ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ABDEL-ILAH BENABDALLAH

L'opérateur de Casimir de SL(2, R)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 2 (1984), p. 269-291
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_2_269_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 269 à 291.

L'OPÉRATEUR DE CASIMIR DE SL(2, ℝ)

PAR Abdel-Ilah BENABDALLAH

RÉSUMÉ. — Soient $G = SL(2, \mathbb{R})$ et ω son opérateur de Casimir. Nous déterminons explicitement une solution élémentaire de ω puis, nous démontrons qu'il n'en existe pas de centrale. Enfin nous caractérisons l'image par ω de l'espace des fonctions centrales, C^∞ sur G.

ABSTRACT. — Let $G = SL(2, \mathbb{R})$ and ω be its Casimir operator. We compute explicitly a fondamental solution of ω and we prove that there is no central elementary solution. We characterize the image by ω of the space of central and C^∞ maps defined on G.

Introduction

Un des problèmes importants des mathématiques, consiste à résoudre des équations aux dérivées partielles sur une variété et, par là même à déterminer si c'est possible, une solution élémentaire ou une paramétrix de l'opérateur différentiel considéré. Sur ce thème s'est développée toute une théorie (opérateurs pseudo-différentiels, opérateurs de Fourier, etc.), pour tenter de résoudre, au moins localement, certains types d'équations. La connaissance des fonctions (distributions) propres de l'opérateur différentiel permet souvent d'avoir un certain nombre d'informations.

Quand la variété considérée est un groupe de Lie ou un espace homogène et l'opérateur différentiel, un opérateur invariant, le problème posé bénéficie de l'apport de la théorie des représentations et peut alors se résoudre plus facilement. Un certain nombre de résultats ont été obtenus à ce jour.

— Si G est un groupe de Lie semi-simple connexe, non compact, de centre fini et K un sous-groupe compact maximal et si $P \in D(G/K)$, $P \neq 0$, P a une solution élémentaire et $PC^\infty(G/K) = C^\infty(G/K)$; (exemple type : $G = SL(2, \mathbb{R})$, $K = SO(2)$, G/K est le demi-plan supérieur de Poincaré) (Helgason).

— Si G est nilpotent, connexe et simplement connexe, tout $P \in Z(G)$, $P \neq 0$ a une solution élémentaire tempérée (Raïs).

— On a une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur invariant à gauche sur un groupe de Lie compact ait une solution élémentaire (Cérézo et Rouvière).

— Si G est un groupe de Lie simplement connexe, tout $P \in Z(G)$, $P \neq 0$ admet une solution élémentaire locale (M. Duflo).

Nous nous proposons, dans cet article, de résoudre les trois problèmes suivants :

1) Déterminer une solution élémentaire de l'opérateur de Casimir de $SL(2, \mathbb{R})$.

2) Chercher s'il en existe de centrales.

3) Donner des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution centrale f, sur $SL(2, \mathbb{R})$, de l'équation aux dérrivées partielles $\omega(f)=g$, avec g centrale.

Comme nous le verrons au paragraphe 3, il n'existe pas en fait de solutions élémentaires centrales de l'opérateur de Casimir. Cette obstruction s'explique par la non-nullité de la cohomologie de $SL(2, \mathbb{R})$ à valeurs dans l'espace $\mathscr{S}_0$ des distributions S vérifiant $\omega\, S=0$.

Le plan de cet article est le suivant : au paragraphe 1, nous introduisons les différents éléments mathématiques dont nous aurons besoin; aux paragraphes 2 et 3, nous rappelons la formule de Plancherel sur $SL(2, \mathbb{R})$ et nous résolvons le problème 1 et le problème 2; enfin au paragraphe 4, nous résolvons le problème 3.

1. Notations

Nous définissons dans ce paragraphe les différents objets dont nous aurons besoin dans la suite et en donnons les propriétés élémentaires que l'on trouvera notamment dans [SL] et [He].

1.1. Dans toute la suite, G désigne le groupe $SL(2, \mathbb{R})$, qui est le groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^2$ de déterminant 1, 1_G (ou 1 s'il n'y a pas de confusion possible) son élément neutre, $G^*=PSL(2, \mathbb{R})$ le groupe $G/\pm 1$, $\mathscr{D}(G)$ (resp. $\mathscr{D}(G^*)$) l'espace des fonctions C^∞ sur G (resp. G^*) à support compact et enfin $\mathscr{D}'(G)$ (resp. $\mathscr{D}'(G^*)$) l'espace des distributions sur G (resp. G^*); ces différents espaces étant munis de leur topologie usuelle.

1.2. Soient K, A, N les sous-groupes à un paramètre de G engendrés respectivement par les matrices $k(\theta)$, $a(t)$, $n(y)$ avec

$$k(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad a(t)=\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad n(y)=\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

K est compact maximal dans G, A est abélien et N ici aussi. Vis-à-vis de ces groupes, G admet la décomposition de Iwasawa : tout élément $g\in G$ s'écrit, d'une manière et d'une seule,

$$g=a(t)\,n(y)\,k(\theta), \qquad (t, y, \theta)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z};$$

de façon plus précise,

$$\text{si} \quad g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on a

$$e^t=\frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}, \qquad e^{i\theta}=\frac{d-ic}{\sqrt{c^2+d^2}}, \qquad y=ac+bd.$$

De plus, la mesure sur G définie par

$$dg = \frac{1}{2\pi}\,dt\,dy\,d\theta,$$

est une mesure de Haar du groupe G.

1.3. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit χ_n le caractère de K défini par

$$\chi_n(k(\theta)) = e^{in\theta}.$$

Une fonction $f \in \mathcal{D}(G)$ est dite de type χ_n si elle vérifie

$$f(k(\theta)\,g) = \chi_n(k(\theta))\,f(g), \qquad \text{pour tous } g \in G, \quad \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

La décomposition de la représentation régulière gauche de K sur $L^2(G)$ permet de décomposer de manière unique toute fonction $f \in \mathcal{D}(G)$ en somme de fonctions de type χ_n

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{\chi_n} \qquad \text{où} \quad f_{\chi_n}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(k(\theta)\,g)\,\overline{\chi_n(k(\theta))}\,d\theta,$$

avec convergence dans $L^2(G)$. La convergence a même lieu dans $\mathcal{D}(G)$, ce qui permet d'obtenir une décomposition analogue pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(G)$:

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{\chi_n} \qquad \text{où} \quad \langle T_{\chi_n}, f\rangle = \langle T, f_{\chi_n}\rangle;$$

la série converge faiblement dans $\mathcal{D}'(G)$.

On notera aussi dans la suite par $\tilde{f}$ ($f \in \mathcal{D}(G)$) la fonction sur G définie par

$$\tilde{f}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(k(\theta)\,g\,k(\theta)^{-1})\,d\theta.$$

1.4. Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(G)$ (resp. distribution $T \in \mathcal{D}'(G)$), on pose

$$f^+(g) = \frac{1}{2}(f(g) + f(-g)), \qquad f^-(g) = \frac{1}{2}(f(g) - f(-g))$$

$$(\text{resp. } \langle T^+, f\rangle = \langle T, f^+\rangle, \qquad \langle T^-, f\rangle = \langle T, f^-\rangle).$$

Les applications $f \to f^+$ et $f \to f^-$ sont des projecteurs de $\mathcal{D}(G)$. L'image de $f \to f^+$ (noyau de $f \to f^-$) s'identifie canoniquement à $\mathcal{D}(G^*)$; de même l'image de $T \to T^+$ s'identifie à $\mathcal{D}'(G^*)$; ainsi si δ_G est la mesure de Dirac portée par $1 \in G$, on a $\delta_G = \delta_G^+ + \delta_G^-$ et δ_G^+ s'identifie à la mesure de Dirac portée par l'élément neutre de G^*. Il résulte de 1.3 que l'on a

$$f^+ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{\chi_{2n}}, \qquad f^- = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{\chi_{2n+1}},$$

$$T^+ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{\chi_{2n}}, \qquad T^- = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{\chi_{2n+1}}.$$

Nous poserons dans la suite pour $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$(f^+)^\wedge_p = \sum_{i \geqq p} (f_{\chi 2i} + f_{\chi - 2i}), \qquad (f^-)^\wedge_p = \sum_{i \geqq p} (f_{\chi 2i+1} + f_{\chi-(2i+1)}).$$

1.5. Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G. $\mathcal{G}$ est formée des matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(e^{tX}) = e^{\operatorname{tr}(X)} = 1$ pour $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire telles que $\operatorname{tr}(X) = 0$. Les matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

forment une base orthogonale relativement à la forme de Killing de $\mathcal{G}$. Considérons les éléments de $\mathcal{G}$ comme des champs de vecteurs invariants à gauche. L'opérateur différentiel ω, appelé opérateur de Casimir et défini par

$$\omega = H^2 + V^2 - W^2,$$

appartient au centre de l'algèbre universelle de G. Il commute aux translations à gauche et à droite définies par les éléments de G; et est auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle f, f' \rangle = \int_G f(g) f'(g)\, dg$.

