

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-L. BRYLINSKI

J.-P. LABESSE

Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 17, n° 3 (1984), p. 361-412

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_3_361_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE D'INTERSECTION ET FONCTIONS L DE CERTAINES VARIÉTÉS DE SHIMURA

PAR J.-L. BRYLINSKI et J.-P. LABESSE

Introduction

0.1. MOTIVATIONS. — La fonction zêta d'une courbe modulaire elliptique a été calculée par Eichler et Shimura en terme de fonctions L de formes automorphes en utilisant une « relation de congruence » reliant l'action d'une correspondance de Hecke et celle de Frobenius sur la courbe réduite modulo p . Ensuite Shimura a étendu ces résultats aux cas de courbes associées au groupe multiplicatif d'algèbres de quaternions, déployées en une seule place à l'infini ([33], [34]).

A la suite de travaux de Kuga, Shimura et Ihara, Deligne a montré [11] que la conjecture de Ramanujan-Petersson était conséquence de la conjecture de Weil. Pour cela, il introduisait la « cohomologie parabolique » d'une courbe algébrique lisse X à valeurs dans un système local V :

$$\tilde{H}^1(X, V) = \text{Im } H_c^1(X, V) \rightarrow H^1(X, V),$$

pour X le quotient du demi-plan de Poincaré par l'action d'un sous-groupe de congruence Γ de $SL_2(\mathbb{Z})$, et pour V le système local associé à la k -ième puissance symétrique de la représentation naturelle de $GL(2)$, le groupe $\tilde{H}^1(X, V)$ s'identifie au groupe de cohomologie parabolique défini par Shimura en termes de cohomologie de Γ à valeurs dans la représentation en question. L'isomorphisme de Shimura se réécrit alors :

$$S_{k+2}(\Gamma) + \overline{S_{k+2}(\Gamma)} \cong \tilde{H}^1(X, V),$$

[où $S_{k+2}(\Gamma)$ est l'espace des formes paraboliques de poids $k+2$ pour Γ].

Le groupe $\tilde{H}^1(X, V)$ a un avatar l -adique, et Deligne montrait (à l'époque, modulo la conjecture de Weil) que les valeurs propres d'un Frobenius y étaient de poids $k+1$: ce qui donnait la conjecture de Ramanujan.

On dispose sur $\tilde{H}^1(X, V)$ de deux actions qui commutent : celle de l'algèbre de Hecke des fonctions à support compact sur $GL(2, \mathbb{A}_f)$, bi-invariantes par un sous-groupe compact ouvert adéquat, et celle du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$. Si l'on décompose cet

espace $\tilde{H}^1(X, V)$ en espaces isotypiques pour l'algèbre de Hecke, le groupe de Galois agit sur les composantes isotypiques. Les résultats de Deligne impliquent qu'en une place p où la représentation de l'algèbre de Hecke en p est non ramifiée, la représentation correspondante de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ est celle que donne la correspondance de Langlands locale. Langlands [25] a étendu ce résultat à des représentations ramifiées de la série principale ou des représentations spéciales. Deligne a ensuite traité le cas cuspidal pour $p \neq 2$.

Langlands [26] a plus tard étudié la fonction zêta d'une variété de Shimura associée au groupe algébrique $G = B^\times$, pour B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres totalement réel E . Si B est indéfinie aux places réelles, de telles variétés, complètes, sont des espaces de modules pour des variétés abéliennes avec action d'un ordre de l'algèbre opposée à B . Langlands établit pour cette fonction zêta (et, plus généralement pour des fonctions L associées à des systèmes locaux naturels sur cette variété) une expression comme produits de fonctions L de représentations automorphes. Sa méthode nécessite une description des diverses classes d'isogénie de variétés abéliennes en question, et d'autre part la comparaison de la formule des traces de Lefschetz et de la formule des traces de Selberg. L'étape cruciale consiste à comparer des intégrales orbitales issues de la formule des traces, à des expressions combinatoires faisant intervenir l'immeuble de Bruhat-Tits.

Cependant le cas de $G = R_{E/\mathbb{Q}} GL_2$ où E est un corps totalement réel de degré $d \geq 2$ restait à traiter. Les méthodes de Langlands [26] permettent encore de calculer la fonction L pour la cohomologie à support propre. La variété n'étant pas propre, les valeurs propres de Frobenius ne sont pas de poids pur; or comme dans le cas $E = \mathbb{Q}$, traité par Deligne, on souhaiterait disposer de groupes de cohomologie « purs » auxquels relier des fonctions L automorphes. La constatation s'impose alors que les groupes de cohomologie considérés ne sont pas les bons.

L'idée pour sortir de cette impasse a son origine dans une conjecture de Zucker [37] sur l'isomorphisme entre la cohomologie L_2 d'une variété hermitienne localement symétrique, et la cohomologie d'intersection (au sens de Goresky-Mac Pherson [18]) de sa compactification de Baily-Borel. Casselman, se fondant sur le lien entre la cohomologie L_2 et la (\mathfrak{g}, K) cohomologie des représentations automorphes et sur la conjecture de Zucker (démontrée par ce dernier dans le cas de Hilbert-Blumenthal) a suggéré que la cohomologie d'intersection pouvait être le bon objet cohomologique pour interpréter les fonctions L automorphes (d'ailleurs dans le cas elliptique modulaire, le groupe de cohomologie parabolique étudié par Deligne se révèle aujourd'hui être un groupe de cohomologie d'intersection). De plus, la cohomologie d'intersection peut être définie dans le cadre étale, et Gabber a démontré que dans le cas d'une variété propre, la cohomologie d'intersection satisfait la conjecture de Weil : en d'autres termes, elle est pure.

La non-compactité introduit dans la formule des traces de Selberg un « terme complémentaire ». Il se trouve que dans la situation considérée ce terme est nul si le degré d de E sur \mathbb{Q} est supérieur à 2.

En analysant la situation ainsi transformée par cette suggestion, nous fûmes amenés à la conclusion que le phénomène d'annulation du « terme complémentaire » devrait avoir

pour pendant un phénomène cohomologique d'annulation aux pointes. Nous avons alors établi cette annulation cohomologique. Comme l'algèbre de Hecke opère naturellement sur la cohomologie d'intersection, il est alors facile d'étudier son action et d'établir grâce à la pureté une version de Ramanujan-Petersson dans le cas de Hilbert-Blumenthal. Nous espérons ainsi mettre en évidence le rôle que la cohomologie d'intersection devrait très naturellement jouer dans l'étude des variétés de Shimura et des représentations automorphes.

0.2. ORGANISATION DU TEXTE. — Un théorème de Zucker affirme que la cohomologie L^2 d'un voisinage d'une pointe d'une variété de Hilbert-Blumenthal est égale à sa cohomologie d'intersection. Ce résultat a été étendu par Borel au cas d'un espace hermitien localement symétrique pour un groupe de \mathbb{Q} -rang un. A l'époque où nous avons entrepris la rédaction du présent travail la version définitive du travail de Zucker [37] n'était pas encore disponible. On trouvera au paragraphe 1 une démonstration des résultats sur la cohomologie L^2 et la cohomologie d'intersection utilisés dans la suite de cet article (énoncés 1.3.6, 1.3.7 et 1.3.9). La méthode suivie ici est une adaptation de celle utilisée par Langlands dans [25], § 2, à l'aide de techniques qui nous ont été enseignées par A. Borel.

Le paragraphe 2 est la partie arithmétique de ce travail. Nous rappelons d'abord quelques résultats de Rapoport concernant les espaces de modules de Hilbert-Blumenthal et les compactifications lisses de ces espaces, construites par Rapoport [32]. Celles-ci sont des résolutions de la compactification de Baily-Borel (qu'on sait être définie sur \mathbb{Q}). Cette compactification existe au-dessus d'un certain ouvert de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ que nous ne sommes hélas pas capables de spécifier. Sur un corps de base donné (par exemple \mathbb{F}_q), sa frontière est de dimension 0 : c'est l'ensemble des pointes. Au paragraphe 2.2, nous prouvons le résultat arithmétique principal, à savoir l'annulation de la somme alternée des traces de Frobenius sur la cohomologie d'intersection du voisinage d'une pointe (théorème 2.2.9). La démonstration utilise le calcul sur \mathbb{C} fait au paragraphe 1. On prouve en fait que toute valeur propre du Frobenius est égale à 1 (ce qui ne saurait surprendre pour une « cusp singularity »). Le corollaire 2.2.10 donne l'annulation de la contribution des pointes. Ces résultats sont généralisés en 2.3 au produit de Frobenius par un élément de l'algèbre de Hecke trivial à la place considérée. 2.4 étend 2.1 à des groupes unitaires de \mathbb{Q} -rang un; la géométrie y est un peu plus délicate. Ce résultat isolé ne sert pas dans la suite.

Au paragraphe 3, on applique le résultat d'annulation du paragraphe 2 à l'interprétation géométrique, des travaux de Langlands. En 3.1 on précise les groupes G étudiés et les problèmes de modules de variétés abéliennes considérés; 3.2 contient quelques rappels sur les L -paquets, les données endoscopiques et les fonctions L automorphes. Le principal résultat de l'article est le théorème 3.3.1 qui exprime en terme de fonctions L automorphes la fonction L de la cohomologie d'intersection. Nous expliquons comment le corollaire 2.2.10 et un résultat d'annulation du terme complémentaire de la formule des traces de Selberg, permettent de démontrer 3.3.1 en suivant la méthode de Langlands. La preuve du théorème 3.3.1 n'utilise pas l'isomorphisme entre cohomologie L^2 et cohomologie d'intersection.

En 3.4 on raffine les résultats ci-dessus en exploitant l'isomorphisme entre la cohomologie L^2 et la cohomologie d'intersection; ceci permet d'obtenir une correspondance entre représentations l -adique et représentations de l'algèbre de Hecke dont on déduit une version de Ramanujan-Petersson pour les groupes considérés grâce au théorème de pureté de Gabber.

L'influence des travaux de Deligne et de Langlands sur le présent article a évidemment été déterminante. Il faut y ajouter, du côté géométrique, celle de Goresky et de MacPherson, et du théorème de pureté de Gabber. Nous sommes redevables à Casselman de l'idée de relier la cohomologie d'intersection aux représentations automorphes. Des conversations avec Borel nous ont permis de mieux approcher les travaux de Zucker; nous le remercions chaleureusement de nous avoir communiqué des résultats personnels inédits. Rapoport a bien voulu nous expliquer certaines propriétés de ses compactifications. Des conversations avec Rogawski nous ont permis de mieux comprendre certains aspects arithmétiques. Une conversation avec Steenbrink nous a informés de la parenté des singularités rencontrées ici avec les « cusp-singularities », dont il a étudié la cohomologie locale du point de vue de la théorie de Hodge.

1. Cohomologie L^2 et cohomologie d'intersection.

La contribution des pointes

1.0. NOTATIONS. — Dans toute la suite nous adopterons les conventions suivantes. Si \underline{G} est un groupe linéaire algébrique défini sur \mathbb{Q} on notera \underline{G}^1 l'intersection des noyaux des caractères rationnels de \underline{G} et G désignera la composante neutre du groupe des points réels : $G = \underline{G}(\mathbb{R})^0$ pour la topologie ordinaire.

Soit Γ un groupe discret, Γ' un sous-groupe distingué tel que Γ/Γ' agit sans point fixes sur un espace X , et soit (ξ, V) une représentation de Γ dans un vectoriel complexe V , triviale sur Γ' :

$$\xi: \Gamma/\Gamma' \rightarrow \text{End } V,$$

on notera \underline{V} le fibré sur $\Gamma \backslash X$ obtenu en quotientant $X \times V$ par la relation $(x, v) \sim (\gamma x, \xi(\gamma)v)$, et \underline{V} le faisceau des germes de sections de \underline{V} localement constantes.

Soit X une variété, \underline{V} un fibré vectoriel sur X on notera $\mathcal{E}^k(X, \underline{V})$ le faisceau des germes de formes différentielles de degré k sur X à valeurs dans \underline{V} , et si U est ouvert dans X on notera $\mathcal{E}^k(U, \underline{V})$ l'espace vectoriel $H^0(U, \mathcal{E}^k(X, \underline{V}))$.

1.1. GERMES DE FORMES L^2 AUX POINTES. — Soit \underline{G} un groupe réductif défini sur \mathbb{Q} , dont le groupe dérivé $\underline{G}_{\text{der}}$ est de \mathbb{Q} -rang un.

On supposera que l'espace symétrique X associé à G est hermitien symétrique. Soit $\Gamma \subset \underline{G}(\mathbb{Q}) \cap G$ un sous-groupe arithmétique net ([5], §17.1), le quotient $\Gamma \backslash X$ a une structure naturelle de variété algébrique et on dispose d'une compactification canonique :

$$j: \Gamma \backslash X \hookrightarrow \overline{\Gamma \backslash X}.$$

La frontière $\partial(\Gamma \backslash X) = \overline{\Gamma \backslash X} - \Gamma \backslash X$ est une réunion disjointe de variétés connexes propres et lisses puisque $\underline{G}_{\text{der}}$ est de \mathbb{Q} -rang un [3].

On notera \underline{Z} le centre de \underline{G} . Considérons une représentation ξ de G dans un vectoriel complexe V et triviale sur Z^1 . On définit une action de G sur le système local trivial $X \times V$ au-dessus de X en posant :

$$g(x, v) = (gx, \xi(g)v).$$

Comme Γ est net, le quotient de $X \times V$ par Γ devient un système local au-dessus de $\Gamma \backslash X$ que l'on notera \underline{V} ; le fibré vectoriel sur $\Gamma \backslash X$ associé à \underline{V} sera noté \underline{V} .

Choisissons $x_0 \in X$, on notera K le stabilisateur de x_0 dans G . On peut choisir une forme hermitienne définie positive sur V invariante par $K^1 = K \cap G^1$ puisque K^1 est compact modulo $Z^1 \cap K^1$ et que ξ est triviale sur Z^1 . Une telle métrique sera dite admissible. Elle définit une métrique sur les fibres de $X \times V \rightarrow X$ invariante sous G^1 . Comme Γ est inclus dans G^1 cette métrique provient d'une métrique hermitienne sur \underline{V} .

Choisissons enfin une métrique euclidienne sur $\mathfrak{g}_0 = \text{lie } G$ invariante sous $\text{Ad } K$, on en déduit une métrique sur X , sur le fibré des formes différentielles sur X (ainsi qu'une forme volume) invariantes sous G^1 . Par produit tensoriel on obtient une métrique sur le fibré des formes différentielles à valeurs dans \underline{V} . A quasi-isométrie près les métriques sont indépendantes des choix. Pour simplifier un peu les notations, au lieu de $\mathcal{E}^k(\Gamma \backslash X, \underline{V})$, notons $\mathcal{E}^k(\underline{V})$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞ , de degré k sur $\Gamma \backslash X$ à valeurs dans \underline{V} , c'est-à-dire des formes ω sur X à valeurs dans V et vérifiant :

$$l(\gamma)\omega = \xi(\gamma)\omega \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma,$$

où l est la représentation régulière (gauche) de G dans l'espace des formes différentielles sur X .

On notera $\mathcal{E}_{(2)}^k(\underline{V})$ le sous-espace des formes qui sont de carré intégrable ainsi que leur dérivée extérieure, et on notera $H_{(2)}^*(\Gamma \backslash X, \underline{V})$ les espaces de cohomologie du complexe $\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V})$. Ce sont les espaces de « cohomologie L^2 ».

Soit $\mathcal{E}^*(\underline{V})$ le complexe de de Rham des faisceaux des germes de formes différentielles sur $\Gamma \backslash X$ à valeurs dans \underline{V} . Pour étudier les espaces de cohomologie L^2 on introduit un complexe de faisceaux $\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V})$ sur $\Gamma \backslash X$ tel que :

$$j: \mathcal{E}^*(\underline{V}) \hookrightarrow \mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V}) \hookrightarrow j_* \mathcal{E}^*(\underline{V}).$$

Il suffit de décrire les fibres de $\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V})$ aux points de $\partial(\Gamma \backslash X)$. Un élément de $(j_* \mathcal{E}^*(\underline{V}))_y$ est représenté par une forme ω sur $U \cap (\Gamma \backslash X)$ où U est voisinage ouvert convenable de $y \in \partial(\Gamma \backslash X)$; cet élément appartiendra à $\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V})_y$ si et seulement si, quitte à restreindre U , elle est de carré intégrable, ainsi que sa différentielle extérieure.

La proposition suivante est due à Zucker [37].

PROPOSITION 1.1.1. — *Les faisceaux $\mathcal{E}_{(2)}^k(\underline{V})$ sont fins.*

D'après la proposition 1.1.1, les espaces $H_{(2)}^k(\Gamma \backslash X, \underline{V})$ sont les espaces $H^k(\Gamma \backslash X, \mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V}))$. Zucker a conjecturé que la cohomologie L^2 en question, s'identifiait à la cohomologie d'intersection de $\Gamma \backslash X$ à coefficients dans le système local \underline{V} [37].

Une approche possible de cette conjecture consiste à prouver que le complexe de faisceaux $\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V})$ satisfait aux conditions exigées pour être une réalisation de l'objet $IC^*(\Gamma \backslash X, \underline{V})$ ([18], § 6.1).

Comme $\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V})$ est un sous-complexe de $j_* \mathcal{E}^*(\underline{V})$ et que $j_* \mathcal{E}^*(\underline{V})$ est une réalisation de l'objet $\mathbb{R}j_* \underline{V}$, il suffirait de prouver que pour tout point $y \in \partial(\Gamma \backslash X)$, en notant $cd(y)$ la codimension de $\partial(\Gamma \backslash X)$ au point y , l'application :

$$\rho_i(y) : \mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V}))_y \rightarrow (R^i j_* \underline{V})_y,$$

vérifie :

- (a) $\rho_i(y)$ est un isomorphisme si $i \leq cd(y) - 1$;
- (b) $\mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(\underline{V}))_y = 0$ si $i \geq cd(y)$.

Dans les paragraphes 1.2 et 1.3 ci-dessous on trouvera une démonstration, que nous avons conservée dans la version définitive pour la commodité du lecteur, de ces assertions pour les groupes considérés dans la suite de cet article. Notre démonstration est voisine de celle de Zucker [37] mais en diffère par un usage systématique de la \mathfrak{g} - \mathfrak{k} -cohomologie que Zucker, lui, n'utilise pas. Nous sommes redevables à A. Borel d'idées décisives. Depuis, A. Borel a obtenu une preuve de la conjecture de Zucker pour tous les groupes de \mathbb{Q} -rang un.

La description détaillée des espaces $(R^i j_* \underline{V})_y$ grâce à (1.2.6) et (1.3.4) sera essentielle pour la démonstration des résultats d'annulation du paragraphe 2.

1.2. CALCULS DE COHOMOLOGIE LOCALE. — Il convient de décrire un système fondamental de voisinages des points de $\partial(\Gamma \backslash X)$: une composante b de la frontière correspond à une classe de Γ -conjugaison de sous-groupe parabolique maximal défini sur \mathbb{Q} . Soit \underline{P} un \mathbb{Q} -parabolique, correspondant à b .

Soit \underline{N} le radical unipotent de \underline{P} , on posera $N = \underline{N}(\mathbb{R})$. Soit \underline{A} un tore déployé sur \mathbb{Q} maximal dans \underline{P} et soit $Z_P(\underline{A})$ son centralisateur et soit \underline{M}^1 l'intersection des noyaux des caractères rationnels de $Z_P(\underline{A})$. On posera $M^1 = \underline{M}^1(\mathbb{R})^0$, $A = \underline{A}(\mathbb{R})^0$, $M = M^1 Z$ et on aura :

$$P = \underline{P}(\mathbb{R})^0 = NAM = NAM^1,$$

avec $A \cap M = Z$.

On notera X_b l'espace hermitien symétrique associé à b . On choisit un point $x_1 \in X_b$ et on note Q son stabilisateur dans M .

Soit $K_P = K \cap P$, on supposera les points x_0 et x_1 choisis de telle sorte que $Q \supset K_P$.

Soit α l'unique racine simple de \underline{A} relativement à \underline{N} , on posera :

$$A(c) = \{a \in A \mid a^\alpha > c\},$$

$$\Gamma_P = \Gamma \cap P, \quad \Gamma_N = \Gamma \cap N,$$

et Γ_M sera la projection de Γ_P dans M . La composante connexe de la frontière attachée à P est :

$$b = \Gamma_M \setminus M/Q = \Gamma_M \setminus X_b.$$

Soit $y \in \Gamma_M \setminus X_b$ et Σ un voisinage de y dans $\partial(\Gamma \setminus X)$ d'image réciproque $\tilde{\Sigma}$ dans M , soit c un réel strictement plus grand que 1; considérons :

$$\Omega(c, \Sigma) = \Gamma_P \setminus N \tilde{\Sigma} A(c) K/K \subset \Gamma \setminus X.$$

La partie $\Omega(c, \Sigma) \cup \Sigma$ est un voisinage de y dans $\Gamma \setminus X$. Lorsque c et Σ varient on obtient ainsi un système fondamental de voisinages de y .

Il est aisé de calculer $(R^i j_* V)_y$. La démonstration qui suit est classique (cf. [19], §2). Pour alléger un peu les notations nous supposons ξ triviale sur Z .

Les ensembles $\Omega(c, \Sigma)$ sont des produits $\Omega(c, \Sigma) = (A(c)/Z \cap A) \cdot \Omega(\Sigma)$ où $\Omega(\Sigma) = \Gamma_P \setminus N \tilde{\Sigma}/K_P$ et donc $H^i(\Omega(c, \Sigma), V) = H^i(\Omega(\Sigma), V)$ puisque $A(c)$ est contractile. La projection :

$$\pi : \Omega(\Sigma) \rightarrow \Gamma_M \setminus \tilde{\Sigma}/K_P = X(\Sigma),$$

a pour fibre $\Gamma_N \setminus N$; on dispose d'une suite spectrale de Leray pour cette fibration dont le terme E_2^{pq} peut s'écrire :

$$E_2^{pq} = H^p(X(\Sigma), H^q(\Gamma_N \setminus N, V)),$$

où $H^q(\Gamma_N \setminus N, V)$ désigne le système local associé à la représentation naturelle de Γ_M dans $H^q(\Gamma_N \setminus N, V)$.

Le lemme suivant est classique [31].

LEMME 1.2.1. — L'homomorphisme $H^p(\mathfrak{n}, V) \rightarrow H^p(\Gamma_N \setminus N, V)$ [où $\mathfrak{n} = (\text{lie } N) \otimes \mathbb{C}$] est un isomorphisme.

Preuve. — L'homomorphisme provient de l'identification de $C^p(\mathfrak{n}, V)$ avec les formes sur N invariantes à gauche, à valeurs dans V . Comme la représentation ξ de N dans V est unipotente et N nilpotent avec Γ_N co-compact une suite de dévissages permet de se ramener au cas où ξ est triviale et N abélien; et dans ce cas le lemme est facile à prouver.

