

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN MARTINET

JEAN-PIERRE RAMIS

Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 16, n° 4 (1983), p. 571-621

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_4_571_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES RÉSONNANTES DU PREMIER ORDRE

PAR JEAN MARTINET ET JEAN-PIERRE RAMIS

Introduction

... trouvez *Hortense*.
(A. Rimbaud)

Nous poursuivons dans cet article l'étude des germes d'équations différentielles analytiques

$$(1) \quad \omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0,$$

singulières à l'origine de \mathbb{C}^2 entreprise dans [22].

Deux équations du type (1) sont dites analytiquement (resp. formellement) isomorphes s'il existe un difféomorphisme local analytique (resp. formel) de \mathbb{C}^2 transformant l'une en l'autre, à *unité près*.

Une équation du type (1) est dite *résonnante* si sa partie linéaire en 0 se réduit dans un système convenable de coordonnées à la forme

$$x dy + \xi y dx \quad \text{où } \xi = p/q \text{ est un nombre rationnel positif.}$$

Nous avons donné dans [22] la classification analytique des équations résonnantes dégénérées (i. e. pour lesquelles $\xi = 0$). Nous traitons ici le cas non dégénéré, et supposons donc p et q strictement positifs, entiers et premiers entre eux.

Il est bien connu (Poincaré [25], Dulac [8]), qu'une équation de partie linéaire $x dy + \xi y dx$, où ξ , $1/\xi \notin \mathbb{N}^-$, s'écrit dans un système convenable de coordonnées locales *analytiques*

$$(2) \quad \omega = x dy + \xi y \cdot a(x, y) dx = 0 \quad \text{où } a(0, 0) = 1.$$

Sous cette forme on vérifie immédiatement l'existence de deux *variétés invariantes* ($\{x=0\}$ et $\{y=0\}$), qui vont jouer un rôle fondamental dans notre étude. Le *difféomorphisme d'holonomie* de $\{y=0\}$ (resp. $\{x=0\}$) pour l'équation (2) a pour *partie linéaire* l'homothétie de \mathbb{C} de rapport $\exp - 2\pi i \xi$ (resp. $\exp - 2\pi i / \xi$).

Le problème de la classification analytique des *équations différentielles résonnantes* est ainsi lié à celui de la classification analytique des *difféomorphismes* locaux analytiques de \mathbb{C} résonnants. (Un difféomorphisme local analytique à l'origine de \mathbb{C} est dit résonnant si sa partie linéaire est une homothétie de rapport une racine de l'unité.)

Notons σ_ξ l'homothétie de \mathbb{C} de centre 0 et de rapport $e^{2\pi i \xi} \in \mathbb{C}^*$; soit $X_{k,\lambda}$ le champ de vecteurs défini par

$$X_{k,\lambda} = 2\pi i \frac{x^{k+1}}{1+\lambda x^k} d/dx \quad (k \text{ entier } \geq 1, \lambda \in \mathbb{C});$$

on pose $g_{k,\lambda} = \exp X_{k,\lambda}$; le germe de $g_{k,\lambda}$ en 0 est un difféomorphisme local analytique, tangent à l'identité.

Rappelons la classification formelle des germes de difféomorphismes résonnants et celle des germes d'équations différentielles résonnantes :

Un difféomorphisme résonnant analytique non linéarisable admettant pour partie linéaire $\sigma_{p/q}$ est formellement conjugué à un unique difféomorphisme de la forme $\sigma_{p/q} \circ g_{qk,\lambda}$; $p/q, k, \lambda$ sont les *invariants formels* correspondants.

Les formes normales formelles d'équations différentielles résonnantes sont, outre l'équation linéaire

$py dx + qx dy = 0$, les équations ⁽¹⁾

$$\omega_{p/q, k, \lambda} = p(1 + (\lambda - 1)u^k) y dx + q(1 + \lambda u^k) x dy = 0 \quad (u = x^p y^q).$$

Toute équation différentielle résonnante est formellement isomorphe à une unique équation de la forme $\omega_{p/q, k, \lambda}$; $p/q, k, \lambda$ sont les invariants formels correspondants.

Il est utile d'introduire deux entiers m et n tels que $mp - nq = 1$ et d'écrire

$$\omega_{p/q, k, \lambda} = (1 + (\lambda - mp)u^k)(py dx + qx dy) + pqu^k(ny dx + mx dy).$$

Il apparaît ainsi le *facteur intégrant* $pqxyu^k$ ($\omega_{p/q, k, \lambda}/pqxyu^k$ est fermée) et l'*intégrale première* (qui ne dépend pas du choix de m et n)

$$H_{p/q, k, \lambda} = x^{-n} y^{-m} u^{-(\lambda - mp)/pq} \exp(1/pqu^k),$$

Le problème de la classification analytique des difféomorphismes locaux résonnants à l'origine de \mathbb{C} a été résolu par Ecalle [9] (cf. aussi plus récemment Voronin [30]). Malgrange en donne dans [19] une solution élégante utilisant le théorème d'intégrabilité des structures

⁽¹⁾ Il y a clairement une part d'arbitraire dans ce choix. On trouve par exemple des formes légèrement différentes dans Hukuhara-Kimura-Matuda [14].

presque complexes de Newlander-Nirenberg [24]. Nous avons néanmoins préféré revenir sur cette question dans la première partie de notre article, essentiellement pour deux raisons : d'une part nous devons disposer pour l'étude des équations différentielles résonnantes d'un traitement complet du cas des difféomorphismes résonnants dans l'esprit de Malgrange [19] (où n'est traité que le cas « typique » $p=q=1$, $\lambda=0$); d'autre part nous désirions donner une « interprétation géométrique » de la classification, à l'aide des notions d'« intégrale première » et d'« espace d'orbites ».

L'étude des « germes d'espaces d'orbites » ou des « germes d'espaces de feuilles » dans le contexte résonnant conduit à introduire certaines variétés analytiques complexes *non séparées* de dimension un dont nous allons esquisser la construction (pour la notion générale d'« espace de feuilles », sur laquelle nous ne reviendrons pas, le lecteur se reportera à Haefliger-Reeb [12]).

Nous identifions la sphère S^2 à la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Elle est munie de la structure complexe correspondante, et $\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ désigne le groupe des couples de difféomorphismes locaux analytiques de S^2 tangents à l'identité, en 0 et ∞ respectivement. Un élément de $\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ est noté $\varphi = (\varphi_0, \varphi_\infty)$.

L'entier $k \geq 1$ étant fixé, on se donne un « symbole » $(\lambda \in \mathbb{C}; \varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k)$, à partir duquel on construit une somme amalgamée de $2k$ sphères S^2 (notées S_0^2, \dots, S_{2k-1}^2) : on recolle par φ_0^0 un voisinage ouvert de ∞ dans S_0^2 à son homologue dans S_1^2 , par φ_1^1 un voisinage ouvert de $0 \in S_1^2$ à son homologue dans S_2^2 , ..., et enfin un voisinage ouvert de 0 dans S_{2k-1}^2 à son homologue dans S_0^2 par $\sigma_{-\lambda} \circ \varphi_0^0$. On désigne par $\mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi}$ la variété analytique complexe *non séparée* de dimension un ainsi obtenue⁽²⁾. Il est clair que λ n'intervient que modulo \mathbb{Z} . On vérifie que deux variétés $\mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi}$ et $\mathcal{F}_{k', \lambda', \varphi'}$ sont analytiquement isomorphes si et seulement si $k=k'$ et si les symboles $(\lambda \bmod \mathbb{Z}, \varphi)$ et $(\lambda' \bmod \mathbb{Z}, \varphi')$ se correspondent par une action du groupe $(\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}^*$ que nous laissons préciser au lecteur.

Considérons par exemple le difféomorphisme $g_{1,0} : g_{1,0}(x) = x/(1 - 2i\pi x)$. La fonction $H(x) = \exp 1/x$ est *constante sur les orbites* de $g_{1,0}$: c'est une « intégrale première » de $g_{1,0}$. Cette fonction sépare les orbites dans des secteurs convenables et identifie l'« espace des orbites » de $g_{1,0}$ à la variété $\mathcal{F}_{1,0,\text{id}}$ construite ci-dessus⁽³⁾ (plus généralement, l'espace des orbites de $\sigma_{p/q} \circ g_{qk,\lambda}$ s'identifie à la variété $\mathcal{F}_{k,(\lambda-mq)/q^2}$, où $mp \equiv 1 \bmod q$).

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'interprétation géométrique de la classification d'Ecalte, Malgrange et Voronin. A un difféomorphisme analytique local résonnant g , d'invariants formels $p/q, k, \lambda$, on associe son « espace d'orbites » \mathcal{F}_g ; il est, en tant que variété analytique complexe, isomorphe à une et une seule des variétés du type que nous venons de décrire, soit $\mathcal{F}_{k,(\lambda-mq)/q^2, \varphi}$ (où m est défini par $mp \equiv 1 \bmod q$). L'*invariant analytique* de g , à *invariants formels fixés*, est alors φ (modulo l'équivalence signalée plus haut). Inversement si $p, q, k \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $\varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$ sont donnés

⁽²⁾ Ou plutôt la *limite projective* de telles variétés, correspondant au *germe* de φ .

⁽³⁾ Avec un abus, concernant l'orbite $\{0\}$, que nous ferons systématiquement.

arbitrairement, il existe un difféomorphisme analytique local g , de partie linéaire $\sigma_{p/q}$ dont l'espace des orbites est analytiquement isomorphe à $\mathcal{F}_{k, \mu, \varphi}$.

