2, v, \mu_4, w, \mu_6)].$$

Toujours d'après [11], I,5. 16, on a :

$$\sum_{n\geqq 0}[n]\otimes[u, u, v, v, w, w]=\sum[\lambda_1, \ldots, \lambda_7],$$

où la somme de droite est étendue aux $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$ telles que

$$\lambda_1\geqq u\geqq\lambda_2\geqq\mu_2\geqq\lambda_3\geqq v\geqq\lambda_4\geqq\mu_4\geqq\lambda_5\geqq w\geqq\lambda_6\geqq\mu_6\geqq\lambda_7\geqq 0,$$

donc

$$\sum_{n\geqq 0}[n]\otimes[u, u, v, v, w, w]=\sum(\lambda_2-\lambda_3+1)(\lambda_4-\lambda_5+1)(\lambda_6-\lambda_7+1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_7],$$

sommation sur les $[\lambda_1, \ldots, \lambda_7]$ telles que

$$\lambda_1\geqq u\geqq\lambda_2\geqq\lambda_3\geqq v\geqq\lambda_4\geqq\lambda_5\geqq w\geqq\lambda_6\geqq\lambda_7\geqq 0.$$

Or d'après [14], (43), on a :

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_7]=0 \quad \text{sauf si } \lambda_7=0, \text{ ou } \lambda_7=2, \text{ ou } \lambda_6=\lambda_7=1.$$

De plus,

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_6, 2]=-[\lambda_1, \ldots, \lambda_6] \qquad \text{et} \qquad [\lambda_1, \ldots, \lambda_5, 1, 1]=[\lambda_1, \ldots, \lambda_5].$$

Donc

$$\sum_{n\geqq 0}[n]\otimes[u, u, v, v]=\sum_{\lambda_1\geqq u\geqq\lambda_2\geqq\lambda_3\geqq v\geqq\lambda_4\geqq\lambda_5\geqq 0}(\lambda_2-\lambda_3+1)(\lambda_4-\lambda_5+1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_5],$$

$$\sum_{n\geqq 0}[n]\otimes[u, u, v, v, 1, 1]$$

$$= \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq 1 \geq \lambda_6 \geq 0} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_6 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_6]$$

$$+ \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq 1} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_5]$$

$$= 2 \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq 1} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)([\lambda_1, \ldots, \lambda_5, 1] + [\lambda_1, \ldots, \lambda_5])$$

et si $w \geqq 2$:

$$\sum_{n \geq 0} [n] \otimes [u, u, v, v, w, w]$$

$$= \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq w \geq \lambda_6 \geq 0} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)(\lambda_6 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_6]$$

$$- \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq w \geq \lambda_6 \geq 2} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)(\lambda_6 - 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_6]$$

$$+ \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq w} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_5]$$

$$= 2 \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq w \geq \lambda_6 \geq 1} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_6]$$

$$+ 2 \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq w} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_5].$$

Par suite, si $w \neq 0$, alors

$$\sum_{n \geq 0} [n] \otimes [u, u, v, v, w, w]$$

$$= 2 \sum_{\lambda_1 \geq u \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq v \geq \lambda_4 \geq \lambda_5 \geq w \geq \lambda_6} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_6].$$

On en déduit que

$$K_1 = \Big(\sum_{n \geq 0} [n]\Big) \otimes \Big(2 \sum_{u \geq v \geq 0} [u, u, v, v] + \sum_{u \geq v \geq w \geq 0} (2w+1)[u, u, v, v, w, w]\Big)$$

$$= 2 \sum_{\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_5 \geq 0} (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_5]$$

$$+ 2 \sum_{\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_6 \geq 0} (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)$$

$$\times (\lambda_4 - \lambda_5 + 1)(\lambda_5 - \lambda_6 + 1)(\lambda_6 + \lambda_6 + 1)[\lambda_1, \ldots, \lambda_6]$$

$$+ 2 \sum_{\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_5 \geq 0} (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)(\lambda_5 + 2)\lambda_5 [\lambda_1, \ldots, \lambda_5],$$

car

$$\sum_{w=1}^{\lambda_6} (2w+1) = (\lambda_5 + 2)\lambda_5 \qquad \text{et} \qquad \sum_{w=\lambda_6}^{\lambda_5} (2w+1) = (\lambda_5 - \lambda_6 + 1)(\lambda_5 + \lambda_6 + 1).$$

Donc

$$K_1 = 2 \sum_{\lambda_1 \geqq \ldots \geqq \lambda_6 \geqq 0} D_\lambda [\lambda_1, \ldots, \lambda_6],$$

où on pose

$$D_\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)(\lambda_5 - \lambda_6 + 1)(\lambda_5 + \lambda_6 + 1).$$

On a

$$K = K_1 + K_2,$$

où

$$K_2 = \Big(\sum_{n \geqq 0} [n]\Big) \otimes \Big(\sum_{u \geqq v \geqq w \geqq 0} (2w+2)[\Delta; u, u, v, v, w, w]\Big).$$

Pour calculer K_2, on utilise le fait que

$$[n] \otimes [\Delta; \lambda] = \sum_{\zeta, s} [\Delta; (\lambda/\zeta).(n/\zeta.1^s)]$$

(*cf.* [14], formule (24)).

D'après [11], I,5.17, on a :

$$(\zeta).(1^s) = \sum \mu,$$

où la somme porte sur les μ telles que $\mu - \zeta$ soit une barre verticale de longueur s. Donc si $n/(\zeta).(1^s) \neq 0$, alors il existe un entier m tel que $0 \leqq m \leqq n$ et que $(m) - \zeta$ soit une barre verticale, de longueur s. Ceci impose que $\zeta = (p)$ pour un entier p et que $0 \leqq s \leqq 1$. Donc

$$[n] \otimes [\Delta; \lambda] = \sum_{p=0}^{n} [\Delta; (\lambda/p).(n/p)] + \sum_{p} [\Delta; (\lambda/p).(n)/(p).(1)].$$

Comme

$$(p).(1) = (p+1) + (p, 1) \qquad \text{pour} \quad p \geqq 1,$$

on a

$$[n] \otimes [\Delta; \lambda] = \sum_{p=0}^{n} [\Delta; (\lambda/p).(n-p)] + \sum_{p=0}^{n-1} [\Delta; (\lambda/p).(n-p-1)],$$

d'où

$$\sum_{n \geqq 0} [n] \otimes [\Delta; \lambda] = 2 \sum_{a, b} [\Delta; (\lambda/b).(a)].$$

Par suite, si $u \geqq v \geqq w \geqq 0$:

$$\sum_{n \geqq 0} [n] \otimes [\Delta; u, u, v, v, w, w]$$
$$= 2 \sum_{u \geqq \mu_2 \geqq v \geqq \mu_4 \geqq w \geqq \mu_6 \geqq 0} [\Delta; (u, \mu_2, v, \mu_4, w, \mu_6) . (a)]$$
$$= 2 \sum (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)(\lambda_6 - \lambda_7 + 1)[\Delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_7]$$

sommation sur les $(\lambda_1, \ldots, \lambda_7)$ telles que

$$\lambda_1 \geqq u \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq v \geqq \lambda_4 \geqq \lambda_5 \geqq w \geqq \lambda_6 \geqq \lambda_7 \geqq 0.$$

Or d'après [14], (35), on a

$$[\Delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_7] = 0 \quad \text{sauf si } \lambda_7 = 0 \text{ ou } \lambda_7 = 1,$$

et

$$[\Delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_6, 1] = -[\Delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_6].$$

Donc

$$\sum_{n \geqq 0} [n] \otimes [\Delta; u, u, v, v, w, w]$$
$$= 2 \sum_{\lambda_1 \geqq \ldots \geqq w \geqq \lambda_6 \geqq 0} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)(\lambda_6 + 1)[\Delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_6]$$
$$- 2 \sum_{\lambda_1 \geqq \ldots \geqq w \geqq \lambda_6 \geqq 1} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)\lambda_6 [\Delta; \lambda_1 \ldots, \lambda_6]$$
$$= 2 \sum_{\lambda_1 \geqq \ldots \geqq w \geqq \lambda_6 \geqq 0} (\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)[\Delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_6].$$

D'où

$$K_2 = 2 \sum_{\lambda_1 \geqq \ldots \geqq \lambda_6 \geqq 0} (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)$$
$$\times (\lambda_5 - \lambda_6 + 1)(\lambda_5 + \lambda_6 + 2)[\Delta; \lambda_1, \ldots, \lambda_6]$$

car

$$\sum_{w = \lambda_6}^{\lambda_5} (2w + 2) = (\lambda_5 - \lambda_6 + 1)(\lambda_5 + \lambda_6 + 2).$$

Posons

$$E_\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_2 - \lambda_3 + 1)(\lambda_3 - \lambda_4 + 1)(\lambda_4 - \lambda_5 + 1)(\lambda_5 - \lambda_6 + 1)(\lambda_5 + \lambda_6 + 2);$$

alors

$$K = \sum_{l(\lambda) \leqq 6} (2 D_\lambda [\lambda] + 2 E_\lambda [\Delta; \lambda]).$$

Or, si $l(\lambda) \leqq 5$, alors

$$D_\lambda [\lambda] \simeq (a_1+1) \ldots (a_5+1) \, E(a_1 \varpi_1 + \ldots + a_5 \varpi_5 + a_5 \varpi_6)$$

en posant

$$a_1 = \lambda_1 - \lambda_2; \qquad \ldots; \qquad a_5 = \lambda_5.$$

Si $l(\lambda) = 6$, alors

$$D_\lambda [\lambda] \simeq (a_1+1) \ldots (a_6+1) \, [E(a_1 \varpi_1 + \ldots + a_5 \varpi_5 + a_6 \varpi_6) \oplus E(a_1 \varpi_1 + \ldots + a_6 \varpi_5 + a_5 \varpi_6)].$$

où

$$a_1 = \lambda_1 - \lambda_2; \qquad \ldots; \qquad a_5 = \lambda_5 - \lambda_6; \qquad a_6 = \lambda_5 + \lambda_6.$$

Si $l(\lambda) \leqq 6$, alors

$$E_\lambda [\Delta; \lambda] \simeq (a_1+1) \ldots (a_6+1) \, [E(a_1 \varpi_1 + \ldots + a_5 \varpi_5 + a_6 \varpi_6) \oplus E(a_1 \varpi_1 + \ldots + a_6 \varpi_5 + a_5 \varpi_6)],$$

où

$$a_1 = \lambda_1 - \lambda_2; \qquad \ldots; \qquad a_5 = \lambda_5 - \lambda_6; \qquad a_6 = \lambda_5 + \lambda_6 + 1.$$