On peut donc reformuler ce qui précède en disant qu'il existe une suite spectrale convergeant vers $H^i(\Omega(c, \Sigma), V)$ et dont le terme E_2^{pq} est :

$$E_2^{pq} = H^p(X(\Sigma), H^q(\mathfrak{n}, V)).$$

On va de plus montrer que la suite spectrale dégénère au terme E_2 . Pour cela on remarque que la cohomologie $H^i(\Omega(\Sigma), V)$ peut se calculer au moyen du complexe de de Rham des formes sur $\Omega(\Sigma)$ à valeurs dans V . On dispose du sous-complexe des formes formes N -invariantes à gauche, c'est-à-dire telles que, en notant l la représentation régulière gauche :

$$l(n)\omega = \xi(n)\omega \quad \text{pour } n \in N.$$

Ce sous-complexe s'identifie lui-même au double complexe :

$$\mathcal{E}^*(X(\Sigma), \underline{\text{Hom}}(\Lambda^* \mathfrak{n}, V)).$$

On munit \underline{n} de la métrique de Kostant [23] et V d'une métrique admissible [8], on peut alors définir un sous-espace de formes harmoniques [23] dans $\text{Hom}(\Lambda^i \mathfrak{n}, V)$ qui s'identifie à $H^i(\mathfrak{n}, V)$. La projection sur les formes harmoniques commute à la représentation naturelle de P , et donc aussi à la différentielle totale du double complexe ci-dessus. On dispose alors d'une injection :

$$\lambda^i : \bigoplus_{p+q=i} H^p(X(\Sigma), H^q(\mathfrak{n}, V)) \rightarrow H^i(\Omega(\Sigma), V).$$

Compte tenu de la suite spectrale évoquée ci-dessus, il est clair que λ^i est bijective. Si on suppose Σ contractile, on peut remplacer $X(\Sigma)$ par $\Gamma_Q \backslash Q/K_P$ où $\Gamma_Q = \Gamma_M \cap Q$. En résumé on a la :

PROPOSITION 1.2.2.

$$(R^i j_* V)_y = \varinjlim_{c, \Sigma} H^i(\Omega(c, \Sigma), V) = \bigoplus_{p+q=i} H^p(\Gamma_Q \backslash Q/K_P, H^q(\mathfrak{n}, V)).$$

Nous allons maintenant étudier les $\mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(V))_y$. Bien entendu les conditions L^2 interdisent ici de négliger $A(c)$; d'autre part, il a semblé difficile de déterminer le terme E_2 de la suite spectrale de Leray en cohomologie L^2 . Pour pallier ce dernier inconvénient, il a paru commode de transcrire notre problème en termes de « \mathfrak{g} - \mathfrak{l} -cohomologie » où l'on dispose de la version relative de la suite spectrale de Hoschschild-Serre qui en est l'analogue [8]. Nous poserons $\mathfrak{p} = (\text{lie } P) \otimes \mathbb{C}$ et $\mathfrak{l}_P = (\text{lie } K_P) \otimes \mathbb{C}$.

Soit ω une forme sur $\Omega(c, \Sigma)$ à valeurs dans \underline{V} , elle peut se représenter par une forme notée encore ω sur $N \tilde{\Sigma} A(c)/K_P$ à valeurs dans V et vérifiant :

$$l(\gamma)\omega = \xi(\gamma)\omega \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma_P.$$

On va définir une forme sur $N \tilde{\Sigma} A(c)$: on posera $\eta = \xi^{-1} \tilde{\omega}$ en considérant ξ comme une fonction sur G à valeurs dans $\text{End}(V)$ et où $\tilde{\omega}$ est l'image réciproque sur $N \tilde{\Sigma} A(c)$ de ω . On a ainsi défini une forme η sur $N \tilde{\Sigma} A(c)$ qui vérifie (cf. [8], p. 213, VII-2-7 et [25], § 2, p. 7) :

$$(i) \quad l(\gamma)\eta = \eta.$$

(ii) $r(k)\eta = \xi(k)^{-1}\eta$ pour $k \in K_p$ et où r est la représentation régulière droite.

Si X est un vecteur dans l'algèbre de Lie on notera \tilde{X} le champ de vecteurs invariant à gauche sur le groupe associé, et $i(\tilde{X})$ sera le produit intérieur par ce champ de vecteurs. Les formes η vérifient de plus la condition.

(iii) $i(\tilde{X})\eta = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{k}_p$.

Soit maintenant \tilde{X} un champ de q -vecteurs invariant à gauche associé à $X \in \Lambda^q \mathfrak{p}$. Soit ω une forme de degré q , on posera :

$$f_{\omega, X} = i(\tilde{X})\omega;$$

la fonction $f_{\omega, X}$ est définie sur $Z\Gamma_p \setminus N\tilde{\Sigma}A(c)$ et prend ses valeurs dans V . Demander que ω soit L^2 revient à demander que $f_{\omega, X}$ le soit pour tout X . On dira que f est dans $L^{2, \infty}$ si pour tout $Z \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{p} alors $f * Z$ est L^2 . Si $f_{\omega, X}$ est dans $L^{2, \infty}$ pour tout X on dira que ω est L^2 ainsi que toutes ses dérivées, ou simplement $L^{2, \infty}$.

Si ω est une telle forme, $d\omega$ sera aussi L^2 . On notera $\mathcal{E}_{(2)}^q(\Omega(c, \Sigma), V)^\infty$ l'espace de ces formes, et $\mathcal{E}_{(2)}^q(y, \underline{V})^\infty$ l'espace des germes de ces formes (pour $c \rightarrow \infty$ et $\Sigma \ni y$) :

$$\mathcal{E}_{(2)}^q(y, \underline{V})^\infty = \varinjlim_{(c, \Sigma)} \mathcal{E}_{(2)}^q(\Omega(c, \Sigma), \underline{V})^\infty.$$

On aurait pu également définir $\mathcal{E}_{(2)}^q(y, \underline{V})$, c'est-à-dire l'espace des germes, L^2 ainsi que leur différentielle extérieure.

PROPOSITION 1.2.3. — *L'application naturelle $H^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(y, \underline{V})^\infty) \rightarrow H^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(y, \underline{V}))$ est un isomorphisme.*

Cette proposition nous a été communiquée par Borel [6]. Nous esquissons ci-dessous certains de ses arguments, pour la commodité du lecteur.

Soient ω comme ci-dessus et $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(Z \setminus P)$ on définit $\tilde{\omega} * \alpha$ en posant :

$$\tilde{\omega} * \alpha = \int_{Z \setminus P} \alpha(p) r(p) \tilde{\omega} dp,$$

où r est la représentation régulière droite.

Posons $\tilde{\Omega}(c, \Sigma) = Z\Gamma_p \setminus N\tilde{\Sigma}A(c)$, de sorte que $\Omega(c, \Sigma) = \tilde{\Omega}(c, \Sigma)/K_p$. Soit $\tilde{\omega}$ une forme de classe C^∞ , de carré intégrable sur $\tilde{\Omega}(c, \Sigma)$, alors si $c < c_1$ et $\tilde{\Sigma}_1 \subset \Sigma$, la forme $\tilde{\omega} * \alpha$ sera définie sur $\tilde{\Omega}(c_1, \Sigma_1)$ si le support de α est assez petit au voisinage de l'identité de $Z \setminus P$; de plus $\tilde{\omega} * \alpha$ sera de carré intégrable ainsi que toutes ses dérivées.

Supposons α bi-invariante sous K_p alors $\tilde{\omega} * \alpha$ sera invariante à droite sous K_p . Notons $\mathcal{E}_{(2)}^*(\tilde{\Omega}(c, \Sigma), \underline{V})_{K_p}$ le sous-complexe des formes K_p invariantes à droite.

En passant aux germes (pour $c \rightarrow \infty$ et $\Sigma \ni y$) on vérifie que la régularisation est homotope à l'identité et l'homomorphisme naturel :

$$\varinjlim_{c, \Sigma} H^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(\tilde{\Omega}(c, \Sigma), \underline{V})_{K_p}^\infty) \rightarrow \varinjlim_{c, \Sigma} H^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(\tilde{\Omega}(c, \Sigma), \underline{V})_{K_p})$$

est un isomorphisme.

On souhaite travailler sur $\Omega(c, \Sigma) = \tilde{\Omega}(c, \Sigma)/K_p$. Or la régularisation respecte l'invariance à gauche mais pas nécessairement la condition (iii) ci-dessus :

$$i(\tilde{X})\tilde{\omega} = 0 \quad \text{si } X \in \text{Lie } K_p.$$

Dans le cas de Hilbert-Blumenthal, $K_p = \{1\}$ et il n'y a plus rien à démontrer. Dans le cas général, Borel montre l'existence d'une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}_{(2)}^*(\Omega(c, \Sigma), \underline{V}) \otimes H^q(Z \setminus K_p) \Rightarrow H^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(\tilde{\Omega}(c, \Sigma), \underline{V})_{K_p}),$$

ainsi que de la suite spectrale analogue pour $L^{2,\infty}$ (dont la construction est plus facile), ceci force l'isomorphisme souhaité de la proposition 1.2.3.

Soit ω une forme sur $\Omega(c, \Sigma)$ à valeurs dans \underline{V} représentant un élément $a \in \mathcal{E}_{(2)}^q(y, \underline{V})^\infty$, et X un q -vecteur dans $\Lambda^q \mathfrak{p}$, on définit $f_{\omega, X}$ comme ci-dessus; c'est un élément de $L^2(\tilde{\Omega}(c, \Sigma))^\infty \otimes V$ si c est assez grand et Σ assez petit.

En posant $W(c, \Sigma) = L^2(\tilde{\Omega}(c, \Sigma))^\infty$, on voit que, par définition même des $C^q(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_p; \dots)$ l'application $\omega \mapsto (X \mapsto f_{\omega, X})$ induit un isomorphisme :

$$\mathcal{E}_{(2)}^q(\Omega(c, \Sigma), \underline{V})^\infty \rightarrow C^q(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_p; W(c, \Sigma) \otimes V)$$

et, en passant à la limite inductive si on pose :

$$W(y) = \varinjlim_{c, \Sigma} W(c, \Sigma)$$

on a encore :

$$\mathcal{E}_{(2)}^q(y, \underline{V})^\infty \cong C^q(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_p; W(y) \otimes V),$$

ces isomorphismes commutent aux différentielles et donc :

$$H_{(2)}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(y, \underline{V})^\infty) = H^i(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_p; W(y) \otimes V).$$

Le point y restera fixé dans la suite et nous l'omettrons dans les notations, et par abus de notations, nous représenterons un élément $f \in W$ par une fonction encore notée $f \in W(c, \Sigma)$.

On va décomposer W en somme directe de sous-espaces : soit $f \in W$ on posera :

$$f^N(p) = \int_{\Gamma_N \setminus N} f(np) \, dn, \quad p \in P.$$

On suppose que $\text{vol}(\Gamma_N \setminus N) = 1$ de sorte que $f \mapsto f^N$ est un projecteur (on utilise que Γ_p normalise N et Γ_N , et que la mesure de $\Gamma_N \setminus N$ est invariante par les automorphismes définis par Γ_p). On notera W^N son image et W_N son noyau. Une fonction dans W^N est N -invariante; une fonction dans W_N est dite parabolique. Nous allons d'abord montrer que :

$$(*) \quad H^i(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_p; W_N \otimes V) = 0.$$

Pour cela considérons la suite centrale descendante dans N :

$$N = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_r \supset \dots \supset \{1\}$$

et la suite correspondante d'idéaux caractéristiques :

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \supset \mathfrak{n}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{n}_r \supset \dots \supset \{0\}.$$

Les sous-algèbres \mathfrak{n}_r sont des idéaux de \mathfrak{p} (comme P est maximal on a $r \leq 2$). On posera de plus $\Gamma_r = N_r \cap \Gamma$. En remplaçant N par N_r et Γ_N par Γ_r on définit comme ci-dessus un projecteur $p_r: f \rightarrow f^{N_r}$.

Soit $W_{N_r}^{N_r+1} = \text{Im } p_{r+1} \cap \text{Ker } p_r$; c'est le sous-espace des f telles que $f^{N_r} = 0$ et $f = f^{N_r+1}$. Une double utilisation de la suite spectrale de Hochschild-Serre montre que (*) est impliqué par :

$$(**) \quad H^p(\mathfrak{n}_r/\mathfrak{n}_{r+1}, H^q(\mathfrak{n}_{r+1}, V) \otimes W_{N_r}^{N_r+1}) = 0.$$

Pour montrer (**), comme \mathfrak{n}_r agit de façon nilpotente dans $H^q(\mathfrak{n}_{r+1}, V)$, il suffit de montrer que :

$$(***) \quad H^p(\mathfrak{n}_r/\mathfrak{n}_{r+1}, W_{N_r}^{N_r+1}) = 0.$$

La démonstration qui suit est une généralisation de la preuve que donne Langlands du phénomène ci-dessus dans le cas particulier $\underline{G} = \text{GL}_2$ ([25], § 2).

Soit $f \in W_{N_r}^{N_r+1}$, on peut la développer en série de Fourier sur le tore compact $N_r/N_{r+1} \Gamma_r = L$:

$$f(e^X p) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} f_\lambda(p) e^{\lambda(X)}, \quad X \in \text{Lie } N_r.$$

où Λ est un réseau dans le dual de l'algèbre de Lie \tilde{L} de L.

La forme linéaire $\lambda = 0$ n'intervient pas car par hypothèse $f_0 = f^{N_r} = 0$. Choisissons une structure euclidienne sur \tilde{L} et soit (X_α) une base orthonormale. Les X_α définissent des champs de vecteurs invariants à gauche notés \tilde{X}_α sur $N_{r+1} \setminus P$ et donc des opérateurs sur $N_{r+1} \Gamma_P \setminus N \tilde{\Sigma} A(c)$ notés encore \tilde{X}_α . Soit $p \in P$, on vérifie immédiatement que :

$$(\tilde{X}_\alpha f_\lambda)(p) = \lambda(\text{Ad}(p) \cdot X_\alpha) f_\lambda(p).$$

Nous poserons :

$$\Delta(\lambda, p) = - \sum_{\alpha=1}^{\dim L} \lambda(\text{Ad}(p) \cdot X_\alpha)^2.$$

Lorsque p varie dans $N \tilde{\Sigma} A(c)$ et λ dans le réseau Λ privé de $\{0\}$, la fonction $\Delta(\lambda, p)^{-1}$ est bornée, ainsi que ses dérivées par rapport à p . Soit $f = \sum f_\lambda$ comme ci-dessus, on définit un opérateur de Green en posant :

$$(Gf)(p) = \sum \frac{f_\lambda(p)}{\Delta(\lambda, p)}.$$

Vu les propriétés des fonctions $\Delta(\lambda, p)$, il est clair que $Gf \in W_{N_r+1}^N$ et que :

$$\Delta Gf = f \quad \text{si} \quad \Delta = - \sum_{\alpha=1}^{\dim L} \tilde{X}_\alpha^2.$$

Soit maintenant $\omega \in \text{Hom}(\Lambda^k \tilde{L}, \mathcal{C}^\infty(\Gamma_r N_{r+1} \setminus P))$ on pose :

$$\delta\omega = - \sum_{\alpha=1}^{\dim L} \tilde{X}_\alpha \cdot i(X_\alpha) \omega \quad \text{et} \quad \Delta\omega = (d\delta + \delta d) \omega.$$

On voit facilement que $i(X) \Delta\omega = \Delta f_{\omega, X}$ si $X \in \Lambda^k \tilde{L}$. Il est également facile de vérifier que si $f_{\omega, X} \in W_{N_r+1}^N$ pour tout $X \in \Lambda^k \tilde{L}$ alors $Gf_{\delta\omega, Y} \in W_{N_r+1}^N$, pour tout $Y \in \Lambda^{k-1} \tilde{L}$. Soit $\varphi \in \text{Hom}(\Lambda^{k-1} \tilde{L}, \mathcal{C}^\infty(\Gamma_r N_{r+1} \setminus P))$ tel que $f_{\varphi, Y} = Gf_{\delta\omega, Y}$. On a alors $d\varphi = \omega$ si $d\omega = 0$. On en conclut que :

$$H^p(\mathfrak{n}_r/\mathfrak{n}_{r+1}, W_{N_r+1}^N) = 0.$$

Passons à l'étude de W^N . C'est la limite inductive des

$$W(c, \Sigma)^N = L^2(Z \Gamma_M \setminus A(c) \tilde{\Sigma}, a^{-2\rho} d^* a d\sigma)$$

où ρ est la demi-somme des racines positives (α et 2α) avec leur multiplicité. Utilisons de nouveau la version relative de la suite spectrale de Hoschschild-Serre [8]. La cohomologie $H^*(p, k_p, W^N \otimes V)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale ayant pour terme $E_2^{p,q}$:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{p}/\mathfrak{n}, \mathfrak{k}_p, W^N \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)).$$

Posons $\mathfrak{m} = \text{lie } M \otimes \mathbb{C}$ et $\mathfrak{a} = \text{lie } A \otimes \mathbb{C}$. Choisissons un supplémentaire \mathfrak{a}_1 de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}$ dans \mathfrak{a} . On a $\mathfrak{p}/\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_1$.

Comme dans la démonstration de la proposition 1.2.2 ci-dessus, l'utilisation de la métrique de Kostant [23] sur \mathfrak{n} permet de définir un sous-espace de formes harmoniques sur \mathfrak{n} à valeurs dans V , noté $H(\mathfrak{n}, V)$, stable par la représentation naturelle de $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_1$, et on dispose dans $\mathcal{C}^*(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_p, W^N \otimes V)$ d'un projecteur sur le sous-complexe de formes harmoniques sur \mathfrak{n} :

$$\mathcal{C}^*(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_1, \mathfrak{k}_p; W^N \otimes H^*(\mathfrak{n}, V)).$$

On en déduit que la suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ a été donné ci-dessus est dégénérée et donc que :

$$H^i(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}, W^N \otimes V) = \bigoplus_{p+q=i} H^p(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_1, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}; W^N \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)).$$

Maintenant W^N est limite inductive d'espaces $L^2(Z\Gamma_M \setminus A(c)\tilde{\Sigma}, a^{-2p} d^* a d\sigma)^\infty$ et on a une inclusion :

$$L^2(A_1(c), a^{-2p} d^* a)^\infty \otimes L^2(Z\Gamma_M \setminus \Sigma, d\sigma)^\infty \rightarrow L^2(Z\Gamma_M \setminus A(c)\tilde{\Sigma}, a^{-2p} d^* a d\sigma)^\infty.$$

Par ailleurs on sait [23] que les espaces $H(\mathfrak{n}, V)$ se décomposent suivant les représentations de MA en sous-espaces irréductibles (intervenant avec multiplicité 1) :

$$H^*(\mathfrak{n}, V) = \bigoplus H^*(\mathfrak{n}, V)_\lambda.$$

Nous noterons e^{-v_λ} le caractère de A dans $H^*(\mathfrak{n}, V)_\lambda$.

Posons :

$$H^s(c, v) = H^s(\mathfrak{a}_1, L^2(A_1(c), a^{-2p} d^* a)^\infty \otimes e^{-v})$$

et

$$A_\lambda^{t,q}(\Sigma) = H^t(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}, L^2(Z\Gamma_M \setminus \tilde{\Sigma})^\infty \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda).$$

La formule de Künneth fournit des homomorphismes :

$$\lim_{c, \Sigma} \bigoplus_{s+t=p} H^s(c, v_\lambda) \otimes A_\lambda^{t,q}(\Sigma) \rightarrow H^p(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_1, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}, W^N \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda).$$

PROPOSITION 1.2.4. — *Les homomorphismes ci-dessus sont bijectifs.*

Preuve. — Supposons Σ contractile, alors $Z\Gamma_M \setminus \tilde{\Sigma} A(c)$ est isomorphe au produit $\Sigma \times (Z\Gamma_Q \setminus Q) \times A(c)$ avec $Z\Gamma_Q \setminus Q$ compact. Supposons de plus Σ étoilé. Il résulte du lemme de Poincaré pour Σ et de la compacité de $Z\Gamma_Q \setminus Q$ que la cohomologie de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}})$ à valeurs dans $L^2(Z\Gamma_M \setminus \tilde{\Sigma})^\infty \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda$ est de dimension finie, représentable par les images réciproques des formes harmoniques sur $Z\Gamma_Q \setminus Q$. La projection sur les formes harmoniques est homotope à l'identité. Notons B l'opérateur d'homotopie. L'opérateur $1 \otimes B$ sur les formes sur $A_1(c) \times (Z\Gamma_M \setminus \tilde{\Sigma})$ définit également une homotopie et on en déduit la proposition.

On renvoie à Zucker [37] pour la vérification des assertions suivantes :

$$(i) \quad \dim H^0(c, v_\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_\lambda < \rho, \\ 0 & \text{si } v_\lambda \geq \rho, \end{cases}$$

où ρ est la demi-somme des racines de A dans N comptées avec leur multiplicité ;

$$(ii) \quad \dim H^1(c, v_\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_\lambda \neq \rho, \\ \infty & \text{si } v_\lambda = \rho. \end{cases}$$

On dira que $v_\lambda = \rho$ est exclu si :

$$\lim_{\Sigma} A_\lambda^{i,q}(\Sigma) = 0 \quad \text{lorsque } v_\lambda = \rho.$$

Dans ce cas $H^1(c, v_\lambda)$ ne contribue pas à $\mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(V)_1)$.

En passant à la limite sur Σ on obtient alors le :

THÉORÈME 1.2.5. — Si $v_\lambda = \rho$ est exclu on a :

$$(\mathcal{H}^i \mathcal{E}_{(2)}^*(V))_y = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ v_\lambda < \rho}} H^p(\Gamma_Q \backslash Q/K_p, H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda).$$

Dans certains cas l'espace $\Gamma_Q \backslash Q/K_p$ est un tore topologique τ . Sa cohomologie dans un espace de type λ sous MA est nulle si $\lambda|_{\Gamma_Q}$ n'est pas trivial. Dans le cas contraire, nous écrirons $\lambda|_{\Gamma_Q} = 1$ et on aura simplement :

$$H^p(\Gamma_Q \backslash Q/K_p, H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda) = H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda.$$

PROPOSITION 1.2.6. — Si $v_\lambda = \rho$ est exclu, et si $\Gamma_Q \backslash Q/K_p$ est un tore τ alors :

$$(R^i j_* V)_y = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ \lambda|_{\Gamma_Q} = 1}} H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda$$

et

$$\mathcal{H}^i \mathcal{E}_{(2)}^*(V)_y = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ \lambda|_{\Gamma_Q} = 1 \\ v_\lambda < \rho}} H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda.$$

Nous allons maintenant étudier les $H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda$ dans un cas particulier, et nous comparerons $\mathcal{H}^i(IC^* \dots)$ et $\mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*)$.