Revenons maintenant aux équations différentielles résonnantes. Nos principaux résultats sont les suivants :

1. Classification analytique ⁽⁴⁾

Les difféomorphismes d'holonomie des variétés invariantes de la forme normale $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$ sont respectivement

$$\sigma_{-p/q} \circ g_{qk, \lambda q/p} \quad \text{et} \quad \sigma_{-q/p} \circ g_{pk, (\lambda-1)p/q}$$

pour les feuilles $\{y=0\}$ et $\{x=0\}$.

L'« espace des feuilles » de $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$ s'identifie à la variété

$$\mathcal{F}_{k, (\lambda-mp)/pq, \text{Id}} = \mathcal{F}_{k, (\lambda-1-nq)/pq, \text{Id}} \quad (mp - nq = 1).$$

Nous montrons que *tout* difféomorphisme analytique local *résonnant* de \mathbb{C} à l'origine est l'holonomie de la variété invariante $\{y=0\}$ pour un germe d'équation différentielle analytique résonnante [de la forme (2)]. (Ce résultat a été annoncé récemment par Il'yashenko [15].)

Notre méthode consiste à « synthétiser » une équation $\omega=0$ à partir d'un difféomorphisme local g , de la façon suivante :

Le difféomorphisme g est formellement conjugué à une unique « forme normale » $\sigma_{-p/q} \circ g_{qk, \lambda q/p}$ et admet $\varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$ comme invariant analytique. Son « espace des orbites » est $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{k, (\lambda-mp)/pq, \varphi}$. Il doit coïncider avec l'« espace des feuilles » \mathcal{F}_ω de l'équation $\omega=0$ cherchée. Tout revient donc à « reconstituer » $\omega=0$ à partir de $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}_g$. La méthode employée est voisine de celle que nous avons développée dans [22] pour la synthèse des équations résonnantes dégénérées.

La première étape consiste à associer à l'espace des orbites \mathcal{F}_g un élément γ_g d'un espace de cohomologie $H^1(S^1; \mathbf{D}_\pi^\infty)$, où \mathbf{D}_π^∞ est un faisceau en groupes non abéliens, sur le cercle S^1 . Les sections (locales) de \mathbf{D}_π^∞ sont définies, en utilisant la fibration $\pi(x, y) = x^p y^q$ de \mathbb{C}^2 sur \mathbb{C} , comme des difféomorphismes « sectoriels » (sur des secteurs en $u = x^p y^q$) de la forme $(x, y) \mapsto (x \cdot e^{qf(x, y)}, y \cdot e^{-pf(x, y)})$, donc préservant π , et tangents d'ordre infini à l'identité. Pour construire γ_g , on utilise l'invariant analytique φ de g et l'intégrale première $H = H_{p/q, k, \lambda}$ définie plus haut, de l'équation $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$: les germes de difféomorphismes locaux de S^2 constituant φ s'interprètent naturellement comme des permutations des feuilles de l'équation $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$ dans certains « secteurs » de \mathbb{C}^2 , et la relation $H \circ F = \varphi \circ H$ permet de les « relever » en des sections de \mathbf{D}_π^∞ qui définissent un 1-cocycle F représentant γ_g .

⁽⁴⁾ Ecalle nous a signalé qu'il sait également obtenir cette classification par une tout autre méthode : celle des fonctions résurgentes.

La deuxième étape de la synthèse repose sur un théorème général d'isomorphisme (variante du théorème fondamental de [22], chapitre I, et également basé sur le théorème de Newlander-Nirenberg). Ce théorème permet de considérer le cocycle F représentant $\gamma_g \in H^1(S^1; \mathbf{D}_\pi^\infty)$ comme le cobord d'une 0-cochaîne $\{N_i\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{D}_\pi)$, où $\hat{N} = \hat{N}_i$ (jet infini de N_i en $0 \in \mathbb{C}^2$) est indépendant de i . La forme $\hat{N}^* \omega_{p/q, k, \lambda}$ est alors proportionnelle à la forme holomorphe ω cherchée; le coefficient de proportionnalité est une *unité formelle*, en général divergente, que l'on détermine par un argument de *cohomologie abélienne*.

Notre méthode donne aussi la relation précise qui existe entre les holonomies des deux variétés invariantes d'une équation résonnante non dégénérée. (En particulier chacune de ces holonomies détermine l'autre à conjugaison analytique près.)

Pour achever la classification analytique des équations résonnantes non dégénérées, il suffit ensuite de remarquer que l'holonomie d'une variété invariante *caractérise* l'équation différentielle : à des holonomies analytiquement conjuguées correspondent des équations analytiquement isomorphes.

On constate donc que la classification analytique des germes d'équations différentielles résonnantes non dégénérées s'identifie à celle des difféomorphismes locaux résonnants à l'origine de \mathbb{C} . (Rappelons qu'il n'en est pas de même dans le cas *dégénéré* [22].)

Dans le cas dégénéré la fibration $\pi(x, y) = x$ joue un rôle essentiel. Dans le cas non dégénéré cette fibration est remplacée par $\pi(x, y) = x^p y^q$ qui est singulière à l'origine. Ainsi la géométrie sous-jacente est plus complexe dans ce dernier cas. Les difficultés correspondantes restent cependant mineures et le problème de classification analytique est beaucoup plus facile à résoudre dans le cas non dégénéré : la phase d'« analyse », élémentaire mais laborieuse, qui est indispensable dans le cas dégénéré, devient inutile. (On verra que pour la classification topologique la différence de difficulté des problèmes est encore plus nette.) Ainsi certains résultats qu'il est nécessaire d'établir directement dans un cas apparaissent comme conséquence de la classification dans l'autre; c'est ce qui se passe, par exemple, pour l'existence de « fibrations transverses » (*cf.* 3 *infra*).

2. Sommabilité

Au couple $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, avec $(p, q) = 1$, et au réel $k > 0$, on associe la sous-algèbre de $\mathbb{C}[[x, y]]$ des séries (k, p, q) -sommables

Soit $\rho : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\rho(x, y) = (x^p y^q, x, y)$. On dit que $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ est (k, p, q) -sommable si $f \in \rho^* \mathbb{C}\{x, y\}\{u\}_s$ (avec les notations introduites dans [26]; $\mathbb{C}\{x, y\}$ étant muni de sa topologie DFN naturelle; $s = 1 + 1/k$).

Les transformations normalisantes sont sommables au sens suivant :

Soit $\omega = 0$ une équation différentielle résonnante non dégénérée, d'invariants formels $p/q, k, \lambda$. Tout isomorphisme entre $\omega = 0$ et $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$ s'obtient en composant un difféomorphisme analytique et un difféomorphisme (k, p, q) -sommable de la forme $(x, y) \rightarrow (x \cdot \exp q\hat{g}, y \cdot \exp -p\hat{g})$, où la série $\hat{g} \in \mathbb{C}[[x, y]]$ est (k, p, q) -sommable (en particulier, on retrouve ainsi « sans calcul » un théorème de développement asymptotique de Hukuhara, *cf.* [14], chap. III.9.6⁰, p. 85, 86).

Il est facile de déduire de ce qui précède un résultat de sommabilité pour les holonomies, donc pour les difféomorphismes locaux résonnants. On retrouve ainsi un résultat d'Ecalte [10]. En fait Ecalte a obtenu des résultats de *résurgence* plus précis que des résultats de sommabilité. Ces résultats de *résurgence* sont visiblement liés à la structure particulière des cocycles $F \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{D}_\pi^\infty)$ construits plus haut, et particulièrement à la présence de l'exponentielle $\exp(1/pqku^k)$ dans l'intégrale première H. On devrait pouvoir les retrouver en utilisant la version « à paramètres » de notre « théorème fondamental d'isomorphisme ». Ainsi tous les résultats de *sommabilité* obtenus dans notre article se préciseraient par des résultats de *résurgence* (la *résurgence* se produisant « au-dessus » du « réseau de singularités » $\mathbb{Z}.i - \{0\}$ dans le « plan de Borel » pour $k=1$, et, plus généralement, $\mathbb{Z}.\alpha_1 - \{0\} \cup \dots \cup \mathbb{Z}.\alpha_k - \{0\}$ ($\alpha_p^k = i$) dans le « plan de Leroy »).

3. Fibrations transverses

Toute équation (2) résonnante ($\xi = p/q$) non linéarisable s'écrit, dans un système de coordonnées analytiques convenables :

$$(3) \quad \omega = qx \, dy + py \, (1 + (x^p y^q)^k a(x, y)) \, dx = 0,$$

où a est une unité de $\mathbb{C}\{x, y\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ un invariant formel de ω .

Ce résultat est démontré par Dulac ([32], p. 74-77) de façon élémentaire (méthode des majorantes). Nous l'obtenons ici comme « sous-produit » de notre machinerie. Il signifie que la fibration singulière $\pi(x, y) = x^p y^q$ est *transverse* au feuilletage défini par l'équation, sous la forme (3), en dehors des variétés invariantes.