1.6. Faisons opérer G dans lui-même par automorphismes intérieurs. On obtient une partition de G en orbites, l'orbite d'un point x étant l'ensemble des gxg^{-1} pour $g \in G$. Comme les valeurs propres sont constantes le long d'une orbite, il est facile de classer ces orbites. On obtient

(i) les orbites hyperboliques; elles sont paramétrées par les points $\pm a(t)$ avec $t \neq 0$. $\pm a(-t)$ appartient à l'orbite de $\pm a(t)$;

(ii) les orbites elliptiques; elles sont paramétrées par les points de K exceptés 1 et -1;

(iii) deux orbites singulières, réduites aux points, 1 et -1;

(iv) quatre orbites paraboliques; les représentants sont par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, on pose

$$A'^G = \bigcup_{\substack{g \in G \\ t \in \mathbb{R}^*}} g a(t) g^{-1}, \qquad K'^G = \bigcup_{\substack{g \in G \\ \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi}} g k(\theta) g^{-1}, \qquad N'^G = \bigcup_{\substack{g \in G \\ y \in \mathbb{R}^*}} g n(y) g^{-1}$$

$$G' = (\pm A'^G) \cup K'^G, \qquad G_S = \pm N'^G \cup \{\pm 1\}, \qquad G'' = G - \{\pm 1\}.$$

Alors A'^G, $-A'^G$ et K'^G sont des ouverts de G, G' est un ouvert partout dense dans G et G_S est appelé dans la suite, la variété singulière du groupe G.

1.7. Soit f une fonction centrale C^∞ sur G. Posons $f_A(t)=f(a(t))$ et $f_K(\theta)=f(k(\theta))$. Alors on a, pour $t\in\mathbb{R}$ (resp. $\theta\in\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$),

$$[\omega f](a(t))=\frac{1}{\operatorname{sh} t}\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)(\operatorname{sh} t\, f_A(t)),$$

$$\left(\text{resp. } [\omega f](k(\theta))=\frac{-1}{\sin\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)(\sin\theta\, f_K(\theta)).\right.$$

1.8. Transformations de Harish-Chandra. — Soit $f\in\mathscr{D}(G)$.

(a) Pour $t\neq 0$ et $\varepsilon=\pm 1$, on pose

$${}^A H_f(\varepsilon\, a(t))=2\,|\operatorname{sh} t|\int_{G/A} f(\varepsilon\, g a(t) g^{-1})\, dg_A$$

la fonction $t\to {}^A H_f(\varepsilon\, a(t))$ existe et définit une fonction paire de t, C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et à support borné. Cette fonction se prolonge en une fonction C^∞ partout définie sur $\mathbb{R}$. Elle est égale aussi à

$${}^A H_f(\varepsilon\, a(t))=e^t\int_{-\infty}^{+\infty}\bar f(\varepsilon\, a(t)\, n(y))\, dy.$$

On a

$$(1.8.1)\qquad {}^A H_{\omega(f)}(\varepsilon\, a(t))=\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right){}^A H_f(\varepsilon\, a(t)).$$

Si le support de f est contenu dans $\varepsilon\, A'^G$, on a

$$(1.8.2)\qquad \int_{\varepsilon A'^G} f(g)\, dg=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sh}|t|\,{}^A H_f(\varepsilon\, a(t))\, dt.$$

Enfin l'application $f\to {}^A H_f(\varepsilon\, a(\,.\,))$ envoie l'espace $\mathscr{D}(\varepsilon\, A'^G)$ sur l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$, paires, à support compact et de classe C^∞.

(b) Pour $\theta\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\pi$, on pose

$${}^K H_f(k(\theta))=2\sin\theta\int_{G/K} f(g k(\theta) g^{-1})\, d\dot g_K,$$

La fonction $\theta\to {}^K H_f(k(\theta))$ existe et définit une fonction C^∞ de θ, périodique, de période 2π. Elle présente un saut aux points $\theta=0, \pi$

$$(1.8.3)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\theta\to 0_+} {}^K H_f(k(\theta))=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\bar f(n(y))\, dy,\\ \lim\limits_{\theta\to 0_-} {}^K H_f(k(\theta))=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\bar f(n(y))\, dy.\end{cases}$$

$$(1.8.4)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\theta\to\pi+} {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta)) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \bar{f}(-n(y))\,dy, \\ \lim\limits_{\theta\to\pi-} {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta)) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \bar{f}(-n(y))\,dy. \end{cases}$$

Sa dérivée $d/d\theta\, {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta))$ se prolonge en une fonction continue de θ et vérifie

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{d}{d\theta}\, {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta)) = -f(1), \qquad \lim_{\theta\to\pi} \frac{d}{d\theta}\, {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta)) = f(-1).$$

On a

$${}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta)) = \sin\theta \int_0^{+\infty} \bar{f}\begin{pmatrix} \cos\theta & -e^t\sin\theta \\ e^{-t}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathrm{sh}\, t\, dt,$$

et

$$(1.8.5)\qquad {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_{\omega(f)}(k(\theta)) = -\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1\right) {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta)).$$

Si le support de f est contenu dans K'^{G}, on a

$$\int_{\mathrm{K}'^{\mathrm{G}}} f(g)\,dg = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta))\,d\theta.$$

Enfin l'application $f \to {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f$ envoie l'espace $\mathscr{D}(\mathrm{K}'^{\mathrm{G}})$ sur l'espace $\mathscr{D}(\mathrm{K}-\{\pm 1\})$.

Il résulte de (*a*), (*b*) et de 1.6 que pour $f\in\mathscr{D}(\mathrm{G})$, on a la formule d'intégration suivante

$$(1.8.6)\qquad \int_{\mathrm{G}} f(g)\,dg = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sh}\,|t|\,[{}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f(a(t)) + {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f(-a(t))]\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f(k(\theta))\,d\theta.$$

1.9. (*a*) Soit $\mathrm{T}_{\varepsilon\mathrm{A}}$ une distribution centrale sur l'ouvert $\varepsilon\,\mathrm{A}'^{\mathrm{G}}$. Il existe alors une unique distribution $\overline{\mathrm{T}}_{\varepsilon\mathrm{A}}$ sur $\mathbb{R}^*$, paire et telle que l'on ait,

$$(1.9.1)\qquad \langle \mathrm{T}_{\varepsilon\mathrm{A}}, f\rangle = \langle \overline{\mathrm{T}}_{\varepsilon\mathrm{A}}(t), {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f(\varepsilon\, a(t))\rangle, \qquad (f\in\mathscr{D}(\varepsilon\,\mathrm{A}'^{\mathrm{G}})).$$

(*b*) Soit T_{K} une distribution centrale sur l'ouvert K'^{G}. Il existe alors une unique distribution $\overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}}\in\mathscr{D}'(\mathrm{K}-\{\pm 1\})$, telle que l'on ait,

$$(1.9.2)\qquad \langle \mathrm{T}_{\mathrm{K}}, f\rangle = \langle \overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}}, {}^{\mathrm{K}}\mathrm{H}_f\rangle, \qquad (f\in\mathscr{D}(\mathrm{K}'^{\mathrm{G}})).$$

2. Représentations et formule de Plancherel

2.1. Soit $s \in \mathbb{C}$. On note $\mathrm{H}(s)$ l'espace hilbertien formé des fonctions h définies sur G et telles que $h(a(t)nk)=e^{(s+1)t}h(k)$, si $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathrm{N}$ et $k \in \mathrm{K}$, et que $h|_{\mathrm{K}} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{K})$, muni du produit scalaire

$$\langle h \mid h' \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(k(\theta))\,\overline{h'(k(\theta))}\,d\theta.$$

On désigne par π_s la représentation de G dans $\mathrm{H}(s)$ obtenue en faisant opérer G par translation à droite.