1.3. UN CAS PARTICULIER. — Considérons un corps totalement réel E de degré d sur \mathbb{Q} , une extension quadratique totalement imaginaire F de E , et une forme hermitienne H sur F^{n+1} , non dégénérée, et de rang isotrope égal à 1, c'est-à-dire :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où H_1 est anisotrope sur F^{n-1} . Nous noterons par \underline{G}_0 le groupe spécial unitaire de H et par \underline{G}_1 le groupe unitaire de H_1 , que nous considérerons comme groupes algébriques sur E .

Si x est une matrice à coefficients dans F nous noterons x^* sa transposée conjuguée. A conjugaison près, un parabolique maximal défini sur E peut s'écrire :

$$\underline{P}_0 = \underline{M}_0 \underline{A}_0 \underline{N}_0,$$

avec, pour tout anneau R contenant E :

$$\begin{aligned}\underline{A}_0(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in R^\times \right\}, \\ \underline{M}_0(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \lambda \in (F \otimes_E R) \\ u \in \underline{G}_1(R) \\ \lambda \lambda^* \det u = 1 \end{array} \right\}, \\ \underline{N}_0(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1_{n-1} & -x^* \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x \in (F \otimes_E R)^{n-1} \\ z \in F \otimes_E R \\ x x^* + z + z^* = 0 \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Les racines de \underline{A}_0 dans \underline{N}_0 sont α_0 et $2\alpha_0$ avec pour multiplicité respective $2(n-1)$ et 1; la demi-somme ρ_0 vérifie la relation :

$$\rho_0 = n \alpha_0.$$

Choisissons dans $\underline{G}_0(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$ un tore maximal T_0 et un sous-groupe de Borel tels que :

$$\underline{A}_0(\mathbb{C}) \subset T_0 \subset \underline{M}_0(\mathbb{C}) \cdot \underline{A}_0(\mathbb{C})$$

et

$$T_0 \subset B_0 \subset \underline{P}_0(\mathbb{C}).$$

Notons Δ_+ l'ensemble des racines positives de T_0 , $\Delta(M)$ l'ensemble des racines positives de T_0 dans $\underline{M}_0(\mathbb{C})$, et W_0^1 l'ensemble des $\sigma \in W_0$ (le groupe de Weyl de T_0) tels que $\sigma^{-1} \Delta(M) \subset \Delta_+$; enfin $l(\sigma)$ désignera la longueur de σ . Il est facile de vérifier les lemmes suivants (cf. [37], § 6) :

LEMME 1.3.1. — Soit $\bar{\omega}$ un poids dominant fondamental et $\sigma \in W_0^1$ alors :

1. si $l(\sigma) \leq n-1$, $\sigma \bar{\omega}|_{\Lambda_0} \geq 0$;
2. si $l(\sigma) \geq n$, $\sigma \bar{\omega}|_{\Lambda_0} \leq 0$.

Les mêmes inégalités sont donc vraies pour tout poids dominant.

LEMME 1.3.2. — Soit $\tilde{\rho}_0$ la demi-somme des racines positives et $\sigma \in W_0^1$ alors :

1. si $l(\sigma) \leq n-1$, $\sigma \tilde{\rho}_0|_{\Lambda_0} > 0$;
2. si $l(\sigma) \geq n$, $\sigma \tilde{\rho}_0|_{\Lambda_0} < 0$.

En effet $\tilde{\rho}_0 - \sigma \tilde{\rho}_0$ est la somme des racines β positives telles que $\sigma \beta$ soit négative et on vérifie que :

$$(\tilde{\rho} - \sigma \tilde{\rho}_0)|_{\Lambda_0} = l(\sigma) \alpha_0 \quad \text{si } l(\sigma) \leq n-1$$

et

$$(\tilde{\rho} - \sigma \tilde{\rho}_0)|_{\Lambda_0} = (l(\sigma) + 1) \alpha_0 \quad \text{si } l(\sigma) \geq n-1.$$

On en déduit, que si μ_0 est un poids dominant on a la :

PROPOSITION 1.3.3. — Soit $\lambda_0 = \sigma(\mu_0 + \tilde{\rho}_0) - \tilde{\rho}_0$ avec $\sigma \in W_0^1$ alors :

1. $(-\lambda_0)|_{A_0} < \rho_0 = n\alpha_0$ si $l(\sigma) \leq n-1$;
2. $(-\lambda_0)|_{A_0} > \rho_0 = n\alpha_0$ si $l(\sigma) \geq n$.

Preuve. — Cela résulte des lemmes précédents et de ce que $\tilde{\rho}_0|_{A_0} = \rho_0$. On considère maintenant $\underline{G} = R_{E/\mathbb{Q}} G_0$, on dispose de d plongements θ_i de E dans \mathbb{R} et $G = G_1 \times \dots \times G_d$ avec $G_i = G_0(E \otimes \mathbb{R})$; on définit de même $A_i, M_i, N_i, \alpha_i, W_i^1$, etc. On posera $\alpha = N_{E/\mathbb{Q}} \alpha_0$, et M^1 sera le noyau de α dans $R_{E/\mathbb{Q}}(M_0 A_0)$. Avec les notations des paragraphes précédents on voit que si on pose $\underline{A}^1 = \underline{M}^1 \cap R_{E/\mathbb{Q}} \underline{A}_0$, on a :

$$A^1 = \underline{A}^1 (\mathbb{R})^0 = Q/K_p$$

et le groupe discret Γ_Q sera un sous-groupe d'indice fini des unités de E^\times et $\Gamma_Q \backslash A^1$ est un tore topologique τ .

Soit $V = \bigotimes_{i=1}^d V_i$ l'espace d'une représentation irréductible de dimension finie de $G = \prod G_i$, de poids dominant $\mu = \sum \mu_i$; d'après le théorème de Kostant [23], les poids dominants λ_i des représentations de $M_i A_i$ dans $H^{q_i}(n_i, V_i)$ sont de la forme :

$$\lambda_i = \sigma_i(\mu_i + \tilde{\rho}_i) - \tilde{\rho}_i,$$

avec $\sigma_i \in W_i^1$ et $q_i = l(\sigma_i)$.

Conformément aux notations du paragraphe précédent on pose $v_{\lambda_i} = (-\lambda_i)|_{A_i}$ et on sait que $v_{\lambda_i} = m_i \alpha_i$ avec $m_i < n$ si $l(\sigma_i) = q_i \leq n-1$ et $m_i > n$ si $l(\sigma_i) = q_i \geq n$ en vertu de la proposition 1.3.3. La condition $\lambda|_{\Gamma_Q} = 1$ revient à demander que m_i soit indépendant de i .

En particulier $v_\lambda = \rho$ est exclu, car si $\lambda|_{\Gamma_Q} = 1$ alors $v_\lambda = \sum m_i \alpha_i = m_0 \alpha$ avec $m_0 \neq n$ (proposition 1.3.3). Les hypothèses de 1.2.6 sont donc vérifiées. On peut maintenant énoncer le :

THÉORÈME 1.3.4. — Soit G comme ci-dessus et soit y un point de la frontière de $\overline{\Gamma \backslash X}$ alors :

$$(R^* j_* V)_y = \mathcal{H}^r(\mathcal{E}_{(2)}^*)_y = \bigoplus_{\substack{p + \sum q_i = r \\ v_{\lambda_i} = m_0 \alpha_i \\ m_0 < n}} H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^d H^{q_i}(n_i, V_i)_{\lambda_i} \right)$$

si $r \leq nd-1$, et $\mathcal{H}^r(\mathcal{E}_{(2)}^*)_y = 0$ si $r \geq nd$.

Preuve. — Il suffit d'étudier les λ tels que $v_{\lambda_i} = m_0 \alpha_i$.

(a) si $m_0 < n$ on sait que $l(\sigma_i) = q_i \leq n-1$ et comme $\tau = \Gamma_b \backslash A^1$ est de dimension $d-1$ on a $r = p + \sum_{i=1}^d q_i \leq (d-1) + (n-1)d = nd-1$. Dans ce cas $\mathcal{H}^r(\mathcal{E}_{(2)}^*)_y = (R^* j_* V)_y$ et admet l'expression du théorème.

(b) si $m_0 > n$ alors $q_i = l(\sigma_i) \geq n$ et donc $r = p + \sum_{i=1}^d q_i \geq nd$ et $\mathcal{H}^r(\mathcal{E}_{(2)}^*)_y = 0$.

COROLLAIRE 1.3.5. — Pour G comme ci-dessus la conjecture de Zucker est vérifiée (cf. [37], §6), c'est-à-dire que :

$$H_{(2)}^*(\Gamma \backslash X, V) = \overline{IH^*(\Gamma \backslash X, V)}.$$

Cette conjecture de Zucker a été établie par Borel pour X espace hermitien symétrique de \mathbb{Q} -rang un [6].

Nous utiliserons dans la suite les corollaires suivants du théorème 1.3.4. Posons :

$$R_q = \bigoplus_{\lambda \mid \Gamma_{\mathbb{Q}} = 1} H^q(\mathfrak{n}, V)_{\lambda}.$$

COROLLAIRE 1.3.6. — Sous les hypothèses de 1.3.4 on a :

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(V))_y = \mathcal{H}^i(IC^*(\overline{\Gamma \backslash X}, V))_y = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ q \leq d(n-1)}} H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes R_q.$$

Les groupes du type $G = R_{\mathbb{E}/\mathbb{Q}} SL_2$ sont obtenus comme cas particuliers ($n=1$). On vérifie dans ce cas facilement que $R_q = 0$ sauf peut-être si $q=0$ ou $q=d$. D'où le :

COROLLAIRE 1.3.7. — Si $G = R_{\mathbb{E}/\mathbb{Q}} SL_2$ on a :

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{E}_{(2)}^*(V))_y = \mathcal{H}^i(IC^*(\overline{\Gamma \backslash X}, V))_y = \begin{cases} H^i(\tau, \mathbb{C}) \otimes R_0 & \text{si } i \leq d-1, \\ 0 & \text{si } i \geq d. \end{cases}$$

On peut reformuler (1.3.5) au moyen des espaces de \mathfrak{g} - \mathfrak{f} -cohomologie. Soit $L^2 = L^2(Z \Gamma \backslash G)$ et $L^{2, \infty}$ le sous-espace engendré par les fonctions $\varphi * \alpha$ avec $\varphi \in L^2$ et $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$; en reprenant les notations et les conventions du paragraphe 1.2 ci-dessus on voit que l'on dispose d'une injection :

$$C^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}; L^{2, \infty} \otimes V) \simeq \mathcal{E}_{(2)}^i(\Gamma \backslash X, V)^\infty \hookrightarrow \mathcal{E}_{(2)}^i(\Gamma \backslash X, V).$$

La démonstration 1.2.3 était en fait inspirée de celle de la proposition suivante due à A. Borel.

PROPOSITION 1.3.8. — L'homomorphisme naturel :

$$H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}; L^{2, \infty} \otimes V) \rightarrow H_{(2)}^i(\Gamma \backslash X, V)$$

est un isomorphisme.

Il résulte des travaux de Borel et d'un lemme de Casselman, que sous nos hypothèses on a :

$$H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}; L^{2, \infty} \otimes V) = \bigoplus_m (\pi, \Gamma) H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}; \pi \otimes V),$$

où $m(\pi, \Gamma)$ est la multiplicité de la représentation π de G dans le spectre discret de L^2 . Nous admettrons ce résultat sans démonstration; toutefois pour les groupes considérés dans la suite (à l'exception de 2.4) il n'est pas difficile de généraliser la méthode utilisée par Langlands dans [25], § 2, lemme 2.8, pour obtenir ce résultat. Nous utiliserons le :

COROLLAIRE 1.3.9 :

$$\mathrm{IH}^i(\Gamma \backslash \overline{X}, V) = \bigoplus m(\pi, \Gamma) H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi \otimes V).$$

2. Cohomologie d'intersection des variétés de Hilbert-Blumenthal sur un corps fini : somme alternée des traces du Frobenius

2.1. L'ESPACE DE MODULES ET SA COMPACTIFICATION DE BAILY-BOREL (d'après Rapoport [32], § 1 et 4). — Soit E un corps de nombres totalement réel, \mathcal{O}_E l'anneau des entiers de E , U le groupe des unités, U_+ le groupe des unités totalement positives, U_n le groupe des unités congrues à 1 modulo n . Soit d le degré de E sur \mathbb{Q} .

Un schéma abélien à multiplication réelle (par \mathcal{O}_E) sur un schéma S est une paire (X, m) consistant en un schéma abélien $X \rightarrow S$ et un homomorphisme $\mathcal{O}_E \rightarrow \mathrm{End}(X)$ telle que :

(*) localement sur S , le $\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_S$ -module $\mathrm{Lie}(X)$ est libre de rang 1.

Si (X, m) est un schéma abélien à multiplication réelle, (X^*, m^*) défini de manière évidente, est un schéma abélien à multiplication réelle.

Une polarisation (sous-entendu \mathcal{O}_E -linéaire) de (X, m) est une polarisation $\lambda: X \rightarrow X^*$ telle que $m(a)^* \circ \lambda = \lambda \circ m(a)$ pour tout $a \in \mathcal{O}_E$. Toute variété abélienne à multiplication réelle sur un corps possède une polarisation. De plus, il n'y a pas d'obstruction à déformer la variété abélienne à multiplication réelle, ni sa polarisation.

Si (X, m) est une variété abélienne à multiplication réelle sur un schéma S , le faisceau \mathcal{P} pour la topologie étale des morphismes \mathcal{O}_E -linéaires symétriques $\lambda: X \rightarrow X^*$ est un faisceau localement constant en \mathcal{O}_E -modules projectifs de rang 1; les λ qui sont des polarisations forment un sous-faisceau stable par multiplication par un élément totalement positif de \mathcal{O}_E ; ce sous-faisceau définit une notion de positivité \mathcal{P}_+ localement constante sur le faisceau \mathcal{P} en \mathcal{O}_E -modules projectifs (le sens de ceci étant évident).

Si on se donne (L, L_+) : un \mathcal{O}_E -module projectif de rang 1 muni d'une notion de positivité, Rapoport introduit le champ \mathcal{M}^L qui à un schéma S associe le groupoïde des schémas abéliens à multiplication réelle (X, m) sur S munis d'un isomorphisme de faisceaux étales de \mathcal{O}_E -modules avec notion de positivité :

$$\alpha: (\mathcal{P}, \mathcal{P}_+) \xrightarrow{\sim} (L, L_+)$$

et prouve qu'il admet un espace grossier M^L au sens de [39], § 1, Def. 8.1.

Soient \mathcal{D}^{-1} l'inverse de la différentielle et \mathcal{D}_+^{-1} la notion de positivité induite par les éléments totalement positifs de E . Tout $\alpha: (\mathcal{P}, \mathcal{P}_+) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^{-1}, \mathcal{D}_+^{-1})$ définit un isomorphisme entre $\Lambda_{\mathcal{O}_E}^2 X_n$ et $\mathcal{O}_E \otimes \mu_n$ (où n est un entier et X_n le groupe des points d'ordre n de X).

Par structure de niveau on entend alors un \mathcal{O}_E -isomorphisme $\beta: X_n \rightarrow (\mathcal{O}_E/n\mathcal{O}_E)^2$ dont le déterminant appartient à $\text{Isom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n)$. D'où un champ algébrique $\mathcal{M}_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ sur $\mathbb{Z}[1/n]$ qui admet un espace grossier :

$$\mathcal{M}_n^{\mathcal{D}^{-1}} \xrightarrow{\pi_n} M_n^{\mathcal{D}^{-1}}.$$

Comme d'habitude, pour $n \geq 3$, π_n est un morphisme étale (i. e. $M_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ est un espace de modules fins).

Il y a une action de U_+ sur $\mathcal{M}_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ ($y \in U_+$ transforme α en $y \cdot \alpha$). On a donc une action de U_+ sur $M_n^{\mathcal{D}^{-1}}$; celle-ci est triviale sur le sous-groupe U_n^2 parce que pour (X, α, β) une section de $\mathcal{M}_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ au-dessus d'un schéma S et pour $x \in U$, l'automorphisme de X induit par x , transforme (X, α, β) en $(X, x^2\alpha, x\beta)$.

Du fait que $M_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ est réduit, on déduit alors que l'action de U_n^2 sur $M_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ qui est triviale sur les points géométriques, est en fait triviale.

Le champ $\mathcal{M}_n^{\mathcal{D}^{-1}}/U_+$ admet comme espace de modules grossier l'espace algébrique $S_n^{\mathcal{D}^{-1}}$, quotient de $M_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ par l'action de U_+/U_n^2 . Du fait que pour $n \geq 3$, $M_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ est lisse sur $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$, on déduit que les fibres géométriques :

$$S_n^{\mathcal{D}^{-1}} \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]} \text{Spec } k$$

de $S_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ sont « rationnellement lisses » c'est-à-dire que pour l premier à la caractéristique de k , le complexe de \mathbb{Q}_l -faisceaux $\mathbb{Q}_l(d)[2d]$ est dualisant pour les \mathbb{Q}_l -faisceaux étales. (Comparer à [13], exemple 6.2.1.)

L'ensemble galoisien des composantes connexes de $S_n^{\mathcal{D}^{-1}} \otimes \mathbb{Q}$ est $\text{Isom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n)$. Soit G^* le groupe algébrique réductif sur \mathbb{Q} , défini comme produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} G^* & \hookrightarrow & R_{E/\mathbb{Q}} GL(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_m & \hookrightarrow & R_{E/\mathbb{Q}} G_m \end{array}$$

On a un choix naturel de $h: \mathbb{C}^\times \rightarrow G^*(\mathbb{R}) \subset GL(2, \mathbb{R})^\Sigma$ où Σ est l'ensemble des plongements réels de E : sur chaque composante on prend $h(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Pour tout n on peut choisir un sous-groupe compact ouvert K_n de $G^*(\mathbb{A}_f)$ et identifier $S_n^{\mathcal{D}^{-1}} \otimes \mathbb{Q}$ à la variété de Shimura $S_{K_n}(G^*, h)$ (ou plutôt à son modèle canonique au sens de Shimura).

On traite de façon analogue les variétés de Shimura attachées à des groupes G intermédiaires entre G^* et $\tilde{G} = R_{E/\mathbb{Q}} GL_2$ et à des sous-groupes K plus généraux (cf. § 3.1).

Toutefois, pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons dans ce paragraphe à $G = G^*$ et $K = K_n$.

Rapoport décrit des compactifications de $\mathcal{M}_n^{\mathcal{D}^{-1}}$ au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$, à l'aide de la théorie de Mumford des variétés abéliennes dégénérantes. Il appelle *pointe* une suite

exacte de \mathcal{O}_E -modules projectifs $0 \rightarrow P \rightarrow H \rightarrow N \rightarrow 0$ où P et N sont de rang 1, munie d'un isomorphisme :

$$\alpha : (\Lambda_{\mathcal{O}_E}^2 H)^* = (P \cdot N)^* = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{-1},$$

où pour A un \mathcal{O}_E -module, on a posé $A^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ muni de la structure de \mathcal{O}_E -module évidente. On a :

$$\mathcal{D}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_E} \text{Hom}_{\mathcal{O}_E}(A, \mathcal{O}_E) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_E}(A \otimes \mathcal{D}, \mathcal{O}_E) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_E}(A, \mathcal{D}^{-1}) \simeq A^*$$

(via la trace).

On identifiera la pointe définie par l'isomorphisme α à la pointe définie par l'isomorphisme $y \cdot \alpha$ pour $y \in U_+$.

On pose alors $\underline{M} = \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N = \mathcal{D}^{-1} \cdot N^2$ muni de la notion de positivité \underline{M}_+ déduite de \mathcal{D}_+^{-1} et de la structure de positivité naturelle sur N^2 . On pose $U' = U^2$ et $R^{U'}(\underline{M}) = [\mathbb{Z}[[\dots q^m \dots]]_{m \in \{0\} \cup \underline{M}_+}]^{U'}$.

Plus généralement, pour $n \geq 1$, une $\Gamma(n)$ -pointe est une pointe munie d'un isomorphisme de \mathcal{O}_E -modules :

$$\beta : H/n \cdot H \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_E/n \cdot \mathcal{O}_E)^2$$

de sorte que $\Lambda^2 \beta$ soit égal à l'inverse de $\alpha^* : \mathcal{O}_E/n \cdot \mathcal{O}_E \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathcal{O}_E}^2 H/n \cdot \Lambda_{\mathcal{O}_E}^2 H$.

On identifiera la $\Gamma(n)$ -pointe définie par (α, β) à la $\Gamma(n)$ -pointe définie par $(y \cdot \alpha, \beta)$.

On pose alors $\underline{M} = (1/n) \cdot \mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N$, muni comme plus haut d'une notion de positivité \underline{M}_+ . On pose $U' = U_n^2$ où $U_n = \{n \in U, n \equiv 1 \pmod{n} \cdot \mathcal{O}_E\}$ et on introduit de même $R^{U'}(\underline{M})$.

On se fixe une $\Gamma(n)$ -pointe.

On peut trouver une décomposition du cône dual $\underline{M}_+^* \subset \underline{M}_{\mathbb{R}}^*$ de $\underline{M}_{+\mathbb{R}} \subset \underline{M}_{\mathbb{R}}$ en cônes polyédraux rationnels $\{\sigma_\alpha\}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- (a) pour $u' \in U'$, on a $u' \cdot \sigma_\alpha = \sigma_\beta$ pour un β convenable;
- (b) modulo cette action, il n'y a qu'un nombre fini de polyèdres σ_α .

Supposons choisie une telle décomposition. D'après la théorie des variétés toriques ([22], chap. I) on lui associe une immersion ouverte équivariante du tore \underline{S} de groupe de caractères \underline{M} dans un schéma normal localement de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, noté $\underline{S}_{\{\sigma_\alpha\}}$; on suppose de plus $\underline{S}_{\{\sigma_\alpha\}}$ lisse.

Soit T le tore constant de fibre $P \otimes G_m$ sur $\underline{S}_{(\sigma_\alpha)}$, dont les caractères sont notés \mathcal{X}^r pour $r \in P^*$. Il est muni d'une action naturelle de \mathcal{O}_E . On obtient un homomorphisme \mathcal{O}_E -linéaire a' du groupe constant N sur \underline{S} dans T en envoyant $n \in N$ en la section $a'(n) \in T(\underline{S})$ telle que pour $r \in P^*$:

$$\mathcal{X}^r(a'(n)) = q^{r \cdot n}$$

(on observe que $r \cdot n$ appartient à $\mathcal{D}^{-1} \cdot P^{-1} \cdot N \subset M$).