Donc la série de Poincaré du G-module $\mathbb{N}^6$-gradué K est

$$\begin{aligned} &2 \sum (a_1+1) \ldots (a_5+1) \, t_1^{a_1} \ldots t_5^{a_5} \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{a_5 < a_6 \\ a_6 - a_5 \text{ pair}}} (a_1+1) \ldots (a_6+1) \, t_1^{a_1} \ldots t_4^{a_4} (t_5^{a_5} t_6^{a_6} + t_5^{a_6} t_6^{a_5}) \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{a_5 < a_6 \\ a_6 - a_5 \text{ impair}}} (a_1+1) \ldots (a_6+1) \, t_1^{a_1} \ldots t_4^{a_4} (t_5^{a_5} t_6^{a_6} + t_5^{a_6} t_6^{a_5}) \\ &\qquad = 2(1-t_1)^{-2} (1-t_2)^{-2} \ldots (1-t_6)^{-2}. \end{aligned}$$

Définissons une $\mathbb{N}$-graduation sur H par : le degré de $E(a_1 \varpi_1 + \ldots + a_6 \varpi_6)$ est $a_1 + \ldots + a_6$. Comme $K \simeq H \oplus \sigma(H)$ comme G-module et comme le degré défini ci-dessus est invariant par σ, la série de Poincaré de H est $1/(1-t)^{12}$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de prouver l'existence des 12 U-invariants non G-invariants du tableau I, et de montrer qu'aucun d'eux n'est divisible par un G-invariant non constant.

L'existence des U-invariants homogènes non nuls, de degrés et poids $(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, \varpi_6)$, $(0, 2, \varpi_2)$, $(0, 3, \varpi_6)$, $(0, 4, \varpi_4)$ est prouvée dans [6] (table).

D'après [1], Table 3 *b*, $E(\varpi_5) \otimes E(\varpi_6) \supset E(\varpi_1)$, donc $E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_6) \supset E(\varpi_5)$ d'où un U-invariant de degrés et poids $(1, 1, \varpi_5)$.

De plus, $E(\varpi_1) \otimes S^3 E(\varpi_6) \supset E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_6) \supset E(\varpi_5)$ d'où un U-invariant de degrés et poids $(1, 3, \varpi_5)$.

D'autre part, $E(\varpi_1) \otimes S^2 E(\varpi_6)$ contient le $\bar{G}$-module

$$E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_2) = [1] \otimes [1^2] = [(1).(1^2)] \oplus [1] = [1^3] \oplus [2, 1] \oplus [1],$$

d'où des U-invariants de degrés et poids $(1, 2, \varpi_3)$ et $(1, 2, \varpi_1)$.

De même $E(\varpi_1) \otimes S^4 E(\varpi_6)$ contient le $\bar{G}$-module

$$E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_4) = [1] \otimes [1^4] = [(1).(1^4) \oplus [1^3],$$

d'où un U-invariant de degrés et poids $(1, 4, \varpi_3)$.

D'après leurs degrés, tous ces U-invariants ne sont divisibles par aucun G-invariant non constant. Pour prouver l'existence d'un U-invariant de degrés et poids $(2, 2, \varpi_2)$, non proportionnel au produit de ceux de degrés et poids $(2, 0, 0)$ et $(0, 2, \varpi_2)$, montrons que la multiplicité de $E(\varpi_2)$ dans $S^2 E(\varpi_1) \otimes S^2 E(\varpi_6)$ est au moins 2.

En effet

$$\begin{aligned} S^2 E(\varpi_1) \otimes S^2 E(\varpi_6) &\supset (E(2\varpi_1) \oplus \mathbb{C}) \otimes E(\varpi_2) \\ &= ([2] \otimes [1^2]) \oplus [2] = [(2).(1^2)] \oplus [(1).(1)] \oplus [2] \supset 2[2]. \end{aligned}$$

De même, pour prouver l'existence d'un U-invariant de degrés et poids $(2, 4, \varpi_4)$, non proportionnel au produit de ceux de degrés et poids $(2, 0, 0)$ et $(0, 4, \varpi_4)$, montrons que la multiplicité de $E(\varpi_4)$ dans $S^2 E(\varpi_1) \otimes S^4 E(\varpi_6)$ est $\geqq 2$. En effet

$$\begin{aligned} S^2 E(\varpi_1) \otimes S^4 E(\varpi_6) &\supset (E(2\varpi_1) \oplus \mathbb{C}) \otimes E(\varpi_4) \\ &= ([2] \otimes [1^4]) \oplus [1^4] = [(2).(1^4)] \oplus [(1).(1^3)] \oplus [1^4] \supset 2[1^4], \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque. — Les résultats rassemblés dans le tableau I résolvent partiellement des problèmes posés par Littlewood dans [15].

2.5. Montrons maintenant que tout G-module exceptionnel maximal figure dans le tableau I. Pour cela, on utilisera les remarques suivantes, dont les trois premières sont évidentes :

(*a*) tout sous-G-module d'un module exceptionnel est exceptionnel;

(*b*) si V est un G-module exceptionnel de longueur s, et si $\mathbb{C}[V]^U = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$ où chaque p_i est de degré d_i et de poids λ_i, alors

$$d_1 + \ldots + d_n \leqq \dim V \leqq s + 2 \dim U,$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{j=1}^{l} b_j \varpi_j \qquad \text{avec} \quad b_j \leqq 2 \quad \text{pour } 1 \leqq j \leqq l$$

(*cf.* [6], théorème 2 et corollaires);

(*c*) si V est comme précédemment et si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2 \sum_{j=1}^{l} \varpi_j$, alors V est maximal;

(d) soient ω un poids dominant non nul et $E=E(\omega)$. Alors $3E$ n'est pas exceptionnel. Si de plus S^2E^* contient un G-module simple de plus grand poids λ où $\lambda\neq 0$ et $\lambda\neq 2\omega^*$, alors $2E$ n'est pas exceptionnel.

Démonstration de (d). — Un système générateur minimal de l'algèbre $\mathbb{C}[3E]^U$ contient au moins trois élément de poids λ^* (et de degré 1), donc $3E$ n'est pas exceptionnel d'après (b). D'autre part, si $S^2E^*\supset E(\lambda)$, alors comme $S^2(2E)^*=(2S^2E^*)\oplus(E^*\otimes E^*)$, un système générateur minimal de $\mathbb{C}[2E]^U$ contient des éléments de degrés et poids $(2, 0, \lambda)$, $(0, 2, \lambda)$, $(1, 1, \lambda)$ et on conclut comme précédemment.

(i) Soient G un groupe simple de type A_n, et V un G-module exceptionnel. Examinons d'abord le cas où $n\geqq 3$. D'après (a) et le théorème 3 de [6], V est somme de sous-G-modules isomorphes à $E(\varpi_1)$, $E(\varpi_2)$, $E(\varpi_{n-1})$, $E(2\varpi_1)$, $E(2\varpi_n)$; ou à $E(\varpi_3)$ si $n=5$. De plus $E(2\varpi_1)$ et $E(2\varpi_n)$ vérifient la condition de (c) donc sont maximaux.

Supposons d'abord que $n\neq 5$, ou que $n=5$ et V ne contient pas $E(\varpi_3)$. Il existe alors des entiers a, a', b, b' tels que

$$V\simeq a\,E(\varpi_1)\oplus a'\,E(\varpi_n)\oplus b\,E(\varpi_2)\oplus b'\,E(\varpi_{n-1}).$$

D'après (b), on a :

$$(n+1)(a+a')+\frac{n(n+1)}{2}(b+b')\leqq a+a'+b+b'+n(n+1),$$

d'où

$$n(a+a')+\frac{(n-1)(n+2)}{2}(b+b')\leqq n(n+1).$$

Comme $n\geqq 3$, on a :

$$\frac{3}{2}(n-1)(n+2)>n(n+1),$$

donc $b+b'\leqq 2$.

— Si $b+b'=2$, alors $n(a+a')\leqq 2$ donc $a+a'=0=a=a'$. A dualité près, on a donc $V\simeq E(\varpi_2)\oplus E(\varpi_{n-1})$, ou $V\simeq 2E(\varpi_2)$.

Si $V\simeq 2E(\varpi_2)$ et $n\geqq 4$, alors comme $S^2E(\varpi_2)^*\supset E(\varpi_{n-3})$ (*cf.* table de [5]), V n'est pas exceptionnel d'après (d).

Si $V\simeq E(\varpi_2)\oplus E(\varpi_{n-1})$ et $n\geqq 4$, alors

$$S^2V^*\simeq \underbrace{E(2\varpi_{n-1})\oplus E(\varpi_{n-3})}_{S^2E(\varpi_2)^*}\oplus \underbrace{E(2\varpi_2)\oplus E(\varpi_4)}_{S^2E(\varpi_{n-1})^*}\oplus \underbrace{E(\varpi_2+\varpi_{n-1})\oplus E(\varpi_1+\varpi_n)}_{E(\varpi_2)^*\otimes E(\varpi_{n-1})^*}\oplus\mathbb{C},$$

donc un système générateur minimal homogène de $\mathbb{C}[V]^U$ contient des éléments de degrés et poids $(1, 0, \varpi_{n-1})$, $(0, 1, \varpi_2)$, $(2, 0, \varpi_{n-3})$, $(0, 2, \varpi_4)$, $(1, 1, \varpi_1+\varpi_n)$, $(1, 1, 0)$ et les autres

éléments sont de degré au moins 3. Si V est exceptionnel, alors l'inégalité $d_1 + \ldots + d_m \leqq \dim V$ [*cf.* (*b*)] donne :

$$2+2\times 4+3(m-6)\leqq \dim V,$$

où

$$m \geqq \dim V - \dim U = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'où

$$\frac{3n(n+1)}{2} - 8 \leqq n(n+1) \qquad \text{et} \qquad n^2+n-16 \leqq 0,$$

ce qui est faux pour $n \geqq 4$.

Il ne reste donc que le cas de $n=3$; $V = 2E(\varpi_2)$, qui figure dans le tableau I.

— Si $b+b'=1$, on peut supposer que $b=1$ (quitte à remplacer V par V*).

Il faut étudier $aE(\varpi_1) \oplus a'E(\varpi_n) \oplus E(\varpi_2)$.