Soit T_s la fonction localement intégrable définie dans G par

$$\text{(2.1.1)} \qquad \begin{cases} \mathrm{T}_s(ga(t)g^{-1}) = \dfrac{e^{st}+e^{-st}}{\operatorname{sh}|t|}, & g \in \mathrm{G}, \quad t \in \mathbb{R}; \\ \mathrm{T}_s(g)=0, & \text{si} \quad g \notin \mathrm{A}'^{\mathrm{G}}. \end{cases}$$

T_s définit une distribution de $\mathscr{D}'(\mathrm{G})$; et on a (*cf.* [SL], p. 148).

$$\text{(2.1.2)} \qquad \operatorname{tr}(\pi_s(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f(a(t))\,e^{st}\,dt = \langle \mathrm{T}_s, f \rangle, \qquad (f \in \mathscr{D}(\mathrm{G})).$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $h_{n,s}$ la fonction de $\mathrm{H}(s)$ définie par $h(k)=\chi_n(k)$, $k \in \mathrm{K}$. Pour $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\text{(2.1.3)} \qquad \langle \pi_s(g)\,h_{n,s} \mid h_{n,s} \rangle = \tilde{h}_{n,s}(g)$$

et, pour $f \in \mathscr{D}(\mathrm{G})$,

$$\text{(2.1.4)} \qquad \langle \pi_s(f)\,h_{n,s} \mid h_{n,s} \rangle = \int_{\mathrm{G}} f(g)\,\tilde{h}_{n,s}(g)\,dg = \int_{\mathrm{G}} \tilde{f}(g)\,h_{n,s}(g)\,dg$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_{f_{\chi_{-n}}}(a(t))\,e^{st}\,dt = \langle \mathrm{T}_s, f_{\chi_{-n}} \rangle.$$

2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $\mathrm{H}^+_{i\lambda}$ (resp. $\mathrm{H}^-_{i\lambda}$) le sous-espace fermé de $\mathrm{H}(i\lambda)$ dont la base orthonormale est $(h_{2n,i\lambda})_{n\in\mathbb{Z}}$ (resp. $(h_{2n-1,i\lambda})_{n\in\mathbb{Z}}$). L'espace $\mathrm{H}^+_{i\lambda}$ (resp. $\mathrm{H}^-_{i\lambda}$) est stable par $\pi_{i\lambda}$; on note $\pi^+_{i\lambda}$ (resp. $\pi^-_{i\lambda}$) la représentation irréductible (de la série principale) de G, restriction de $\pi_{i\lambda}$ à $\mathrm{H}^+_{i\lambda}$ (resp. $\mathrm{H}^-_{i\lambda}$).

On a, pour $f \in \mathscr{D}(\mathrm{G})$,

$$\text{(2.2.1)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tr}\pi^+_{i\lambda}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \mathrm{T}_{i\lambda}, f_{\chi_{2n}} \rangle = \langle \mathrm{T}_{i\lambda}, f^+ \rangle = \langle \mathrm{T}^+_{i\lambda}, f \rangle, \\ \operatorname{tr}\pi^-_{i\lambda}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \mathrm{T}_{i\lambda}, f_{\chi_{2n+1}} \rangle = \langle \mathrm{T}_{i\lambda}, f^- \rangle = \langle \mathrm{T}^-_{i\lambda}, f \rangle. \end{cases}$$

2.3. Soit m un entier $\geqq 1$ et $\varepsilon = \pm 1$; soit $\mathrm{H}_{\varepsilon m}$ le sous-espace fermé de $\mathrm{H}(m)$ dont la base orthonormée est $(h_{\varepsilon(m+1+2n),m})_{n\geqq 0}$. L'espace $\mathrm{H}_{\varepsilon m}$ est stable par π_m; on désigne par

$\pi_{\varepsilon m}$ la représentation irréductible (de la série discrète) de G, restriction de π_m à $H_{\varepsilon m}$. On a alors, pour $f \in \mathscr{D}(G)$,

$$(2.3.1) \qquad \operatorname{tr} \pi_{\varepsilon m}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle T_m, f_{\chi - \varepsilon(m+1+2n)} \rangle.$$

Ainsi, $\operatorname{tr} \pi_{\varepsilon m}(f)$ est une distribution de $\mathscr{D}'(G)$.

On sait, d'après Harish-Chandra (*cf.* [SL], p. 153), calculer explicitement ces distributions. Soit ζ le caractère non trivial de $\{\pm 1\} = z$. On pose

$$(2.3.2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S_{\varepsilon m}(zga(t)g^{-1}) = \zeta^{m+1}(z) \dfrac{e^{-m|t|}}{2 \operatorname{sh} |t|}; \\ S_{\varepsilon m}(gk(\theta)g^{-1}) = \dfrac{\varepsilon\, ie^{\varepsilon i m \theta}}{2 \sin \theta}, \qquad g \in G, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi; \\ S_{\varepsilon m}(g) = 0, \qquad \text{si} \quad g \notin G'. \end{array} \right.$$

Proposition. — *Si m est un entier* $\geqq 1$ *et* $\varepsilon = \pm 1$, *on a* $\operatorname{tr} \pi_{\varepsilon m} = S_{\varepsilon m}$.

D'après (2.3.1), pour $f \in \mathscr{D}(G)$, on a :

$$(2.3.3) \qquad (S_{2m} + S_{-2m})(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle T_{2m}, f^-_{\chi 2m+1+2n} + f^-_{\chi-(2m+1+2m)} \rangle$$

$$= \langle T_{2m}, (f^-)^{\Delta}_m \rangle = 2 \int_0^{+\infty} {}^{A}H_{(f^-)^{\Delta}_m}(a(t)) \operatorname{ch} 2mt\, dt;$$

$$(2.3.4) \qquad (S_{2m-1} + S_{1-2m})(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle T_{2m-1}, f^+_{\chi 2m+2n} + f^+_{\chi-(2m+2n)} \rangle$$

$$= \langle T_{2m-1}, (f^+)^{\Delta}_m \rangle = 2 \int_0^{+\infty} {}^{A}H_{(f^+)^{\Delta}_m}(a(t)) \operatorname{ch}(2m-1)t\, dt.$$

Enfin, la formule de Plancherel s'écrit (*cf.* [SL], p. 174), pour $f \in \mathscr{D}(G)$,

$$(2.3.5) \qquad 2\pi f(1) = \sum_{m=1}^{+\infty} m(\langle S_m + S_{-m}, f \rangle) + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle T_{i\lambda}, f^+ \rangle \lambda \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2} d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle T_{i\lambda}, f^- \rangle \lambda \coth \frac{\pi\lambda}{2} d\lambda.$$

Donc, dans $\mathscr{D}'(G)$, on a

$$(2.3.6) \qquad 2\pi\delta_G = \sum_{m=1}^{+\infty} m(S_m + S_{-m}) + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} T^+_{i\lambda} \lambda \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2} d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} T^-_{i\lambda} \lambda \coth \frac{\pi\lambda}{2} d\lambda,$$

(qui est une intégrale à valeurs dans $\mathscr{D}'(G)$ par rapport à la mesure de Plancherel de $\hat{G}$).

3. Une solution élémentaire de l'opérateur de Casimir.

3.1. On se propose de trouver des distributions $S \in \mathscr{D}'(G)$ telles que ωS soit l'une des trois distributions intervenant dans la formule de Plancherel ci-dessus et de voir si de telles distributions S sont centrales ou non.