Pour tout α , soit \bar{S}_{σ_α} le complété de $\underline{S}_{\sigma_\alpha}$ le long de $\underline{S}_{\sigma_\alpha} - \underline{S}$. La théorie de Mumford, appliquée au « morphisme de périodes dégénérantes » $\mathcal{A}' : N \rightarrow T$ permet de construire un schéma semi-abélien T/N sur \bar{S}_{σ_α} , qu'on note X_{σ_α} . Lorsque $\sigma_\beta \subset \sigma_\alpha$, on a un morphisme naturel $\bar{S}_{\sigma_\beta} \rightarrow \bar{S}_{\sigma_\alpha}$ et X_{σ_β} est l'image réciproque de X_{σ_α} . De plus, on vérifie que la restriction $X_{\sigma_\alpha}^0$ de X_{σ_α} à $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0 = \bar{S}_{\sigma_\alpha} - (\bar{S}_{\sigma_\alpha} - \underline{S})$ est un schéma *abélien* à multiplication réelle muni d'un isomorphisme :

$$\alpha : (\mathcal{P}(X_{\sigma_\alpha}^0), \mathcal{P}(X_{\sigma_\alpha}^0)_+) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^{-1}, \mathcal{D}_+^{-1}).$$

De plus, on a un isomorphisme canonique : $\text{Lie}(X_{\sigma_\alpha}) \cong P \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}_{\sigma_\alpha}}$.

Par recollement des complétés formels \hat{S}_{σ_α} de $\underline{S}_{\sigma_\alpha}$ le long de $\underline{S}_{\sigma_\alpha} - \underline{S}$ (qui sont des schémas formels affines), on obtient un schéma formel $\hat{S}_{(\sigma_\alpha)}$. Son quotient par l'action de U' existe, on obtient un schéma formel noethérien, noté $\hat{S}_{(\sigma_\alpha)}/U'$ et on a : $\Gamma(\hat{S}_{(\sigma_\alpha)}/U', \mathcal{O}) = R^{U'}(M)$.

On a une suite exacte de schémas en groupes sur $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$:

$$0 \rightarrow (n^{-1} P/P)(1) \rightarrow (X_{\sigma_\alpha}^0)_n \rightarrow (n^{-1} N/N) \rightarrow 0.$$

Comme on peut étendre a' à $n^{-1} N$, on obtient une injection de schémas en groupes finis $n^{-1} N/N \hookrightarrow (X_{\sigma_\alpha}^0)_n$ d'où $(X_{\sigma_\alpha}^0)_n = (n^{-1} P/P)(1) \times (n^{-1} N/N)$.

Ici intervient un point extrêmement délicat ([32], p. 304-5). Si on choisit un scindage de la suite exacte de \mathcal{O}_E -modules :

$$0 \rightarrow n^{-1} P/P \rightarrow n^{-1} H/H \rightarrow n^{-1} N/N \rightarrow 0$$

au-dessus de $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0 \otimes \text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n])$ on peut définir un objet de $\mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1}$ (au moyen, on suppose, d'un isomorphisme choisi au hasard $n^{-1}P/P \cong n^{-1}\mathcal{O}_E/\mathcal{O}_E$). Les scindages de cette suite exacte forment un espace principal homogène sous le groupe $\text{Hom}(n^{-1}N/N, n^{-1}P/P) = n^{-1}M^*/M^*$. Pour chaque scindage σ , on a un objet \mathcal{A}_σ de $\mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1}$. Il se trouve, comme le montre Rapoport, qu'on peut définir une action τ de $n^{-1}M^*/M^*$ sur $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0 \otimes \text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n])$ telle que $\tau(a)^*\mathcal{A}_\sigma$ s'identifie à $\mathcal{A}_{\sigma+a}$ pour tout $a \in n^{-1}M^*/M^*$ (avec la condition de compatibilité habituelle). Si maintenant on remplace $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$ par la limite projective du diagramme déduit de cette action du groupe $n^{-1}M^*/M^*$, on obtient un schéma muni sans ambiguïté d'un objet de $\mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1}$. Par abus de notation, on note encore $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$ ce schéma, qu'on se garde d'identifier avec la variété torique complétée construite explicitement plus haut.

Pour n fixé, une *décomposition $\Gamma(n)$ -admissible* est la donnée, pour chaque $\Gamma(n)$ -pointe \mathcal{C} , d'une décomposition polyédrale $\{\sigma_\alpha^{\mathcal{C}}\}$ de $M_{+\mathbb{R}}^*$, compatible aux isomorphismes entre $\Gamma(n)$ -pointes. Rapoport définit alors une immersion ouverte $\hat{j}: \mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1} \hookrightarrow \mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}-1}$ et un isomorphisme entre le complété formel de $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}-1}$ le long de « sa partie à l'infini » et la somme disjointe sur les classes d'isomorphie de $\Gamma(n)$ -pointes, de $(\hat{S}_{\{\sigma_\alpha\}}/U) \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n])$ de telle sorte que pour tout α , la variété abélienne sur $\bar{S}_{\sigma_\alpha}^0$ obtenue par la construction décrite plus haut « coïncide » avec l'image réciproque de la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1}$ (ceci n'étant qu'une approximation de l'énoncé exact, qui se trouve dans [32], théorème 5.1).

$\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}-1}$ est un *espace algébrique propre* sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$; avec les précautions prises dans le choix des décompositions polyédrales, il est aussi *lisse* sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ et le complément de $\mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1}$ dans $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}-1}$ (réduit) est un diviseur à croisements normaux relatif sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. On dispose d'un schéma en groupes semi-abélien sur $\mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}-1}$ qui prolonge la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1}$. Il nous sera commode de simplifier les notations en posant $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n^{\mathcal{Q}-1}$, $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_{n\{\sigma_\alpha\}}^{\mathcal{Q}-1}$ [on n'oubliera pas que $\hat{\mathcal{M}}$ dépend du choix d'une décomposition $\Gamma(n)$ -admissible]. Pour \mathcal{C} une pointe, on notera $\hat{\mathcal{M}}^\infty$ la composante du diviseur relatif $\hat{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$ correspondant à \mathcal{C} .

On construit de même une compactification \hat{S} de l'espace grossier $S = S_n^{\mathcal{Q}-1}$. Sa structure au voisinage de $\hat{S} - S$ est identique à celle de $\hat{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$, parce que le morphisme $\hat{\mathcal{M}} - \mathcal{M} \rightarrow \hat{S} - S$ est étale.

On dispose de la compactification de Baily-Borel (sur \mathbb{Q}) $S \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \bar{S} \otimes \mathbb{Q}$; composante connexe par composante connexe, c'est la compactification décrite au paragraphe 1. Elle est habituellement décrite sur \mathbb{C} , mais il résulte de sa description comme spectre projectif de l'algèbre log-canonique de S [40] qu'elle est bien définie sur \mathbb{Q} . Ici le lieu à l'infini \bar{S}^∞

est de dimension 0. On ne sait pas l'étendre en une compactification de S [sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$] mais on peut au moins trouver un ouvert W de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ et une compactification :

$$\begin{array}{ccccc} S|_W & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{S} & \xrightarrow{i} & \bar{S}^\infty \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & W & & \end{array}$$

de sorte que \bar{S}^∞ soit fini et plat sur \mathbb{Z} , et qu'on ait une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} S|_W & \xrightarrow{\hat{j}} & \hat{S}|_W \\ & \searrow \bar{j} & \downarrow \pi \\ & & S \end{array}$$

où π est un pseudo-isomorphisme au sens de [14].

Remarque. — On aimerait pouvoir construire \bar{S} au-dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ en contractant les diviseurs \hat{S}^∞ , mais il n'est pas même clair qu'on puisse les contracter au-dessus de \mathbb{F}_p . Toutefois dans le cas $d=2$ (i. e. E quadratique sur \mathbb{Q}) on peut appliquer un critère d'Artin [1] pour contracter $\hat{S}_q^\infty \otimes \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$: la matrice d'intersection des composantes de ce diviseur étant la même sur \mathbb{F}_p que sur \mathbb{Q} , car les nombres d'intersection s'expriment en termes de caractéristiques d'Euler de complexes de faisceaux cohérents, plats sur $\mathbb{Z}[1/n]$.

Le lemme suivant résulte immédiatement des travaux de Rapoport, rappelés plus haut.

LEMME 2.1. — Soit x un point fermé de \bar{S} . Il existe un tore \underline{S} déployé sur $\kappa(x)$ et une action de \underline{S} sur $\pi^{-1}(x)$ dont les orbites sont en nombre fini.

2.2. LE COMPLEXE D'INTERSECTION DE $\bar{S} \otimes \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$: UN RÉSULTAT D'ANNULATION. — On choisit un morphisme $\mathbb{Z}[1/n] \rightarrow \mathbb{F}_q$. Pour $l \nmid q$, on s'intéresse au complexe d'intersection $IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{F}_q, \mathbb{Q}_l)$ tel qu'il a été introduit par Deligne (voir [18], [10]). Dans le cas présent, où $\bar{S} \otimes \mathbb{F}_q$ est rationnellement lisse en dehors d'une sous-variété de dimension 0, il est très simple à décrire. Si on note encore \bar{j} l'inclusion de $S \otimes \mathbb{F}_q$ dans $\bar{S} \otimes \mathbb{F}_q$, on a :

$$IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{F}_q, \mathbb{Q}_l) = \tau_{\leq d-1} R_{\bar{j}*}(\mathbb{Q}_l),$$

Comme on ne sait rien sur la topologie de $\bar{S} \otimes \mathbb{F}_q$, on doit s'appuyer sur les renseignements sur $IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ rappelés au paragraphe 1. Au-dessus de notre ouvert W de $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$, on dispose de \bar{S} ; au-dessus de $W[1/l] = W_l$, on a sur $\bar{S}|_{W_l}$ le complexe de \mathbb{Q}_l -faisceaux $R_{\bar{j}*} \mathbb{Q}_l$; quitte à restreindre encore W_l on saura que les faisceaux de cohomologie de ce complexe sont constructibles en vertu de [SGA4 1/2], théorèmes de finitude en cohomologie l -adique, théorème 1.9. De plus la formation des $R^i \bar{j}_* \mathbb{Q}_l$ sera alors compatible à tout changement de base ultérieur (même référence). Il faut prendre garde que ce théorème de Deligne vaut pour les faisceaux étales de torsion sur un anneau noethérien. Toutefois, la commutation aux changements de base de la formation pour $R^i j_*(\mathbb{Z}/l)$

pour tout i implique le même fait pour $R^i j_*(\mathbb{Z}/l^n)$, donc en passant à la limite, pour $R^i j_*(\mathbb{Z}_l)$.

Ces considérations rendent évident le :

LEMME 2.2.1. — *Pour l donné, il existe un ouvert dense W'_l de W_l sur lequel sont vérifiées les propriétés suivantes :*

- (a) *les faisceaux $(R^i \bar{j}_* \mathbb{Q}_l) |_{\bar{S}^\infty \otimes W'_l}$ sont lisses (i. e. localement constants);*
- (b) *pour tout point fermé $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \subset W'_l$, on a :*

$$[\tau_{\leq g-1} R \bar{j}_* \mathbb{Q}_l] |_{\bar{S} \otimes \mathbb{F}_p} \cong IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l).$$

Désormais nous supposons $d \geq 2$. — Soit p comme dans le lemme. Le but de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2.2. — *Soit x un point fermé de $\bar{S}^\infty \otimes \mathbb{F}_p$, et \bar{x} un point fermé géométrique au-dessus de x . L'action de F_x (Frobenius géométrique) opérant sur*

$$[R^i \bar{j}_* \mathbb{Q}_l]_{\bar{x}} = \mathcal{H}^i(IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l))_{\bar{x}} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq g-1$$

est triviale.

$$\text{COROLLAIRE 2.2.3. — } \sum_i (-1)^i \text{Tr}(F_x, \mathcal{H}^i(IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l))_{\bar{x}}) = 0.$$

Déduisons ce corollaire du théorème. Cette somme alternée n'est autre que la somme alternée des dimensions des fibres en \bar{x} des faisceaux $\mathcal{H}^i(IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_l))$; ces fibres ont même dimension que les fibres au point correspondant de $\bar{S}^\infty \otimes \mathbb{C}$ d'après le lemme 2.2.1. Sur \mathbb{C} il résulte du théorème de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie transcendante que la fibre en un tel point de $\mathcal{H}^i(IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q}_l)) = R^i \bar{j}_* \mathbb{Q}_l$ est la même, calculée en topologie étale ou en topologie transcendante (cela découle par exemple de [36], corollaire 2.7.6). Maintenant, d'après 1.3.7, cette fibre est isomorphe à $H^i(\tau, \mathbb{Q}_l)$ où τ est un tore réel de dimension $d-1$; comme $d-1 > 0$, on obtient la nullité voulue.

Entreprenons de démontrer le théorème.

LEMME 2.2.4. — *Avec les notations du théorème, pour $0 \leq i \leq d-1$, le morphisme naturel $\Lambda^i [R^1 \bar{j}_* \mathbb{Q}_l]_{\bar{x}} \rightarrow [R^i j_* \mathbb{Q}_l]_{\bar{x}}$ est un isomorphisme.*

Soit en effet $\bar{S}_\mathbb{C}^\infty$ la composante \bar{S}^∞ contenant x . Le morphisme de l'énoncé est induit par un morphisme de faisceaux lisses de $\bar{S}_\mathbb{C}^\infty$. Puisqu'il induit un isomorphisme sur les fibres de ces faisceaux sur $\bar{S}_\mathbb{C}^\infty \otimes \mathbb{C}$, il en est de même en \bar{x} .

Q.E.D.

Il suffit donc de prouver le théorème pour $i=1$. Nous procéderons indirectement, utilisant la résolution des singularités :

$$\hat{S} \otimes \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \bar{S} \otimes \mathbb{F}_p.$$

La suite spectrale de Leray relative à $\bar{j} = \pi \circ \hat{j}$ et au faisceau constant \mathbb{Q}_l sur $S \otimes F_p$ donne, par application du foncteur « fibre en \bar{x} » une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = R^p \pi_* (R^q \hat{j}_* \mathbb{Q}_l)_{\bar{x}} \Rightarrow R^{p+q} \bar{j}_* (\mathbb{Q}_l)_{\bar{x}},$$

d'où on déduit un morphisme : $R^1 \pi_* (\mathbb{Q}_l)_{\bar{x}} = H^1(\pi^{-1}(\bar{x}), \mathbb{Q}_l) \rightarrow (R^1 \bar{j}_* \mathbb{Q}_l)_{\bar{x}}$.

LEMME 2.2.5. — *Cet homomorphisme est bijectif.*

On va d'abord faire voir qu'avec les notations précédentes, la restriction de $R^1 \pi_* (\mathbb{Q}_l)$ à $\bar{S}_\mathcal{C}^\infty$ est un faisceau lisse. Comme on l'a vu plus haut, on a une stratification de $\pi^{-1}(\bar{S}_\mathcal{C}^\infty)$ par des orbites \mathcal{O}_i d'un tore \underline{S} . Il en résulte que les $R^j \pi_* (\mathbb{Q}_{l, \mathcal{O}_i})$ sont des faisceaux lisses sur $\bar{S}_\mathcal{C}^\infty$, si $\mathbb{Q}_{l, \mathcal{O}_i}$ dénote le prolongement par zéro, de \mathcal{O}_i à $\pi^{-1}(\bar{S}_\mathcal{C}^\infty)$, du faisceau constant sur \mathcal{O}_i . Par ailleurs, \mathbb{Q}_l admet une filtration finie dont les sous-quotients sont du type $\mathbb{Q}_{l, \mathcal{O}_i}$ pour i variable, ce qui établit la lissité de $R^1 \pi_* (\mathbb{Q}_l) = R^1 \pi! (\mathbb{Q}_l)$.

Il suffit donc de vérifier que le morphisme $R^1 \pi_* (\mathbb{Q}_l) \rightarrow R^1 \bar{j}_* \mathbb{Q}_l$ induit un isomorphisme sur les fibres en $x_C \in \bar{S}_\mathcal{C}^\infty \otimes \mathbb{C}$; on peut donc remplacer \mathbb{Q}_l par \mathbb{C} ; d'après la proposition 1.2.6, la fibre en ce point de $R^1 \bar{j}_* \mathbb{C}$ est égale à $H^1(\tau, \mathbb{C})$ où τ est un tore topologique de dual de Pontryagin isogène à $\text{Hom}_\mathbb{Z}(U, \mathbb{Z})$. Le schéma $\pi^{-1}(x_C)$ est quotient par l'action proprement discontinue et sans point fixe d'un groupe discret U' isogène à U du schéma localement de type fini $\underline{S}_{\sigma_\alpha} - \underline{S}$ (voir plus haut), dont la construction montre à l'évidence que l'espace topologique ordinaire qui lui est associé est simplement connexe. Donc $H^1(\pi^{-1}(x_C), \mathbb{C})$ est isomorphe à $U' \otimes \mathbb{C} = U \otimes \mathbb{C} = (R^1 \bar{j}_* \mathbb{C})_{x_C}$ d'où le lemme.

De façon similaire, le fait que $\pi^{-1}(\bar{x})$ soit quotient de $\underline{S}_{\sigma_\alpha} - \underline{S}$ par U' exhibe un morphisme de $\pi_{1, \text{alg}}(\pi^{-1}(\bar{x}))$ vers $\text{Hom}_\mathbb{Z}(U', \mathbb{Z}_l)$ qui est naturellement compatible à l'action de F_x . D'où par dualité un morphisme $U' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \rightarrow H^1(\pi^{-1}(\bar{x}), \mathbb{Q}_l)$.

LEMME 2.2.6. — *Cet homomorphisme est bijectif.*

Il est en effet clair que ce morphisme s'obtient en prenant la fibre en \bar{x} d'un morphisme de \mathbb{Z}_l -faisceaux sur $\bar{S}_\mathcal{C}^\infty$ du faisceau constant $U' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ vers $R^1 \pi_* (\mathbb{Z}_l) |_{\bar{S}_\mathcal{C}^\infty}$. Il suffit donc, vu la lissité du second faisceau, établie en 2.2.5, de prouver que ce morphisme induit une bijection sur la fibre en x_C , ce qui résulte de la fin de la preuve de 2.2.5.

D'après 2.2.5 et 2.2.6, on a donc $(R^1 \bar{j}_* \mathbb{Q}_l)_{\bar{x}} = U' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l$, on en déduit immédiatement le théorème 2.2.2.

Remarque. — Pour démontrer 2.2.2, on aurait pu se contenter de prouver que toute valeur propre de F_x sur $H^1(\pi^{-1}(\bar{x}), \mathbb{Q}_l)$ est égale à 1, ce qui résulte du lemme 2.1 et du lemme suivant, vu la construction de $\underline{S}_{\{\sigma_\alpha\}}$.

LEMME 2.2.7. — Soit Y une variété sur \mathbb{F}_q sur laquelle agit un tore déployé \underline{S} de telle sorte que les orbites de \underline{S} sont définies sur \mathbb{F}_q et en nombre fini. Alors toute valeur propre du *frobenius* géométrique agissant sur $H_c^1(Y \otimes \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l)$ est égale à 1.

Cela se démontre par récurrence sur le nombre m d'orbites de \underline{S} . Si $m=1$, on a $Y \cong G'_m$ et le résultat est bien connu. Supposons donc $m \geq 2$ et soit $Z \subset Y$ une orbite fermée, de complément U . On a une longue suite exacte pour la cohomologie à support propre, dont voici un fragment :

$$H_c^1(U, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H_c^1(Y, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H_c^1(Z, \mathbb{Q}_l).$$

Comme \underline{S} a $m-1$ orbites dans U , on obtient le résultat pour Y .

Nous voulons généraliser l'énoncé du corollaire à des complexes de faisceaux du type $IC^*(\bar{S} \otimes \mathbb{F}_p, V_l)$ où V_l est un F_λ -faisceau lisse sur $S(F_\lambda$ est le complété d'un corps de nombres F en une place λ au-dessus de l). On considérera les V_l tels que leur restriction à $S \otimes \mathbb{C}$ soit isomorphe à $V \otimes F_\lambda$ où V est un système local du type considéré en 1.1, associé à une représentation V du groupe algébrique G^* , rationnelle sur F absolument irréductible.

On dispose du schéma abélien universel $X \xrightarrow{p} \mathcal{M}$, donc du faisceau lisse $R^1 p_* \bar{\mathbb{Q}}_l$ sur \mathcal{M} , muni d'une action de \mathcal{O}_E . En décomposant $R^1 p_* \bar{\mathbb{Q}}_l$ en morceaux isotypiques pour l'action de $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l$, et en faisant des produits tensoriels adéquats des \mathbb{Q}_l -faisceaux lisses ainsi obtenus, on peut associer à la représentation (ξ, V) de G^* des F_λ -faisceaux lisses V_l du type voulu. On peut également reprendre dans ce cas la construction de Langlands ([25], § 3).

Une représentation absolument irréductible de $G^* \subset R_{E/Q}(GL(2))$ est du type $\xi = \bigotimes_{\sigma \in \Sigma_E} \xi_\sigma$ où ξ_σ est une représentation irréductible de $GL(2)$.

Il nous faut d'abord préciser ce que donne 1.3.4 dans ce cas. Soit n_σ le plus haut poids de la restriction de ξ_σ à $SL(2)$.

LEMME 2.2.8. — Avec les notations des paragraphes 1.2 et 1.3 on a $(R^i j_* V)_y = 0$ sauf si tous les n_σ sont égaux.

Si tous les n_σ sont égaux, on a $H^q(\mathfrak{n}, V)_\lambda = 0$ lorsque $\lambda|_{\Gamma_Q} = 1$, sauf lorsque $q=0$ et $q=d$. Par conséquent, pour $0 \leq i \leq d-1$, l'application de cup-produit :

$$(R^0 j_* V)_y \otimes (R^i j_* \mathbb{Q})_y \rightarrow (R^i j_* V)_y$$

est un isomorphisme.

Comme précédemment, on pourra trouver un ouvert dense W'_l de W_l tel que : (a') les faisceaux $(R^i \bar{j}_* V_l)|_{\bar{S}^\infty \otimes_{W'_l}}$ sont lisses; (b') pour $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \subset W'_l$, on a :

$$[\tau_{\leq g-1} R \bar{j}_* V_l]|_{\bar{S} \otimes_{\mathbb{F}_p}} \cong IC^*(\bar{S} \otimes_{\mathbb{F}_p} V_l),$$

on déduit de (a), (b) (lemme 2.2.1), (a'), (b') que pour un point fermé x de $\bar{S}^\infty \otimes_{\mathbb{F}_q}$, le morphisme de cup-produit :

$$\mathcal{H}^i(IC^*(\bar{S} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{Q}_l)_{\bar{x}}) \otimes \mathcal{H}^0(IC^*(\bar{S} \otimes_{\mathbb{F}_q} V_l)_{\bar{x}}) \rightarrow \mathcal{H}^i(IC^*(\bar{S} \otimes_{\mathbb{F}_q} V_l)_{\bar{x}}),$$

est un isomorphisme pour tout i . On en tire compte tenu de 2.2.3 le :

THÉORÈME 2.2.9. — $\sum_i (-1)^i \text{tr}(F_x, \mathcal{H}^i(IC^*(\bar{S} \otimes_{\mathbb{F}_q} V_l)_{\bar{x}})) = 0$, pour tout morphisme

$\text{Spec}(\mathbb{F}_q) \subset W'_l$ et tout point fermé x de $\bar{S}^\infty \otimes_{\mathbb{F}_q}$ si $d \geq 2$.