4. Facteurs intégrants

Toute équation différentielle analytique résonnante non dégénérée $\omega=0$, d'invariants formels $p/q, k, \lambda$ admet un *unique* (à constante multiplicative près) *facteur intégrant formel* \hat{h} (ω/\hat{h} est une forme fermée). Nous montrons que dans un système de coordonnées analytiques convenable ce facteur intégrant s'écrit

$$\hat{h} = xy(x^p y^q)^k \exp \hat{l} \quad \text{où} \quad \hat{l} \in \mathbb{C}[[x, y]]$$

est une série (k, p, q) -sommable. Nous prouvons de plus que \hat{h} suffit à caractériser l'invariant analytique de l'équation $\omega=0$. En particulier si \hat{h} est holomorphe, l'équation $\omega=0$ est analytiquement isomorphe à sa forme normale $\omega_{p/q, k, \lambda}$. On retrouve ainsi un résultat de Cerveau et Mattei [7].

5. Classification topologique et différentiable

Notre machinerie permet aussi de retrouver (facilement pour le premier et un peu moins pour le second) les résultats suivants, respectivement dus à Camacho [4] et Camacho-Sad [6], sur la classification topologique :

(a) Si deux difféomorphismes locaux analytiques résonnants à l'origine de \mathbb{C} sont *formellement conjugués*, ils sont *topologiquement conjugués*.

(b) Si deux germes d'équations différentielles analytiques résonnantes *non dégénérées* sont *formellement isomorphes*, ils sont *topologiquement isomorphes*.

Nous obtenons aussi très facilement la classification différentiable (qui nous a quelque peu surpris !) :

(c) Si deux difféomorphismes locaux analytiques résonnants à l'origine de \mathbb{C} sont \mathcal{C}^1 -*conjugués* (au sens réel), ils sont *analytiquement conjugués*.

(d) Si deux germes d'équations différentielles analytiques résonnantes (dégénérées ou non) sont \mathcal{C}^1 -*isomorphes* (au sens réel), ils sont *analytiquement isomorphes*.

Notons que deux « espaces de feuilles » $\mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi}$ et $\mathcal{F}_{k', \lambda', \varphi'}$ sont \mathcal{C}^∞ -isomorphes (au sens réel) si et seulement si $k = k'$. Un isomorphisme topologique entre les « espaces de feuilles » \mathcal{F}_ω et $\mathcal{F}_{\omega'}$ se « remonte », via une intégrale première et un peu de travail, en un isomorphisme topologique entre les équations $\omega = 0$ et $\omega' = 0$. Par contre, un isomorphisme différentiable entre ces mêmes espaces de feuilles ne se « remonte » pas en un isomorphisme différentiable entre les équations.

L'assertion (b) n'est plus vraie pour les équations résonnantes dégénérées et, comme nous l'avons signalé dans [22], la classification topologique de ces équations est loin d'être triviale. Nous n'avons pas cherché à résoudre ce problème; les méthodes employées dans la troisième partie de cet article devraient permettre de l'aborder⁽⁵⁾.

Nos résultats peuvent être adaptés pour obtenir la classification analytique *réelle* des germes d'équations résonnantes réelles [34]. Il existe sur ce sujet un article de Markhashov [20], dont les résultats nous paraissent incomplets. *Ajouté à la correction des épreuves* (novembre 1983). Nous venons d'avoir connaissance d'un article de P. M. Elizarov et Yu. S. Il'yashenko [33], qui donne une démonstration de la caractérisation des équations différentielles résonnantes par l'holonomie, et annonce aussi notre résultat principal.

SOMMAIRE

	Pages
<i>Chapitre I. Classes de conjugaison des difféomorphismes résonnants</i>	578
1. Difféomorphismes et champs formels	578
2. Classes de conjugaison dans G	579
3. Classes de conjugaison dans F	581
4. Classes de conjugaison des difféomorphismes formels résonnants	581
5. Un rappel cohomologique	582

⁽⁵⁾ On peut conjecturer que la classification topologique des équations s'identifie à celle des « espaces de feuilles correspondants », mais cette dernière reste non évidente.

6. Classification analytique; cas de $g_{1,0}$	584
7. Le cas de $g_{1,\lambda}$	588
8. Le cas de $g_{k,\lambda}$	589
9. Difféomorphismes résonnants généraux	590
10. Espaces des orbites des difféomorphismes résonnants	591
<i>Chapitre II. Classification analytique des équations différentielles résonnantes</i>	593
1. Définitions et rappels	593
2. L'holonomie caractérise l'équation différentielle	595
3. Les formes normales d'équations résonnantes	597
4. Intermède cohomologique	600
5. Synthèse des équations différentielles résonnantes	604
6. Quelques propriétés générales des équations résonnantes	607
7. Équations algébriques et équations analytiques	611
<i>Chapitre III. Classifications topologique et différentiable</i>	612
1. Classification topologique	612
2. Homéomorphismes entre chapelets de sphères	612
3. Démonstration du théorème 1.1	613
4. Démonstration du théorème 1.2	614
5. Classification différentiable	617
6. Remarques sur le cas dégénéré	618

CHAPITRE I

Classes de conjugaison des difféomorphismes résonnants

Nous désignons par F (resp. \hat{F}) le groupe des difféomorphismes locaux analytiques (resp. formels) de \mathbb{C} en 0; un élément $\hat{g} \in \hat{F}$ est dit *résonnant* s'il est de la forme $x' = \hat{g}(x) = vx + \dots$ où v est *racine de l'unité*.

Nous réexposons dans ce chapitre la classification, à conjugaison analytique près, des difféomorphismes analytiques résonnants (Ecalte [9], Malgrange [19], Voronin [30])⁽⁷⁾.

Nous désignons par $G \subset F$ (resp. $\hat{G} \subset \hat{F}$) le sous-groupe formé des difféomorphismes tels que $v=1$, c'est-à-dire *tangents à l'identité*.

1. Difféomorphismes et champs formels

Soit \mathfrak{G} l'algèbre de Lie des champs de vecteurs *formels* de \mathbb{C} en 0, 1-plats, c'est-à-dire de la forme

$$\hat{X} = \hat{\zeta}(x) \frac{d}{dx} \quad \text{où } \hat{\zeta} \in \mathbb{C}[[x]] \quad \text{avec } \hat{\zeta}(0) = \hat{\zeta}'(0) = 0.$$

(7) Cf. également Sherbakov [28].

PROPOSITION 1.1. — *L'application exponentielle $\exp : \hat{\mathfrak{G}} \rightarrow \hat{G}$ est une bijection de $\hat{\mathfrak{G}}$ sur \hat{G} .*

Preuve. — Soit $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{G}}$ et posons $\hat{\varphi}(t, x) = \exp t \hat{X}.x$ ($t \in \mathbb{C}$). On a par définition de $\hat{\varphi}$

$$(1) \quad \hat{\varphi}(t, x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{\varphi}_n(x), \quad \hat{\varphi}_n \in \mathbb{C}[[x]],$$

où $\hat{\varphi}_n$ est la série formelle obtenue en appliquant n fois l'opérateur différentiel \hat{X} à la coordonnée x . Ainsi

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{\xi}, \quad \hat{\varphi}_2 = \hat{\xi} \cdot \hat{\xi}', \quad \hat{\varphi}_3 = \hat{\xi}(\hat{\xi}'^2 + \hat{\xi} \cdot \hat{\xi}''), \text{ etc.}$$

Il est clair que $\hat{\varphi}_n$ est d'ordre $n+1$. La série (1) est donc convergente, pour chaque $t \in \mathbb{C}$, dans $\mathbb{C}[[x]]$, et l'on a par définition

$$(2) \quad \exp \hat{X}.x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\varphi}_n(x).$$

Soit alors

$$\hat{g} \in \hat{G}, \quad \hat{g}(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \hat{X} \in \hat{\mathfrak{G}}, \quad \hat{X}(x) = \left(\sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \right) \frac{d}{dx};$$

l'égalité $\exp \hat{X} = \hat{g}$ équivaut d'après (2) à une suite d'équations

$$a_n = b_n + \text{polynôme en } b_{n-1}, \dots, b_2.$$

Ces équations déterminent uniquement \hat{X} si \hat{g} est donné. ■

Remarques 1.2. — (1) Si g est holomorphe, le champ $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{G}}$ tel que $g = \exp \hat{X}$ (logarithme de g) n'est en général pas holomorphe.

(2) La proposition précédente signifie que tout $\hat{g} \in \hat{G}$ est *plongeable dans un groupe à un paramètre*.

Elle implique que, si $\hat{g} = \exp \hat{X}$ et $\hat{h} = \exp \hat{Y}$ sont deux difféomorphismes formels *commutants*, alors \hat{X} et \hat{Y} commutent eux-mêmes, c'est-à-dire que le crochet de Lie $[\hat{X}, \hat{Y}]$ est nul. De plus, si $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{G}}$ est non nul, on vérifie aisément que $[\hat{X}, \hat{Y}] = 0$ implique $\hat{Y} = a \cdot \hat{X}$, $a \in \mathbb{C}$. Ainsi dans \hat{G} les difféomorphismes commutant avec un élément $g = \exp \hat{X}$ distinct de l'identité sont seulement les éléments du groupe à un paramètre $\exp t \hat{X}$ (« itérés » de \hat{g}).

2. Classes de conjugaison dans \hat{G}

Grâce à la proposition 1.1, les classes de conjugaison dans \hat{G} correspondent aux classes d'équivalence pour l'action adjointe de \hat{G} dans $\hat{\mathfrak{G}}$.