PROPOSITION. — (*a*) *Soit* $s \in \mathbb{C}$, $s^2 \neq 1$. *On a*

$$\omega \frac{1}{s^2-1} T_s = T_s. \tag{3.1.1}$$

(*b*) *Soit* U *la fonction localement intégrable dans* G *définie par*

$$\begin{cases} U(ga(t)g^{-1}) = |t| & (t \in \mathbb{R},\ g \in G), \\ U(g) = 0 & \text{si} \quad g \notin A'^G. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

On a

$$\omega U = T_1. \tag{3.1.3}$$

Preuve. — (*a*) En effet, pour $f \in \mathscr{D}(G)$, on a, d'après (1.8.1) et (2.1.2),

$$\langle \omega T_s, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} - 1 \right) {}^A H_f(a(t)) \right] e^{st}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} {}^A H_f(a(t))(s^2-1) e^{st}\, dt = (s^2-1) \langle T_s, f \rangle.$$

(*b*) Soit u une solution paire de $u'' - u = \operatorname{ch} t\ (t \in \mathbb{R}^*)$ et soit U la fonction définie dans G par

$$U(ga(t)g^{-1}) = \frac{2u(t)}{\operatorname{sh}|t|}\ (t \in \mathbb{R}^*,\ g \in G) \qquad \text{et} \qquad U(g) = 0 \quad \text{si} \quad g \notin A'^G.$$

On a, pour $f \in \mathscr{D}(G)$

$$\langle \omega U, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} - 1 \right) {}^A H_f(a(t)) \right] u(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} {}^A H_f(a(t) \operatorname{ch} t\, dt = \langle T_1, f \rangle.$$

D'où le résultat, en prenant $u(t) = t \operatorname{sh} t/2$.

3.2. PROPOSITION. — (*a*) *Soit* m *un entier* $\geqq 2$. *On a*

$$\omega \left(\frac{1}{m^2-1} S_{\varepsilon m} \right) = S_{\varepsilon m}. \tag{3.2.1}$$

(*b*) *Soit* $W = U - U_{\chi 0}$. *On a*

(3.2.2) $$\omega W^+ = S_1 + S_{-1}.$$

Preuve. — (*a*) Si $f \in \mathcal{D}(G)$, on a

$$\langle \omega S_{\varepsilon m}, f \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \omega T_m, f_{\chi - \varepsilon(m+1+2n)} \rangle = \left\langle \frac{1}{m^2-1} S_{\varepsilon m}, f \right\rangle.$$

(*b*) Si $f \in \mathcal{D}(G)$, on a $f = f_{\chi 0} + \sum_{n \neq 0} f_{\chi n}$, donc $f^+ = f_{\chi 0} + \sum_{n \neq 0} f_{\chi 2n}$.

D'autre part, on a $\langle S_1 + S_{-1}, f \rangle = \langle T_1, (f^+)_1^\Delta \rangle = \langle T_1, f^+ \rangle - \langle T_1, f_{\chi 0} \rangle$. D'où (*b*).

3.3. La famille des distributions $(m/(m^2-1)(S_m + S_{-m}))_{m \geq 2}$ est sommable dans $\mathcal{D}'(G)$, puisque, pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$, on a

$$\left| \frac{m}{m^2-1} \langle S_m + S_{-m}, f \rangle \right| \leqq m \, | \langle S_m + S_{-m}, f \rangle |.$$

Comme

$$\frac{1}{\lambda^2+1} \leqq 1 \quad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} | \langle T_{i\lambda}^{\pm}, f \rangle | \, \lambda \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2} \, d\lambda < +\infty,$$

on voit de même que sont définies les distributions

(3.3.1) $$V^+ = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} T_{i\lambda}^+ \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2} \, d\lambda$$

et

(3.3.2) $$V^- = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} T_{i\lambda}^- \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \coth \frac{\pi\lambda}{2} \, d\lambda.$$

Proposition. — *Soit*

(3.3.3) $$T = V^+ + V^- + U^+ - U_{\chi 0} + \sum_{m \geqq 2} \frac{m}{m^2-1} (S_m + S_{-m}).$$

T *est une solution élémentaire de l'opérateur de Casimir, i. e.* $\omega T = 2\pi\delta_G$.

Cela résulte de (3.1) et (3.2).

3.4. Proposition. — *La distribution* $U_{\chi 0}$ *n'est pas centrale.*

On va calculer d'une autre manière cette distribution.

Pour $f \in \mathcal{D}(G)$, on a

$$\langle U_{\chi 0}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^A H_{f_{\chi_0}}(a(t)) \frac{t \operatorname{sh} t}{2} \, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t \, . \, \frac{e^{2t}-1}{4} \int_{K \times N \times K} f(k^{-1} a(t) n k') \, dk \, dn \, dk' \, dt = \int_G \alpha(g) f_{\chi 0}(g) \, dg,$$

où $\alpha(a(t)nk)=t(e^{2t}-1)/4$, c'est-à-dire

$$\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{c^2+d^2}\right]\operatorname{Log}(c^2+d^2).$$

Comme cette fonction n'est pas centrale, la distribution $U_{\chi 0}$ ne l'est pas non plus.

COROLLAIRE. — *La distribution* T *définie par* (3.3.3) *n'est pas centrale.*

En effet, les distributions $S_{\varepsilon m}$, $T_{i\lambda}^+$ et $T_{i\lambda}^-$ sont des traces de représentations; elles sont donc centrales; la distribution U^+ est centrale par construction.

Remarque. — L'anomalie de T provient du terme $U_{\chi 0}$, c'est-à-dire de la valeur propre 0 de ω.

3.5. On se propose de donner maintenant une expression plus commode de la distribution T définie par (3.3.3).

On va d'abord étudier la partie de T provenant de G* et écrire pour cela la formule de Plancherel relative à G*.

D'après (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5), la formule de Plancherel relative à G* s'écrit dans $\mathscr{D}'(G^*)$,

$$(3.5.1)\qquad 2\pi\delta_{G*}=\sum_{p\geq 1}(2p-1)(S_{2p-1}+S_{1-2p})+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}T_{i\lambda}^+\,\lambda\,th\,\frac{\pi\lambda}{2}\,d\lambda.$$

En posant

$$(3.5.2)\qquad T^+=V^++U^+-U_{\chi 0}+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{2p-1}{4p(p-1)}(S_{2p-1}+S_{1-2p}).$$

On voit que $\omega\,T^+=2\pi\delta_{G*}$ et que T* n'est pas centrale, puisque $U_{\chi 0}$ ne l'est pas.

LEMME. — *La distribution centrale* V^+ *est une distribution régulière sur* G *définie par la fonction localement intégrable*

$$(3.5.3)\qquad \begin{aligned} &V^+(\pm g a(t) g^{-1})=\frac{-t\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t\operatorname{Log}(2\operatorname{sh}|t|)}{2\operatorname{sh}|t|}\quad (t\in\mathbb{R}^*,\ g\in G)\\ &V^+(g)=0\qquad (g\notin\pm A'^G).\end{aligned}$$

Preuve. — Soit $f\in\mathscr{D}(G)$. On a d'après (3.3.1)

$$\langle V^+,f\rangle=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}{}^A H_f+(a(t))\,e^{i\lambda t}\,dt\right]\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\,\operatorname{th}\frac{\pi\lambda}{2}\,d\lambda$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}({}^A H_f(a(t))+{}^A H_f(-a(t)))\,e^{i\lambda t}\,dt\right]\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\,\operatorname{th}\frac{\pi\lambda}{2}\,d\lambda.$$

En particulier pour $f \in \mathscr{D}(\mathrm{A}'^{\mathrm{G}})$, on a d'après (1.9.1)

$$\langle \mathrm{V}^+, f \rangle = \langle \overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}^+ (t), {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f (a(t)) \rangle$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f (a(t))\, e^{i\lambda t}\, dt \right] \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2}\, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f (a(t)) \cos \lambda t\, dt \right] \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2}\, d\lambda.$$

La fonction $\lambda \to [\lambda/(\lambda^2+1)] \operatorname{th}(\pi\lambda/2)$ étant de carré intégrable et l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \cos \lambda t\, [\lambda/(\lambda^2+1)] \operatorname{th}(\pi\lambda/2)\, d\lambda$ étant convergente, l'égalité précédente s'écrit encore

$$\langle \overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}^+ (t), {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f (a(t)) \rangle = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \cos \lambda t \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2}\, d\lambda \right] {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f (a(t))\, dt.$$