Ce théorème a la conséquence suivante, qui était notre motivation initiale.

COROLLAIRE 2.2.10. — Avec les mêmes notations, si $d \geq 2$,

$$\sum_i (-1)^i \text{tr}(F_q, H_c^i(S \otimes_{\mathbb{F}_q} V_l)) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(F_q, IH^i(\bar{S} \otimes_{\mathbb{F}_q} V_l)).$$

Démonstration. — La différence entre le terme de droite et le terme de gauche est la somme, sur tous les points \mathbb{F}_q -rationnels x de $\bar{S}^\infty \otimes_{\mathbb{F}_q}$, de la somme alternée des traces de F_x sur la fibre en x de $\mathcal{H}^i(IC^*(\bar{\mathcal{S}} \otimes_{\mathbb{F}_q} V_l))$; cette somme alternée est nulle d'après le théorème 2.2.9.

Q.E.D.

Au paragraphe 3, nous allons relier le résultat du corollaire au phénomène d'annulation du terme complémentaire dans la formule des traces de Selberg si $d \geq 2$, et au calcul de la série L attachée au faisceau V .

2.3. ACTION DE L'ALGÈBRE DE HECKE SUR LA COHOMOLOGIE D'INTERSECTION. UN RENFORCEMENT DU THÉORÈME D'ANNULATION. — Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G^*(\mathbb{A}_f)$ du type considéré en 2.1. A la variété de Shimura S_K , et à sa compactification de Baily-Borel \bar{S}_K est associé un ouvert W de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et des espaces algébriques S_K et \bar{S}_K sur W .

A une représentation rationnelle de G^* dans un espace V , et à un nombre premier l , on a associé un faisceau lisse V_l sur S_K .

Un ouvert W_l de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ a été introduit dans le lemme 2.2.1. On suppose dans la suite que p est un nombre premier qui n'est pas inversible dans W_l . Il est alors automatique que K est de la forme $K = K^p \cdot K_p$, où K^p est un sous-groupe compact ouvert de $G^*(\mathbb{A}_f^p)$, et K_p un sous-groupe compact maximal de $G^*(\mathbb{Q}_p)$. On note $\mathcal{H}(K^p)$ l'algèbre de Hecke des fonctions sur $G^*(\mathbb{A}_f^p)$ bi-invariantes sous K^p . On se propose de décrire une action de $\mathcal{H}(K^p)$ sur les groupes $H^k(\bar{S}_K, IC^*(V_l))$ où on s'est permis d'écrire \bar{S}_K à la place de $\bar{S}_K \otimes_{\mathbb{F}_p}$. On rappelle que pour \bar{j} l'inclusion de S_K dans \bar{S}_K , on a

$$IC^*(\bar{S}_K, V_l) = \tau_{\leq d-1} R \bar{j}_* (V_l).$$

On définira l'action de $\mathcal{H}(K^p)$ sur $H^k(\bar{S}_K, IC_p^*(V_l))$ en décrivant l'action $T(g)$ de la fonction caractéristique d'une double classe $K^p g K^p$. On omettra la vérification (standard) que cela définit bien une représentation de l'algèbre $\mathcal{H}(K^p)$. On considèrera $G^*(\mathbb{A}_f)$ comme un sous-groupe de $G^*(\mathbb{A}_f)$.

Pour tout sous-groupe compact ouvert K' de $G^*(\mathbb{A}_f)$, on dispose d'un faisceau lisse sur $S_{K'}$, qu'on notera $V_l(K')$ au lieu de V_l . Lorsque $K'' \subset K'$, on a un morphisme $\pi_{K'', K'}: S_{K''} \rightarrow S_{K'}$ qui est fini étale. Le faisceau $V_l^{K''}$ s'identifie à $(\pi_{K'', K'})^*(V_l(K'))$. On a un prolongement de $\pi_{K'', K'}$ en un morphisme fini $\bar{S}_{K''} \xrightarrow{\pi_{K'', K'}} \bar{S}_{K'}$. On note $S_{K'} \xrightarrow{j_{K'}} \bar{S}_{K'}$.

l'inclusion.

LEMME 2.3.1. — *L'isomorphisme $(\pi_{K'', K'})^*(V_l(K')) \simeq V_l(K'')$ se prolonge en un isomorphisme $(\bar{\pi}_{K'', K'})^*(\bar{j}_{K'}^! (V_l(K'))) \simeq \bar{j}_{K''}^! (V_l(K''))$ et en un isomorphisme :*

$$(\bar{\pi}_{K'', K'})^*(IC^*(\bar{S}_{K'}, V_l(K'))) \simeq IC^*(\bar{S}_{K''}, V_l(K'')).$$

Ces isomorphismes sont compatibles en un sens évident.

Preuve. — L'existence du premier isomorphisme est claire. On obtient par ailleurs un morphisme :

$$\begin{aligned} (\bar{\pi}_{K'', K'})^*(IC^*(\bar{S}_{K'}, V_l(K'))) &\rightarrow (\bar{\pi}_{K'', K'})^*(R\bar{j}_{K', *}(V_l(K'))) \\ &\rightarrow R\bar{j}_{K'', *}(R\pi_{K'', K'}^*(V_l(K'))) \simeq R\bar{j}_{K'', *}(V_l(K'')), \end{aligned}$$

qui se factorise naturellement par $IC^*(\bar{S}_{K''}, V_l(K'')) = \tau_{\leq d-1} R\bar{j}_{K'', *}(V_l(K''))$. C'est bien entendu un isomorphisme au-dessus de $S_{K''}$. Soit donc x' un point fermé de $\bar{S}_{K''}$; $x' = \bar{\pi}_{K'', K'}(x'')$; le morphisme induit sur les fibres est le morphisme naturel :

$$\begin{array}{c} \tau_{\leq d-1} R\bar{j}_{K', *}(V_l(K'))_{x'} \\ \downarrow \\ \tau_{\leq d-1} R\bar{j}_{K'', *}(V_l(K''))_{x''} \end{array}$$

donc on est ramené à vérifier que pour $0 \leq i \leq d-1$,

$$R^i \bar{j}_{K', *}(V_l(K'))_{x'} \simeq R^i \bar{j}_{K'', *}(V_l(K''))_{x''}.$$

Le lemme 2.2.1 (a) permet de ramener la vérification à un point de $\bar{S}_{K''}^\infty(\mathbb{C})$, laquelle est immédiate grâce à la description 1.3.8 (qui ne fait intervenir que la cohomologie d'algèbres de Lie).

On en déduit immédiatement le :

LEMME 2.3.2. — *On a un isomorphisme naturel :*

$$IC^*(\bar{S}_{K''}, V_l(K'')) \simeq (\bar{\pi}_{K'', K'})^!(IC^*(\bar{S}_{K'}, V_l(K'))).$$

Preuve. — Il suffit d'appliquer la dualité de Verdier à l'isomorphisme du lemme précédent, compte tenu du fait que :

$$D(IC^*(S_K, V_l(K))) = IC^*(\bar{S}_K, V_l(K)(d)) [2d]$$

et que les $V_l(-)$ sont les systèmes locaux associés à la représentation contragrédiente.

Soit maintenant K un sous-groupe compact ouvert de $G^*(\mathbb{A}_p)$, $g \in G^*(\mathbb{A}^p)$,

$K' = K \cap (gKg^{-1})$, on a un isomorphisme $I(g) : \bar{S}_{gKg^{-1}} \xrightarrow{\sim} \bar{S}_K$ et un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \bar{S}_{K'} & \\ \bar{\pi}_{K', gKg^{-1}} \swarrow & & \searrow \bar{\pi}_{K', K} \\ \bar{S}_{gKg^{-1}} & & \bar{S}_K \end{array}$$

On construit alors une correspondance $T(g)$ de $IC^*(\bar{S}_K, V_l(K))$ à lui-même en composant, au sens de [SGA 5], exposé III, § 5.2, la correspondance de $IC^*(\bar{S}_K, V_l(K))$ (sur \bar{S}_K) à $IC^*(\bar{S}_{gKg^{-1}}, V_l(gKg^{-1}))$, à support dans \bar{S}_K , déduite de l'isomorphisme composé :

$$\begin{array}{c} \bar{\pi}_{K', K^*}(IC^*(\bar{S}_K; V_l(K^{-1}))) \\ \downarrow \\ IC^*(\bar{S}_K, V_l(K')) \\ \downarrow \\ (\bar{\pi}_{K', gKg^{-1}})! IC^*(\bar{S}_{gKg^{-1}}, V_l(gKg^{-1})) \end{array}$$

et la correspondance de $IC^*(\bar{S}_{gKg^{-1}}, V_l(gKg^{-1}))$ à $IC^*(\bar{S}_K, V_l(S_K))$, à support dans le graphe de $I(g)$, qui se construit de la manière habituelle (cf. Langlands, [25], § 3).

On a de même une correspondance, encore notée $T(g)$ de $\bar{J}_{K,1}(V_l(K))$, à lui-même; ces deux correspondances sont compatibles.

Notre but est d'appliquer la formule de Lefschetz-Verdier au composé, noté $F^m \circ T(g)$, de la correspondance de Frobenius F^m et de $T(g)$, du complexe $IC^*(S_K, V_l(K))$ à lui-même. Cette formule fait intervenir le schéma $\bar{S}_K(m, g)$ des points fixes de la correspondance, dont un argument habituel de transversalité (sur S_K) montre qu'il est fini pour $m > 0$. Elle écrit la « trace totale » de $F^m \circ T(g)$ sur $R\Gamma(\bar{S}_K, IC^*(S_K, V_l(K)))$ comme somme sur $x \in \bar{S}_K(m, g)$ de termes locaux $\langle F^m \circ T(g), 1 \rangle_x$.

Lorsque $x \in S_K(m, g) = S_K \cap \bar{S}_K(m, g)$, l'hypothèse $m > 0$ entraîne que le graphe de la

correspondance $F^m \circ T(g)$ est lisse et transverse à la diagonale (du moins si K est assez petit), donc $\langle F^m \circ T(g), 1 \rangle_x$ est la trace de $F^m \circ T(g)$ sur la fibre de $V_l(K)$ en x ⁽¹⁾.

THÉORÈME 2.3.3. — Pour $m > 0$, $d \geq 2$, et

$$x \in \bar{S}_K^\infty(m, g) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S}_K^\infty \cap \bar{S}_K(m, g),$$

le terme local $\langle F^m \circ T(g), 1 \rangle_x$ est nul.

On donnera une esquisse de la démonstration, qui comprend deux parties :

(1) Le terme local en x relatif à la correspondance $F^m \circ T(g)$ sur $\bar{j}_{K,*}(V_l(K))$ est nul, donc d'après une variante de [SGA 5], exposé III B, § 2, le terme local $\langle F^m \circ T(g), 1 \rangle_x$ n'est autre que la trace de l'endomorphisme induit dans la fibre de $IC^*(\bar{S}_K, V_l(K))$.

(2) On vérifie directement que cette trace est nulle.

Il semble désespéré de calculer directement le terme local en x pour $\bar{j}_{K,*}(V_l(K))$. On se sert alors des résolutions de Rapoport, rappelées en 2.1. Avec les notations de 2.1 on peut choisir les compactifications lisses

$$\begin{array}{ccc} S_K & \xrightarrow{\hat{j}_K} \hat{S}_K & \text{et} \quad S_{K'} & \xrightarrow{\hat{j}_{K'}} \hat{S}_{K'} \\ \approx \downarrow & & \downarrow \approx & \\ S_{gK}g^{-1} & \hookrightarrow \hat{S}_{gK}g^{-1} & & \end{array}$$

de sorte qu'on ait un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \hat{S}_{K'} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \hat{S}_{gK}g^{-1} & & \hat{S}_K \end{array}$$

ce qui permet bien entendu de définir une correspondance, notée \hat{T}_g , de $\hat{j}_{K,*}(V_l(K))$ à lui-même.

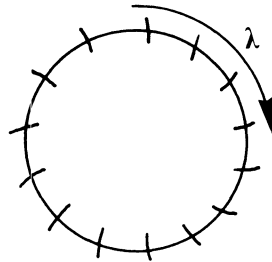
Appliquant la formule de Lefschetz-Verdier à cette correspondance, dont on verra ci-dessous que le schéma des points fixes est de dimension 0, et en utilisant le fait que $R\Gamma(\hat{S}_K, \hat{j}_{K,*}(V_l(K))) = R\Gamma_c(S_K, V_l(K)) = R\Gamma(\bar{S}_K, \bar{j}_{K,*}(V_l(K)))$, on est ramené à montrer que la somme, sur une fibre de $\hat{S}_K \xrightarrow{\pi} \bar{S}_K$ au-dessus de x , des termes locaux de Lefschetz-Verdier, est nulle.

⁽¹⁾ On remarquera toutefois que [SGA 5] ne contient pas d'énoncé assez général pour étayer cette affirmation.

Le complété formel de $\hat{S}_{K'}$, le long de $\hat{S}_{K'}^{\infty}$ s'identifie, d'après 2.1 au complété formel du quotient par un groupe d'unités U' , qu'on notera plutôt $U(K')$, d'une variété torique (non de type fini) construite sur un tore \underline{S} de groupe de caractères un réseau \underline{M} de E . Cela implique qu'en un point de $\hat{S}_{K'}^{\infty}$, on a pour $\hat{S}_{K'}$ des coordonnées toriques formelles (z_1, \dots, z_d) bien définies seulement à l'action près sur \underline{M} d'un élément de $U(K')$. De telles coordonnées étant choisies en un point de $\hat{S}_{K'}^{\infty}$ et en son image sur \hat{S}_K^{∞} , le morphisme $\hat{S}_{K'} \rightarrow \hat{S}_K$ correspond à un morphisme de variétés toriques, équivariant *via* l'isogénie $\underline{S}_{K'} \rightarrow \underline{S}_K$. Cela signifie qu'au voisinage formel d'un point de $\hat{S}_K^{\infty} \times \hat{S}_{K'}^{\infty}$, la correspondance de Hecke est « monoïdale » relativement à ce type de coordonnées toriques; plus précisément elle est décrite par un automorphisme de $E = \underline{M} \otimes \mathbb{Q}$ qui commute à l'action de E^{\times} , donc est la multiplication par $\lambda \in E^{\times}$; de l'ambiguïté dans le choix des coordonnées il résulte que λ est seulement bien défini à multiplication près par un élément de $U(K)$. On remarque si λ n'est pas dans $\mathbb{Q}^{\times} \cdot U'$, on peut choisir la subdivision $\{\sigma_{\alpha}\}$ du type 2.1 de sorte qu'aucun simplexe σ_{α} de dimension ≥ 1 ne soit tel que $\lambda \cdot \sigma_{\alpha}$ rencontre $U' \cdot \sigma_{\alpha}$.

Il est alors évident que $F^m \circ T(g)$ n'a pas de point fixe sur $\pi^{-1}(x)$.

Complexe simplicial associé au quotient de l'éventail par U' :



Reste donc à étudier le cas où $\lambda \in \mathbb{Q}^{\times}$. Considérons alors un point fixe $y \in \pi^{-1}(x)$ de $F^m \circ T(g)$ sur \hat{S}_K ; cela signifie que $(y, F^m(y))$ est un point fixe de $T(g)$. Prenons des coordonnées toriques formelles (z_1, \dots, z_d) sur \hat{S}_K en y , de sorte que l'équation en y du diviseur \hat{S}_K^{∞} soit $z_1 \dots z_k = 0$. Utilisant (z_1, \dots, z_d) pour les coordonnées sur la première copie de \hat{S}_K , et (ξ_1, \dots, ξ_d) pour les coordonnées de la deuxième copie, le graphe de $F^m \circ T(g)$ a pour équations :

$$\begin{aligned} z_1^a &= u_1 \cdot (\xi_1^b)^{(p^m)} \\ &\vdots \\ z_d^a &= u_d \cdot (\xi_d^b)^{(p^m)} \end{aligned}$$

où a et b sont des entiers ≥ 1 premiers à p [cela venant du fait que $T(g)$ est séparable], et les u_i sont des constantes (dans $\bar{\mathbb{F}}_p$). On voit donc que pour $m > 0$, $(0, \dots, 0)$ est un point fixe isolé.

On admettra que ce modèle local formel de $F^m \circ T(g)$ permet de déterminer les termes locaux de Lefschetz-Verdier. Cela résulterait de théorèmes d'invariance, par passage au

complété formel, des groupes de cohomologie à support dans le point fermé, qui ont été annoncés par Gabber.

Considérons alors l'image inverse de $V_l(K)$ au complémentaire de \hat{S}_K^∞ dans l'enséblisé de \hat{S}_K le long de \hat{S}_K^∞ . Au voisinage de tout point de \hat{S}_K^∞ , la monodromie de ce faisceau est unipotente. On peut alors construire une filtration croissante (V_i) de $V_l(K)$, telle que V_i/V_{i-1} se prolonge en un faisceau lisse sur l'enséblisé de \hat{S}_K en un point donné $y \in (\hat{S}_K^\infty)$: si l'équation de \hat{S}_K^∞ en y est $z_1 \dots z_k = 0$ et si N_1, \dots, N_k dénotent les logarithmes de la monodromie, on pose $V_0 = 0$, V_1 le sous-faisceau lisse de $V_l(K)$ dont la fibre au point générique est $\ker(N_1) \cap \dots \cap \ker(N_k)$; si V_{i-1} est défini, on définit $V_i \supset V_{i-1}$ de sorte que V_i/V_{i-1} est l'intersection des noyaux des N_i opérant dans V/V_{i-1} . La correspondance induite par $F^m \circ T(g)$ sur l'enséblisé de \hat{S}_K en y se raffine en une correspondance filtrée, pour $V_l(K)$ filtré par (V_i) , au sens de [SGA 5], exposé III, §4.13. On peut donc remplacer $V_l(K)$ par la restriction au complémentaire de \hat{S}_K^∞ d'un faisceau lisse sur l'enséblisé de \hat{S}_K en y , qu'on pourrait d'ailleurs supposer de rang 1 en raffinant la filtration. On est donc ramené (en utilisant nos coordonnées formelles) à un produit de correspondances sur un prolongement par zéro d'un faisceau lisse sur un ouvert d'une courbe lisse, le graphe de la correspondance étant du type $z^a = u \cdot (\xi^b)^{(p^m)}$; ces correspondances ont été étudiées par Langlands dans [25], Prop. 7.12 (on trouvera la démonstration dans [SGA 5], exposé III B, Corollaire 1.5).

D'après *loc. cit.*, pour m assez grand, k des termes locaux de Lefschetz-Verdier pour ces correspondances de dimension un sont nuls, ce qui achève l'étape (1) dans ce cas.

Dans le cas général, vu que $a \neq b \cdot p^m$, on obtient une formule pour la contribution du point fixe à la formule des traces, qui ne dépend que de a, b, m et k . Le nombre de points fixes de la correspondance, dans une composante de $\pi^{-1}(x)$ de dimension $d-k$ est égale à $(b \cdot p^m - a)^k$. La somme de ces contributions sur les points fixes de $F^m \circ T(g)$ dans $\pi^{-1}(x)$ est égale à $\sum_{k=1}^d N(k) \cdot |b \cdot p^m - a|^k \cdot C(a, b, m, k)$ où $N(k)$ est le nombre de composantes de dimension $d-k$ de $\pi^{-1}(x)$.

Or cette somme est égale à la contribution, du point fixe isolé $x \in \bar{S}_K$ à la formule de Lefschetz-Verdier pour $\bar{j}_{K,1}(V_{l,K})$. Comme l'adhérence de Zariski, dans l'espace affine de dimension $d-1 \geq 1$, de l'ensemble des $(d-1)$ uples $(N(1), \dots, N(d))$ physiquement réalisables est un sous-espace, vectoriel, la somme plus haut est nécessairement identiquement nulle.

Reste l'étape (2). Traitons d'abord le cas $V = \bar{\mathbb{Q}}$. Si $(x, F^m x)$ est un point fixe, on doit calculer la trace de l'endomorphisme de $(R^i \bar{j}_* \bar{\mathbb{Q}})_x$ induit par $F^m \circ T(g)$, pour $0 \leq i \leq d-1$. D'après 2.2.4, 2.2.6 et 2.3.1, cette trace est un entier indépendant de i , d'où l'assertion dans ce cas. Dans le cas général, la trace de l'endomorphisme de :

$$(R^i \bar{j}_* V_l(K))_{\bar{x}} = (R^0 \bar{j}_* V_l(K))_{\bar{x}} \otimes (R^i \bar{j}_* \bar{\mathbb{Q}})_{\bar{x}}$$

est le produit de l'entier précédent par la trace de $F^m \circ T(g)$ dans $(R^0 \bar{j}_* V_l(K))_{\bar{x}}$, d'où encore l'assertion voulue, d'après 2.2.4.

2.4. GÉNÉRALISATION DE 2.1 A DES GROUPES UNITAIRES DE \mathbb{Q} -RANG UN. — Soit E un corps de nombres totalement réel de degré $d \geq 2$ sur \mathbb{Q} , F une extension quadratique totalement imaginaire de E , V un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur F muni d'une forme hermitienne H de rang isotrope égal à 1. Soit \underline{G}_0 le groupe algébrique sur E formé des automorphismes g de V pour lesquels il existe $\mu(g) \in E^*$ tels que :

$$H(g \cdot v, g \cdot w) = \mu(g) \cdot H(v, w).$$

Soit $\underline{G} = \mathbb{R}_{E/\mathbb{Q}} \underline{G}_0$ et définissons le groupe algébrique réductif G^* sur \mathbb{Q} comme produit fibré

$$\begin{array}{ccc} G^* & \hookrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \quad \mathbb{R}_E |_{\mathbb{Q}} \mu = \mu \\ \mathbb{G}_m & \hookrightarrow & \mathbb{R}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \end{array}$$

On a un choix naturel de $h: \mathbb{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m \rightarrow G^*_{\mathbb{R}}$. Pour tout sous-groupe compact ouvert K de $G^*(\mathbb{A}^F)$, on peut définir une variété de Shimura $S_K = S_K(G^*, h)$ qui a un modèle canonique sur le « corps réflex » $E(G, h) = E_0$ [12]. Comme la « partie imaginaire » de H est une forme symplectique sur V (vu comme espace vectoriel sur E), G^* se plonge dans un groupe de similitudes symplectiques. Pour K assez fin, S_K se plonge alors dans une variété de Shimura du groupe $G_p(2d(n+1))$.

On peut interpréter S_K comme espace de modules de variétés abéliennes à isogénie près, munies d'une action de F et d'une classe de polarisations compatibles à l'action de F , qui induisent sur l'homologie de la variété abélienne une forme alternée semblable à la partie imaginaire de H (voir [27]).