D'après (*c*) et le tableau I, $2E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_2)$ et $E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_n) \oplus E(\varpi_2)$ sont maximaux ainsi que (pour n impair) $2E(\varpi_n) \oplus E(\varpi_2)$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $V = 2E(\varpi_n) \oplus E(\varpi_2)$ n'est pas exceptionnel pour $n=2p$, p entier $\geqq 2$. Or un système générateur homogène minimal de $\mathbb{C}[V]^U$ contient des éléments de degrés et poids : $(1, 0, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, 0, \varpi_1)$, $(p, 0, 0, \varpi_1)$ et on conclut en appliquant (*b*).

— Si $b+b'=0$, on a :

$$V \simeq aE(\varpi_1) \oplus a'E(\varpi_n).$$

On sait que $a \leqq 2$ et $a' \leqq 2$ [d'après (*d*)]. Or $2E(\varpi_1) \oplus 2E(\varpi_n)$ est exceptionnel d'après le tableau I; il est donc maximal.

Supposons maintenant que $n=5$ et que V contient $E(\varpi_3)$. Alors

$$V \simeq aE(\varpi_1) \oplus a'E(\varpi_5) \oplus bE(\varpi_2) \oplus b'E(\varpi_4) \oplus cE(\varpi_3),$$

avec $c>0$. D'après (*b*), on a :

$$6(a+a')+15(b+b')+20c \leqq a+a'+b+b'+c+30,$$

d'où

$$5(a+a')+14(b+b')+19c \leqq 30.$$

Donc $b=b'=0$ et $c=1$. Il suffit de prouver que $V = E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3)$ n'est pas exceptionnel. Or

$$S^2V^* \simeq \underbrace{E(2\varpi_5)}_{S^2E(\varpi_5)} \oplus \underbrace{E(2\varpi_3) \oplus E(\varpi_1+\varpi_5)}_{S^2E(\varpi_3)} \oplus \underbrace{E(\varpi_3+\varpi_5) \oplus E(\varpi_2)}_{E(\varpi_5)\oplus E(\varpi_3)}.$$

Donc un système générateur homogène minimal de $\mathbb{C}[V]^U$ contient, en degré total 1 ou 2, les éléments de degrés et poids $(1, 0, \varpi_5)$, $(0, 1, \varpi_3)$, $(0, 2, \varpi_1+\varpi_5)$, $(1, 1, \varpi_2)$.

Si V est exceptionnel, alors d'après (b) :

$$2+4+3\,(m-4) \leqq \dim V$$

et $m \geqq \dim V - \dim U = 26-15 = 11$, et $\dim V = 26$, d'où une contradiction.

Il ne reste plus que les cas $n=1$ ou $n=2$.

Si $n=1$, on obtient $V \simeq a\,E(\varpi_1)$, et $a \leqq 2$ d'après (d); le cas $a=2$ figure dans le tableau I.

Si $n=2$, on obtient $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus a'\,E(\varpi_2)$. D'après (d), $a \leqq 2$ et $a' \leqq 2$; de plus d'après le tableau I et (c), $2\,E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_2)$ est exceptionnel maximal.

(ii) Soit G un groupe simple de type B_n, $n \geqq 2$. D'après (a) et la table de [6], un G-module exceptionnel V est somme directe de sous-modules isomorphes à $E(\varpi_1)$, ou (si $n \leqq 5$) à $E(\varpi_n)$.

Si $V \simeq a\,E(\varpi_1)$, alors $a \leqq 2$ d'après (d), et $a=2$ convient d'après le tableau I; donc $2\,E(\varpi_1)$ est le seul G-module exceptionnel maximal pour $n \geqq 6$.

Si $n=5$, on peut supposer que $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus b\,E(\varpi_5)$ avec $b \neq 0$.

On a : $\dim U = 25$; $\dim E(\varpi_1) = 11$ et $\dim E(\varpi_5) = 32$ donc d'après (b) : $10\,a + 31\,b \leqq 50$ donc $b=1$.

Il suffit d'éliminer $V = E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_5)$. Or $E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_5) \supset E(\varpi_5)$ car $E(\varpi_5) \otimes E(\varpi_5) \supset E(\varpi_1)$ (*cf.* [1], Table 3b) d'où un système générateur minimal homogène de $\mathbb{C}[V]^U$ contenant des éléments de degrés et poids $(1, 1, \varpi_5)$, $(0, 1, \varpi_5)$, $(0, 3, \varpi_5)$ donc V n'est pas exceptionnel d'après (b).

Si $n=4$, on peut supposer que $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus b\,E(\varpi_4)$ avec $b>0$, et comme $\dim E(\varpi_1) = 9$; $\dim E(\varpi_4) = 16$ et $2 \dim U = 32$, on obtient $8\,a + 15\,b \leqq 32$.

Les possibilités pour (a, b) sont donc (2, 1), (1, 1), (0, 1), (0, 2).

Si $a=2$ et $b=1$, alors un système générateur homogène minimal de $\mathbb{C}[2\,E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_4)]^U$ contient des éléments de degrés et poids $(1, 0, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, 0, \varpi_1)$, $(0, 0, 2, \varpi_1)$ donc V n'est pas exceptionnel d'après (b).

Si $a=0$ et $b=2$, alors $V \simeq 2\,E(\varpi_4)$ mais $S^2\,E(\varpi_4) \simeq E(2\,\varpi_4) \oplus E(\varpi_1) \oplus \mathbb{C}$ donc V n'est pas exceptionnel d'après (d).

Le cas de $E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_5)$ figure dans le tableau I.

Si $n=3$, alors $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus b\,E(\varpi_3)$ avec $6\,a + 17\,b \leqq 18$ car $\dim E(\varpi_1) = 7$; $\dim E(\varpi_3) = 8$; $2 \dim U = 18$.

De plus $a \leqq 2$ d'après (d). Les possibilités pour (a, b) sont donc $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ et elles figurent toutes dans le tableau I.

Si $n=2$, alors $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus b\,E(\varpi_2)$ avec $4\,a + 3\,b \leqq 8$. On a les mêmes possibilités pour (a, b), et elles figurent toutes dans le tableau I.

(iii) Soit G un groupe simple de type C_n, $n \geqq 3$.

On montre comme précédemment que $2\,E(\varpi_1)$ est un G-module exceptionnel maximal, et que c'est le seul pour $n \geqq 4$. Si $n \geqq 3$, on a d'après la table de [6] :

$$V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus b\,E(\varpi_2) \oplus c\,E(\varpi_3)$$

et on peut supposer $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Comme $\dim E(\varpi_1) = 6$; $\dim E(\varpi_2) = \dim E(\varpi_3) = 14$ et $2 \dim U = 18$, on a d'après (b) :

$$5a + 13b + 13c \leqq 18.$$

Les possibilités à éliminer sont donc $E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_2)$ et $E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3)$.

Si $V = E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_2)$, alors comme $E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_2) \simeq E(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3)$ (*cf.* [12]), un système générateur homogène minimal de $\mathbb{C}[V]^U$ contient des éléments de degrés et poids $(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 3, \varpi_1 + \varpi_3)$, $(1, 1, \varpi_1)$ donc V est exclu d'après (b).

Si $V \simeq E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3)$, alors, comme $E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_2) \supset E(\varpi_3)$, $E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_3) \supset E(\varpi_2)$ d'où des U-invariants non nuls sur V, homogènes de degrés et poids $(1, 1, \varpi_2)$, $(0, 4, 2\varpi_2)$ et on conclut de même.

(iv) Soit G un groupe simple de type D_n, $n \geqq 4$.

Un G-module exceptionnel V est somme directe de sous-modules isomorphes à $E(\varpi_1)$, ou (pour $n \leqq 6$) à $E(\varpi_{n-1})$ et $E(\varpi_n)$. On montre comme en (ii) que $2\,E(\varpi_1)$ est exceptionnel maximal, et que c'est le seul pour $n \geqq 7$.

Si $n = 6$, alors on peut supposer $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus c\,E(\varpi_6)$ avec $b \neq 0$. Comme $\dim E(\varpi_1) = 12$; $\dim E(\varpi_5) = \dim E(\varpi_6) = 32$; $2 \dim U = 60$, on obtient : $11a + 31(b + c) \leqq 60$ donc $c = 0$, $b = 1$ et $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_5)$.

Or $E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_5)$ est exceptionnel maximal d'après le tableau I et (c), donc $a = 1$.

Si $n = 5$, on peut supposer $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus b\,E(\varpi_4) \oplus c\,E(\varpi_5)$ avec $b \neq 0$.

Comme $\dim E(\varpi_1) = 10$; $\dim E(\varpi_4) = \dim E(\varpi_5) = 16$; $2 \dim U = 40$, on obtient $9a + 15(b + c) \leqq 40$; en particulier $b + c \leqq 2$. D'autre part, comme $S^2 E(\varpi_4) \simeq E(2\varpi_4) \oplus E(\varpi_5)$, le G-module $2\,E(\varpi_5)$ n'est pas exceptionnel d'après (d), donc $b \leqq 1$ et $c \leqq 1$. De plus, d'après le tableau I, les G-modules $E(\varpi_4) \oplus E(\varpi_5)$ et $E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_4)$ sont exceptionnels, le premier étant maximal d'après (c). Il suffit donc d'élminer $V = 2\,E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_4)$. Or un système générateur homogène minimal de $\mathbb{C}[V]^U$ contient des éléments de degrés et poids $(1, 0, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, 0, \varpi_1)$, $(0, 0, 2, \varpi_1)$ et on conclut en utilisant (b).

Si $n = 4$, on peut supposer $V \simeq a\,E(\varpi_1) \oplus b\,E(\varpi_3) \oplus c\,E(\varpi_4)$ où $a \geqq b \geqq c$.

Comme $\dim E(\varpi_1) = \dim E(\varpi_3) = \dim E\,\varpi_4) = 8$, et $2 \dim U = 24$, on obtient : $7(a + b + c) \leqq 24$ donc $a + b + c \leqq 3$. De plus $\max(a, b, c) \leqq 2$ d'après (d).

A automorphisme du diagramme de Dynkin près, on obtient donc bien les G-modules du tableau I.

(v) Soient G un groupe simple exceptionnel et V un G-module exceptionnel. Si G est de type G_2, alors $V \simeq a\,E(\varpi_1)$. Mais $2\,E(\varpi_1)$ n'est pas exceptionnel car $E(\varpi_1) \otimes E(\varpi_1) \simeq E(2\varpi_1) \oplus E(\varpi_2) \oplus \mathbb{C}$ (*cf.* [16], Liste 5) d'où trois éléments de poids ϖ_1 dans un système générateur minimal de $\mathbb{C}[2\,E(\varpi_1)]^U$. Donc $a = 1$.