Donc la distribution $\overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}^+ (t)$ est régulière et on a d'après (1.8.2)

$$\operatorname{sh} |t|\, \overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}^+ (t) = -\int_0^{+\infty} \cos \lambda t \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2}\, d\lambda.$$

Soit

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \cos \lambda t \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2}\, d\lambda. \tag{3.5.4}$$

Pour calculer $f(t)$, on part de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{\operatorname{sh} t}\, dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2}.$$

En intégrant par partie cette dernière intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} (1-\cos \lambda t) \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\, dt = \frac{\pi\lambda}{2} \operatorname{th} \frac{\pi\lambda}{2}.$$

Par suite la fonction f est solution, au sens des distributions, de l'équation différentielle

$$f'' - f = \mathrm{P} f \left(\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t} \right),$$

si bien que pour $t \neq 0$, puisque f est paire,

$$f(t) = \alpha \operatorname{ch} t + \beta \operatorname{sh} |t| + t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \operatorname{Log} \operatorname{sh} |t|.$$

Au sens des distributions, on a

$$(\mathrm{Log}\,|\,t\,|)'' = -\mathrm{P}\,f\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

on en déduit que $f(t)+\mathrm{Log}\,|\,t\,|$ est de classe C^1 et par suite que $\beta=0$. D'autre part

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} f(t) = \frac{1}{2}(\alpha+\mathrm{Log}\,2),$$

et comme f est de carré intégrable, il en résulte que $\alpha=-\mathrm{Log}\,2$. Donc

$$f(t) = t\,\mathrm{sh}\,t - \mathrm{ch}\,t\,\mathrm{Log}(2\,\mathrm{sh}\,|\,t\,|).$$

COROLLAIRE. — *La distribution* T^+ *de* (3.5.2) *est donnée par la formule suivante*

(3.5.5) $$\langle \mathrm{T}^+, f\rangle = \int_0^{+\infty} {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_{f^+}(a(t))\,[-t\,\mathrm{sh}\,t+\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{Log}(2\,\mathrm{sh}\,t)]\,dt$$

$$+\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{sh}\,t\,{}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_{(f^+)_1^\wedge}(a(t))\,dt + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(2p-1)}{2p(p-1)} \int_0^{+\infty} \mathrm{ch}\,(2p-1)\,t\,{}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_{(f^+)_p^\wedge}(a(t))\,dt,$$

$$(f\in\mathscr{D}(\mathrm{G})).$$

Cela résulte de (2.3.7), (3.2) et (3.5.3).

LEMME. — *La distribution centrale* V^- *est une distribution régulière sur* G *définie par la fonction localement intégrable.*

(3.5.6) $$\mathrm{V}^-(\pm g a(t) g^{-1}) = \pm\frac{1+\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{Log}\,(\mathrm{th}\,|\,t\,|/2)}{2\,\mathrm{sh}\,|\,t\,|}\quad(t\in\mathbb{R}^*,\, g\in\mathrm{G}),$$

$$\mathrm{V}^-(g)=0 \quad \text{si} \quad g\notin\pm\mathrm{A}'^{\mathrm{G}}.$$

Preuve. — Pour $f\in\mathscr{D}(\mathrm{A}'^{\mathrm{G}})$, on a

$$\langle \mathrm{V}^-, f\rangle = \langle \overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}^-(t), {}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f(a(t))\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} \cos\lambda\,t\,\frac{1}{\lambda^2+1}\,\coth\frac{\pi\lambda}{2}\,d\lambda\right]{}^{\mathrm{A}}\mathrm{H}_f(a(t))\,dt.$$

Donc la distribution $\overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}^-(t)$ est régulière et on a, d'après (1.8.2)

$$\mathrm{sh}\,|\,t\,|\,\overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{A}}^-(t) = -\int_0^{+\infty} \cos\lambda\,t\,\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\,\coth\frac{\pi\lambda}{2}\,d\lambda.$$

Comme

$$\coth\frac{\pi\lambda}{2} = \mathrm{th}\,\frac{\pi\lambda}{2} + \frac{2}{\mathrm{sh}\,\pi\lambda},$$

il suffit de calculer, d'après (3.5.4),

$$h(t)=\int_0^{+\infty}\cos\lambda\, t\,\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\pi\lambda}\,d\lambda.$$

On a

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\, t}{\operatorname{sh} t}\,dt=\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{\pi\lambda}{2}.$$

D'où, en dérivant par rapport à λ,

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{sh} t}\cos\lambda\, t\,dt=\frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\pi\lambda/2)},$$

soit encore en changeant de variable

$$\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{\operatorname{sh}\pi\lambda}\cos\lambda\, t\,d\lambda=\frac{1}{4}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/2)}.$$

Par suite, la fonction h est solution de l'équation différentielle

$$h''-h=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/2)}.$$

Donc

$$h(t)=\operatorname{ch} t\,\operatorname{Log}\operatorname{ch}\frac{t}{2}-\frac{t}{2}\operatorname{sh} t-\frac{1}{2}+\alpha\operatorname{ch} t+\beta\operatorname{sh} t.$$

Puisque h est paire, on a $\beta=0$. D'autre part comme h est à décroissance rapide, $\alpha=\operatorname{Log} 2$. Donc

$$h(t)=\operatorname{ch} t\,\operatorname{Log}\left(2\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)-\frac{t}{2}\operatorname{sh} t-\frac{1}{2},$$

par suite

$$g(t)=f(t)+2h(t)=-\left(\operatorname{ch} t\,\operatorname{Log}\operatorname{th}\frac{|t|}{2}+1\right).$$

COROLLAIRE. — *Soit la distribution centrale de* $\mathscr{D}'(\mathrm{G})$

$$\mathrm{T}^-=\mathrm{V}^-+\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{2p}{4p^2-1}(\mathrm{S}_{2p}-\mathrm{S}_{-2p}).$$

Cette distribution vérifie

$$\langle\omega\,\mathrm{T}^-, f\rangle=2\pi f^-(1),\qquad f\in\mathscr{D}(\mathrm{G})$$

et elle est donnée par la formule suivante :

$$\langle T^-, f\rangle = \int_0^{+\infty} {}^A H_{f^-}(a(t))\left[1+\operatorname{ch} t \operatorname{Log} \operatorname{th}\frac{t}{2}\right] dt$$
$$+\sum_{p\geqq 2}\frac{4p}{4p^2-1}\int_0^{+\infty} {}^A H_{(f^-)_p^\wedge}(a(t)) \operatorname{ch} 2pt\, dt.$$

Cela résulte de (2.3.6), (3.3.3) et de (3.5.6).

3.6. Comme la distribution T^- est centrale, on peut se demander si une résolution directe de l'équation $\omega S = 2\pi\delta_G^-$, permet d'obtenir une distribution centrale plus simple que la distribution T^-.