On peut définir une compactification lisse \hat{S} de $S = S_K$ du type étudié dans [2]. Sa frontière \hat{S}^∞ s'interprète en termes de 1-motifs symétriques dégénérants [9]. On a un diagramme où \bar{S} est la compactification de Baily-Borel :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j} & \hat{S} \\ & \searrow \bar{j} & \downarrow \pi \\ & & \bar{S} \end{array}$$

Les fibres de π sont ici plus compliquées que dans le cas de Hilbert-Blumenthal. Décrivons $\pi^{-1}(\mathcal{C})$, pour \mathcal{C} une composante de \bar{S}^∞ (\mathcal{C} est une variété de Shimura d'un groupe anisotrope). Soit $E_0(\mathcal{C})$ le corps de définition de \mathcal{C} ; il existe un tore *déployé* \underline{S} sur $E_0(\mathcal{C})$, une action de \underline{S} sur $\pi^{-1}(\mathcal{C}) = \hat{S}^\infty_{\mathcal{C}}$ (mêmes notations qu'en 2.1) et une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \hat{S}^\infty_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{p} & \tilde{S}^\infty_{\mathcal{C}} \\ \pi|_{\hat{S}^\infty_{\mathcal{C}}} \searrow & & \downarrow q \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

- (a) $\tilde{S}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ est le quotient de $\hat{S}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ par l'action de \underline{S} .
- (b) Il existe une stratification de Whitney $\hat{S}_{\mathcal{C}}^{\infty} = \coprod_{\alpha} Y_{\alpha}$ telle que pour tout $x \in \tilde{S}_{\mathcal{C}}^{\infty}$, $Y_{\alpha} \cap p^{-1}(x)$ est une orbite de \underline{S} .
- (c) q est un schéma abélien, de dimension relative $d.n$. (voir [9]; le tore \underline{S} est déployé par construction).

Cette situation et ces propriétés s'étendent au-dessus d'un ouvert de $\text{Spec}(\mathcal{O}_E)_0$ mais on ne dispose pas de construction de $\hat{S}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ similaire à celle de Rapoport dans le cas de Hilbert-Blumenthal (cf. § 2.1).

Pour y un point complexe de \mathcal{C} , la fibre $\mathcal{H}^i(\text{IC}^*(V))_y$ est calculée au paragraphe 1.3 (où V est un système local sur \mathcal{S} du type 1.1) le résultat peut s'écrire (cf. 1.3.4 et 1.3.8) :

$$\mathcal{H}^i(\text{IC}^*(V))_y = \bigoplus_{\substack{p \leq d-1 \\ q_1, \dots, q_d \leq n-1 \\ p + \sum q_{\alpha} = i}} H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes E_{q_1} \otimes \dots \otimes E_{q_n},$$

où plus simplement :

$$\mathcal{H}^i(\text{IC}^*(V))_y = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ p \leq d-1, q \leq d(n-1)}} H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes R_q,$$

pour un certain espace vectoriel R_q , dont peu importe ici la détermination précise. Remarquons que la codimension de \mathcal{C} dans \bar{S} est égale à $d.n$ et que $\mathcal{H}^i(\text{IC}^*(V))_y = 0$ pour $i \geq d.n$, comme il se doit.

Filtrons $\mathcal{H}^i(\text{IC}^*(V))_y$ par les $W_k = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ q \leq k}} H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes R_q$. On a alors le très évident :

LEMME 2.4.1. — $H^1(\tau, \mathbb{C}) = W_0 \cdot \mathcal{H}^1(\text{IC}^*(\mathbb{C}))_y$. Le cup-produit :

$$H^1(\tau, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{H}^i(\text{IC}^*(V))_{\bar{y}} \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(\text{IC}^*(V))_y$$

envoie $H^1(\tau, \mathbb{C}) \otimes W_k \mathcal{H}^i(\dots)_y$ dans $W_k \mathcal{H}^{i+1}(\dots)_y$. Pour $k \leq d(n-1)$ et $p \leq d-1$, il induit un isomorphisme :

$$H^p(\tau, \mathbb{C}) \otimes \text{Gr}_k^W \mathcal{H}^k(\dots)_y \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_k^W \mathcal{H}^{p+k}(\dots)_y.$$

D'un point de vue plus géométrique, $\mathcal{H}^i(\text{IC}^*(V))_{\bar{y}}$ est un facteur direct de :

$$(R^i \pi_* \text{IC}_{\bar{S}}^*(V))_{\bar{y}} = H^i(\pi^{-1}(\bar{y}), \text{IC}_{\bar{S}}^*(V) |_{\pi^{-1}(\bar{y})}).$$

On a une suite spectrale de Leray :

$$E_{2,\mathbf{v}}^{r,s} = H^r(q^{-1}(\bar{y}), R^s p_* \text{IC}_{\bar{S}}^*(V)) \Rightarrow H^{r+s}(\pi^{-1}(y), \text{IC}_{\bar{S}}^*(V)).$$

LEMME 2.4.2. — $E_{2,\mathbb{V}}^{q,0}$ est isomorphe à R_q et $E_{2,\mathbb{C}}^{0,p}$ est isomorphe à $H^p(\tau, \mathbb{C})$.

Plaçons nous maintenant sur un corps fini, comme en 2.2 (on suppose V et V_l définis à partir d'une représentation de G^* rationnelle sur \mathbb{Q}). Traitons d'abord le cas du faisceau \mathbb{Q}_l , et examinons la suite spectrale $E_2^{\cdot,s} = E_{2,\mathbb{Q}_l}^{\cdot,s}$ sur laquelle opère le Frobenius géométrique F_y .

LEMME 2.4.3. — $E_2^{\cdot,s}$ est pur de poids r pour $s=0$ ou $s=1$.

Preuve. — D'après les propriétés (a) et (b) du morphisme p vis-à-vis de l'action de \underline{S} , il résulte du lemme 2.2.7 que le faisceau lisse $R^s p_* \mathbb{Q}_l$ ($s=0$ ou 1) est ponctuellement pur de poids 0. D'après [13], Prop. 6.2.6, $E_2^{\cdot,s} = H^r(q^{-1}(\bar{y}), R^s p_* \mathbb{Q}_l)$ est pur de poids r .

On a en particulier une suite exacte :

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} = H^1(q^{-1}(\bar{y}), \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^1(\pi^{-1}(\bar{y}), \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^0(q^{-1}(\bar{y}), R^1 p_* \mathbb{Q}_l) = E_2^{0,1}$$

\uparrow
poids 1

\uparrow
poids 0

et il résulte de 2.4.2 que $H^1(IC^*(\bar{S}))_y$ s'identifie à $H^1(\pi^{-1}(\bar{y}), \mathbb{Q}_l)$ et à la somme directe de $E_2^{1,0}$ ($E_2^{0,1}$ est la partie de poids 0). De la propriété (b) et du lemme 2.2.7 on déduit :

LEMME 2.4.4. — Toute valeur propre de F_y sur $E_2^{0,1}$ est égale à 1.

De 2.4.2 et 2.4.3 on déduit :

LEMME 2.4.5. — La filtration W de 2.4.1 est la filtration par le poids.

THÉORÈME 2.4.6. — $\sum_i (-1)^i \text{tr}(F_y, \mathcal{H}^i(IC^*(\mathcal{P}, V_l))) = 0$.

Démonstration. — Cette somme est $\sum_{k \leq d(n-1)} (-1)^k \sum_{p \leq d-1} (-1)^p \text{tr}(F_y, \text{Gr}_k^W \mathcal{H}^{p+k}(\dots)_{\bar{y}})$

et la somme interne vaut $\sum (-1)^p \text{tr}(F_y, \Lambda^p(E_2^{0,1})) \times \text{tr}(F_y, \text{Gr}_k^W \mathcal{H}^k(\dots)_{\bar{y}})$ d'après 2.4.1. Alors 2.4.4 dit que cette somme est nulle (puisque $d \geq 2$).

Q.E.D.

On en déduit évidemment l'analogue du corollaire 2.2.10.

3. Fonctions L de certaines variétés de Shimura

3.1. LES VARIÉTÉS EN QUESTION. — Considérons, comme ci-dessus, un corps de nombres E totalement réel, de degré d sur \mathbb{Q} , et soit \mathcal{O}_E son anneau d'entiers. Si R est un anneau, on pose :

$$R_{E/\mathbb{Q}} G_m(R) = G_m(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} R).$$

On se donne un groupe algébrique A , intermédiaire entre G_m et $R_{E/\mathbb{Q}} G_m$, connexe :

$$G_m \hookrightarrow A \hookrightarrow R_{E/\mathbb{Q}} G_m.$$

Soit B une algèbre simple centrale sur E de dimension 4, munie d'une induction positive totalement indéfinie, soit \mathcal{O}_B un ordre maximal et notons δ_B le produit des nombres premiers au-dessus desquels B n'est pas déployée.

On suppose fixé un isomorphisme entre

$$\mathcal{O}_B \otimes (\hat{\mathbb{Z}}[1/\delta_B] \times \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \text{End}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_E^2) \otimes (\hat{\mathbb{Z}}[1/\delta_B] \times \mathbb{R}).$$

Lorsque B est déployée on suppose que $\mathcal{O}_B = M_2(\mathcal{O}_E)$.

On définit un groupe sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$ en posant :

$$\tilde{G}(\mathbb{R}) = G_m(\mathcal{O}_B^{\text{opp}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}).$$

On notera G le produit fibré de \tilde{G} et A au-dessus de $R_{E/\mathbb{Q}} G_m$:

$$\begin{array}{ccccc} G^* & \hookrightarrow & G & \hookrightarrow & \tilde{G} \\ E \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Nr}_{B/E} \\ G_m & \hookrightarrow & A & \hookrightarrow & R_{E/\mathbb{Q}} G_m \end{array}$$

Posons $\tilde{K}_n = \text{Ker } \tilde{G}(\mathbb{Z}_f) \rightarrow \tilde{G}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; soit \tilde{K} un sous-groupe ouvert compact de $\tilde{G}(A_f)$ contenant \tilde{K}_n et $K = \tilde{K} \cap G(A_f)$. Soit S un schéma sur lequel δ_B est inversible. Une \mathcal{O}_B -variété abélienne X sur S avec structure de niveau n est la donnée d'une variété abélienne X sur S , d'un homomorphisme unitaire injectif, $m: \mathcal{O}_B \hookrightarrow \text{End}(X/S)$ satisfaisant la condition (*) Lie X est un $\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_S$ -module localement libre sur S de rang 2.

On note (\mathcal{P}, P_+) le \mathcal{O}_E -module projectif de rang 1 avec notion de positivité défini par les \star -homomorphismes symétriques de X dans X^* et les \star -polarisations de X (cf. [38], exposé III, pour ces notions).

Soit L un \mathcal{O}_E -module projectif de rang 1 dans E avec la notion de positivité L_+ définie par les éléments totalement positifs de E , et \mathcal{D} la différentielle de E/\mathbb{Q} . On dira qu'un \mathcal{O}_B schéma abélien X , L -polarisé [c'est-à-dire muni d'un isomorphisme $\alpha: (\mathcal{P}, \mathcal{P}_+) \rightarrow (L, L_+)$], avec structure de niveau n (c'est-à-dire muni d'un isomorphisme $\beta: X_n \rightarrow \mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}/n$, comme faisceaux pour la topologie étale sur S), est de type A s'il existe $a \in A(\mathbb{A}) \cdot G_m(E)$ vérifiant les conditions (A1) et (A2) ci-dessous :

$$(A1) \quad a(L, L_+) = (\mathcal{D}^{-1}, \mathcal{D}_+^{-1})$$

[un élément $a \in G_m(E \otimes \mathbb{A})$ agit naturellement sur les idéaux fractionnaires avec notion de positivité].

Avant d'énoncer (A2), on rappelle l'isomorphisme naturel :

$$\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_E} \Lambda^2 X_n^{1/2} \rightarrow \mathcal{D}^{-1} \otimes \mu_n$$

défini par le « e_n pairing » où on a posé :

$$X_n^{1/2} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}/n}(\mathcal{O}_E^2 \otimes \mathbb{Z}/n, X_n).$$

La L-polarisation α et la structure de niveau β fournissent un isomorphisme :

$$(\alpha, \beta): \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_E} \Lambda^2 X_n^{1/2} \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_E} \Lambda^2 (\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}/n)^{1/2}.$$

En composant ces deux isomorphismes on obtient un isomorphisme :

$$(\overline{\alpha}, \overline{\beta}): \mathcal{D}^{-1} \otimes \mu_n \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_E} \Lambda_{\mathcal{O}_E}^2 (\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}/n)^{1/2}$$

(A2) l'isomorphisme $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ est induit par a^{-1} et le choix d'une racine n -ième de l'unité.

On appellera structure de type A-K, une classe modulo K de structures niveau n , sur un \mathcal{O}_B -schéma abélien L-polarisé de type A.

La catégorie fibrée au-dessus de $\mathbb{Z}[1/n\delta_B]$ des \mathcal{O}_B -schémas abéliens L-polarisés munis d'une structure de type A-K est un champ algébrique lisse de dimension d sur $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/n\delta_B]$ que nous noterons \mathcal{M}_K^L . On notera \mathcal{M}_K la somme disjointe des $\mathcal{M}_K^{L_i}$ où L_i parcourt un ensemble de représentants des classes restreintes d'idéaux fractionnaires L_i de E vérifiant (A 1). L'espace grossier associé à \mathcal{M}_K sera M_K et S_K le quotient de M_K par U^+/U_n^2 où U est le groupe des unités de E et U^+ celui des unités totalement positives.

Lorsque $B = M_2(E)$ et $A = G_m$ on retrouve le problème de modules étudié par Rapoport puisque dans ce cas le \mathcal{O}_B -schémas abéliens sont simplement les carrés de \mathcal{O}_E -schémas abéliens (cf. § 2.1).

L'espace $S_K(\mathbb{C})$ n'est autre que la variété de Shimura $S_K(G, h)$.

Rappelons que $G_\infty = G(\mathbb{R}) = \{g \in GL_2(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \mid \det g \in A(\mathbb{R})\}$, que h est défini par le plongement diagonal de :

$$\mathbb{C}^\times = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

dans $GL_2(\mathbb{R})^d \simeq GL_2(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) = \prod_{i=1}^d GL_2(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_{\theta_i}$ où les θ_i sont les d plongements de E dans \mathbb{R} , et que

$$S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_\infty K,$$

où K_∞ est le centraliseur de h dans G_∞ (comme A contient G_m , l'image de h est contenue dans G_∞).

Plus généralement, si k est un corps algébriquement clos, $S_K(k)$ paramètre les classes d'isomorphie de \mathcal{O}_B -schémas abéliens de type A-K.

3.2. FONCTIONS L. — Soit ξ une représentation rationnelle de G dans un vectoriel V défini sur F; si K est assez petit, et ξ triviale sur Z^1 , on peut lui associer un système local l -adique V_l sur S_K (cf. [26] et § 2.2 ci-dessus). Lorsque $B = M_2(E)$ on dispose de la compactification de Baily-Borel \overline{S}_K sur un ouvert dense W de $\text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$; lorsque B est une algèbre à division on posera $\overline{S}_K = S_K$. On a introduit au paragraphe 2.2 le complexe

d'intersection $IC^*(\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p, V_l)$ on lui associe une fonction L locale en p pour un « bon nombre premier p » c'est-à-dire dans W'_l (lorsque B est une algèbre de quaternions il convient de prendre pour W'_l le complémentaire des $p \mid l\delta_B n$). On notera $|\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p|$ l'ensemble des points fermés de $\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p$. Nous poserons :

$$\begin{aligned} L(s, IC^*(\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p, V_l)) &= \prod_{x \in |\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p|} \det(1 - p^{-s \deg x} F_x^*, \mathcal{H}^i IC^*(\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p, V_l))^{(-1)^{i+1}} \\ &= \prod_{i=0}^{2d} \det(1 - p^{-s} F^*, IH^i(\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p, V_l))^{(-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la formule des traces de Lefschetz démontrée dans SGA4 1/2 pour les F_X -faisceaux constructibles. En effet, les faisceaux $\mathcal{H}^i IC^*(\dots)$ sont constructibles; par ailleurs, la cohomologie IH^* est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ est $H^p(\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p, \mathcal{H}^q(IC^*(\dots)))$; on en déduit que :

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr}(F^{**}, IH^i(\dots)) = \sum (-1)^{p+q} \operatorname{tr}(F^{**}, H^p(\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p, \mathcal{H}^q IC^*(\dots))).$$

Nous devons maintenant introduire une fonction L automorphe, ou du moins son facteur en p , pour un bon nombre premier. C'est celui défini par Langlands dans [26]. Nous allons en rappeler la définition.

Considérons une représentation ξ de $G_\infty = G(\mathbb{R})$ dans un vectoriel complexe V , irréductible. On notera ξ_Z le caractère de $Z_\infty = Z(\mathbb{R})$ défini par la restriction de ξ à Z_∞ . On notera ω le caractère de $G(\mathbb{A})$ du type $\omega(g) = |N r d_{B/E} g|^s$ avec $s \in \mathbb{R}$ tel que si $z \in Z_\infty$ on ait $\omega(z) = |\xi_Z(z)|$.

On pose $Z_K = Z(\mathbb{A}_f) \cap K$ et on considère l'espace $L^2 = L^2(Z_K G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}), \xi_Z)$ des fonctions sur $G(\mathbb{A})$ mesurables qui vérifient :

- (i) $\varphi(\gamma g z) = \xi_Z(z_\infty)^{-1} \varphi(g)$ si $z \in Z_\infty$ et $\gamma \in G(\mathbb{Q})$.
- (ii) $\omega(g) \varphi(g)$ est de carré intégrable sur $Z_\infty Z_K G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})$.

Soit π une représentation de $G(\mathbb{A})$, telle que $\omega \otimes \pi$ soit unitaire, irréductible, et dont la restriction à Z_∞ soit $(\xi_Z)^{-1}$. Soit $g \in \tilde{G}(\mathbb{A})$, on pose $\pi^g(x) = \pi(gxg^{-1})$ pour $x \in G(\mathbb{A})$; la représentation π^g est dite L -indiscernable de π . Une classe de représentations L -indiscernables est appelée un L -paquet. La multiplicité $m(\pi)$ de π dans le spectre discret de L^2 n'est pas toujours constante lorsque π parcourt un L -paquet Π ; on peut définir [24] une multiplicité moyenne que l'on note $n(\Pi)$. On désignera encore par Π la somme des (classes d'équivalence des) π dans Π . On dispose d'un analogue local de ces notions; on peut en particulier décomposer Π en produit tensoriel $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f$ sur $G_\infty \times G(\mathbb{A}_f)$.

On dit que π est stable si la multiplicité $m(\pi^g)$ est constante lorsque g parcourt $\tilde{G}(\mathbb{A})$. Les représentations de dimension un sont stables. Lorsque π est instable son L -paquet est du type Π_θ (voir plus bas).

On posera pour tout L -paquet Π_∞ :

$$m(\Pi_\infty, \xi) = 2^{-d} \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}; \Pi_\infty \otimes \xi).$$

La \mathfrak{g} - \mathfrak{f} -cohomologie de $SL_2(\mathbb{R})$ est bien connue et on en déduit les résultats suivants :

(a) Si π_∞ est de dimension un et vérifie $\pi_\infty(z) = \xi_Z(z)^{-1}$ la cohomologie $H^*(\mathcal{G}, k; \pi_\infty \otimes \xi)$ n'est non triviale que si ξ est de dimension un (on a supposé ξ irréductible) et dans ce cas :

$$\dim H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}; \pi_\infty \otimes \xi) = \begin{cases} \binom{d}{i/2} & \text{si } i = 2p, \\ 0 & \text{si } i = 2p+1 \end{cases}$$

et donc $m(\pi_\infty, \xi) = 1$.

(b) Si π_∞ est non dégénérée et vérifie $\pi_\infty(z) = \xi_Z(z)^{-1}$ la cohomologie $H^*(\mathcal{G}, k; \pi_\infty \otimes \xi)$ n'est non triviale que pour les représentations d'un L-paquet de la série discrète Π_ξ ; on a :

$$\dim H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}; \Pi_\xi \otimes \xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq d, \\ 2^d & \text{si } i = d \end{cases}$$

et donc $m(\Pi_\xi, \xi) = (-1)^d$.

Le L-groupe de \tilde{G} est le produit semi-direct de sa composante connexe ${}^L\tilde{G}^0 = GL_2(\mathbb{C})^\Sigma$, où $\Sigma = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})/\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$, par $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$:

$${}^L\tilde{G} = {}^L\tilde{G}^0 \rtimes \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),$$

considéré comme groupe proalgébrique. On note r^0 la représentation de ${}^L\tilde{G}^0$ produit tensoriel des représentations naturelles des facteurs GL_2 ; elle est donc de dimension 2^d , et se prolonge de façon naturelle en une représentation r de ${}^L\tilde{G}$. Le noyau de r^0 est un sous-groupe Z_* du centre de ${}^L\tilde{G}^0$; le quotient ${}^L\tilde{G}/Z_*$ est le L-groupe ${}^L\tilde{G}^*$ de G^* . Les groupes G considérés sont intermédiaires entre G^* et \tilde{G} et leurs L-groupes seront des quotients de ${}^L\tilde{G}$ par des sous-groupes de Z_* .

Les représentations r^0 et r passent au quotient; nous les noterons encore r^0 et r par abus de notation.

Soit δ_E le produit des nombres premiers au-dessus desquels E est ramifiée; on considère un nombre premier p ne divisant pas $\delta_E \delta_B$ et tel que $G(\mathbb{Z}_p) = K_p$ soit maximal hyperspécial. Un L-paquet local Π_p contient au plus une représentation π_p non ramifiée pour K_p , c'est-à-dire possédant un vecteur (non nul) K_p -invariant. A une telle représentation, on associe *via* l'isomorphisme de Satake la classe de conjugaison dans ${}^L\tilde{G}$ d'un élément $t(\pi_p) = t^0(\pi_p) \times \varphi_p$ dans ${}^L\tilde{G}^0 \times \varphi_p$ où $t^0(\pi_p)$ est semi-simple dans ${}^L\tilde{G}^0$ et φ_p un frobenius ([7], § 7.2) et on pose :

$$L(s, \pi_p, r) = L(s, \Pi_p, r) = \det(1 - p^{-s} r(t(\pi_p)))^{-1}.$$

Nous supposons maintenant que $K = K_p$, $K^p \subset G(\mathbb{Q}_p)$, $G(\mathbb{A}_f^p)$ avec p et K_p comme ci-dessus. La multiplicité de la représentation unité de K dans Π_f sera notée $m(\Pi_f, K)$.

On définit un premier facteur $L_{p,G}$ en p de la fonction L automorphe par :

$$L_{p,G}(s, S_K, V) = \prod L\left(s - \frac{d}{2}, \Pi_p, r\right)^{n(\Pi)m(\Pi_\infty, \xi)m(\Pi_f, K)}$$

où $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f$ parcourt les L -paquets de représentation de $G(\mathbb{A})$ comme ci-dessus (et Π_p est la composante en p de Π_f).