Si G est de type F_4, alors il suffit de même d'éliminer $V=2E(\varpi_4)$; or $S^2V^*\simeq E(2\varpi_4)\oplus E(\varpi_4)\oplus\mathbb{C}$ d'après la table de [5], donc (d) s'applique.

Si G est de type E_6, alors $V\simeq aE(\varpi_1)\oplus bE(\varpi_6)$.

D'après (a), il suffit d'exclure $2E(\varpi_1)$ et $E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_6)$.

Mais $S^2E(\varpi_1)\simeq E(2\varpi_1)\oplus E(\varpi_6)$ donc $2E(\varpi_1)$ n'est pas exceptionnel d'après (d).

D'autre part, si $V=E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_6)$, alors l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ est engendrée par quatre éléments algébriquement indépendants (*cf.* [1], Table 5 *a*, 6) et la dimension de $\mathbb{C}[V]^U$ est au moins $\dim V-\dim U=54-36=18$.

Par suite, si V est exceptionnel, alors un système générateur homogène minimal de $\mathbb{C}[V]^U$ contient au moins 14 éléments de poids non nuls; comme G est de rang 6, au moins 3 de ces éléments ont un même poids fondamental en commun, ce qui contredit (b).

Si G est de type E_7, il suffit d'éliminer $2E(\varpi_7)$.

Or $S^2E(\varpi_7)^*\simeq E(2\varpi_7)\oplus E(\varpi_2)$ et (d) s'applique.

Si G est de type E_8, il n'y a aucun G-module exceptionnel d'après le théorème 3 de [6].

2.6. Actions « sans multiplicité » des groupes simples. — Rappelons (*cf.* [3]) que l'action du groupe réductif H sur l'espace vectoriel de dimension finie E est dite « sans multiplicité » si pour tout H-module simple F, la multiplicité de F dans $\mathbb{C}[E]$ est au plus 1. On montre facilement (*cf.* [6], lemme 6) qu'un tel E est un module exceptionnel sur DH (groupe dérivé de H).

Dans [3], Théorème 3, on trouve la classification des actions *irréductibles* sans multiplicité. D'autres exemples sont fournis par la :

Proposition. — *Soit* H *un groupe réductif tel que* DH *soit simple. Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie sur lequel* H *opère « sans multiplicité » de façon réductible et fidèle. On est dans l'un des cas suivants :*

(a) $H=GL_n(\mathbb{C})$ *et* E *est l'un des* H-*modules suivants :*

$$\mathbb{C}^n\oplus(\mathbb{C}^n)^* \quad (n\geqq 3); \qquad \mathbb{C}^n\oplus\Lambda^2\mathbb{C}^n \quad (n\geqq 4); \qquad (\mathbb{C}^n)^*\oplus\Lambda^2\mathbb{C}^n \quad (n\,pair\geqq 6),$$

ou se déduit d'un de ces modules par automorphisme de H.

(b) H *est l'image dans* GL(E) *du produit direct de* $(\mathbb{C}^*)^2$ *par un groupe simple de type* D_4 *et (à automorphisme de* H *près),*

$$E=E(\varpi_1)\oplus E(\varpi_3),$$

où si $(\lambda,\mu)\in(\mathbb{C}^*)^2$ *et* $(x,y)\in E$, *on a :*

$$(\lambda,\mu)(x,y)=(\lambda x,\mu y).$$

Démonstration. — D'après ce qui précède, le DH-module E est un sous-module réductible d'un module du tableau I, et deux générateurs distincts de $\mathbb{C}[E]^U$ ont des poids distincts ou nuls (où U est un sous-groupe unipotent maximal de H). Un examen du tableau I fournit alors les modules du tableau II.

TABLEAU II

Type de DH	E		Degrés et poids de générateurs homogènes algébriquement indépendants de $\mathbb{C}[E]^U$
A_n	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_n)$ $(n \geqq 2)$		$(1, 0, \varpi_n)$, $(0, 1, \varpi_1)$, $(1, 1, 0)$
	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_2)$ $(n \geqq 3)$	$n=2p$	$(1, 0, \varpi_{2p})$, $(1, 1, \varpi_{2p-2})$, $\ldots$, $(1, p, 0)$ $(0, 1, \varpi_{2p-1})$, $(0, 2, \varpi_{2p-3})$, $\ldots$, $(0, p, \varpi_1)$
		$n=2p+1$	$(1, 0, \varpi_{2p+1})$, $(1, 1, \varpi_{2p-1})$, $\ldots$, $(1, p, \varpi_1)$ $(0, 1, \varpi_{2p})$, $(0, 2, \varpi_{2p-2})$, $\ldots$, $(0, p+1, 0)$ $(n=2p+1)$
	$E(\varpi_n) \oplus E(\varpi_2)$ n impair $\geqq 5$		$(1, 0, \varpi_1)$, $(1, 1, \varpi_{2p+1})$, $\ldots$, $(p, 1, \varpi_3)$ $(0, 1, \varpi_{2p})$, $(0, 2, \varpi_{2p-2})$, $\ldots$, $(0, p, \varpi_2)$, $(0, p+1, 0)$
D_4	$E(\varpi_1) \oplus E(\varpi_3)$		$(1, 0, \varpi_1)$, $(0, 1, \varpi_3)$, $(1, 1, \varpi_4)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$

On voit alors que si E figure dans le tableau II, le produit de DH par $\mathbb{C}^*$ (si DH est de type A_n) ou $(\mathbb{C}^*)^2$ (si DH est de type D_4) opère « sans multiplicité » sur E.

3. Orbites dans les modules exceptionnels sur un groupe simple

3.1 THÉORÈME. — *Soient* G *un groupe simple, et* V *un* G-*module exceptionnel. Soient* $X = \overline{Gx}$ *l'adhérence de la* G-*orbite de* $x \in V$, *et* I(X) *l'idéal* (G-*stable*) *des fonctions polynomiales sur* V, *nulles sur* X.

(i) *L'algèbre* $\mathbb{C}[X]^U$ *est libre.*

(ii) *L'idéal* I(X) *admet pour système générateur le* G-*module engendré par certaines combinaisons linéaires entre les* U-*invariants du tableau I.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que le graphe Γ défini en 1.2 a pour composantes connexes o ou o———o : en effet c'est évident si $\mathbb{C}[V]^U$ est engendrée par des éléments de poids fondamental ou nul; sinon, d'après le tableau I, on est dans un des cas suivants : A_n, $E(2\varpi_1)$; A_3, $E(\varpi_2) \oplus E(\varpi_2)$; A_5, $E(\varpi_3)$; C_3, $E(\varpi_2)$; C_3, $E(\varpi_3)$, et on peut vérifier cas par cas.

Si $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1, \ldots, P_m]$ comme en 1.2 et $\pi : \mathbb{C}[V]^U \to \mathbb{C}[X]^U$ est la restriction, d'après la remarque précédente et la démonstration du théorème 1.2, l'idéal $\operatorname{Ker}\pi$ de $\mathbb{C}[V]^U$ est engendré par certains P_i (où i est un sommet isolé de Γ) ou $P_i - c P_j$ (où $\{i, j\}$ est une arête de Γ). Par suite, $\mathbb{C}[X]^U \simeq \mathbb{C}[V]^U/\operatorname{Ker}\pi$ est une algèbre libre d'où (i), et $\operatorname{Ker}\pi = I(X)^U$ est engendré par des combinaisons linéaires entre U-invariants du tableau I, d'où (ii).

3.2. THÉORÈME. — *Avec les notations précédentes, le « bord »* $X \setminus Gx$ *de* X *est de codimension au moins* 2 *dans* X.

Démonstration. — D'après le théorème 3.1, on peut écrire $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1, \ldots, P_m]$ où $P_1, \ldots, P_m$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ et chaque P_i est de poids λ_i par rapport à T.

Supposons que $X \setminus G x$ contienne une composante irréductible Y, de codimension 1 dans X. Soit J l'idéal des fonctions régulières sur X, nulles sur Y; alors J est G-stable donc J^U est un idéal premier de $\mathbb{C}[X]^U$. Il est clair que $\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}[Y]^G = \mathbb{C}$ donc d'après le théorème 1.4, on a : $\dim X = m + n - n_X$ et $\dim Y = \dim \mathbb{C}[Y]^U + n - n_Y$. De plus $n_Y \geqq n_X$ et $m \geqq \dim \mathbb{C}[Y]^U$. Comme $\dim X = \dim Y + 1$, on doit avoir $n_Y = n_X$ et $m = \dim \mathbb{C}[Y]^U + 1$. On en déduit que tout poids fondamental apparaissant dans un des λ_i apparaît aussi dans un poids de $\mathbb{C}[Y]^U$, et d'autre part que J^U est de hauteur 1 dans $\mathbb{C}[X]^U$, donc l'idéal J^U est engendré par $R(P_1, \ldots, P_m) = P$, où R est un polynôme irréductible. Soit λ le poids de P. Deux cas se présentent :

(i) Les poids des P_i apparaissant dans $R(P_1, \ldots, P_m)$ sont deux à deux distincts. Dans ce cas, comme ces poids figurent dans le tableau I, ils sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. On voit alors facilement que $R(P_1, \ldots, P_m)$ est un monôme en les P_i. Comme R est irréductible, on en déduit que $P = P_i$ pour un $i \in [1, m]$. Si $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$, alors un poids fondamental figurant dans λ_i n'apparaît dans aucun poids de $\mathbb{C}[Y]^U \simeq \mathbb{C}[(P_j)_{j \neq i}]$, ce qui est absurde.

Donc il existe $j \neq i$ tel que $\lambda_i = \lambda_j$; de plus d'après le tableau I, le poids λ_i est fondamental.

Soient α la racine simple telle que $(\mu_i | \alpha) \neq 0$, et $S = P_i(X_{-\alpha} P_j) - P_j(X_{-\alpha} P_i)$.