Proposition. — *Soit* F *la fonction localement intégrable sur* G, *définie par*

$$(3.6.1)\quad \begin{cases} F(gk(\theta)g^{-1}) = -F(gk(\theta\pi)g^{-1}) = -\dfrac{\pi^2}{2}\operatorname{cotg}\theta & \text{si}\quad 0<\theta<\pi, \\ F(g)=0 \quad \text{si}\quad g\notin K'^G. \end{cases}$$

La distribution centrale associée à F *vérifie*

$$\omega F = 2\pi\delta_G^-.$$

Preuve. — Plus généralement soit S une distribution centrale de $\mathscr{D}'(G)$ telle que supp $\omega S \subset 1, -1\}$. Notons S_A (resp. S_K) la restriction de S à l'ouvert A'^G (resp. K'^G) de G. Soit $\bar{S}_A$ (resp. $\bar{S}_K$) la distribution sur $\mathbb{R}^*$ (resp. sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}\pi$) donnée par 1.9. Pour tout $f\in\mathscr{D}(A'^G)$, [resp. $f\in\mathscr{D}(K'^G)$], on a d'après (1.8.1) et (1.8.5)

$$\langle \omega S_A, f\rangle = \left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\bar{S}_A, {}^A H_f(a(\,.\,))\right\rangle = 0,$$

$$\langle \omega S_K, f\rangle = -\left\langle \left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)\bar{S}_K, {}^K H_f(k(\,.\,))\right\rangle = 0.$$

Donc la distribution $\bar{S}_A$ (resp. $\bar{S}_K$) est une fonction notée F_A, paire, C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (resp. F_K, C^∞ sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}\pi$) et vérifiant

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)F_A = 0 \qquad \left(\text{resp.}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)F_K=0\right).$$

Soit $\varepsilon=\pm 1$ et soit F_1 la fonction définie sur l'ouvert $\pm A'^G$ par

$$F_1(\varepsilon\, g a(t) g^{-1}) = \begin{cases} \dfrac{d_1(\varepsilon)\operatorname{ch} t + d_2(\varepsilon)\operatorname{sh} t}{4\operatorname{sh} t} & \text{si}\quad t>0, \\ \dfrac{d_2(\varepsilon)\operatorname{sh} t - d_1(\varepsilon)\operatorname{ch} t}{4\operatorname{sh} t} & \text{si}\quad t<0, \end{cases}$$

$d_1(\varepsilon)$ et $d_2(\varepsilon)$ étant des constantes arbitraires.

Soit F_2 la fonction définie sur l'ouvert K'^G par

$$F_2(gk(\theta)g^{-1})=\begin{cases}\dfrac{c_1\cos\theta+c_2\sin\theta}{2\sin\theta} & \text{si} \quad 0<\theta<\pi,\\[2ex] \dfrac{c'_1\cos\theta+c'_2\sin\theta}{2\sin\theta} & \text{si} \quad \pi<\theta<2\pi,\end{cases}$$

c_1, c_2, c'_1 et c'_2 étant des constantes arbitraires.

Notons F la fonction définie sur l'ouvert G', qui coincide avec F_1 (resp. F_2) sur l'ouvert $\pm A'^G$ (resp. K'^G). Cette fonction est localement intégrable sur G. Soit T_F la distribution associée de $\mathscr{D}'(G)$. Calculons T_F. On obtient

$$(3.6.2)\qquad \langle \omega T_F^+, f\rangle=\left[d_2(1)+d_2(-1)-\frac{c_2}{4\pi}-\frac{c'_2}{4\pi}\right]{}^A H_{f^+}(1),$$

$$(3.6.3)\quad \langle \omega T_F^-, f\rangle=\frac{c'_1-c_1}{2\pi}f^-(1)+\left[d_2(1)-d_2(1)+\frac{c'_2-c_2}{4\pi}\right]\int_0^{+\infty} f_K^-\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}dy$$
$$+\left[d_2(1)-d_2(-1)+\frac{c_2-c'_2}{4\pi}\right]\int_{-\infty}^0 f_K^-\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}dy \qquad (f\in\mathscr{D}(G)).$$

En particulier pour $d_1(1)=d_1(-1)=d_2(1)=d_2(-1)=c_2=c'_2=0$ et $c_1=-c'_1=2\pi^2$, T_F vérifie le résultat de la proposition.

3.7. Proposition. — *Soient* T *une distribution centrale sur* G *de support contenu dans la variété singulière* G_S *et* δ (*resp.* $\bar\delta$) *la distribution de Dirac sur* G *au point* 1 (*resp.* -1). *Soient aussi* H_i *et* $\bar H_i$ $(i=1, 2)$, *les distributions centrales sur* G *définies par*

$$\langle H_1, \varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\tilde\varphi\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}dy,\qquad \langle \bar H_1, \varphi\rangle=\int_{-\infty}^0\tilde\varphi\begin{pmatrix}-1 & y\\ 0 & -1\end{pmatrix}dy,$$
$$\langle H_2, \varphi\rangle=\int_{-\infty}^0\tilde\varphi\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}dy,$$
$$\langle \bar H_2, \varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\tilde\varphi\begin{pmatrix}-1 & y\\ 0 & -1\end{pmatrix}dy,\qquad (\varphi\in\mathscr{D}(G)).$$

Alors T est combinaison linéaire des distributions $\omega^k H_i$, $\omega^k \bar H_i$, $\omega^k\delta$ et $\omega^k\bar\delta$ $(k\in\mathbb{N})$.

Preuve. — La variété singulière G_S a pour équation

$$G_S=\{x\in G, (\mathrm{tr}(x)-2)(\mathrm{tr}(x)+2)=0\}\ G_1\cup G_2,$$

avec

$$G_1=\{x\in G, \mathrm{tr}(x)=2\}\qquad \text{et} \qquad G_2=\{x\in G, \mathrm{tr}(x)=-2\}.$$

Soit φ l'application de G dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=(\mathrm{tr}(x)+2)/4$. Posons $T_1=\varphi T$ et $T_2=(1-\varphi)T$. Alors T_1 (resp. T_2) est une distribution centrale sur G de support contenu dans G_1 (resp. G_2) et on a $T=T_1+T_2$.

Soient $U=\{x\in G, \operatorname{tr}(x)>-2\}$ l'ouvert invariant de G et $V=\{X\in\mathscr{G}, \det X<\pi^2\}$ l'ouvert invariant de $\mathscr{G}$. Il est facile de voir que l'application exponentielle est un difféomorphisme de V sur U. Comme le support de T_1 est contenu dans G_1 qui est lui-même contenu dans U, la restriction de T_1 à U, détermine entièrement T_1. Posons

$$j(X)=\left|\det\frac{\operatorname{sh}(ad\,X/2)}{ad\,X/2}\right|^{1/2}\qquad (X\in V).$$

La fonction j est analytique, G-invariante et non nulle. L'isomorphisme γ de Harish-Chandra entre $\mathscr{D}'(U)$ et $\mathscr{D}'(W)$ est défini comme suit : si T est une distribution sur U, la distribution $S=\gamma(T)$ sur V est telle que

$$\int\varphi(x)\,dT(x)=\int\varphi(\exp X)\,j(X)\,dS(X)\qquad (\varphi\in\mathscr{D}(U)).$$

De plus si T est centrale, on a

$$\gamma(\omega\,T)=\nabla(\omega)\,\gamma(T),$$

où $\nabla(\omega)$ est un opérateur différentiel sur $\mathscr{G}$, invariant par la représentation adjointe de G et à coefficients constants.

Au moyen de l'isomorphisme γ, la distribution centrale T_1 se transforme en une distribution centrale S_1 sur $\mathscr{G}$, de support contenu dans l'ensemble $C=\{X\in\mathscr{G}, \det X=0\}$.

Identifions $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{G}$ au moyen de l'application

$$(x_1, x_2, x_3)\to\begin{pmatrix} x_2 & x_1+x_3\\ x_1-x_3 & -x_2\end{pmatrix}.$$

Alors l'action de G sur $\mathscr{G}$ par automorphismes intérieurs, s'identifie à l'action naturelle du groupe $SO_0(1,2)$ sur $\mathbb{R}^3$ où $SO_0(1,2)$ est la composante connexe de l'élément neutre du groupe qui laisse invariante la forme quadratique $q(x_1, x_2, x_3)=-x_1^2-x_2^2+x_3^2$; et le transformé de ω par γ est, à un facteur constant près, l'opérateur

$$\square=-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Moyennant ces identifications, S_1 devient une distribution sur $\mathbb{R}^3$ invariante par $SO_0(1,2)$, de support contenu dans le cône $C=\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x_1^2+x_2^2-x_3^2=0\}$. D'après ([Met], p. 248 et 251), S_1 est combinaison linéaire des distributions $\square^k H^0$, $\square^k \bar{H}^0$, $\square^k\delta_0$ ($k=0, 1, 2\ldots$), δ_0 étant la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}^3$ au point 0, et H^0 (resp. $\bar{H}^0$) la distribution sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$H^0(\alpha)=\pi\int_0^{+\infty}\Phi(r^2, r)\,dr,\qquad \left(\text{resp. } \bar{H}^0(\alpha)=\pi\int_0^{+\infty}\Phi(r^2, -r)\,dr\right),$$

avec

$$\Phi(r^2, \pm r)=\int_0^{2\pi}\alpha(r\cos\theta, r\sin\theta, \pm r)\,d\theta,\qquad (\alpha\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)).$$