PROPOSITION 2.1. — *Tout champ $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{G}}$ non nul est équivalent à un et un seul des champs suivants (formes normales)*

$$X_{\beta, k, \lambda} = \beta \frac{x^k}{1 + \lambda x^k} x \frac{d}{dx},$$

où $\beta \in \mathbb{C}^*$, $k \geq 1$ est un entier, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve. — On utilise la dualité entre champs et formes différentielles; au champ $\hat{X} = \hat{\zeta} d/dx$ correspond la forme $\hat{\omega} = dx/\hat{\zeta}$ ($\hat{\omega}(\hat{X}) = 1$). En écrivant

$$\hat{\zeta}(x) = \beta \frac{x^{k+1}}{1 + a_1 x + \dots + \lambda x^k + \dots},$$

il vient

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{x^{k+1}} + \frac{a_1}{x^k} + \dots + \frac{\lambda}{x} + \dots \right) dx.$$

Cette forme a un pôle d'ordre $k+1$, de partie principale $1/\beta x^{k+1}$, et pour résidu $2i\pi\lambda/\beta$.

La dualité étant compatible avec l'équivalence des champs et des formes, cette remarque montre que β , k et λ sont des *invariants* sous l'action de \hat{G} .

Montrons maintenant que \hat{X} est isomorphe à $X_{\beta, k, \lambda}$. Ceci revient à chercher $\hat{h} \in \hat{G}$ tel que :

$$\hat{h}^* \left(\frac{1 + \lambda x^k}{\beta x^{k+1}} dx \right) = \frac{1}{\zeta} dx,$$

soit

$$\frac{1 + \lambda \hat{h}^k}{\hat{h}^{k+1}} d\hat{h} = \frac{1 + a_1 x + \dots}{x^{k+1}} dx.$$

On pose

$$\hat{h}(x) = x \hat{\varphi}(x) \quad \text{où } \hat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]] \quad \text{et } \hat{\varphi}(0) = 1,$$

puis $\hat{\varphi}^k = \hat{u}$; un calcul facile montre que l'équation précédente se ramène à

$$\lambda x^k \cdot \hat{u} \cdot \text{Log } \hat{u} + \hat{u} - 1 - \hat{u} \cdot \hat{H} = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \hat{H} &= kx^k \int \frac{a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k+1} x^{k+1} + \dots}{x^{k+1}} dx \\ &= kx^k \left(-\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} + \dots - \frac{a_{k-1}}{x} + a_{k+1}x + \dots \right) \in x\mathbb{C}[[x]]. \end{aligned}$$

Le théorème des fonctions implicites (formel) montre que cette équation en \hat{u} a une (unique) solution telle que $\hat{u}(0) = 1$, d'où le résultat. ■

COROLLAIRE 2.2. — Dans \hat{G} , tout élément distinct de l'identité est conjugué à un et un seul des difféomorphismes $\exp X_{\beta, k, \lambda}$ (formes normales).

Remarques 2.3. — (1) Si $X \in \mathfrak{G}$ (i. e. X est un germe de champ analytique en 0, 1-plat en 0), les calculs précédents montrent qu'il est analytiquement équivalent à l'une des formes normales ci-dessus.

(2) Les invariants β, k, λ d'un élément $\hat{g} \in \hat{G}$ sont déterminés par le polynôme de Taylor de degré $2k+1$ de \hat{g} . Tout difféomorphisme ayant un contact d'ordre k avec l'identité est donc

« déterminé formellement » par son $(2k+1)$ -jet, à conjugaison près; on pourrait donc choisir, pour les champs et les difféomorphismes, des formes normales polynomiales. En fait, celles que nous retenons se prêtent mieux au calcul, car l'équation différentielle $dx/dt = \beta x^{k+1}/(1+\lambda x^k)$ s'intègre par quadrature et admet l'intégrale première évidente $x^{-\lambda} \exp(1/kx^k + \beta t)$. Ajoutons que les difféomorphismes polynomiaux ne sont presque jamais dans un groupe à un paramètre analytique !

(3) La forme normale $X_{\beta, k, \lambda}$ se projette, via l'application ramifiée $x \mapsto x^k$, en la forme normale $X_{\beta, 1, \lambda}$. C'est pourquoi le cas $k=1$ jouera le rôle le plus important dans la suite.

3. Classes de conjugaison dans \hat{F}

Le groupe \hat{F} s'obtient en ajoutant à \hat{G} les homothéties $x \mapsto a \cdot x$ ($a \neq 0$). Le transformé du champ $X_{\beta, k, \lambda}$ par une telle homothétie est

$$X_{\beta', k, \lambda'} \quad \text{où } \beta' = \beta/a^k \text{ et } \lambda' = \lambda/a^k.$$

Ceci montre que tout $\hat{X} \in \hat{G}$ ($\hat{X} \neq 0$) est isomorphe modulo \hat{F} à un unique champ $X_{2i\pi, k, \lambda}$; la raison de la normalisation $\beta = 2i\pi$ apparaîtra au paragraphe 6.

De même, tout $\hat{g} \in \hat{G}$ ($\hat{g} \neq \text{Identité}$) est conjugué, modulo \hat{F} , à un unique $g_{2i\pi, k, \lambda} = \exp X_{2i\pi, k, \lambda}$.

Nous poserons dans la suite

$$X_{k, \lambda} = X_{2i\pi, k, \lambda} \quad \text{et} \quad g_{k, \lambda} = g_{2i\pi, k, \lambda}.$$

Remarquons encore que, d'après 1.2.2, les seuls éléments de \hat{F} commutant avec $g_{k, \lambda}$ sont les éléments du groupe à un paramètre $\exp t X_{k, \lambda}$ ($t \in \mathbb{C}$) et les rotations $x \mapsto e^{2i\pi p/k} \cdot x$; ils constituent un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

4. Classes de conjugaison des difféomorphismes formels résonnants

Soit $\hat{g} \in \hat{F}$, $\hat{g}(x) = vx + \dots$ où $v = e^{2i\pi p/q}$, p et q étant des entiers premiers entre eux, et $q \geq 2$.

PROPOSITION 4.1. — *Le difféomorphisme \hat{g} s'écrit de manière unique $\hat{g} = \hat{\sigma} \circ \hat{n}$ où :*

- (i) $\hat{\sigma} \in \hat{F}$ et $\hat{\sigma}^q = \underbrace{\hat{\sigma} \circ \dots \circ \hat{\sigma}}_{(q \text{ fois})} = \text{Identité}$.
- (ii) $\hat{n} \in \hat{G}$.
- (iii) $\hat{\sigma}$ et \hat{n} commutent.

Preuve. — Soit $\hat{h} = \hat{g}^q$ l'itéré q -ième de \hat{g} ; comme $\hat{h} \in \hat{G}$ on a $\hat{h} = \exp \hat{X}$ où $\hat{X} \in \hat{\mathcal{G}}$. On pose $\hat{n} = \exp \hat{X}/q$; comme \hat{g} et \hat{h} commutent on a $\hat{g}_*(\hat{X}) = \hat{X}$ et \hat{g} commute donc avec \hat{n} .

Il suffit alors de poser $\hat{\sigma} = \hat{g} \circ \hat{n}^{-1}$. L'unicité est évidente car $\hat{n} = \exp \hat{X}/q$ est l'unique élément de \hat{G} tel que $\hat{n}^q = \hat{h}$, eu égard à 1.2.2. ■

Remarquons que, si g est holomorphe ($g \in F$), les difféomorphismes $\hat{\sigma}$ et \hat{n} de sa décomposition ne sont en général pas analytiques. Ceci vient du fait que $h = g^q \in G$ n'admet pas en général de « racine q -ième » dans G .

COROLLAIRE 4.2. — Soit $\hat{g} \in \hat{F}$ un difféomorphisme résonnant, $\hat{g}(x) = e^{2i\pi p/q} x + \dots$. Alors \hat{g} est conjugué, dans \hat{F} , à un et un seul des difféomorphismes suivants (formes normales)

(i) $\sigma(x) = e^{2i\pi p/q} \cdot x$ si $\hat{g}^q = \text{Identité}$.

(ii) $\sigma \circ g_{k,\lambda}$ où $g_{k,\lambda}$ est l'une des formes normales définies en 3, et k est un multiple de q .

Preuve. — (i) est facile à vérifier. Si $\hat{g}^q \neq \text{Identité}$, il suffit de normaliser la « partie nilpotente » \hat{n} de la décomposition canonique $\hat{g} = \hat{\sigma} \circ \hat{n}$; la partie « semi-simple » $\hat{\sigma}$ se trouve alors automatiquement linéarisée, et l'ordre de \hat{n} en 0 est nécessairement un multiple de q , d'après 3. ■

5. Un rappel cohomologique

5.1. LES FAISCEAUX G^k .

Soit S^1 le cercle unité de centre 0 dans \mathbb{C} ; chaque $\alpha \in S^1$ sera identifié au rayon $\mathbb{R}^+ \cdot \alpha$ issu de 0.

Soient $\alpha \in S^1$, θ et R des nombres > 0 ($0 < \theta < \pi$). Soit

$$V = V_\alpha(R, \theta) = \{x \mid |x| \leq R; -\theta + \text{Arg } \alpha \leq \text{Arg } x \leq \theta + \text{Arg } \alpha\}.$$

On désigne comme dans Martinet-Ramis [22] par $\mathcal{A}(V; \mathbb{C})$ l'anneau des fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont holomorphes à l'intérieur de V , et \mathcal{C}^∞ (au sens de Whitney) sur le fermé V . La série de Taylor de f en chaque point du bord de V est alors nécessairement une série formelle complexe; en particulier, la série de Taylor de f en 0 sera notée $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$.