Alors S est U-invariant de poids $2\lambda_i - \alpha$ (d'après [6], proposition 2) et $S \in J$, donc $S \in J^U$ et il existe $S' \in \mathbb{C}[X]$ tel que $S = PS'$. S' est U-invariant de poids $\lambda_i - \alpha$, or $\lambda_i - \alpha \notin P^{++}$ car $(\lambda_i - \alpha | \alpha) < 0$. Donc $S' = 0$ et $P_i(X_{-\alpha} P_j) = P_j(X_{-\alpha} P_i)$. D'autre part, comme λ_i est fondamental, on a : $X^2_{-\alpha} P_i = X^2_{-\alpha} P_j = 0$, et $X_{-\beta} P_i = X_{-\beta} P_j = 0$ pour toute racine simple $\beta \neq \alpha$. On en déduit que pour toute $\gamma \in \mathscr{B}$, on a :

$$P_i \exp(t X_{-\gamma} P_j) = P_j \exp(t X_{-\gamma} P_i)$$

i. e.

$$\exp t X_{-\gamma}(P_i/P_j) = P_i/P_j.$$

Donc P_i/P_j est une fonction rationnelle G-invariante, non constante, sur X, ce qui contredit le fait que X est l'adhérence d'une G-orbite.

(ii) Il existe i et j distincts tels que P_i et P_j figurent dans $R(P_1, \ldots, P_m)$ et $\lambda_i = \lambda_j$.

D'après le tableau I, le poids λ_i est fondamental. Soient α la racine simple telle que $(\lambda_i | \alpha) \neq 0$, et

$$S = (\lambda | \alpha) P(X_{-\alpha} P_i) - (\lambda_i | \alpha) P_i(X_{-\alpha} P),$$
$$S' = (\lambda | \alpha) P(X_{-\alpha} P_j) - (\lambda_i | \alpha) P_j(X_{-\alpha} P).$$

D'après [6], proposition 2, S et S' sont U-invariants, de poids $\lambda + \lambda_i - \alpha$.

On montre comme dans le premier cas que $S = S' = 0$. On en déduit que $P_i(X_{-\alpha} P_j) - P_j(X_{-\alpha} P_i) = 0$ et on conclut comme précédemment.

COROLLAIRE. — *Soit* H *le stabilisateur de* x *dans* G. *Alors* $\mathbb{C}[X] \simeq \mathbb{C}[G]^H$.

Démonstration. — Comme X est normale (*cf.* théorème 1.2) et $\operatorname{codim}_X(X - G x) \geqq 2$, ona : $\mathbb{C}[X] \simeq \mathbb{C}[G x]$.

3.3. REMARQUES ET CONTRE-EXEMPLES. — (i) Le théorème 3.2 est (bien sûr) faux si V n'est pas exceptionnel. Par exemple, si $G=SL_2(\mathbb{C})$ et $V=\{$polynômes homogènes de degré 3 en x et $y\}$, alors $X=\overline{Gx^2y}=Gx^2y\cup Gx^3\cup\{0\}$ contient la G-orbite Gx^3 de codimension 1.

(ii) Soit V un G-module exceptionnel. Soit $\mathcal{N}(V)$ le nilcône, i. e. l'ensemble des $x\in V$ tels que $P(x)=P(0)$ pour tout $P\in\mathbb{C}[V]^G$. Alors l'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{N}(V)]^U$ est engendrée par les U-invariants de poids non nul, donc est libre; par suite $\mathcal{N}(V)$ est normal, à singularités rationnelles. Il arrive que $\mathcal{N}(V)$ ne contienne pas de G-orbite dense.

Exemple. — $G=SL_4(\mathbb{C})$ et $V=2\mathbb{C}^4\oplus 2(\mathbb{C}^4)^*$.

On vérifie alors que $\dim\mathcal{N}(V)=12$ et que la dimension maximale d'une G-orbite dans $\mathcal{N}(V)$ est 11.

Soient de plus

$$Y=\{x\oplus\lambda x\oplus f\oplus\mu f\mid x\in(\mathbb{C}^4)^*,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2,\ f(x)=0 \text{ et } \lambda^2=\mu^3\}$$

et

$$Z=\{0\oplus x\oplus 0\oplus f\mid x\in\mathbb{C}^4, f\in(\mathbb{C}^4)^* \text{ et } f(x)=0\}.$$

On vérifie facilement que $X=Y\cup Z$ est un fermé irréductible G-stable (de dimension 8) de $\mathcal{N}(V)$, et que Y est un ouvert affine G-stable de X avec $\mathbb{C}[Y]^G\simeq\mathbb{C}[u,v]/(u^3-v^2)$. Comme $\mathbb{C}[Y]^G$ n'est pas normal, Y n'est pas normal donc X non plus.

Le théorème 1.2 ne s'étend donc pas aux fermés irréductibles G-stables même contenus dans le nilcône.

3.4. SINGULARITÉS DES ADHÉRENCES D'ORBITES DANS UN G-MODULE EXCEPTIONNEL SIMPLE.

THÉORÈME. — *Soient* G *un groupe simple et* V *un* G*-module exceptionnel simple. Soient* $x\in V$ *et* $X=\overline{Gx}$. *L'ensemble des points singuliers de* X *est* $X\setminus Gx$, *sauf si* $X=V$, *ou si* G *est de type* B_5 *et* $V=E(\varpi_5)$.

Démonstration. — On utilisera le lemme évident suivant :

LEMME. — *Soit* M *un sous-*G*-module non trivial de* $\mathbb{C}[V]$ *tel que* X *soit l'ensemble des zéros de* M. *Soit* ∂M *l'ensemble des* $\partial P/\partial v$ *où* $P\in M$ *et* $v\in V$. *Alors :*

(*a*) ∂M *est un sous-*G*-module non trivial de* $\mathbb{C}[V]$, *image de l'application de* $V\otimes M$ *dans* $\mathbb{C}[V]$ *qui à* $v\otimes P$ *associe* $\partial P/\partial v$.

(*b*) *L'ensemble* Y *des zéros de* ∂M *est formé de points singuliers de* X.

Montrons maintenant, sur des exemples, que (avec les notations précédentes) l'ensemble des zéros de M est $X\setminus Gx$.

Exemple 1. — G est de type A_n et $V=E(2\varpi_n)$.

On identifie V à l'ensemble des formes quadratiques à $(n+1)$ variables.

Soit $P: V\to\mathbb{C}$ le discriminant. Si $P(x)\neq 0$ alors $X=Gx$ est lisse.

Si $P(x)=0$, alors X est l'ensemble des formes quadratiques de rang au plus $(p-1)$, pour un $p\in[1, n+1]$. On peut donc prendre $M=E(2\varpi_p)\subset\mathbb{C}[V]_p$ (*cf.* [6], III.2, Remarque 2).

Alors

$$\partial M \twoheadleftarrow E(2\varpi_n) \otimes E(2\varpi_p) = E(2\varpi_n + 2\varpi_p) \oplus E(\varpi_n + \varpi_p + \varpi_{p-1}) \oplus E(2\varpi_{p-1})$$

et de plus

$$\partial M \subset \mathbb{C}[V]_{p-1} \simeq \oplus E(2a_1\varpi_1 + \ldots + 2a_{p-1}\varpi_{p-1})$$

[somme sur les $(a_1, \ldots, a_{p-1})$ tels que $a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1} = p-1$].

Donc, comme $\partial M \neq \{0\}$, on a : $\partial M = E(2\varpi_{p-1}) \subset \mathbb{C}[V]_{p-1}$.

Par suite, l'ensemble Y des zéros de ∂M est l'ensemble des formes quadratiques de rang au plus $(p-2)$, c'est-à-dire $Y = X \setminus G\,x$.

Le cas de A_n, $E(\varpi_2)$ est analogue.

Exemple 2. — G est de type E_7 et $V = E(\varpi_7)$.

Soient P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 des U-invariants comme dans le tableau I. Supposons d'abord que P_5 est nul sur X. Alors $X \subset \mathcal{N}(V)$ et d'après [6], démonstration du lemme 2, $\mathbb{C}[X]^U$ est l'une des algèbres suivantes :

$$\mathbb{C}; \quad \mathbb{C}[P_1]; \quad \mathbb{C}[P_1, P_2]; \quad \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3]; \quad \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3, P_4].$$

Mais si $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3]$, alors $P_4 = (P_1, P_3)_{\alpha_7}$ est nul sur X, donc on prouve comme dans la démonstration du théorème 3.2 que $P_1/P_3 \in \mathbb{C}(X)^G$, ce qui est absurde.

— Si $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3, P_4]$, alors $X = \mathcal{N}(V)$ et on peut prendre $M = \mathbb{C}P_5$. Comme $E(\varpi_7) = V \otimes M \twoheadrightarrow \partial M$ et $\partial M \neq \{0\}$, on voit que ∂M est le G-module engendré par P_3. De plus $P_4 < (P_1, P_3)$ (avec les notations de [6], proposition 1); on en déduit que $Y = \{\text{zéros de } \langle G.P_3 \rangle, \langle G.P_4 \rangle, P_5\}$ est le bord de X, et que $\mathbb{C}[Y]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2]$.

— Si $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2]$, alors on peut prendre $M = \langle G.P_3 \rangle$. Donc $\partial M \subset S^2 E(\varpi_7) = E(2\varpi_7) \oplus E(\varpi_1)$. Comme ∂M ne contient pas $E(2\varpi_7)$ (sinon il existe $P \in M$ et $v \in V$ tels que $\partial P/\partial v = P_1^2$; donc P et v sont de poids ϖ_7, et $P = P_3 < (P_1, P_1^2)$ ce qui contredit [6], démonstration du lemme 8) on a : $\partial M = E(\varpi_1) = \langle G.P_2 \rangle$. D'après [17], $Y = \{\text{zéros de } \langle G.P_2 \rangle\}$ est égal à $G.V^U$. Par suite, $\mathbb{C}[Y]^U = \mathbb{C}[P_1]$ (*cf.* [18]) donc Y est le bord de X.

— Si $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1]$ alors d'après [18], le bord de X est $\{0\}$ et 0 est point singulier de X.

Supposons maintenant que P_5 n'est pas nul sur X. Alors, d'après le théorème 3.2, l'idéal $I(X)^U$ de $\mathbb{C}[X]^U$ est engendré par $P_5 - P_5(x)$, une partie de $\{P_2, P_4\}$ et des combinaisons linéaires entre P_1 et P_3. De plus $P_1 \notin I(X)^U$ car $X \neq \{0\}$. Montrons par l'absurde que $I(X) = (P_5 - P_5(x))$.