Pour simplifier un peu la discussion qui suit nous supposons $B = M_2(E)$.

Les facteurs instables proviennent de groupes endoscopiques qui sont ici simples à décrire. Un tore maximal T non déployé dans G défini sur Q , est associé à une extension quadratique F de E .

Le groupe $\mathcal{J}(T) = (E \otimes \mathbb{A})^\times / E^\times \cdot A(\mathbb{A}) N_{F/E}(F \otimes \mathbb{A})^\times$ est d'ordre 1 ou 2. S'il est non trivial le tore T donnera naissance à des intégrales orbitales instables et à un groupe endoscopique ${}^L T$ avec un plongement ${}^L T \hookrightarrow {}^L G$ (cf. [28], proposition 1).

Soit θ un caractère de $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})$, la représentation de Weil permet de construire un L -paquet Π_θ qui se décompose naturellement en deux sous-ensembles Π_θ^+ et Π_θ^- si $\mathcal{J}(T)$ a deux éléments. Le choix d'un caractère additif $\psi: E \otimes \mathbb{A}/E \rightarrow \mathbb{C}$ permet de définir une décomposition des L -paquets locaux (cf. [24]); on pose $\varepsilon(\pi_v) = +1$ ou -1 suivant que $\pi_v \in \Pi_{\theta_v}^+$ ou $\Pi_{\theta_v}^-$ et on définit :

$$\begin{aligned} \Pi_{\theta_f}^1 &= \{\pi_f = \otimes \pi_v \in \Pi_{\theta_f} \mid \varepsilon(\pi_f) = \prod_{v \times \infty} \varepsilon(\pi_v) = +1\}, \\ \Pi_{\theta_f}^2 &= \{\pi_f = \otimes \pi_v \in \Pi_{\theta_f} \mid \varepsilon(\pi_f) = \prod_{v \times \infty} \varepsilon(\pi_v) = -1\} \end{aligned}$$

et on note $m^i(\Pi_{\theta_f}, K)$ la multiplicité de la représentation unité de K dans $\Pi_{\theta_f}^i$.

On dispose d'une injection ${}^L T \hookrightarrow {}^L G$ du groupe endoscopique ${}^L T$ associé à T ; le composé de la représentation r avec cette injection définit une représentation r_T . La représentation r_T n'est pas irréductible; en effet il existe dans ${}^L G$ un élément ε qui commute à l'image de ${}^L T$, d'ordre 2 et non central. Donc r_T est décomposée de façon naturelle en somme de deux représentations (non nécessairement irréductibles) (cf. [26], p. 1127) :

$$r_T = r_1 \oplus r_2.$$

Un L -paquet Π_θ est associé à un homomorphisme ${}^L \theta$ du groupe de Weil $W_{F/E}$ dans ${}^L G$ qui se factorise par ${}^L T$.

Soit $t \in T$ on note \bar{t} son conjugué pour l'automorphisme induit par la conjugaison dans l'extension quadratique F associé à T . Soit θ un caractère de $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})$ on note $\bar{\theta}$ le caractère défini par $\bar{\theta}(t) = \theta(\bar{t})$. Les deux L -paquets Π_θ et $\Pi_{\bar{\theta}}$ sont égaux. Seules interviennent ici les extensions quadratiques imaginaires; soit θ_∞ un caractère de T_∞ , tel que $\Pi_{\theta_\infty} = \Pi_{\bar{\theta}_\infty}$; il y a deux tels caractères : θ_∞ et $\bar{\theta}_\infty$ avec $\theta_\infty \neq \bar{\theta}_\infty$. La représentation virtuelle $r_1 - r_2$ de ${}^L T$ permet de choisir un caractère θ_∞^0 parmi les deux candidats (cf. [6], p. 1137) et réciproquement.

Soit p un nombre premier comme ci-dessus. Le L -paquet Π_θ contient au plus un composant π_p admettant un vecteur K_p -invariant, et est associé dans ce cas à un élément $t(\theta_p)$ du L -groupe ${}^L T$ (pour des conventions précises on renvoie le lecteur à [26], § 2) on pose :

$$L_p(s, \theta, r_\alpha) = \det(1 - p^{-s} r_\alpha(t(\theta_p)))^{-1}$$

Soit $\Theta_T(\theta_\infty^0)$ l'ensemble des caractères θ de $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})$ avec $\theta_\infty = \theta_\infty^0$. Le facteur L instable attaché à T et à (ξ, V) est l'expression :

$$L_{p,T}(s, S_K, V) = \prod_{\theta \in \Theta_T(\theta_\infty^0)} \left[\frac{L_p(s - (d/2), \theta, r_1)}{L_p(s - (d/2), \theta, r_2)} \right]^{(m(\Pi_\xi, \xi/2)(m^1(\Pi_{\theta_f}, K) - m^2(\Pi_{\theta_f}, K)) \mu(T))}$$

Nous poserons :

$$L_p(s, S_K, V) = L_{p,G}(s, S_K, V) \prod_{T \in \mathcal{J}} L_{p,T}(s, S_K, V),$$

où \mathcal{J} est un ensemble de représentants des classes de conjugaison stables [donc sous $\tilde{G}(\mathbb{Q})$] de tores tels que $\mathcal{J}(T)$ soit non trivial.

3.3. COMPARAISON DES FONCTIONS L. — On se donne comme précédemment une représentation (ξ, V) de G définie sur un corps de nombres F , triviale sur Z^1 absolument irréductible, un sous-groupe ouvert compact $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ assez petit (ce qui suppose n assez grand) et un nombre premier $p \in W'_l$ premier à δ_E .

THÉORÈME 3.3.1. — $L(s, IC^*(\bar{S}_K \otimes \mathbb{F}_p, V_l)) = L_p(s, S_K, V)$.

La démonstration de ce théorème occupera le reste de ce paragraphe. Indiquons cependant que ce théorème est déjà connu dans de nombreux cas :

(a) Lorsque $B = M_2(\mathbb{Q})$ le théorème n'est qu'une reformulation des résultats classiques de Eichler-Shimura-Deligne et Langlands sur les fonctions L des courbes modulaires ([11], [25]). En effet, dans cette situation :

$$\mathcal{H}^0 IC^*(\dots, V_l) = j_* V_l$$

et

$$\mathcal{H}^i IC^*(\dots, V_l) = 0 \quad \text{si } i > 0,$$

les groupes de cohomologie d'intersection sont donnés par :

$$\begin{aligned} IH^0(\bar{S}_K \dots) &= H^0(S_K \dots), \\ IH^1(\bar{S}_K \dots) &= \text{Im}(H_c^1(S_K \dots) \rightarrow H^1(S_K \dots)) = \tilde{H}^1(\bar{S}_K \dots), \\ IH^2(\bar{S}_K \dots) &= H_c^2(S_K \dots). \end{aligned}$$

La correspondance entre représentation l -adiques dans la cohomologie parabolique \tilde{H}^1 et représentations automorphes établie par Deligne [11] implique la correspondance entre fonctions L voulue par le théorème.

(b) Lorsque B est une algèbre à division le théorème est démontré par Langlands dans [26]. Remarquons que sauf pour la vérification du fait que la structure de l'ensemble des points géométriques de $S_K \otimes \mathbb{F}_p$ (avec l'action de Frobenius) est celle souhaitée, l'hypothèse que B est totalement indéfinie à l'infini n'est pas utilisée par Langlands. Le cas des courbes est dû à Shimura [33]. Le théorème 3.3.1 se démontre en comparant les coefficients des développements en série de puissances de p^{-s} des deux membres. Le cas général ne diffère du cas compact étudié dans [26] que par une contribution du lieu à l'infini de \bar{S}_K pour le premier membre et d'un terme complémentaire dans la formule des traces de Selberg utilisée pour calculer le second membre. On verra que ces contributions sont égales et mêmes nulles si $d \geq 2$.

Nous allons résumer la démonstration de [26] et indiquer les modifications nécessaires dans le cas général.

On introduit une fonction sur $G(\mathbb{A})$ ([26], p. 1154) :

$$f^G(m, a, \cdot) : g \rightarrow f_\xi(g_\infty) \varphi_a^p(g^p) h_p^m(g_p),$$

avec $g_\infty \in G_\infty$, $g^p \in G(\mathbb{A}_f^p)$ et $g_p \in G(\mathbb{Q}_p)$. C'est une fonction C^∞ à support compact modulo Z_∞ . On impose à f_ξ de vérifier $f(z_\infty g_\infty) = \xi_Z(z_\infty) f_\xi(g_\infty)$ ainsi que les conditions suivantes.

Soit γ un élément régulier dans G_∞ , il définit un tore T . Si $Z(\mathbb{R}) \backslash T(\mathbb{R})$ est compact l'intégrale orbitale stable $\Phi^{T/1}(\gamma, f_\xi)$ doit vérifier :

$$\Phi^{T/1}(\gamma, f_\xi) = \frac{\text{trace } \xi(\gamma)}{\text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash T(\mathbb{R}))},$$

et elle doit être nulle si $Z(\mathbb{R}) \backslash T(\mathbb{R})$ est non compact.

Cela revient à demander que pour tout L-paquet Π de G_∞ on ait :

$$\text{tr } \Pi(f_\xi) = m(\Pi, \xi)$$

l'existence d'une telle fonction résulte du théorème de Paley-Wiener pour $SL(2, \mathbb{R})$ [15], II.4.28).

Dans [26] on considère une fonction φ^p sur $G(\mathbb{A}_f^p)$ qui est la fonction caractéristique de K^p divisée par son volume. Nous considérons ici la situation un peu plus générale suivante : on se donne $a \in G(\mathbb{A}_f^p)$ et on considère φ_a^p la fonction caractéristique de la double classe $K^p a K^p$ divisée par le volume de K^p .

Pour tout entier m , Langlands définit une fonction h_p^m sur $G(\mathbb{Q}_p)$ et nous suivrons sa convention ([26], p. 1154 voir aussi [38], exposé VI). Nous poserons :

$$a^G(m, a) = \sum n(\Pi) \text{tr } \Pi(f^G(m, a)),$$

c'est-à-dire que a^G est la trace stable de l'opérateur défini par f^G dans le spectre discret de L^2 .

De même, pour chaque $T \in \mathcal{J}$ on introduit une fonction sur $T(\mathbb{A})$:

$$f^T(m, a, \cdot) : t \rightarrow f_{\xi}^T(t_{\infty}) \Phi^{T/K}(t^p, \varphi_a^p) \varphi_p \star f_p^m(t_p).$$

Cette fonction est définie dans [26], p. 1138-1141, à ceci près que nous avons remplacé φ^p par φ_a^p . Nous poserons :

$$a^T(m, a) = \frac{\mu(T)}{2} \sum_{\theta \in \Theta_T(\theta_{\infty}^0)} \int_{Z_{\infty} T(\mathbb{Q}) \setminus T(\mathbb{A})} f^T(m, a, t) \theta(t) dt.$$

On note $T(a)$ la correspondance de Hecke définie par $a \in \underline{G}(\mathbb{A}_f^p)$ sur $S_K(\mathbb{F}_p)$, et par F celle de Frobenius. Soit $S_K(\mathbb{F}_p, m, a)$ l'ensemble des points fixes dans $S_K(\mathbb{F}_p)$ de la correspondance produit $F^m \circ T(a)$ et posons :

$$b(m, a) = \sum_{x \in S_K(\mathbb{F}_p, m, a)} \text{tr}(F^m \circ T(a), (V_l)_x),$$

on obtient une expression de $b(m, a)$ en décomposant $S_K(\mathbb{F}_p)$ suivant les classes d'isogénie de θ_B -variétés abéliennes. On utilise une description de ces classes d'isogénie sous forme d'ensembles du type $H(\mathbb{Q}) \backslash \underline{G}(\mathbb{A}_f^p) \times X_p/K^p$.

Cette description s'appuie sur la *Lettre à Rapoport* [27] et l'étude détaillée faite par Milne [30] et [38] (exposé V) de cette question.

Cette étude n'utilise pas sérieusement l'hypothèse faite dans [26], [30] ou [38] que B est une algèbre à division (cette hypothèse ne sert que pour assurer, dans ce cas, la propriété de S_K), et peut être reprise mot à mot dans le cas général.

Le résultat technique essentiel obtenu par Langlands peut se formuler ainsi (cf. [26], § 3, [25], § 7, voir aussi [38], exposé VI).

PROPOSITION 3.3.2. — Si K est assez petit on a :

$$\begin{aligned} b(m, a) = & \sum_{\gamma \in Z_0 \backslash Z(\mathbb{Q})} \text{vol}(Z_{\infty} Z_K G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})) f^G(m, a, \gamma) \\ & + \frac{\mu(T)}{2 |\mathcal{J}(T)|} \sum_{T \in \mathcal{J}} \sum_{\gamma \in Z_0 \backslash T'(\mathbb{Q})} \text{vol}(Z_{\infty} Z_K T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})) \Phi^{T/1}(\gamma, f^G(m, a, \cdot)) \\ & + \frac{\mu(T)}{4} \sum_{T \in \mathcal{J}} \sum_{\gamma \in Z_0 \backslash T'(\mathbb{Q})} \text{vol}(Z_{\infty} Z_K T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})) f^T(m, a, \gamma), \end{aligned}$$

où $Z_0 = Z_{\infty} Z_K \cap G(\mathbb{Q})$, $T'(\mathbb{Q})$ est l'ensemble des éléments réguliers de $T(\mathbb{Q})$, \mathcal{J} est un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable de tores non déployés de G ; enfin $|\mathcal{J}(T)|$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{J}(T)$.

Les nombres a^G , a^T et b sont maintenant reliés aux fonctions f^G et f^T . On peut les comparer au moyen de la formule des traces stable sur G et sur T .

Sur $Z_\infty Z_K T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})$ la formule des traces est simplement la formule de Poisson, et compte tenu des propriétés de f^T on vérifie aisément ([26], p. 1140-1141) que :

$$a^T(m, a) = \frac{\mu(T)}{4} \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{\gamma \in Z_0 \backslash T'(\mathbb{Q})} \text{vol}(Z_\infty Z_K T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})) f^T(m, a, \gamma).$$

La formule des traces stable sur $G(\mathbb{Q}) Z_\infty Z_K \backslash G(\mathbb{A})$ fournit la relation (cf. [24], § 5) :

$$\begin{aligned} a^G(m, a) &= \sum_{\gamma \in Z_0 \backslash Z(\mathbb{Q})} \text{vol}(Z_\infty Z_K G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})) f^G(m, a, \gamma) \\ &+ \frac{\mu(T)}{2 |\mathcal{T}(T)|} \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{\gamma \in Z_0 \backslash T'(\mathbb{Q})} \text{vol}(Z_\infty Z_K T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})) \Phi^{T/1}(\gamma, f^G(m, a, .)) \\ &+ c_G(f^G(m, a, .)). \end{aligned}$$

Le dernier terme étant le « terme complémentaire stable ». Nous reviendrons plus loin sur son expression; mentionnons simplement que dans le cas « compact », c'est-à-dire, lorsque B est une algèbre à division, ce terme est nul par convention.

En résumé nous avons obtenu la relation suivante :

$$a^G(m, a) + \sum_{T \in \mathcal{T}} a^T(m, a) = b(m, a) + c_G(f^G(m, a)).$$

Nous n'avons pas tenu compte pour l'instant des points à l'infini de \bar{S}_K ; pour cela introduisons $\bar{S}_K(\mathbb{F}_p, m, a)$ l'ensemble des points fixes de $F^m \circ T(a)$ sur $\bar{S}_K(\mathbb{F}_p)$ et posons avec les notations du paragraphe 2.3 :

$$\bar{b}(m, a) = \sum_{x \in \bar{S}_K(\mathbb{F}_p, m, a)} \langle F^m \circ T(a), 1 \rangle_x.$$

Nous voulons démontrer la :

$$\text{PROPOSITION 3.3.3.} \quad a^G(m, a) + \sum_{T \in \mathcal{T}} a^T(m, a) = \bar{b}(m, a).$$

Compte tenu de la relation déjà obtenue plus haut il nous suffit de montrer que :

$$\bar{b}(m, a) - b(m, a) = c_G(f^G(m, a))$$

nous distinguerons trois cas.

- (i) B est une algèbre à division; donc $S_K = \bar{S}_K$ et $c_G = 0$; le résultat est clair.
- (ii) $B = M_2(\mathbb{Q})$; dans ce cas on a nécessairement $G = \tilde{G} = GL_2$, et notre proposition est démontrée dans [25], § 7. Au point où nous sommes il suffit d'utiliser la formule donnée pour $c_G(f^G(m, a))$ dans [25], p. 74-75, et d'utiliser les lemmes 7.10 et 7.11 de ce même papier (particulièrement p. 121-123 et 127-129) et le lemme 7.12.
- (iii) $B = M_2(E)$ et $\deg E/\mathbb{Q} = d \geq 2$; la différence $\bar{b}(m, a) - b(m, a)$ est nulle. En effet si $a=1$ cela résulte du théorème 2.2.9 et en général c'est le contenu du théorème 2.3.3 ci-dessus; de même le terme complémentaire $c_G(f^G(m, a)) = 0$ si $d \geq 2$, comme il résultera du lemme 3.3.4 ci-dessous.

Les fonctions f^G et f^T ont été choisies de telle façon que si $H=G$ ou $H=T \in \mathcal{J}$ on ait ([26], p. 1140 et 1153-1154) :

$$\frac{1}{\log p} \frac{d}{ds} \log L_{p, H}(s, S_K, V) = - \sum_1^{\infty} a^H(m, 1) p^{-ms}.$$

Par ailleurs la formule des traces de Lefschetz montre que (cf. § 3.2) :

$$\frac{1}{\log p} \frac{d}{ds} \log L(s, IC^*(\dots)) = - \sum_1^{\infty} \bar{b}(m, 1) p^{-ms}.$$

Le théorème 3.3.1 est donc un corollaire de la proposition 3.3.3 spécialisée au cas $a=1$.

Il nous reste à prouver le lemme suivant : soit $f=f_{\xi} \otimes \varphi$ le produit tensoriel de la fonction f_{ξ} évoquée plus haut et d'une fonction φ sur $G(\mathbb{A}_f)$ localement constante et à support compact, alors :

LEMME 3.3.4. — *Le terme complémentaire stable $c_G(f)$ est nul si $d \geq 2$.*

On trouvera dans [24], § 5, une expression de la formule des traces et de son terme complémentaire ([24], (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), p. 753-755) pour des groupes du type suivant ([24], p. 751) :

$$G' = \{x \in \tilde{G}(A) \mid \det x \in A\},$$

où A est un produit sur les places de E de groupes A_v .

Les groupes considérés ici sont d'un type un peu plus général, car nous ne pouvons pas supposer que $A(\mathbb{A})$ se décompose en produit sur les places de E ; mais on obtient facilement des formules pour ce cas plus général, en ne développant pas les intégrales suivant les places de E .

Nous allons expliciter le terme complémentaire stable, en nous appuyant sur [24], § 5.

Nous reprendrons sans les redéfinir les notations de ce papier. Du terme (5.4) [dans lequel on doit lire $\beta(g)^{-s}$ au lieu de $\lambda(g)^{-s}$] on ne doit retenir (cf. (5.11) de [24]) que le terme constant du développement de Laurent de :

$$(i) \quad \sum_{\gamma \in Z_0 \setminus Z(\mathbb{Q})} \int_{Z(\mathbb{A})N(\mathbb{A}) \setminus G(\mathbb{A})} f(g^{-1} \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) \beta(g)^{-s} dg.$$

Du terme (5.5) on ne doit retenir que :

$$(ii) \quad \sum \frac{1}{4} \operatorname{tr} \rho(f, \eta),$$

où la somme ne porte que sur des η comme en (5.5) tels que de plus $\mu_{\eta}=1$ [et donc $M(\eta)=-1$] (cf. [24], p. 764).

Les autres termes sont les contributions de (5.3) et (5.6) et ont la forme suivante :

$$(iii) \quad \frac{1}{4} \int_{D_0} \frac{m'(\eta)}{m(\eta)} \operatorname{tr} \rho(f, \eta) |ds|$$

[dans (5.6) on doit lire $m'(\eta)/m(\eta)$ au lieu de $m(\eta)$].

L'expression (5.6) comporte un deuxième terme :

$$(iv) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{D_0} \operatorname{tr} (R'(\eta) R^{-1}(\eta) \rho(f, \eta) |ds|,$$

enfin le terme (5.3) peut s'écrire :

$$(v) \quad -c \sum_{\gamma \in Z(\mathbb{Q}) \setminus T'_0(\mathbb{Q})} \int_{Z_\infty \setminus K_\infty \mathbb{K}} \int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1} \gamma^{-1} n \gamma k) \log \beta(w n) dn dk,$$

où c est une constante qui importe peu ici et $T'_0(\mathbb{Q})$ l'ensemble des matrices diagonales rationnelles, non centrales, dans $G(\mathbb{Q})$.

Les termes (i), (iv) et (v) ne sont pas des distributions stablement invariantes, toutefois leur somme l'est. Le terme complémentaire stable est une distribution tempérée sur G_∞ ([15], II.5) et ne dépend que des intégrales orbitales stables de f_ξ . Nous allons prendre avantage de ce fait pour choisir f_ξ de sorte que chaque terme ci-dessus soit nul.

Les termes (ii) et (iii) sont stablement invariants, leur nullité ne dépend pas du choix de f_ξ , et en effet on sait que :

$$(vi) \quad \operatorname{tr} \rho(f, \eta) = \int_{Z(\mathbb{A}) \setminus T_0(\mathbb{A})} \Phi^{T_0/1}(t, f) \eta(t) dt,$$

où T_0 est le tore des matrices diagonales.

Cette expression est nulle car T_0 est un tore déployé et par hypothèse :

$$\Phi^{T_0/1}(t_\infty, f_\xi) = 0.$$

Précisons maintenant le choix qui permettra d'annuler les autres termes. Le groupe G est connexe, la représentation irréductible (ξ, V) est définie par un poids dominant λ d'un tore maximal T (pour un certain ordre); on peut plonger T dans un tore maximal \tilde{T} de \tilde{G} et prolonger λ en $\tilde{\lambda}$, et donc encore prolonger la représentation (ξ, V) en une représentation $(\tilde{\xi}, V)$ de \tilde{G} .

Le groupe \tilde{G}_∞ est produit de d copies de $GL_2(\mathbb{R})$ et $(\tilde{\xi}, V)$ est produit tensoriel de représentations $(\tilde{\xi}_i, V_i)$; il existe sur $GL_2(\mathbb{R})$ des fonctions $\tilde{f}_{\tilde{\xi}_i}$ telles que :

$$\Phi^{\tilde{T}/1}(t, \tilde{f}_{\tilde{\xi}_i}) = \frac{\operatorname{tr} \tilde{\xi}_i(t)}{\operatorname{vol}(\tilde{Z}(\mathbb{R}) \setminus \tilde{T}(\mathbb{R}))}$$

si $\tilde{Z}(\mathbb{R}) \setminus \tilde{T}(\mathbb{R})$ est compact et 0 sinon, de plus $\tilde{f}_{\xi_i}(z_\infty g_\infty) = \xi(z_\infty) f(g_\infty)$, cette fonction est de classe C^∞ à support compact modulo le centre. On peut encore supposer que le support de \tilde{f}_{ξ_i} est dans la composante neutre ([15], II.4.28), on pose $\tilde{f}_\xi = \tilde{f}_{\xi_1} \otimes \dots \otimes \tilde{f}_{\xi_d}$ et on choisit pour f_ξ la restriction de \tilde{f}_ξ à G_∞ .