On désigne par \mathcal{A}_α la limite inductive des anneaux précédents lorsque R et θ tendent vers zéro : c'est l'anneau des germes de « développements asymptotiques » en $\alpha \in S^1$.

L'homomorphisme naturel $J: \mathcal{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}[[x]]$ qui à chaque germe associe sa série de Taylor en 0 (son jet d'ordre infini) est surjectif, d'après le théorème de Borel-Ritt [31]. Le noyau de cet homomorphisme est l'idéal des fonctions plates.

Soit $G_\alpha^k \subset \mathcal{A}_\alpha$ l'ensemble des germes $g \in \mathcal{A}_\alpha$ tels que $\hat{g}(x) = x + \sum_{n \geq k+1} a_n x^n$ (k entier ≥ 1). Le théorème des fonctions implicites montre que \mathcal{A}_α^k est un groupe pour la composition des applications. La collection des G_α^k définit un faisceau G^k de groupes (non abéliens !) sur S^1 . Les sections globales de ce faisceau sont les éléments du groupe G (défini au début de ce chapitre) qui sont tangents d'ordre k à l'identité en 0. On pose dans la suite $G = G^1$.

On désigne enfin par G^∞ l'intersection des G^k , $k \geq 1$: c'est le groupe des germes de difféomorphismes « sectoriels » infiniment tangents à l'identité en 0. Le faisceau G^∞ admet pour seule section globale l'identité de \mathbb{C} . On note G_α^∞ la fibre du faisceau G^∞ en $\alpha \in S^1$.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1, \dots, n}$ un bon recouvrement de S^1 (cela signifie que les U_i sont des arcs ouverts connexes, trois à trois disjoints, et $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$).

Considérons une 0-cochaîne $\{g_i\} \in C^0(\mathcal{U}; \mathbf{G})$ telle que $\hat{g}_i = \hat{g}_j$ pour tous i, j . Son cobord $\partial\{g_i\} = \{g_{i,i+1}\} = \{g_i^{-1} \circ g_{i+1}\}$ est clairement un élément de $Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{G}^\infty)$. Désignons par $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{G})$ l'ensemble des 0-cochaînes $\{g_i\}$ telles que $\hat{g}_i = \hat{g}_j$.

THÉORÈME 5.2. (Malgrange [19]). — L'application $\partial : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{G}) \rightarrow Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{G}^\infty)$ est surjective.

On a d'autre part une application naturelle J de $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{G})$ dans $\hat{\mathbf{G}}$ qui associe à chaque cochaîne la série de Taylor en 0 de ses termes. Cette application est surjective (Borel-Ritt). On vérifie trivialement que deux 0-cochaînes $\{g_i\}$ et $\{h_i\}$ ont des cobords *cohomologues* (comme classes à valeurs dans \mathbf{G}^∞ bien sûr !) si et seulement si $\hat{g} = f \circ \hat{h}$ où $f \in \mathbf{G}$ (c'est-à-dire que f est holomorphe). En joignant cette remarque au théorème 5.2 on obtient le résultat suivant :

Les applications $J : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{G}) \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ et $\partial : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{G}) \rightarrow Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{G}^\infty)$ induisent une bijection canonique de $\mathbf{G} \backslash \hat{\mathbf{G}}$ sur $H^1(\mathcal{U}; \mathbf{G}^\infty)$, qui sera aussi notée ∂ .

Remarques. — La condition de bon recouvrement n'intervient pas dans ce qui précède; elle est commode en pratique car alors $Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{G}^\infty) = C^1(\mathcal{U}; \mathbf{G}^\infty)$.

Notons aussi que, d'après le résultat précédent, $H^1(S^1; \mathbf{G}^\infty) = H^1(\mathcal{U}; \mathbf{G}^\infty)$ quel que soit le recouvrement de S^1 considéré.

6. Classification analytique des difféomorphismes résonnants (cas de $g_{1,0}$)

Nous nous proposons ici de mettre en évidence les invariants caractérisant les classes de conjugaison modulo F des difféomorphismes *analytiques* résonnants. La définition de ces invariants dépend de la classe de conjugaison modulo \hat{F} , caractérisée par l'une des formes normales obtenues au paragraphe 4. Nous allons étudier d'abord en détail le cas de la forme normale $g_{1,0}$; les autres cas s'en déduiront par des remarques très simples.

Le difféomorphisme $g = g_{1,0} = \exp X_{1,0}$ s'écrit, après intégration évidente

$$g(x) = x/(1 - 2i\pi x)$$

(en passant à la coordonnée $z = 1/x$, g apparaît comme la translation $z \mapsto z - 2i\pi$). Le point important est que la fonction $H(x) = e^{1/x}$ est *constante sur les orbites* de g ; c'est la forme simple de cette « intégrale première » de g qui explique le choix du coefficient $\beta = 2i\pi$ en 3.

Les « portraits de phase » des orbites de $X_{1,0}$ (correspondant aux temps réels) et du difféomorphisme g ont donc l'allure indiquée ci-contre (fig. 1).

Soient $V_0 = V_{-i}(R, \theta)$ et $V_1 = V_{+i}(R, \theta)$ ($R > 0$ arbitraire, et $\pi/2 < \theta < \pi$) deux secteurs recouvrant le disque D_R de centre 0 et de rayon R . L'application $H : V_0 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ (resp. $H : V_1 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$) est *surjective* et sépare les orbites de g dans V_0 (resp. V_1), c'est-à-dire que deux points $x, x' \in V_0$ (resp. V_1) sont congrus modulo g si et seulement si $H(x) = H(x')$. On traduit ce fait en disant que H identifie les espaces quotients V_0/g et V_1/g (pour les relations d'équivalence induites par g) à la *sphère de Riemann* $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$, les points 0 et $\infty \in S^2$ représentant simultanément l'orbite $\{0\}$ de g (fig. 2). L'espace D_R/g s'obtient alors en recollant deux exemplaires de S^2 le long de voisinages de 0 et ∞ ; en effet, en posant

$V_0 \cap V_1 = V_+ \cup V_-$ où V_+ et V_- ont pour bissectrices respectives \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , on remarque que $H(V_+)$ et $H(V_-)$ sont des voisinages de ∞ et 0 dans S^2 .

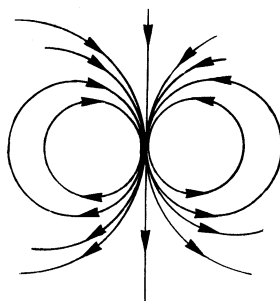


Fig. 1

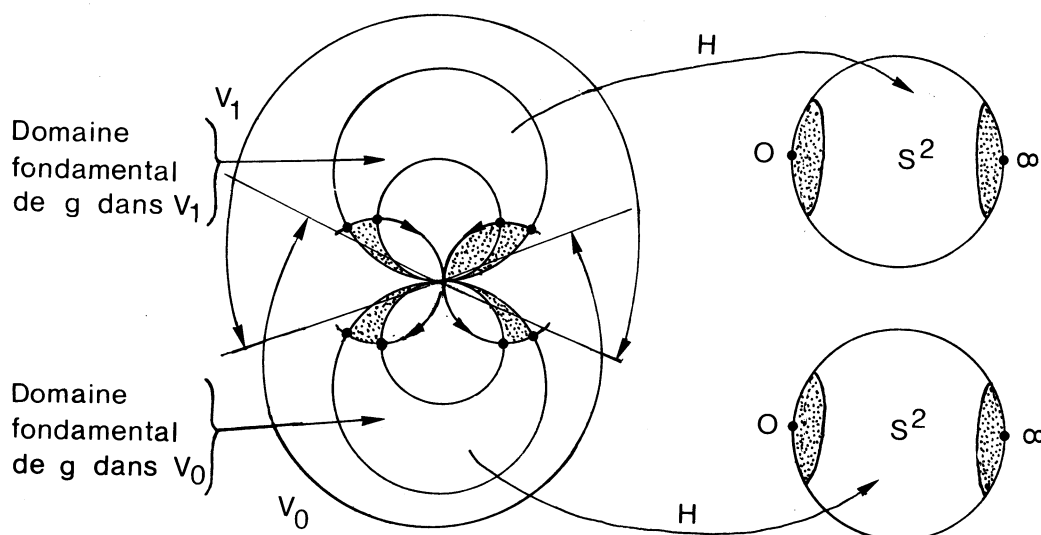


Fig. 2

Maintenant, l'objet important est le sous-faisceau $G(g) \subset G$ formé des éléments de G qui commutent avec g . Étudions la fibre de ce faisceau selon la position du point $\alpha \in S^1$.

(1) $\operatorname{Re} \alpha < 0$. La fonction H définit un élément infiniment plat de \mathcal{A}_α . L'image par H de tout secteur assez petit de bissectrice $\alpha \cdot \mathbb{R}^+$ est un voisinage de $0 \in S^2$, et H est un difféomorphisme local en tout point distinct de 0. Il en résulte que $f \in G_\alpha = G_\alpha^1$ commute avec g si et seulement s'il vérifie une équation

$$(1) \quad H \circ f = \varphi \circ H,$$

où φ est un difféomorphisme analytique local de S^2 en 0. Posant $\varphi(y) = y \cdot e^{a + \gamma(y)}$ (avec $\gamma \in \mathbb{C}\{y\}$ et $\gamma(0) = 0$), et $f(x) = x/(1+r(x))$ (r élément de \mathcal{A}_α), l'équation (1) s'écrit :

$$(1+r(x))/x = 1/x + a + \gamma(e^{1/x}),$$

soit

$$f(x) = x/(1 + ax + x \cdot \gamma(e^{1/x})).$$

Cette expression définit toujours un élément de G_a ; pour $a=0$, c'est-à-dire φ tangent à l'identité en $0 \in S^2$, f appartient en fait à G_a^∞ . Pour $\gamma=0$, c'est-à-dire si φ est une homothétie de centre $0 \in S^2$, f est élément du groupe à un paramètre engendré par $X_{1,0}$ (i.e. est un « itéré » de g).