Si $P_4 \in I(X)$, alors $(P_1, P_3)_{\alpha_7} = 0$ sur X donc $P_3/P_1 \in \mathbb{C}(X)^G$ et $P_3 - c\,P_1 \in I(X)$ pour un $c \in \mathbb{C}$. On a $c = 0$ (sinon le cône KX associé à X (*cf.* [19]) est inclus dans $\{\text{zéros de } \langle G.P_1 \rangle\} = \{0\}$ donc $\dim X = \dim KX = 0$, et $X = \{0\}$) d'où $P_3 \in I(X)$. Comme $P_5 < (P_1, P_3)$, on voit que $P_5 \in I(X)$, contradiction. De même, si $P_2 \in I(X)$, alors $P_3 \in I(X)$ car $P_3 < (P_1, P_2)$ (*cf.* [6], démonstration du lemme 8); d'où $P_5 \in I(X)$ ce qui est absurde.

Donc $I(X)$ est engendré par $P_5 - P_5(x)$ et des combinaisons linéaires de P_1 et P_3; mais d'après ce qui précède, ces combinaisons linéaires ne peuvent être que nulles.

On en déduit que $X = \{ y \in V \mid P_5(y) = P_5(x) \}$ d'où $X = G\,x$ (sinon, soit Y l'adhérence d'une G-orbite dans $X \setminus G\,x$; alors $Y = X$ d'après ce qui précède) donc X est lisse.

Remarque. — Cette démonstration prouve aussi que :

(1) $\mathcal{N}(V) = \{ x \in V \mid P_5(x) = 0 \}$ contient quatre G-orbites : $\{0\} = Z_1$, Z_2, Z_3 et Z_4 dense dans $\mathcal{N}(V)$, et $\mathbb{C}[Z_2]^U = \mathbb{C}[P_4]$; $\mathbb{C}[Z_3]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2]$; $\mathbb{C}[Z_4]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3, P_4]$.

En utilisant le théorème 1.4, on trouve pour les dimensions de ces G-orbites : 0, 28, 45, 55. De plus $\overline{Z_i}$ est le bord de $\overline{Z_{i+1}}$ pour $1 \leqq i \leqq 3$.

(2) Pour tout $c \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble des $x \in V$ tels que $P_5(x) = c$, est une G-orbite lisse.

On retrouve et on complète ainsi certains résultats de [20].

Les cas de A_5, $E(\varpi_3)$; C_3, $E(\varpi_3)$; D_6, $E(\varpi_6)$ s'étudient de façon analogue.

Exemple 3. — G est de type F_4 et $V = E(\varpi_4)$.

L'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$ est engendrée par

P_1 homogène de degré 1, de poids ϖ_4,

P_2 homogène de degré 2, de pods ϖ_4,

P_3 homogène de degré 3, de poids ϖ_3,

P_4 homogène de degré 2, de poids 0,

P_5 homogène de degré 3, de poids 0.

De plus $P_3 = (P_1, P_2)_{\alpha_4}$; $P_4 < (P_1, P_1)$ et $P_5 < (P_1, P_2)$.

Si $X \subset \mathcal{N}(V)$ alors d'après [6], théorème 4 et sa démonstration, $\mathbb{C}[X]^U$ est l'une des algèbres suivantes :

$$\mathbb{C}; \quad \mathbb{C}[P_1]; \quad \mathbb{C}[P_1, P_2]; \quad \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3].$$

On élimine, comme dans l'exemple précédent, le cas de $\mathbb{C}[P_1, P_2]$; celui de $\mathbb{C}[P_1]$ est traité dans [18]. On peut donc supposer que $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3]$, donc $X = \mathcal{N}(V) = \{$zéros de $M\}$ où $M = \mathbb{C}P_4 \oplus \mathbb{C}P_5$. Tout zéro de $\partial(\mathbb{C}P_5)$ est donc un point singulier de M; or $\partial(\mathbb{C}P_5) \twoheadleftarrow E(\varpi_4)$ et $\partial(\mathbb{C}P_5) \subset \mathbb{C}[V]_2$ (*cf.* le lemme) donc $\partial(\mathbb{C}P_5) = \langle G.P_2 \rangle$. Par suite l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{N}(V)$ contient $\{$zéros de $\langle G.P_2 \rangle\} = \overline{G.V^U}$ (d'après [17]) et on conclut comme dans l'exemple 2.

Si P_5 n'est pas nul sur X, alors on montre comme dans l'exemple 2 que $P_3 \notin I(X)$; de plus $P_2 \notin I(X)$ car $P_5 < (P_1, P_2)$. On en déduit que $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3]$ et que

$$X = \{ y \in V \mid P_4(y) = P_4(x) \text{ et } P_5(y) = P_5(x) \}.$$

On conclut, comme dans l'exemple 2, que X est lisse.

Il reste le cas où P_5 est nul sur X, et P_4 non nul sur X. On montre alors, comme dans le cas où $X = \mathcal{N}(V)$, que l'ensemble Y des zéros de $\langle G.P_2 \rangle$ dans X est formé de points singuliers de X, et que Y est le bord de X.

Remarque. — On vient de prouver que

(1) $\mathcal{N}(V) = \{x \in V \mid P_4(x) = P_5(x) = 0\}$ contient trois G-orbites $\{0\} = Z_1$, Z_2, et Z_3 dense dans $\mathcal{N}(V)$; de plus $\mathbb{C}[Z_2]^U = \mathbb{C}[P_1]$; $\mathbb{C}[Z_3]^U = \mathbb{C}[P_1, P_2, P_3]$ d'où $\dim Z_2 = 16$ et $\dim Z_3 = 24$. En outre $\overline{Z_i}$ est le bord de $\overline{Z_{i+1}}$ pour $i = 1$ *ou* 2.

(2) Si $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\{x \in V \mid P_4(x) = c \text{ et } P_5(x) = d\}$$

est une G-orbite lisse.

(3) Si $c \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\{x \in V \mid P_4(x) = c \text{ et } P_5(x) = 0\}$$

est l'adhérence d'une G-orbite, dont le bord est vide ou de dimension 16.

On retrouve ainsi des résultats de [21].

Le cas de C_3, $E(\varpi_2)$ se traite de la même façon. Les autres cas sont plus faciles, excepté B_5, $E(\varpi_5)$.

Exemple 4. — G est de type B_5 et $V = E(\varpi_5)$.

Soit H un groupe simplement connexe de type D_6. Alors H opère sur V [on est dans le cas de D_6, $E(\varpi_6)$]. D'après le tableau I, on a $\mathbb{C}[V]^H = \mathbb{C}[V]^G$.

Soit $\mathcal{N}(V)$ le nilcône (pour G ou pour H); on montre comme dans l'exemple 2 que $\mathcal{N}(V)$ contient l'adhérence X d'une H-orbite de dimension 25, et que le H-bord Y de X est de dimension 16; de plus Y est le lieu singulier de X.

Mais d'après [22], proposition 6, X et Y sont des adhérences de G-orbites, et X contient une G-orbite Z de dimension 23, qui est donc formée de points lisses de X. Le G-bord de X n'est donc pas le lieu singulier de X.

3.5. Pour terminer, donnons (sans démonstration) quelques exemples de modules exceptionnels sur des groupes non simples, afin de montrer que les graphes qui interviennent sont plus compliqués que ceux des modules exceptionnels sur des groupes simples.

Dans les exemples qui suivent, le groupe G est de la forme $H \times H'$ où H et H' sont simples; les poids fondamentaux de H (resp. H') sont notés $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ (resp. $\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots$) et ordonnés comme dans [9].

Exemple 1. :

$$G = SL_3(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}),$$
$$V = E(\varpi_1 + \varpi'_1) \oplus E(\varpi_2).$$

L'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$ est engendrée par des éléments homogènes, algébriquement indépendants, de degrés et poids :

$$(1, 0, \varpi_2 + \varpi'_1), \quad (0, 1, \varpi_1), \quad (2, 0, \varpi'_1), \quad (1, 1, \varpi'_1), \quad (2, 1, \varpi_2).$$

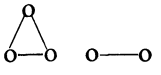
Le graphe est : o———o———o o———o.

Exemple 2 :

$$G = SL_4(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}),$$
$$V = E(\varpi_1 + \varpi_1') \oplus E(\varpi_2).$$

L'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$ est engendrée par des éléments homogènes, algébriquement indépendants, de degrés et poids :

$$(1, 0, \varpi_3 + \varpi_1'), \quad (1, 1, \varpi_1 + \varpi_1'), \quad (2, 1, \varpi_1 + \varpi_3), \quad (0, 1, \varpi_2),$$
$$(0, 2, 0), \quad (2, 0, \varpi_2), \quad (2, 1, 0).$$

Le graphe est : 

Exemple 3 :

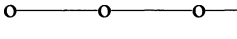
$$G = SL_3(\mathbb{C}) \times Sp_4(\mathbb{C})$$

où $Sp_4(\mathbb{C})$ est le groupe symplectique de rang 2,

$$V = E(\varpi_1 + \varpi_1').$$

L'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$ est engendrée par des éléments homogènes, algébriquement indépendants, de degrés et poids :

$$(1, \varpi_2 + \varpi_1'), \quad (2, \varpi_1 + \varpi_2'), \quad (2, \varpi_1), \quad (3, \varpi_1'), \quad (4, \varpi_2 + \varpi_2').$$

Le graphe est :  .

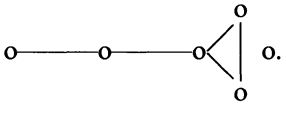
Remarque. — G opère sur V « sans multiplicité » (*cf.* [3], théorème 3).

Exemple 4 :

$$G = SL_4(\mathbb{C}) \times Sp_4(\mathbb{C}),$$
$$V = E(\varpi_1 + \varpi_1').$$

L'algèbre $\mathbb{C}[V]^U$ est engendrée par des éléments homogènes, algébriquement indépendants, de degrés et poids :

$$(1, \varpi_3 + \varpi_1'), \quad (2, \varpi_2 + \varpi_2'), \quad (2, \varpi_2), \quad (3, \varpi_1 + \varpi_1'),$$
$$(4, \varpi_1 + \varpi_3 + \varpi_2'), \quad (4, 0).$$

Le graphe est :  .

Remarque. — Le groupe $\mathbb{C}^* \times G$ opère sur V « sans multiplicité » (d'après [3], théorème 3).

QUESTIONS. — Si V est un module exceptionnel sur un groupe G non simple, et si X est l'adhérence d'une G-orbite dans V, l'algèbre $\mathbb{C}[X]^U$ est-elle libre? Le bord de X est-il de codimension au moins 2 dans X? (La réponse à ces questions est affirmative si V est simple.)