En particulier pour $f \in \mathscr{D}(G)$ et $\alpha = j \times f \circ \exp$, on a

$$\begin{aligned} H^0(\alpha) &= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{4\pi}(j\times f\circ\exp)\begin{pmatrix} r\sin\theta & r(\cos\theta+1) \\ r(\cos\theta-1) & -r\sin\theta \end{pmatrix} d\theta\, dr \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{4\pi}(j\times f\circ\exp)\left[k\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} k\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right] d\theta\, dr \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f\left[k(\theta)\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k(-\theta)\right] d\theta\, dr = \pi^2 H_1(f). \end{aligned}$$

Donc les distributions sur G correspondantes à H^0 et $\bar{H}^0$ au moyen de l'isomorphisme de Harish-Chandra sont à un facteur constant près, les distributions H_1 et H_2 respectivement, de la proposition; d'où le résultat pour la distribution T_1. Posons maintenant $T_1' = L_{-1}^*(T_2)$, L_{-1} étant la translation à gauche définie par l'élément -1. Alors T_1' est une distribution centrale sur G de support contenu dans G_1. Sachant que $L_{-1}^*(H_1) = -\bar{H}_1$ et $L_{-1}^*(H_2) = -\bar{H}_2$, il s'ensuit que T_2 est combinaison linéaire des distributions $\omega^k \bar{H}_1$, $\omega^k \bar{H}_2$, $\omega^k \bar{\delta}$; d'où le résultat final pour T.

3.7.1. *Remarque.* — D'après ([Met], p. 243), les distributions $\square\, H^0$ et $\square\, \bar{H}^0$ ont leur support contenu dans 0. Donc les distributions ωH_1 et ωH_2 (resp. $\omega \bar{H}_1$ et $\omega \bar{H}_2$) ont leur support contenu dans 1 (resp. -1).

3.8. Proposition. — *Il n'existe pas de solutions élémentaires centrales de l'opérateur de Casimir.*

Preuve. — D'après 3 et 3.5, il suffit de prouver qu'il n'existe pas de solutions élémentaires centrales de l'opérateur de Casimir ω sur le groupe PSL(2, R). Pour cela, nous raisonnons par l'absurde.

Si T est une telle distribution, d'après 3.6, la restriction de T à l'ouvert partout dense G′ est une distribution régulière $T_f \in \mathscr{D}'(G^*)$ définie par la fonction localement intégrable

$$f(\pm g a(t) g^{-1}) = \begin{cases} \dfrac{d_1 \operatorname{ch} t + d_2 \operatorname{sh} t}{4 \operatorname{sh} t} & \text{si} \quad t > 0 \\[2ex] \dfrac{d_2 \operatorname{ch} t - d_1 \operatorname{sh} t}{4 \operatorname{sh} t} & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$f(gk(\theta) g^{-1}) = f(gk(\theta+\pi) g^{-1}) = \frac{c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta}{2\sin\theta}, \qquad 0<\theta<\pi, \qquad g \in G,$$

d_1, d_2, c_1 et c_2 étant des constantes.

De plus, la distribution $\omega\, T_f$ vérifie

$$\langle \omega\, T_f, \varphi \rangle = \left(2 d_2 - \frac{c_2}{2\pi}\right) {}^{A}H_{\varphi^+}(1), \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(G)).$$

La distribution $T-T_f$ qui est centrale, a son support contenu dans la variété singulière G_S. D'après 3.7, $T-T_f$ est combinaison linéaire des distributions $\omega^k H_1^+$, $\omega^k H_2^+$, $\omega^k \delta^+$, $(k=0, 1, 2\ldots)$. Donc

$$\omega(T-T_f)=\delta^+ + \left(2 d_2 - \frac{c_2}{2\pi}\right)(H_1^+ + H_2^+)$$

est combinaison linéaire des distributions $\omega^{k+1} H_1^+$, $\omega^{k+1} H_2^+$, $\omega^{k+1}\delta^+$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Ceci est impossible, d'après (3.7.1), si $2d_2-c_2/2\pi$ est non nul. Maintenant si $2d_2=c_2/2\pi$, la distribution $T-T_f$ est alors une solution élémentaire centrale de ω de support contenu dans la variété singulière G_S. En restreignant $T-T_f$ à l'ouvert $U=\{x \in G, \operatorname{tr}(x)>-2\}$ qui contient l'ensemble G_S et en ramenant au moyen de l'isomorphisme de Harish-Chandra la distribution $T-T_f$ sur l'ouvert $V=\{X \in \mathcal{G}/\det(X)<\pi^2\}$ de $\mathcal{G}$ identifié à $\mathbb{R}^3$, on obtient une distribution S sur $\mathbb{R}^3$ de support contenu dans le cône $C=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2+x_2^2-x_3^2=0\}$, qui est solution élémentaire invariante (par le groupe $SO_0(1, 2)$) du dalembertien de $\mathbb{R}^3$; ce qui est également impossible d'après ([Met], p. 252).

3.9. PROPOSITION. — *Soient* $\mathcal{S}_0$ *l'espace des distributions* T *sur* G, *solutions de l'équation* $\omega T=0$ *et* $H^1(G, \mathcal{S}_0)$ *le groupe de cohomologie de* G *à valeurs dans l'espace* $\mathcal{S}_0$. *Alors* $H^1(G, \mathcal{S}_0)$ *n'est pas nul.*

Preuve. — Soit T la solution élémentaire non invariante de ω, déterminée dans 3. T définit le cocycle $c: g \to gT-T$. La classe de ce cocycle est non nulle; sinon, il existerait $S \in \mathcal{S}_0$ tel que l'on ait

$$gT-T=gS-S,$$

ce qui signifie que $T-S$ qui est une solution élémentaire de ω est centrale, ce qui contredit 3.8.

4. Résolution de l'équation $\omega f=g$, g étant une fonction centrale C^∞ sur G.

Une fonction centrale, C^∞ sur G, n'est pas à support compact. Si g est une fonction centrale, C^∞ sur G donnée, le problème se pose de savoir s'il existe une solution centrale, C^∞ sur G de l'équation $\omega f=g$. Comme nous le verrons ultérieurement, l'existence de telles solutions est liée à des conditions sur la donnée g, ne faisant intervenir que le sous-groupe K.

Si f est une fonction sur G, nous poserons dans toute la suite

$$f_A(t)=f(a(t)) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$
$$f_K(\theta)=f(k(\theta)) \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

4.1. PROPOSITION. — *Soit* f *une fonction centrale, continue sur* G. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit* C^∞ *sur* G, *est que les fonctions* f_A *et* f_K *soient* C^∞ *et* *vérifient*

(4.1.1) $$f_A^{(2n+1)}(0)=f_K^{(2n+1)}(0)=0,$$

(4.1.2) $$f_A^{(2n)}(0)=(-1)^n f_K^{(2n)}(0), \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Preuve. — Identifions $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{G}$ au moyen de l'application

$$(x_1, x_2, x_3)\to\begin{pmatrix} x_2 & x_1+x_3 \\ x_1-x_3 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

Alors l'action de G sur $\mathcal{G}$ par automorphismes intérieurs, s'identifie à l'action naturelle du groupe de Lorentz sur $\mathbb{R}^3$. Donc si f est une fonction centrale continue sur G, $f\circ\exp=F$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$, invariante par $SO_0(1,2)$. Pour x dans $\mathbb{R}^3$, posons $Q(x)=-x_1^2-x_2^2+x_3^2$. Soient Ω_+^1, Ω_+^2 et Ω_- les ouverts de $\mathbb{R}^3$, définis par

$$\Omega_+^1=\{x\in\mathbb{R}^3;\ Q(x)Q(x)>0,\ x_3>0\},\qquad \Omega_+^2=\{x\in\mathbb{R}^3;\ Q(x)>0,\ x_3<0\},$$
$$\Omega_-=\{x\in\mathbb{R}^3;\ Q(x)<0\}.$$

Soit H une fonction continue (resp. de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^3$, invariante par le groupe de Lorentz $SO_0(1,2)$. Il existe deux fonctions H_1 et H_2 continues (resp. de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $]-\infty, 0]$, telles que

$$H(x)=\begin{cases} H_1(Q(x)) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega_+^1, \\ H_2(Q(x)) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega_+^2, \\ H_1(Q(x))=H_2(Q(x)) & \text{pour } x \text{ dans } \Omega_-. \end{cases}$$

Ceci définit un isomorphisme de l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^3$, invariantes par $SO_0(1,2)$ sur l'espace des couples (H_1, H_2) de fonctions continues (resp. de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$, telles que $H_1(t)=H_2(t)$ pour $t\leqq 0$.