(2) $\operatorname{Re} \alpha > 0$. La discussion est identique en remplaçant les voisinages de 0 par les voisinages de $\infty \in S^2$.

(3) $\operatorname{Re} \alpha = 0$. Cette fois, l'image par H de tout secteur de bissectrice $\alpha \cdot \mathbb{R}^+$ est la sphère S^2 ; l'équation (1) n'admet de solution $f \in G_a$ que si φ est un difféomorphisme analytique global de S^2 , fixant 0 et ∞ ; ceci montre que $G_a(g)$ se réduit au groupe $\exp t X_{1,0}$.

Au terme de cette description, il apparaît que le sous-faisceau $G^\infty(g) = G(g) \cap G^\infty$ est constant sur chacun des demi-cercles $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$; il y est isomorphe au groupe G lui-même, interprété comme groupe des difféomorphismes locaux de S^2 tangents à l'identité, en 0 et ∞ respectivement. D'autre part, la fibre de $G^\infty(g)$ est réduite à l'identité aux deux points $\alpha = \pm i$.

On en déduit que $H^1(S^1; G^\infty(g)) = C^1(\mathcal{U}; G^\infty(g)) = G \times G = \operatorname{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$, où \mathcal{U} est le (bon) recouvrement de S^1 formé des deux ouverts $U_0 = S^{-1} - \{+i\}$ et $U_1 = S^1 - \{-i\}$, et $\operatorname{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ désigne le groupe des difféomorphismes locaux de S^2 en 0 et ∞ , tangents à l'identité en chacun de ces points.

On pose

$$U_+ = U_{0,1} = \{\operatorname{Re} \alpha > 0\} \quad \text{et} \quad U_- = U_{1,0} = \{\operatorname{Re} \alpha < 0\}.$$

Soient maintenant

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_\infty) \in \operatorname{Diff}_1(S^2; 0, \infty) \quad \text{et} \quad f = (f_-, f_+) \in C^1(\mathcal{U}; G^\infty(g)),$$

le cocycle correspondant à φ . D'après le théorème 5.2, il existe $(h_0, h_1) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; G)$ telle que

$$f_- = h_1^{-1} \circ h_0 \quad \text{sur} \quad U_- \quad \text{et} \quad f_+ = h_0^{-1} \circ h_1 \quad \text{sur} \quad U_+.$$

Le fait que f_+ et f_- commutent avec g donne

$$h_0 \circ g \circ h_0^{-1} = h_1 \circ g \circ h_1^{-1} \quad \text{sur} \quad U_0 \cap U_1.$$

D'après le « principe des singularités inexistantes », ceci signifie que $\hat{h}_0 \circ g \circ \hat{h}_0^{-1}$ ($\hat{h}_0 = \hat{h}_1$) est un difféomorphisme analytique en 0, formellement conjugué à g par définition. Comme h_0 et h_1 sont définis à composition à gauche près par un même difféomorphisme analytique, on a ainsi associé à chaque $\varphi \in \operatorname{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ une classe de conjugaison modulo G (d'invariants formels $k=1, \lambda=0$); nous la noterons $g(\varphi)$ ou $g_{1,0}(\varphi)$.

Les classes $g(\varphi)$ et $g(\varphi')$ sont confondues si et seulement si, comme on le voit aisément, les cocycles f et f' sont cohomologues dans $C^*(\mathcal{U}; G(g))$; compte tenu de la description de $G(g)$, ceci équivaut au fait que φ et $\varphi' \in \operatorname{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ soient conjugués via une homothétie $y \mapsto a \cdot y$ ($a \in \mathbb{C}^*$) de S^2 .

Finalement, nous avons « synthétisé » une infinité de classes de conjugaison analytiques de difféomorphismes formellement conjugués à $g_{1,0}$. Chacune de ces classes est caractérisée par un $\varphi \in \operatorname{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ défini modulo conjugaison par un difféomorphisme global de $(S^2; 0, \infty)$.

Démontrons maintenant que nous avons obtenu *toutes* les classes de conjugaison analytiques formellement conjuguées à $g_{1,0}$. Soit $g' = \hat{h} \circ g \circ \hat{h}^{-1}$, $\hat{h} \in \hat{G}$ et $g' \in G$; par le théorème de Borel-Ritt, choisissons $(h_0, h_1) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; G)$ telle que $\hat{h} = \hat{h}_0 = \hat{h}_1$. Posons $g'_i = h_i^{-1} \circ g' \circ h_i$; on a alors $g'_i = \psi_i \circ g$, où ψ_i est une section de G^∞ sur U_i ($i=0, 1$). Le lemme 6.1 ci-dessous montre que $g'_i = f_i \circ g \circ f_i^{-1}$ où f_i est une section de G^∞ sur U_i . On obtient finalement

$$g' = (h_i \circ f_i) \circ g \circ (h_i \circ f_i)^{-1} \quad \text{sur } U_i$$

et $\partial\{h_i \circ f_i\} \in C^1(\mathcal{U}; G^\infty(g))$ est la classe cherchée. ■

Le résultat de « normalisation sectorielle » ainsi obtenu est dû à Kimura [16] et Ecalte [9].

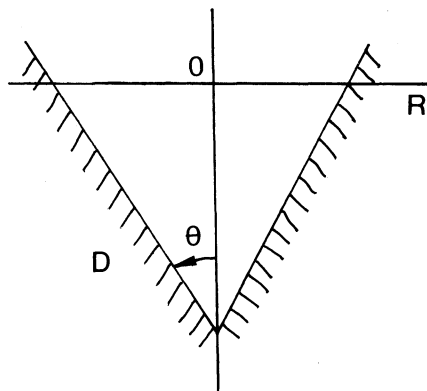
LEMME 6.1. — Soit ψ une section de G^∞ sur $U_1 = S^1 - \{-i\}$. Soit $\psi_p = g^{-p} \circ \psi \circ g^p$, $p \geq 1$, et $h_p = \psi_p \circ \dots \circ \psi_1$. Alors h_p converge, quand $p \rightarrow +\infty$, vers une section h de G^∞ sur U_1 , telle que $\psi \circ g = h^{-1} \circ g \circ h$.

Preuve. — Elle est inspirée de Malgrange [19]. Il est commode de travailler avec la coordonnée $z = 1/x$, et $g(z) = z - 2i\pi$.

Soit :

$$D = \left\{ z \mid -\frac{3\pi}{2} + \theta \leq \text{Arg}(z + i \cdot R) \leq \frac{\pi}{2} - \theta \right\} \quad \text{où } 0 < \theta < \pi \text{ et } R \gg 0.$$

On a $g^p(D) = D_p \subset D$.



La platitude de ψ par rapport à l'identité signifie que l'on a, pour tout entier n et pour R assez grand (dépendant de θ et de n)

$$\sup_{z \in D_p} |\psi(z) - z| \leq A/p^n \quad (A = \text{Cte convenable}).$$

Un calcul immédiat montre alors que

$$\sup_{z \in D_q} |\psi_p(z) - z| \leq A/(p+q)^n.$$

La série $\sum_{p \geq 0} 1/(p+q)^n$ converge (si $n \geq 2$) et sa somme est majorée par C/q^{n-1} où C est une constante.

On en déduit que la suite $h_p = \psi_p \circ \dots \circ \psi_1$ est définie et converge sur D_q pour q assez grand, et a pour limite un difféomorphisme $(n-1)$ -plat par rapport à l'identité. L'argument valant pour tout n et tout θ , la première partie du lemme est établie. La seconde est triviale; on a

$$g \circ h_p = g^{-(p-1)} \circ (\psi \circ g)^p = h_{p-1} \circ \psi \circ g,$$

d'où à la limite $g \circ h = h \circ \psi \circ g$. ■

Remarques 6.2. — (1) On complète ce lemme par un énoncé analogue sur U_0 , mais en posant cette fois $\psi_p = g^p \circ \psi \circ g^{-p}$. En effet, la clé de la preuve est la « contractance » de g sur les secteurs de bissectrice $i. \mathbb{R}^-$ et d'ouverture inférieure à 2π ; sur les secteurs de bissectrice $i. \mathbb{R}^+$ c'est g^{-1} qui est contractante.

(2) Si dans 3.1.1 on suppose que $\psi - \text{Id}$ est non seulement plate, mais Gevrey d'ordre s (c'est-à-dire que $|\psi(x) - x| \leq c \cdot \exp(-\tau/|x|^k)$ où c, τ sont des constantes positives, et $k = 1/(s-1)$), on vérifie facilement que la transformation normalisante h est elle-même Gevrey d'ordre s .