Le terme constant du développement de Laurent de (i), ainsi que le terme (v) peuvent maintenant s'écrire comme somme de produit de distributions sur les places à l'infini de E [utiliser pour (v) que $Z_\infty \setminus K_\infty = \tilde{Z}_\infty \setminus \tilde{K}_\infty = \prod [\tilde{Z}_i \setminus \tilde{K}_i]$ de la façon traditionnelle ([21], § 16, [15], II.3, [17]). S'il y a au moins deux places à l'infini ($d \geq 2$) chaque terme contient un $\Phi^{T_0/1}(\gamma, \tilde{f}_{\xi_i})$ en facteur et est donc nul.

En choisissant un prolongement $\tilde{\eta}$ à $\tilde{T}_0(\mathbb{R}) T_0(\mathbb{A}_f)$ de η tel que $\tilde{\eta}(z_\infty t) = \xi(z_\infty)^{-1} \eta(t)$ on voit que :

$$\rho(f_\xi, \eta_\infty) = \prod \rho(\tilde{f}_{\xi_i}, \tilde{\eta}_{\infty_i}),$$

on peut alors développer (iv) en somme de produits sur les places à l'infini d'intégrales; mais s'il y a au moins deux places à l'infini, chaque terme fait intervenir $\text{tr} \rho(\tilde{f}_{\xi_i}, \tilde{\eta}_{\infty_i})$ qui est nul d'après l'analogie local de la relation (vi). Le lemme est ainsi démontré (remarquons que si $G = \tilde{G}$ cela n'est rien d'autre que le résultat bien connu d'annulation du terme complémentaire utilisé par Jacquet et Langlands pour comparer les formes automorphes pour GL_2 et une algèbre de quaternions) ([21], § 16, [15], II.3.41, [17], th. 7.21).

3.4. DÉCOMPOSITION DES REPRÉSENTATIONS λ -ADIQUES. — Nous revenons au cas général d'une algèbre simple B de dimension 4 centrale sur E , totalement indéfinie. On suppose $G(\mathbb{A}_f)$ muni d'une mesure de Haar telle que $\text{vol}(K) \in \mathbb{Q}$. Soit L un corps contenant \mathbb{Q} ; on notera $\mathcal{H}_L(G(\mathbb{A}_f), K)$ ou simplement \mathcal{H}_L^K la L -algèbre de convolution des fonctions sur $G(\mathbb{A}_f)$ à support compact, biinvariantes par K , à valeurs dans L . On considérera également la situation suivante: soit p un nombre premier de W_f avec $K = K_p K^p \subset G(\mathbb{Q}_p) G(\mathbb{A}_f^p)$ et K_p maximal (hyperspécial); on notera $\mathcal{H}_L^{K,p}$ la sous-algèbre engendrée par les fonctions caractéristiques de doubles classes $K a K$ avec $a \in G(\mathbb{A}_f^p)$, divisées par le volume de K (fonctions φ_a^K du paragraphe 3.3).

Soit maintenant F un corps de nombres et V un F -espace vectoriel muni d'une représentation ξ de G . On a établi en 1.3.9 un isomorphisme qui dans notre situation peut s'écrire :

$$IH^i(\bar{S}_K(\mathbb{C}), V) \otimes \mathbb{C} \cong \bigoplus_{\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f} (H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \pi_\infty \otimes (V \otimes \mathbb{C}))^{m(\pi)} \otimes \pi_f^K),$$

où $\mathfrak{g} = \text{lie } G(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ et $\mathfrak{k} = \text{lie } K_\infty \otimes \mathbb{C}$; comme ci-dessus $m(\pi)$ est la multiplicité de π dans $L^2 = L^2(Z_K G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}), \xi_Z)$; enfin π_f^K est l'espace des vecteurs K -invariants de π_f ; c'est un $\mathcal{H}_\mathbb{C}^{K,p}$ -module irréductible. Posons :

$$U^i(\pi_f, \xi) = \bigoplus_{\pi_\infty} H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \pi_\infty \otimes \xi)^{m(\pi)}$$

la somme étant étendue aux π_∞ tels que $\pi_\infty \otimes \pi_f$ intervient discrètement dans L^2 ; on a donc le :

LEMME 3.4.1. — $\mathrm{IH}^i(\bar{S}_K(\mathbb{C}), V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{\pi_f^K} (U_{\mathbb{C}}^i(\pi_f, \xi) \otimes \pi_f^K)$ la somme porte sur des représentations π_f^K de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^K$ deux à deux inéquivalentes.

En se restreignant à la sous-algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{K,p}$ on aurait de même une décomposition, *a priori* moins fine,

$$\mathrm{IH}^i(\bar{S}_K(\mathbb{C}), V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{\pi_f^{K,p}} U_{\mathbb{C}}^i(\pi_f^p, \xi) \otimes \pi_f^{K,p},$$

avec $\pi_f^K = \pi_p^{K,p} \otimes \pi_f^{K,p}$. Cependant, comme K_p est maximal (hyperspecial) l'espace $\pi_p^{K,p}$ des vecteurs K_p -invariants dans π_p est au plus de dimension un. De la finitude du nombre de représentations de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^K$ donnant une contribution non nulle on déduit que pour presque tout p les restrictions à $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{K,p}$ de ces représentations sont encore inéquivalentes et donc que :

$$U_{\mathbb{C}}^i(\pi_f, \xi) = U_{\mathbb{C}}^i(\pi_f^p, \xi)$$

pour presque tout p . (Des théorèmes de « rigidité » pour les L-paquets permettraient de lever cette restriction supplémentaire sur p . En particulier au moins pour \tilde{G} elle est inutile vu le théorème de multiplicité un fort pour GL_2 .)

On a défini en 2.3 l'action des correspondances $T(a)$ pour $a \in G(\mathbb{A}_f)$ [resp. $G(\mathbb{A}_f^p)$] dans les espaces $\mathrm{IH}^i(\bar{S}_K(\mathbb{C}), V)$ et $\mathrm{IH}^i(S_K \otimes k, V_l)$ pour $k = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{Q}_p (resp. \mathbb{F}_p). On dispose d'isomorphismes :

$$\mathrm{IH}^i(\bar{S}_K(\mathbb{C}), V) \otimes_{\mathbb{F}} \bar{\mathbb{Q}}_l \cong \mathrm{IH}^i(\bar{S}_K \otimes k, V_l) \otimes_{\mathbb{F}_\lambda} \bar{\mathbb{Q}}_l,$$

compatibles à l'action de ces correspondances et donc d'isomorphisme comme $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}^K$ -modules (resp. $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}^{K,p}$ -modules). L'isomorphisme (3.4.1) ci-dessus commute à l'action de $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}^K \otimes \mathbb{C}$. Toutes ces représentations sont de dimension finie et semi-simples d'après (3.4.1). On choisit un plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{C} . Il existe une décomposition sur $\bar{\mathbb{Q}}$:

$$\mathrm{IH}^i(\bar{S}_K(\mathbb{C}), V) \otimes_{\mathbb{F}} \bar{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus_{\pi_f} U_{\bar{\mathbb{Q}}}^i(\pi_f, \xi) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \bar{\omega}^K(\Pi_f),$$

avec

$$\bar{\omega}^K(\pi_f) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \cong \pi_f^K.$$

On en déduit des décompositions des espaces de cohomologie étale sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$:

$$\mathrm{IH}^i(\bar{S}_K \otimes k, V_l) \otimes_{\mathbb{F}_\lambda} \bar{\mathbb{Q}}_l \cong \bigoplus_{\pi_f} (U_{\bar{\mathbb{Q}}_l}^i(\pi_f, \xi) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \bar{\omega}^K(\pi_f))$$

lorsque $k = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{Q}_p . En se restreignant à $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}^{K,p}$ on aurait des décompositions analogues, y compris pour $k = \mathbb{F}_p$.

La semi-simplicité et la finitude de la dimension montrent qu'il existe des $\lambda_j \in \bar{\mathbb{Q}}$ et des $a_j \in G(\mathbb{A}_f)$ [resp. $G(\mathbb{A}_f^p)$] tels que :

$$h(\pi_f) = \sum \lambda_j \frac{(K a_j K)}{\text{vol}(K)} \in \mathcal{H}_{\bar{\mathbb{Q}}}^K$$

agisse dans IH^i comme projecteur sur le composant attaché à π_f (pour tout i) (resp. π_f^p).

Les groupes de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ agissent dans $IH^i(\bar{S}_K \otimes k, V_i)$ pour $k = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{Q}_p (resp. \mathbb{F}_p) en commutant aux correspondances $T(a)$ pour $a \in G(\mathbb{A}_f)$ [resp. $a \in G(\mathbb{A}_f^p)$]. Comme les représentations $\bar{\omega}^K(\pi_f)$ [resp. $\bar{\omega}^K(\pi_f^p)$] sont deux à deux inéquivalentes, il existe des représentations $\sigma^i(\pi_f, \xi)$ [resp. $\sigma^i(\pi_f^p, \xi)$] de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ dans $U_{\bar{\mathbb{Q}}_l}^i(\pi_f, \xi)$ [resp. $U_{\bar{\mathbb{Q}}_l}^i(\pi_f^p, \xi)$].

Nous allons maintenant préciser un peu les représentations $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ donnant une contribution dans IH^i . Les représentations du spectre discret de L^2 sont de deux types :

(a) Les représentations de dimension un, c'est-à-dire des caractères de $A(\mathbb{A})/A(\mathbb{Q})$. Leur somme est notée L_1^2 .

(b) Des représentations de dimension infinie; pour chaque p tel que $G(\mathbb{Q}_p)$ est déployé le composant π_p est non dégénéré (c'est-à-dire admet un modèle de Whittaker). On note L_0^2 la somme des représentations de ce type.

Il résulte alors des remarques faites au paragraphe 3.2 sur la \mathfrak{g} - \mathfrak{f} -cohomologie qu'une représentation π_f détermine au plus un L-paquet Π_∞ de représentations π_∞ telles que $\pi_\infty \otimes \pi_f$ contribue à IH^* , nous le noterons $\Pi_\infty(\pi_f)$. On dira que π_f est stable si $\pi_\infty \otimes \pi_f$ l'est; c'est bien sur indépendant de $\pi_\infty \in \Pi_\infty(\pi_f)$. Lorsque π est instable, le composant π_f définit un sous-ensemble $\Pi_\infty(\pi_f)^+$ de représentation π_∞ telles que $\varepsilon(\pi_\infty) \varepsilon(\pi_f) = 1$. Nous allons maintenant pouvoir réinterpréter la proposition 3.3.3. Considérons une représentation irréductible $\bar{\omega}^K(\pi_f)$ et supposons que p soit tel que $U^i(\pi_f, \xi) = U^i(\pi_f^p, \xi)$; on sait qu'il existe une fonction $h(\pi_f)$ dans $\mathcal{H}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{K,p}$ qui réalise la projection sur $U^i(\pi_f, \xi) \otimes \bar{\omega}^K(\pi_f)$ dans IH^i ; la formule des traces de Lefschetz, comparée à la formule des traces de Selberg au moyen de 3.3.3 fournit la :

PROPOSITION 3.4.2. — Si π_f est stable, pour presque tout p ,

$$\sum (-1)^i \text{tr}(\varphi_p^{-m} | U_{\bar{\mathbb{Q}}_l}^i(\pi_f, \xi)) = m(\Pi_\infty(\pi_f), \xi) m(\pi) \text{tr} \pi_p(h_p^m)$$

(où φ_p est un frobenius en p), les deux membres prennent leurs valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}$.

En utilisant les résultats de \mathfrak{g} - \mathfrak{f} -cohomologie on obtient facilement les :

COROLLAIRE 3.4.3. — Lorsque π_f est de dimension un alors (pour presque tout p) :

$$\sum_{q=0}^d \text{tr}(\varphi_p^{-m} | U_{\bar{\mathbb{Q}}_l}^{2q}(\pi_f, \xi)) = \pi_p(h_p^m).$$

COROLLAIRE 3.4.4. — Lorsque π_f est de dimension infinie alors (pour presque tout p) :

$$\text{tr}(\varphi_p^{-m} | U_{\bar{\mathbb{Q}}_l}^d(\pi_f, \xi)) = m(\pi) \text{tr} \pi_p(h_p^m).$$

De plus on sait que :

$$\mathrm{tr} \pi_p(h_p^m) = p^{md/2} \mathrm{tr} r((t(\pi_p))^m).$$

Dans le cas instable on obtient de manière analogue la :

PROPOSITION 3.4.5. — Soit π_f dans Π_{θ_f} alors (pour presque tout p) :

$$\mathrm{tr}(\varphi_p^{-m} \mid U_Q^d(\pi_f, \xi)) = m(\pi) p^{md/2} \mathrm{tr} r_\alpha((t(\theta_p))^m),$$

où $\alpha = 1$ ou 2 suivant que $\varepsilon(\pi_f) = \pm 1$.

On dira qu'une représentation π_p est quasi tempérée si il existe une représentation ω_p de dimension un telle que $\pi_p \otimes \omega_p$ soit tempérée. Une généralisation naïve de la conjecture de Ramanujan-Petersson est d'espérer que les représentations de dimension infinie automorphes dans L_0^2 sont quasi tempérées pour tout p . La pureté du complexe d'intersection permet de montrer le :

THÉORÈME 3.4.6. — Soit $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f \in L_0^2$ avec $\pi_\infty \in \Pi_\xi$ alors, pour presque tout p , la représentation π_p est quasi tempérée.

Preuve. — Il est inutile de considérer des représentations π dans les L-paquets du type Π_θ car elles sont automatiquement quasi tempérées. Soit maintenant K assez petit pour que $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f$ contribue à $\mathrm{IH}^*(\bar{S}_K(\mathbb{C}), V \otimes \mathbb{C})$; on peut supposer π stable et on sait alors, que pour presque tout p on a l'égalité dans $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$:

$$\mathrm{tr}(\varphi_p^{-m} \mid U_{Q_i}^d(\pi_f, \xi)) = p^{md/2} \mathrm{tr} r(t(\pi_p))^m \cdot m(\pi).$$

Comme π_p est non ramifiée c'est la restriction à $G(\mathbb{Q}_p)$ d'une représentation non ramifiée $\tilde{\pi}_p$ de $\tilde{G}(\mathbb{Q}_p)$.

Soit v une place de E au-dessus de p on pose $\tilde{G}_v = R_{E_v/\mathbb{Q}_p} GL_2$:

$$\tilde{G}(\mathbb{Q}_p) = \prod_{v \mid p} \tilde{G}_v(\mathbb{Q}_p).$$

Avec des notations évidentes on a de plus :

$$\tilde{\pi}_p = \bigotimes_{v \mid p} \tilde{\pi}_v \quad \text{et} \quad r(t(\pi_p)) = r(t(\tilde{\pi}_p)) = \bigotimes_{v \mid p} r_v(t(\tilde{\pi}_v)).$$

La représentation π_p est quasi tempérée si et seulement si les $\tilde{\pi}_v$ le sont toutes. On peut choisir $t(\tilde{\pi}_v)$ ainsi ([38], exposé VI) :

$$t(\pi_v) = \left(\begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & b_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_p \right) \in {}^L\tilde{G}_v(\mathbb{C}),$$

avec a_v et $b_v \in \mathbb{C}^\times$. La représentation $\tilde{\pi}_v$ est quasi tempérée si et seulement si $|a_v| = |b_v|$. Le noyau Z_\star de r étant dans le centre de ${}^L\tilde{G}$, le théorème résulte alors de ce que les valeurs propres de φ_p^{-m} dans $U_{Q_i}^d(\pi_f, \xi)$ sont toutes de même module d'après le théorème de pureté [16].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, *Some Numerical Criteria for Contractibility of Curves on Algebraic Surfaces* (*Americal Journal of Math.*, vol. 84, 1962, p. 485-496).
- [2] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT et Y. TAI, *Smooth Compactifications of Locally Symmetric Varieties* (*Math. Science Press*, Bookline, 1979).
- [3] W. L. BAILY et A. BOREL, *Compactification of Arithmetic Quotients of Bounded Symmetric Domains* (*Annals of Math.*, vol. 84, 1966).
- [4] A. BEILINSON, I. N. BERNSTEIN, P. DELIGNE et O. GABBER, Article à paraître dans les *Comptes rendus de la Conférence de Luminy sur l'« Analyse et Topologie sur les espaces singuliers »*, juillet 1981.
- [5] A. BOREL, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.
- [6] A. BOREL, *L²-Cohomology and Intersection Cohomology of Certain Arithmetic Varieties*, Preprint, I.A.S., 1982.
- [7] A. BOREL, *Automorphic L-Functions*, in *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 33, part. 2, Amer. Math. Soc. R.I., 1979, p. 27-62.
- [8] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups* (*Annals of Math. Studies*, n° 94, Princeton, 1980).
- [9] J. L. BRYLINSKI, « 1-motifs » et formes automorphes (*Théorie arithmétique des domaines de Siegel*), in *Journées Automorphes*, p. 43-106 (*Public. math.*, Université Paris-VII, vol. 15, 1983).
- [10] J. L. BRYLINSKI, (Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers, exposé au Séminaire Bourbaki, n° 585, février 1982.
- [11] P. DELIGNE, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, exposé au séminaire Bourbaki, n° 355, février 1969.
- [12] P. DELIGNE, *Travaux de Shimura*, exposé au Séminaire Bourbaki, n° 389.
- [13] P. DELIGNE, *La conjecture de Weil II* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 52, 1979, p. 138-252).
- [14] M. DEMAZURE, *Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona* (*Ann. scient. Ec. norm. sup.*, 4^e série, t. 3, fasc. 4, 1970).
- [15] M. DUFLO et J. P. LABESSE, *Sur la formule des traces de Selberg* (*Ann. scient. Ec. norm. sup.*, 4^e série, t. 4, 1971, p. 193-284).
- [16] O. GABBER, *Pureté de la cohomologie de la cohomologie de MacPherson-Goresky*, rédigé par P. DELIGNE, prépublication I.H.E.S., 1981.
- [17] S. S. GELBART et H. JACQUET, *Forms of GL(2) from the Analytic Point of View* (*Proc. of symp. in Pure Math.*, vol. 33, part 1, Amer. Math. Soc. R.I., 1979, p. 213-251).
- [18] M. GORESKY et R. MACPHERSON, *Intersection Homology Theory II* (à paraître).
- [19] G. HARDER, *On the Cohomology of Discrete Arithmetically Defined Groups* (*Proc. of the Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups and Applic. to Moduli*, Bombay, 1973, Oxford Univ. Press, 1975).
- [20] M. HARRIS, *Rationality Properties of Automorphic Forms* (I. Preprint, 1980, II. Preprint, 1981).
- [21] H. JACQUET et R. P. LANGLANDS, *Automorphic Forms on GL(2)*, (*Springer Lecture Notes*, vol. 114, 1970).
- [22] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD et D. SAINT-DONAT, *Toroïdal Embeddings I* (*Springer Lecture Notes*, vol. 339, 1972).
- [23] B. KOSTANT, *Lie Algebra Cohomology and the Generalized Borel-Weil Theorem* (*Annals of Math.*, vol. 74, 1961).
- [24] J. P. LABESSE et R. P. LANGLANDS, *L-Indistinguishability for SL(2)* (*Canadian Journal of Math.*, vol. 31, 1979, p. 726-785).
- [25] R. P. LANGLANDS, *Modular Forms and l-Adic Representations*, Anvers II (*Springer Lecture Notes*, vol. 349, p. 362-500).
- [26] R. P. LANGLANDS, *On the Zeta-Function of Some Simple Shimura Varieties* (*Canadian Journal of Math.*, vol. 31, 1979, p. 1121-1216).
- [27] R. P. LANGLANDS, *Lettre à M. Rapoport*, 12 juin au 2 septembre 1974.
- [28] R. P. LANGLANDS, *Stable Conjugacy (définitions and lemmas)* (*Canadian Journal of Math.*, vol. 39, 1979, p. 700-725).

- [29] R. P. LANGLANDS, *Base Change for $GL(2)$* (*Ann. of Math. Studies*, vol. 96, Princeton University Press, 1980).
- [30] J. S. MILNE, *Points on Shimura Varieties Mod p* (*Proc. Symp. in Pure Math.*, vol. 33, part 2, Amer. Math. Soc. R.I., 1979, p. 165-184).
- [31] K. NOMIZU, *On the Cohomology of Compact Homogeneous Spaces of Nilpotent Lie Groups* (*Ann. of Math.*, vol. 59, 1954, p. 531-538).
- [32] M. RAPOPORT, *Compactifications de l'espace des modules de Hilbert-Blumenthal* (*Comp. Math.*, vol. 36, 1978, p. 255-335).
- [33] G. SHIMURA, *On the Zeta-Functions of Algebraic Curves Uniformized by Certain Automorphic Functions* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 13, 1961, p. 275-331).
- [34] G. SHIMURA, *Construction of Class Fields and Zeta-Functions of Algebraic Curves* (*Annals of Math.*, vol. 85, 1967, p. 58-159).
- [35] W. VAN EST, *A Generalization of the Cartan-Leray Spectral Sequence, II* (*Indag. Math.*, vol. XX, 1958, p. 406-413).
- [36] J. L. VERDIER, *Classe d'homologie associée à un cycle* (*Séminaire de l'E.N.S.*, vol. 74-75, in *Astérisque*, vol. 36-37).
- [37] S. ZUCKER, *L^2 -Cohomology Warped Products and Arithmetic Groups* (*Invent. Math.*, vol. 70, fasc. 2, 1982, p. 169-218).
- [38] *Variétés de Shimura et fonctions L*, Publication mathématique de l'Université Paris-VII, n° 6, 1979.
- [39] P. DELIGNE et M. RAPOPORT, *Les schémas de modules de courbes elliptiques, Anvers II* (*Springer Lecture Notes*, vol. 349, p. 143-316).
- [40] D. MUMFORD, *Hirzebruch's Proportionality Principle in the Non-Compact Case* (*Inv. Math.*, vol. 42, 1971, p. 239-272).

(Manuscrit reçu le 3 décembre 1982,
révisé le 13 septembre 1983.)

J.-L. BRYLINSKI,
Centre de Mathématiques,
École polytechnique,
plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex.

J.-P. LABESSE,
U.E.R. Mathématique,
Université de Dijon,
B.P. n° 138,
21004 Dijon Cedex.