Soit (F_1, F_2) le couple de fonctions sur $\mathbb{R}$ associé par l'isomorphisme précédent à la fonction $F=f\circ\exp$. On a

$$f_A(t)=F_1(-t^2)=F_2(-t^2), \qquad (t\in\mathbb{R}),$$
$$f_K(\theta)=\begin{matrix} F_1(\theta^2) & \text{si} & \theta>0 \\ F_2(\theta^2) & \text{si} & \theta<0. \end{matrix}$$

D'où la condition nécessaire et suffisante.

4.2. Proposition. — *Soit f une fonction centrale,* C^∞ *sur* G. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction g, centrale et* C^∞ *sur* G, *vérifiant* $\omega g=f$, *est que l'on ait*

$$\int_0^\pi f_K^+(\theta)\sin 2\theta\, d\theta=\int_0^\pi f_K^+(\theta)\sin^2\theta\, d\theta=\int_0^\pi f_K^-(\theta)\sin^2\theta\, d\theta=0.$$

Preuve. — (*a*) Résolution de l'équation $\omega g^+ = f^+$.

Posons

$$G_A^+(t) = \operatorname{sh} t\, g_A^+(t), \qquad G_K^+(\theta) = \sin\theta\, g_K^+(\theta),$$
$$F_A^+(t) = \operatorname{sh} t\, f_A^+(t), \qquad F_K^+(\theta) = \sin\theta\, f_K^+(\theta).$$

La fonction G_A^+ (resp. G_K^+) est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right) G_A^+(t) = F_A^+(t), \qquad (t \in \mathbb{R}^*) \tag{4.2.1}$$

resp.

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1\right) G_K^+(\theta) = -G_K^+(\theta), \qquad (\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\,\pi) \tag{4.2.2}$$

avec les conditions suivantes

$$G_A^+(-t) = -G_A^+(t), \qquad G_K^+(\theta+\pi) = -G_K^+(\theta) \qquad \text{et} \qquad G_K^+(0) = 0.$$

La solution générale de (4.2.1) est donnée par la fonction y

$$y = \lambda\, e^t + \mu\, e^{-t} + \int_0^t F_A^+(u) \operatorname{sh}(t-u)\, du. \tag{4.2.3}$$

La fonction $t \to \int_0^t F_A^+(u) \operatorname{sh}(t-u)\, du$ étant impaire, on a nécessairement

$$G_A^+(t) = \lambda \operatorname{sh} t + \int_0^t F_A^+(u) \operatorname{sh}(t-u)\, du.$$

La solution générale de (4.2.2) est donnée par la fonction z

$$z = \lambda'\, e^{i\theta} + \mu'\, e^{-i\theta} + \int_0^\theta F_K^+(u) \sin(u-\theta)\, du. \tag{4.2.4}$$

Exprimons les conditions imposées à G_K^+ sur la fonction z. On obtient les conditions suivantes

$$\lambda' + \mu' = 0, \qquad \int_0^\pi F_K^+(u) \sin u\, du = \int_0^\pi F_K^+(u) \cos u\, du = 0.$$

Si ces conditions sont satisfaites, la fonction G_K^+ est alors égale à

$$G_K^+(\theta) = \lambda' \sin\theta + \int_0^\theta F_K^+(u) \sin(u-\theta)\, d\theta,$$

et cette dernière vérifie l'égalité $G_K^+(\theta+\pi) = -G_K^+(\theta)$.

En prenant $\lambda=\lambda'$, la fonction g^+ définie sur G par

$$g^+(\pm x a(t) x^{-1})=\lambda+\frac{1}{\operatorname{sh} t}\int_0^t F_A^+(u)\operatorname{sh}(t-u)\,du, \qquad (t\in\mathbb{R},\ x\in G),$$

$$g^+(x k(\theta) x^{-1})=\lambda+\frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta F_K^+(u)\sin(u-\theta)\,du, \qquad (\theta\in\mathbb{R}),$$

$$g^+(x)=\lambda \quad \text{si} \quad |\operatorname{tr} x|=2.$$

est une fonction centrale, continue sur G, vérifiant les conditions (4.1.1) et (4.1.2). Elle est donc C^∞ d'après (4.1).

(*b*) Résolution de l'équation $\omega g^-=f^-$.

On conserve les mêmes notations que dans (*a*) mais en changeant le signe + par le signe −. La fonction G_A^- (resp. G_K^-) est encore solution de (4.2.1) [resp. (4.2.2)]; mais avec les conditions suivantes

$$G_A^-(-t)=-G_A^-(t), \qquad G_K^-(\theta+\pi)=G_K^-(\theta) \qquad \text{et} \qquad G_K^-(0)=0.$$

En traduisant ces conditions sur (4.2.3) et (4.2.4), on trouve que

$$G_A^-(t)=\lambda\operatorname{sh} t+\int_0^t F_A^-(u)\operatorname{sh}(t-u)\,du,$$

et qu'on a les nouvelles conditions

$$\lambda'+\mu'=0, \qquad \int_0^\pi F_K^-(u)\sin u\,du=0, \qquad \int_0^\pi F_K^-(u)\cos u\,du=-2\lambda'.$$

Si ces conditions sont satisfaites, la fonction G_K^- est alors égale à

$$G_K^-(\theta)=\frac{\sin\theta}{2}\int_0^\pi F_K^-(u)\cos u\,du+\int_0^\pi F_K^-(u)\sin(u-\theta)\,du$$

et cette dernière vérifie l'égalité $G_K^-(\theta+\pi)=G_K^-(\theta)$.

En prenant $\lambda=1/2\int_0^\pi F_K^-(u)\cos u\,du$, la fonction g^- définie par

$$\left\{\begin{aligned}
&g^-(x a(t) x^{-1})=\frac{1}{2}\int_0^\pi F_K^-(u)\cos u\,du\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\operatorname{sh} t}\int_0^t F_K^-(u)\operatorname{sh}(t-u)\,du, \qquad (t\in\mathbb{R},\ x\in G),\\
&g^-(-x a(t) x^{-1})=-g^-(x a(t) x^{-1}),\\
&g^-(x k(\theta) x^{-1})=\frac{1}{2}\int_0^\pi F_K^-(u)\cos u\,du+\frac{1}{\sin\theta}\int_0^\theta F_K^-(u)\sin(u-\theta)\,du \qquad (\theta\in\mathbb{R}),\\
&g^-(x)=\frac{1}{2}\int_0^\pi F_K^-(u)\cos u\,du, \qquad \text{si} \quad \operatorname{tr} x=2,\\
&g^-(x)=-\frac{1}{2}\int_0^\pi F_K^-(u)\cos u\,du, \qquad \text{si} \quad \operatorname{tr} x=-2,
\end{aligned}\right.$$

est une fonction centrale, continue sur G, vérifiant les conditions (4.1.1) et (4.1.2). Elle est donc C^∞, d'après (4.1). D'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[He] S. HELGASON, *Amer. Math. Soc.*, 14, 1972.

[SL] S. LANG, $SL_2(R)$, Addison Wesley, New York, 1975.

[SCH] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[MET] P. METHEE, Sur *les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz* (*Commentarii Math. Helvetici*, vol. 28, 1954, p. 225-269).

(Manuscrit reçu le 19 novembre 1982, révisé le 13 septembre 1983).

Département de Mathématiques,
Université de Lyon-I,
43, boulevard du 11-Novembre-1918,
69622 Villeurbanne Cedex.