En conclusion, nous avons établi le

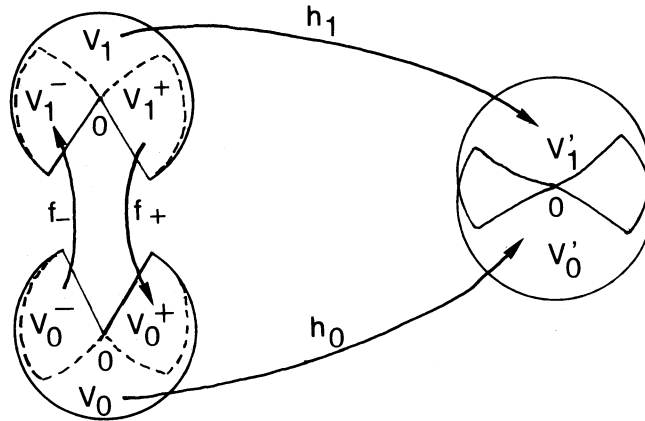
THÉORÈME 6.3. — *Les difféomorphismes $\varphi \in \text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ (modulo conjugaison par un difféomorphisme global de $(S^2; 0, \infty)$) constituent un système complet d'invariants de conjugaison analytique pour les éléments de G admettant $g_{1,0}$ comme forme normale formelle.*

Étant donné un difféomorphisme g' d'invariant φ , il est intéressant de regarder l'espace quotient d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ par l'action de g' . Reprenons les notations antérieures : $g' = h_0 \circ g \circ h_0^{-1} = h_1 \circ g \circ h_1^{-1}$ avec $f_+ = h_0^{-1} \circ h_1$ sur U_+ et $f_- = h_1^{-1} \circ h_0$ sur U_- ; soient V_0 et V_1 deux secteurs définis comme au début de 6 recouvrant un voisinage de 0; posons

$$V'_0 = h_0(V_0) \quad \text{et} \quad V'_1 = h_1(V_1) \quad \text{puis} \quad V_i^+ = \{x \in V_+ \mid h_i(x) \in V'_0 \cap V'_1\}$$

et

$$V_i^- = \{x \in V_- \mid h_i(x) \in V'_0 \cap V'_1\}.$$



Il est maintenant évident que le quotient de $V'_0 \cup V'_1$ par g' s'obtient en recollant la sphère de Riemann $S^2 = H(V_0) = V_0/g$ à la sphère $S^2 = H(V_1) = V_1/g$ par la loi suivante : le voisinage $H(V_0^+)$ de $\infty \in H(V_0)$ est identifié par φ_∞^{-1} au voisinage $H(V_1^+)$ de $\infty \in H(V_1)$, et le voisinage $H(V_0^-)$ de $0 \in H(V_0)$ est identifié à $H(V_1^-)$ par φ_0 . On obtient une variété analytique complexe à une dimension, non séparée, qu'il est naturel de noter $S^2 \bigcup_{\varphi} S^2$.

Exercice 1. — Montrer que $S^2 \bigcup_{\varphi} S^2$ et $S^2 \bigcup_{\varphi'} S^2$ sont isomorphes comme variétés analytiques complexes si et seulement si φ et φ' sont conjugués par un difféomorphisme global de $(S^2; 0, \infty)$.

Exercice 2. — Montrer que g' , d'invariant φ , admet une racine n -ième dans G si et seulement si φ_0 et φ_∞ commutent avec la rotation $y \mapsto e^{2i\pi/n} \cdot y$ de S^2 .

7. Le cas de $g_{1,\lambda}$, $\lambda \neq 0$.

Rappelons que

$$g_{1,\lambda} = \exp X_{1,\lambda} \quad \text{où} \quad X_{1,\lambda} = 2i\pi \frac{x^2}{1+\lambda x} \frac{d}{dx}.$$

L'intégration du champ $X_{1,\lambda}$ conduit à l'égalité

$$(1) \quad g_{1,\lambda} = \Phi^{-1} \circ g_{1,0} \circ \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi(x) = x/(1 - \lambda x \cdot \log x)$$

Cette égalité doit être interprétée comme suit.

La définition du faisceau G sur S^1 introduite au paragraphe 5 peut être généralisée : désignons, avec les notations de 5, par $\mathcal{A}_n(V; \mathbb{C})$ ($n \geq 1$) l'anneau des fonctions holomorphes à l'intérieur de V , et de classe \mathcal{C}^n (toujours au sens de Whitney) sur V . Ces fonctions admettent en 0 un polynôme de Taylor de degré n . Elles permettent de définir le faisceau G_n formé des germes de difféomorphismes (sectoriels) de classe \mathcal{C}^n en 0 (et toujours tangents à l'identité).

Dans (1), Φ représente dans chaque direction $\alpha \in S^1$ un *difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1* défini modulo le choix d'une détermination du logarithme (c'est-à-dire géométriquement modulo composition à gauche par $\exp p\lambda X_{1,0}$, $p \in \mathbb{Z}$, qui commute avec $g_{1,0}$).

Le difféomorphisme $g_{1,\lambda}$ admet l'intégrale première $H(x) = x^{-\lambda} e^{1/x}$. Avec les notations de 6, si l'on choisit sur chacun des secteurs V_0 et V_1 la détermination principale de $\log x$ pour définir $x^{-\lambda}$ (et donc les déterminations des intégrales H_0 et H_1), on voit que le quotient d'un voisinage de 0 par $g_{1,\lambda}$ s'obtient en recollant la sphère $S^2 = H_0(V_0) = V_0/g_1$ à $S^2 = H_1(V_1) = V_1/g_1$, par l'homothétie $y \mapsto e^{-2i\pi\lambda} \cdot y$ le long d'un voisinage de 0 et par l'identité le long d'un voisinage de ∞ .

Maintenant, grâce au difféomorphisme Φ , l'étude des invariants de conjugaison analytique pour les éléments de G formellement conjugués à $g_{1,\lambda}$ se développe comme dans le cas $\lambda = 0$. Il est important de noter que le conjugué par Φ de tout élément du faisceau G^∞ est encore un élément de G^∞ .

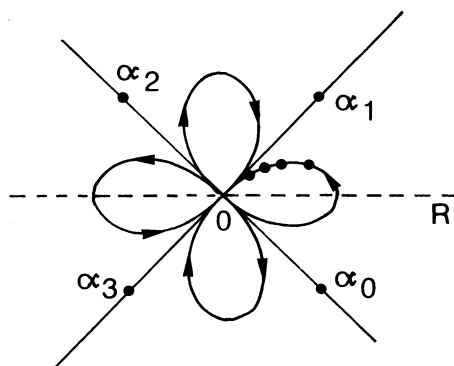
Le théorème 6.3 s'étend donc sans modification au cas de $g_{1,\lambda}$.

Avec les mêmes notations qu'à la fin de 6.3, on montre qu'étant donné $g' \in G$, formellement conjugué à $g_{1,\lambda}$, et d'invariant analytique $\varphi \in \text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$, le quotient d'un voisinage de 0 par g' est la variété $S^2 \cup_{(\lambda, \varphi)} S^2$ définie ainsi : on identifie un voisinage de 0 de la première à un voisinage de 0 de la seconde par l'application $e^{-2i\pi\lambda} \circ \varphi_0$ et un voisinage de ∞ à un voisinage de ∞ par φ_∞^{-1} .

8. Cas de $g_{k,\lambda}$, $k \geq 2$.

On remarque que $\pi \circ g_{k,\lambda} = g_{1,\lambda/k} \circ \pi$ (voir remarques 2.3.3) où $\pi(x) = k \cdot x^k$; le difféomorphisme $g_{k,\lambda}$ admet l'intégrale première $H(x) = x^{-\lambda} \cdot e^{1/kx^k}$.

Le portrait de phase de $g_{k,\lambda}$ a donc l'allure indiquée ci-contre ($k=2$, $\lambda=0$).

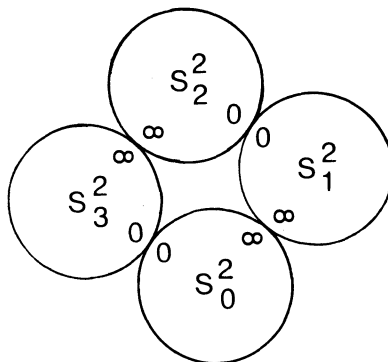


Désignons par $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2k-1} \in S^1$ les points d'arguments $\theta_0 = -\pi/2k$, $\theta_1 = -\pi/2k + \pi/k$, \dots , $\theta_{2k-1} = -\pi/2k + (2k-1)\pi/k$, puis par $V_0, V_1, \dots, V_{2k-1}$ des secteurs de bissectrices respectives $\mathbb{R}^+ \cdot \alpha_0, \dots, \mathbb{R}^+ \cdot \alpha_{2k-1}$ et d'ouverture comprise entre π/k et $2\pi/k$ (de façon que les V_i recouvrent un voisinage de 0).

Définissons des déterminations $H_0, H_1, \dots, H_{2k-1}$ de H sur V_0, \dots, V_{2k-1} en suivant la détermination principale du logarithme. La fonction H_i identifie, comme en 6, le quotient $V_i/g_{k,\lambda}$ à une sphère S^2 , que nous désignons dans la suite par S_i^2 .

Le quotient d'un voisinage de 0 par $g_{k,\lambda}$ se décrit alors ainsi : on recolle *par l'identité* un voisinage de $\infty \in S_0^2$ à son homologue dans S_1^2 , un voisinage de $0 \in S_1^2$ à son homologue dans S_2^2 , etc. et enfin un voisinage de $0 \in S_{2k-1}^2$ à son image dans S_0^2 *par l'homothétie* $y \mapsto e^{-2i\pi\lambda} \cdot y$.