4. Zéros de covariants quadratiques

4.1. Soit V un G-module rationnel de dimension finie, isomorphe à $E(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_r)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des poids dominants. L'algèbre $\mathbb{C}[V]$ est donc $\mathbb{N}^r$-graduée. Posons

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^r;$$

alors

$$\mathbb{C}[V]_{e_i+e_j} \simeq \begin{cases} E(\lambda_i)^* \otimes E(\lambda_j)^* & \text{si} \quad i \neq j, \\ S^2 E(\lambda_i)^* & \text{si} \quad i = j, \end{cases}$$

donc

$$\mathbb{C}[V]_{e_i+e_j} \supset E(\lambda_i + \lambda_j)^*.$$

Pour $1 \leqq i, j \leqq r$, soit $M_{i,j}$ un supplémentaire G-stable de $E(\lambda_i+\lambda_j)^*$ dans $\mathbb{C}[V]_{e_i+e_j}$.

THÉORÈME. — *Soit* I (*resp.* J) *l'idéal de* $\mathbb{C}[V]$ *engendré par les* $M_{i,j}$ *pour* $1 \leqq i < j \leqq r$ (*resp.* $1 \leqq i \leqq j \leqq r$). *Alors* I *et* J *sont* G-*stables, réduits et* $(\mathbb{C}[V]/I)^U \simeq \mathbb{C}[E(\lambda_1)]^U \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}[E(\lambda_r)]^U$; $(\mathbb{C}[V]/J)^U \simeq \mathbb{C}[\varphi_1, \ldots, \varphi_r]$ *où pour* $1 \leqq i \leqq r$, φ_i *est de degré* e_i *et de poids* λ_i^*.

Les ensembles X *des zéros de* I, *et* Y *des zéros de* J, *sont des variétés normales, à singularités rationnelles.*

De plus $Y = G.V^U$.

Démonstration. — Montrons d'abord quelques résultats préliminaires. Soit $\mathscr{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, sur laquelle G opère par automorphismes localement finis. Deux éléments T-homogènes P et Q de $\mathscr{A}^U$ sont dits *orthogonaux* (on note $P \perp Q$) si l'image de l'application de $\langle G.P \rangle \otimes \langle G.Q \rangle$ dans $\mathscr{A}$, qui à $R \otimes S$ associe RS, est le G-module engendré par PQ.

LEMME. — *Soient* P, Q, Q′ *des éléments* T-*homogènes de* $\mathscr{A}^U$ *tels que* P *soit orthogonal à* Q *et* Q′. *Si* $R < (Q, Q')$ *alors* P *est orthogonal à* R.

Démonstration du lemme. — Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Choisissons, pour tout $\alpha \in R$, un $X_\alpha \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ et $H_\alpha \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tel que

$$C = \sum_{\alpha \in R} X_\alpha X_{-\alpha} + \sum_{\alpha \in \mathscr{B}} H_\alpha^2,$$

soit un opérateur de Casimir (*cf.* [9], chap. VIII, § 2, proposition 6). On va calculer les valeurs propres de C opérant sur $\langle G.P\rangle.\langle G.R\rangle$.

Soit S un élément T-homogène, de poids ω, de $\langle G.R\rangle$. Soient λ, μ, μ', ν les poids respectifs de P, Q, Q', R. On a

$$\begin{aligned}
C(PS) &= \sum_{\alpha\in R}(X_\alpha X_{-\alpha})(PS)+\sum_{\alpha\in\mathscr{B}}H_\alpha^2(PS)\\
&= \sum_{\alpha\in R}(X_\alpha X_{-\alpha})(P)S+\sum_{\alpha\in\mathscr{B}}H_\alpha^2(P)S\\
&\quad+\sum_{\alpha\in R}X_{-\alpha}(P)X_\alpha(S)+\sum_{\alpha\in R}X_{-\alpha}(S)X_\alpha(P)\\
&\quad+2\sum_{\alpha\in\mathscr{B}}H_\alpha(P)H_\alpha(S)\\
&\quad+\sum_{\alpha\in R}(X_\alpha X_{-\alpha})(S)P+\sum_{\alpha\in\mathscr{B}}H_\alpha^2(S)P\\
&= C(P)S+2\sum_{\alpha\in R^+}X_{-\alpha}(P)X_\alpha(S)+2\langle\lambda,\omega\rangle PS+C(S)P,
\end{aligned}$$

car $X_\alpha(P)=0$ pour $\alpha\in R^+$; et $\sum_{\alpha\in\mathscr{B}}H_\alpha(P)H_\alpha(S)=\langle\lambda,\omega\rangle PS$.

Or $S\in\langle G.P\rangle.\langle G.Q'\rangle$ donc S s'écrit $S=\sum_{j=1}^{n}S_jS'_j$ où $S_j\in\langle G.Q\rangle_{\mu_j}$; $S'_j\in\langle G.Q'\rangle_{\mu'_j}$ et $\mu_j+\mu'_j=\omega$ pour $1\leqq j\leqq n$. Donc

$$\sum_{\alpha\in R^+}(X_{-\alpha}P)(X_\alpha S)=\sum_{\substack{1\leqq j\leqq n\\ \alpha\in R^+}}(X_{-\alpha}P)(X_\alpha S_j)S'_j+(X_{-\alpha}P)(X_\alpha S'_j)S_j.$$

Remarquons qu'on a :

$$2\sum_{\alpha\in R^+}(X_{-\alpha}P)(X_\alpha S_j)=C(PS_j)-C(P)S_j-PC(S_j)-2\langle\lambda,\mu_j\rangle PS_j$$

et une formule analogue pour les S'_j, donc

$$\begin{aligned}
C(PS) &= C(P)S+C(S)P+2\langle\lambda,\omega\rangle PS\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}C(PS_j)S'_j+C(PS'_j)S_j-2C(P)S_jS'_j\\
&\quad-P(C(S_j)S'_j+C(S'_j)S_j)-2(\langle\lambda,\mu_j\rangle+\langle\lambda,\mu'_j\rangle)PS_jS'_j\\
&= -C(P)S+C(S)P+\sum_{j=1}^{n}C(PS_j)S'_j+C(PS'_j)S_j-P(C(S_j)S'_j+C(S'_j)S_j).
\end{aligned}$$

Or d'après [9], (chap. VIII, § 6, corollaire de la proposition 7), on a

$$C(P)=\langle\lambda,\lambda+2\rho\rangle P;\qquad C(S)=\langle\nu,\nu+2\rho\rangle S;$$
$$C(S_j)=\langle\mu,\mu+2\rho\rangle S_j\quad\text{et}\quad C(S'_j)=\langle\mu',\mu'+2\rho\rangle S'_j.$$

De plus, comme $P \perp Q$, on a : $PS_j \in \langle G.PQ \rangle$ donc

$$C(PS_j) = \langle \lambda+\mu, \lambda+\mu+2\rho \rangle PS_j$$

et de même

$$C(PS'_j) = \langle \lambda+\mu', \lambda+\mu'+2\rho \rangle PS'_j.$$

Donc $C(PS) = k\,PS$ où

$$\begin{aligned} k = &-\langle \lambda, \lambda+2\rho \rangle + \langle \nu, \nu+2\rho \rangle \\ &+ \langle \lambda+\mu, \lambda+\mu+2\rho \rangle + \langle \lambda+\mu', \lambda+\mu'+2\rho \rangle \\ &- \langle \mu, \mu+2\rho \rangle - \langle \mu', \mu'+2\rho \rangle \\ &= \langle \lambda, \lambda+2\rho \rangle + 2\langle \lambda, \mu+\mu' \rangle + \langle \nu, \nu+2\rho \rangle. \end{aligned}$$

Or $R < Q, Q')$ donc $E(\nu) \hookrightarrow E(\mu) \otimes E(\mu')$.

Par suite, on a $\nu = \mu+\mu'-s$ où s est une somme de racines positives. D'où

$$k = \langle \lambda, \lambda+2\rho \rangle + 2\langle \lambda, \nu \rangle + \langle \nu, \nu+2\rho \rangle + 2\langle \lambda, s \rangle$$

et $k \geqq \langle \lambda+\nu, \lambda+\nu+2\rho \rangle$.

Soit $E(\zeta)$ un sous-G-module simple de $\langle G.P \rangle . \langle G.R \rangle$; C est une homothétie de rapport $\langle \zeta, \zeta+2\rho \rangle$ sur $E(\zeta)$, et de rapport k sur $\langle G.P \rangle . \langle G.R \rangle$ donc

$$\langle \zeta, \zeta+2\rho \rangle \geqq \langle \lambda+\nu, \lambda+\nu+2\rho \rangle.$$

Or $\zeta = \lambda+\nu-s'$ où s' est une somme de racines positives. D'où

$$\begin{aligned} &\langle \zeta, \zeta+2\rho \rangle - \langle \lambda+\nu, \lambda+\nu+2\rho \rangle \\ &\qquad = \langle s', s' \rangle - \langle s', \lambda+\nu+2\rho \rangle - \langle \lambda+\nu, s' \rangle \\ &\qquad = -\langle s', \lambda+\nu+\zeta+2\rho \rangle \leqq 0. \end{aligned}$$

Donc $s'=0$ et $\zeta = \lambda+\nu$. On voit donc que $\langle G.P \rangle . \langle G.P \rangle = \langle G.PR \rangle$, ce qui prouve le lemme.

Montrons maintenant le théorème. Soient $\mathscr{A} = \mathbb{C}[V]/I$ et $\Pi : \mathbb{C}[V] \to \mathscr{A}$ l'application canonique. Comme I est engendré par des G-modules $\mathbb{N}^r$-homogènes, $\mathscr{A}$ est une G-algèbre $\mathbb{N}^r$-graduée. Pour $1 \leqq i \leqq r$, soit $\varphi_i \in E(\lambda_i)^{*U} \setminus \{0\}$.

Si $i \neq j$, alors $\Pi(\varphi_i) \perp \Pi(\varphi_j)$ par définition de I. On en déduit, par applications répétées du lemme, que si $P \in \mathbb{C}[E(\lambda_i)]$ et $Q \in \mathbb{C}[E(\lambda_j)]$ (avec $i \neq j$), alors $\Pi(P) \perp \Pi(Q)$ [en effet, si P est homogène de degré n, alors il existe P_1 homogène de degré $(n-1)$ tel que $P < (P_1, \varphi_i)$]. Donc $\mathscr{A}^U \simeq \mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_r$ où $\mathfrak{A}_i \simeq \mathbb{C}[E(\lambda_i)]^U / I^U \cap \mathbb{C}[E(\lambda_i)]^U$.

Or $I \cap \mathbb{C}[E(\lambda_i)] = \{0\}$ car I est engendré par des éléments de degré $e_i + e_j (i \neq j)$. Par suite,

$$\mathscr{A}^U \simeq \mathbb{C}[E(\lambda_1)]^U \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}[E(\lambda_r)]^U.$$

De même, si $\mathscr{A}' = \mathbb{C}[V]/J$, et $\Pi' : \mathbb{C}[V] \to \mathscr{A}'$ est l'application canonique, alors comme $\Pi'(\varphi_i) \perp \Pi'(\varphi_j)$ pour tout (i, j), on a : $\mathscr{A}'^{U} \simeq \mathbb{C}[\varphi_1, \ldots, \varphi_r]$.

Comme $\mathscr{A}^{U}$ et $\mathscr{A}'^{U}$ sont réduites, on voit facilement que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont réduites. En outre, d'après le résultat de H. Kraft déjà cité, les variétés X et Y sont normales, à singularités rationnelles. Montrons enfin que $Y = G.V^{U}$. Soient $\bar{G}$ le produit de G par $(\mathbb{C}^*)^r$ opérant « diagonalement » sur $V = \bigoplus_{i=1}^{r} E(\lambda_i)$, et $\bar{B}$ le sous-groupe de Borel de $\bar{G}$ contenant B. Comme $\mathbb{C}[Y]^{U} = \mathbb{C}[\varphi_1, \ldots, \varphi_r]$, il est immédiat que Y est le plus petit fermé $\bar{G}$-stable Z de V tel que pour tout $i \in [1, r]$, la projection de Z sur $E(\lambda_i)$ ne soit pas triviale.

En particulier $Y \supset G.V^{U}$; en effet, $G.V^{U}$ est fermé car V^{U} est stable par un sous-groupe parabolique de G. Par suite, l'algèbre $\mathbb{C}[G.V^{U}]^{U}$ est engendrée par $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Ceux-ci ont des poids linéairement indépendants pour l'action de $\bar{B}$, donc sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$. D'où $\mathbb{C}[G.V^{U}]^{U} = \mathbb{C}[Y]^{U}$, donc $G.V^{U} = Y$.

4.2. EXEMPLES.

(i) *Variétés de complexes.* — Soient $E_1, \ldots, E_{r+1}$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit

$$V = \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \oplus \mathrm{Hom}(E_2, E_3) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}(E_r, E_{r+1}).$$

Soit $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r$. Définissons la « variété de complexes »

$$X(a) = \{ \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_r \in V \mid \mathrm{rg}(\varphi_i) \leqq a_i \text{ pour } 1 \leqq i \leqq r,$$

et

$$\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0 \text{ pour } 1 \leqq i \leqq r-1 \}.$$

Alors $X(a)$ est une sous-variété de V, stable par $G = SL(E_1) \times \ldots \times SL(E_{r+1})$.

Le théorème suivant est dû à G. Kempf (*cf.* [23]) et a été étendu par C. de Concini et E. Strickland au cas où le corps de base est de caractéristique quelconque (*cf.* [24]).

THÉORÈME. — *Si* $a_i + a_{i+1} \leqq \dim E_{i+1}$ *pour* $1 \leqq i \leqq r-1$, *alors :*

(*a*) *L'idéal des fonctions polynomiales sur* V, *nulles sur* $X(a)$, *est engendré par les* G-*covariants suivants :*

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1}) \oplus \mathrm{Hom}(E_{i+1}, E_{i+2}) \to \mathrm{Hom}(E_i, E_{i+2}),$$
$$\varphi \oplus \psi \to \psi \circ \varphi$$

et

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^{a_i+1} E_i, \Lambda^{a_i+1} E_{i+1}),$$
$$u \to \Lambda^{a_i+1} u.$$

(*b*) *L'algèbre* $\mathbb{C}[X(a)]^{U}$ *est libre* [*donc* $X(a)$ *est normale, à singularités rationnelles*].

Démonstration. — On est dans la situation du théorème 4.1 avec $E(\lambda_i)=\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1})$. On vérifie immédiatement que $M_{i,\,j}=\{0\}$ sauf si $j\in\{i, i+1\}$, et que $M_{i,\,i+1}\simeq\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+2})^*$. Donc, avec les notations du théorème 4.1, on a :

$$X(a)=\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)\in X \mid \mathrm{rg}\,\varphi_i\leqq a_i \text{ pour } 1\leqq i\leqq r\}.$$

Soit $I(a_i)$ l'idéal de $\mathbb{C}[\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1})]$ engendré par le covariant

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1})\to\mathrm{Hom}(\Lambda^{a_i+1}E_i, \Lambda^{a_i+1}E_{i+1}).$$

D'après le théorème 4.1, on a :

$$\mathbb{C}[X(a)]^U\simeq\bigotimes_{i=1}^{r}(\mathbb{C}[\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1})]/I(a_i))^U.$$

On conclut en utilisant le fait que les algèbres $\mathbb{C}[\mathrm{Hom}(E_i, E_{i+1})/I(a_i)]^U$ sont libres (*cf.* par exemple [25], proposition 3).

(ii) *Généralisation aux représentations de graphes.* — Soit Γ un graphe orienté fini, c'est-à-dire la donnée d'un ensemble fini S de sommets et d'un ensemble A d'arêtes, $A\subset S\times S$. Soit $V=\bigoplus_{(s,\,s')\in A}\mathrm{Hom}(E_s, E_{s'})$.

Si $a=(a_\alpha)_{\alpha\in A}\in\mathbb{N}^A$, définissons la sous-variété $X(a)$ de V par

$$X(a)=\{(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\in V \mid \mathrm{rg}\,\varphi_\alpha\leqq a_\alpha \text{ si } \alpha\in A,$$

et $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha=0$ si α et β sont des arêtes successives de $\Gamma\}$.

On peut montrer comme précédemment le :

THÉORÈME. — *Si* U *est un sous-groupe unipotent maximal de* $G=\prod_{s\in S}SL(E_s)$, *alors l'algèbre* $\mathbb{C}[X(a)]^U$ *est libre.*

Le cas d'une variété de complexes correspond au graphe : $\underset{1}{\circ}\to\!\!-\!\!\underset{2}{\circ}\to\!\!-\!\!\underset{3}{\circ}\ldots\underset{r}{\circ}\to\!\!-\!\!\underset{r+1}{\circ}$.

(iii) *Orbites de vecteurs de poids maximal.* — Soit $V=E(\lambda)$ un G-module simple; soient M un supplémentaire de $E(2\lambda)^*$ dans S^2V^*, et J l'idéal de $\mathbb{C}[V]$ engendré par M. D'après le théorème 4.1, *l'ensemble des zéros de* J *est l'adhérence de l'orbite d'un vecteur de plus haut poids de* V; on retrouve ainsi le résultat de [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. SCHWARZ, *Representations of Simple Lie Groups with Regular Rings of Invariants* (*Invent. Math.*, vol. 49, 1978, p. 167-191).

[2] G. SCHWARZ, *Representations of Simple Lie Groups with a Free Module of Covariants* (*invent. Math.*, vol. 50, 1978, p. 1-12).

[3] V. KAČ, *Some Remarks on Nilpotent Orbits* (*J. Alg.*, vol. 64, 1980, p. 190-213).

[4] H. KRAFT et C. PROCESI, *Closures of Conjugacy Classes of Matrices are Normal* (*Invent. Math.*, vol. 53, 1979, p. 227-247).

[5] M. BRION, *Sur certaines représentations des groupes semi-simples* (*C.R.Acad. Sc.*, t. 296, série I, 1983, p. 5-6).

[6] M. BRION, *Invariants d'un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 33, fasc. I, 1983, p. 1-27).

[7] R. FOSSUM et B. IVERSEN, *On Picard Groups of Some Algebraic Fiber Spaces* (*J. Pure Appl. Algebra*, vol. 3, 1973, p. 269-280).

[8] G. KEMPF, *Toroidal Embeddings* (*Springer L.N.*, n° 339).

[9] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. VII et VIII, Hermann.

[10] D. E. LITTLEWOOD, *The Theory of Group Characters*, Oxford University Press.

[11] I. G. MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press.

[12] D. E. LITTLEWOOD, *Products and Plethysms of Characters with Orthogonal, Symplectic and Symmetric Groups* (*Can. J. Math.*, vol. 10, 1958, p. 17-32).

[13] H. WEYL, *Cesammelte Abhandlungen*, Band III.

[14] R. C. KING, *Spinor representations* (*Lecture Notes in Physics*, n° 50); *Group Theoretical Methods in Physics*, Springer-Verlag.

[15] D. E. LITTLEWOOD, *On the Concomitants of Spin Tensors* (*Proc. London Math. Soc.*, (2), vol. 49, 1947, p. 307-327).

[16] M. KRÄMER, *Eine Klassifikation bestimmter Untergruppen kompakter Liegruppen* (*Comm. in Algebra*, vol. 3, 1975, p. 691-737).

[17] W. LICHTENSTEIN, *A System of Quadrics Describing the Orbit of the Highest Weight Vector* (*Proc. A.M.S.*, vol. 84, n° 4, avril 1982).

[18] E. VINBERG et V. POPOV, *On a Class of Quasihomogeneous Varieties* (*Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 6, 1972, p. 743-748).

[19] W. BORHO et H. KRAFT, *Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 54, 1979, p. 61-104).

[20] S. J. HARIS, *Some Irreducible Representations of Exceptional Algebraic Groups* (*Amer. J. Maths.*, vol. 93, 1971, p. 75-106).

[21] J. G. MARS, *Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 94, 1966, p. 97-140).

[22] J. I. IGUSA, *A Classification of Spinors up to Dimension Twelve* (*Amer. J. Math.*, vol. 92, 1970, p. 997-1028).

[23] G. KEMPF, *Images of Homogeneous Vector Bundles and Varieties of Complexes* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 81, 1975, n° 5, p. 900-901).

[24] C. DE CONCINI et E. STRICKLAND, *On the Variety of Complexes* (*Adv. in Maths*, vol. 41, 1981, n° 1, p. 57-77).

[25] Th. VUST, *Sur la théorie des invariants des groupes classiques* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 26, n° 1, 1976, p. 1-31).

(Manuscrit reçu le 12 juin 1984.)

M. BRION,
Institut Fourier,
B.P. n° 74
38402 Saint-Martin-D'Hères.