L'étude des invariants de conjugaison analytique des difféomorphismes formellement conjugués à $g_{k,\lambda}$ se déduit aisément du cas $k=1$; il suffit de remarquer que l'application ramifiée π définit une véritable *conjugaison* de $g_{k,\lambda}$ avec $g_{1,\lambda/k}$ sur les secteurs V_i ; de plus, la conjugaison par π induit pour chaque $\alpha \in S^1$ un automorphisme du groupe G_α^∞ (phénomène de « composition rugueuse »).



Désignons par $G(g_{k,\lambda}) \subset G$ le sous-faisceau des germes commutant avec $g_{k,\lambda}$, par $G^\infty(g_{k,\lambda})$ l'intersection du précédent avec G^∞ , et par $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0,1,\dots,2k-1}$, le recouvrement de S^1 formé des arcs ouverts centrés en α_i et d'ouverture π/k .

On déduit de 6 que

$$H^1(S^1; G^\infty(g_{k,\lambda})) = C^1(\mathcal{U}; G^\infty(g_{k,\lambda})) \\ = \text{Diff}_1(S_0^2; 0, \infty) \times \text{Diff}_1(S_2^2; 0, \infty) \times \dots \times \text{Diff}_1(S_{2(k-1)}^2; 0, \infty)$$

(on n'utilise que les sphères d'indice pair).

La seconde identification se fait ainsi; étant donné $\varphi^i = (\varphi_0^i, \varphi_\infty^i) \in \text{Diff}_1(S_{2i}^2; 0, \infty)$ on définit f_-^i (resp. f_+^i) section de $G^\infty(g_{k,\lambda})$ sur $U_{2i-1} \cap U_{2i}$ (resp. $U_{2i} \cap U_{2i+1}$) par $H_{2i} \circ f_-^i = \varphi_0^i \circ H_{2i}$ (resp. $H_{2i} \circ f_+^i = \varphi_\infty^i \circ H_{2i}$).

Chaque k -uplet $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^{k-1})$ définit canoniquement une classe de conjugaison $g_{k,\lambda}(\varphi)$ dans G , dont les éléments sont formellement conjugués à $g_{k,\lambda}$. On obtient ainsi toutes les classes de conjugaison, dans G , d'invariants formels k et λ .

9. Difféomorphismes résonnants généraux

Nous considérons ici les difféomorphismes analytiques locaux formellement conjugués (via \hat{G}) à

$$\sigma \circ g_{qk,\lambda} \quad \text{où } \sigma = e^{2i\pi p/q} \quad \text{et} \quad (p, q) = 1, \quad q \geq 2.$$

Les entiers p, q, k et le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ sont fixés; on désigne par $g_{qk,\lambda}^q$ l'itéré q -ième de $g_{qk,\lambda}$.

PROPOSITION 9.1. — *Les G-classes de conjugaison de ces difféomorphismes sont définies par le sous-ensemble de $C^1(\mathcal{U}; G^\infty(g_{qk,\lambda}^q))$ formé des cochaînes invariantes par $\sigma \circ g_{qk,\lambda}$ (\mathcal{U} désigne le recouvrement en $2qk$ secteurs associé à $g_{qk,\lambda}^q$).*

La démonstration est aisée. Si $\hat{h} \circ \sigma \circ g_{qk,\lambda} \circ \hat{h}^{-1}$ ($\hat{h} \in \hat{G}$) est analytique, son itéré q -ième $\hat{h} \circ g_{qk,\lambda}^q \circ \hat{h}^{-1}$ a pour classe caractéristique un élément $(f) \in C^1(\mathcal{U}; G^\infty(g_{qk,\lambda}^q))$, tel que $\partial \hat{h} = (f)$. On vérifie alors facilement que $\hat{h} \circ \sigma \circ g_{qk,\lambda} \circ \hat{h}^{-1}$ est lui-même analytique si et seulement si (f) commute avec $\sigma \circ g_{qk,\lambda}$.

Remarque 9.2. — L'étude précédente n'évoque pas le cas des difféomorphismes analytiques résonnants, de partie linéaire $e^{2i\pi p/q}$, dont l'itéré q -ième est l'identité. Il est classique qu'un tel difféomorphisme est analytiquement conjugué à la rotation d'angle $2\pi p/q$ (voir par exemple Siegel-Moser [27]) : c'est le théorème du domaine invariant.

10. Espaces des orbites des difféomorphismes résonnants

10.1. CHAPELETS DE SPHÈRES

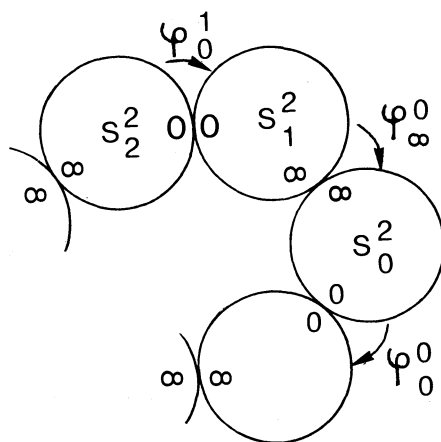
Les invariants de conjugaison analytique des difféomorphismes résonnants ont une interprétation géométrique très naturelle, que nous avons déjà évoquée plus haut en nous intéressant à l'espace des orbites dans un voisinage « infiniment petit » de l'origine.

Introduisons d'abord les objets géométriques qui vont nous servir.

On appellera k -chapelet de sphères ($k \geq 1$) toute variété analytique complexe Σ à une dimension, connexe, *non séparée*, où sont distingués $2k$ points $a_0, a_1, \dots, a_{2k-1}$ appelés *points d'attache*, tels que : pour chaque i (considéré modulo $2k$), a_i et a_{i+1} appartiennent à une unique sphère de Riemann plongée dans Σ . Chaque point a_i appartient ainsi à deux sphères, dites *adjacentes*, qui sont « recollées », dans Σ , le long de voisinages *ouverts* des a_i , par des difféomorphismes analytiques.

Remarquons que si l'on « réduit » les ouverts de recollement (sans changer les difféomorphismes), on obtient une nouvelle variété munie d'une submersion canonique sur la précédente; pour éviter de préciser les domaines de recollement, le puriste associerait à un chapelet Σ un « système projectif de submersions » (indexé par les ouverts de recollement) et prendrait sa limite. Nous nous permettrons l'abus de langage consistant à parler du chapelet Σ défini par des *germes* de difféomorphismes.

Pour « cartographier » Σ , on fait choix d'une des sphères que l'on note S_0^2 , puis on ordonne le couple de ses points d'attache, noté $(0, \infty)$.



On numérote ensuite les sphères de Σ comme indiqué sur la figure. On choisit enfin sur S_0^2 une coordonnée z_0 de façon que ses points d'attache soient successivement $z_0 = 0$ et $z_0 = \infty$.

On détermine maintenant une coordonnée sur chaque sphère S_l^2 ($l = 1, \dots, 2k-1$) en convenant que les difféomorphismes de recollement

$$\varphi_\infty^j : (S_{2j+1}^2, \infty) \rightarrow (S_{2j}^2, \infty) \quad (j=0, \dots, k-1)$$

et

$$\varphi_0^j : (S_{2j}^2, 0) \rightarrow (S_{2j-1}^2, 0) \quad (j=1, \dots, k-1),$$

aient pour dérivée 1 au point d'attache. Le difféomorphisme $\psi_0^0 : (S_0^2, 0) \rightarrow (S_{2k-1}^2, 0)$ s'écrit alors, dans les coordonnées z_0 et z_{2k-1}

$$\psi_0^0 = e^{-2i\pi\lambda} \cdot \varphi_0^0$$

où φ_0^0 est tangent à l'identité, et $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

On a ainsi associé au chapelet Σ , avec les choix faits, un symbole $(\lambda; \varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k)$. La modification des choix correspond à une action du groupe $(\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{C}^*)$ sur ces symboles, que nous n'explicitons pas. Deux k -chapelets sont isomorphes (comme variétés analytiques) si et seulement si ils admettent des symboles équivalents pour cette action.

Nous désignerons par $\mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi}$ le k -chapelet de symbole (λ, φ) .

10.2. — Considérons maintenant l'une des formes normales $g_{k, \lambda} \in G$, et les difféomorphismes analytiques formellement conjugués à $g_{k, \lambda}$ modulo F .

Les choix d'intégrales premières de $g_{k, \lambda}$ sur les secteurs du recouvrement canonique \mathcal{U} défini en 3.3 identifient l'espace des orbites de $g_{k, \lambda}$ au voisinage de 0 au chapelet $\mathcal{F}_{k, \lambda, \text{Id}}$ ⁽⁸⁾. De même, le difféomorphisme $g_{k, \lambda}(\varphi)$ défini en 8 admet pour espace d'orbites le chapelet $\mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi}$.

Maintenant, il est facile de montrer que $g_{k, \lambda}(\varphi)$ et $g_{k, \lambda}(\varphi')$ sont F -conjugués si et seulement si leurs chapelets d'orbites sont isomorphes.

En conclusion, les classes de conjugaison modulo F des difféomorphismes formellement conjugués à $g_{k, \lambda}$ sont en correspondance bijective naturelle avec les classes d'isomorphisme de k -chapelets d'invariant λ fixé. On a ainsi paramétré les classes de conjugaison analytiques par une famille de variétés non séparées.

10.3. — Voyons pour finir le cas des difféomorphismes formellement conjugués à

$$\sigma \circ g_{qk, \lambda} \quad \text{où } \sigma = e^{2i\pi p/q}, \quad (p, q) = 1 \quad \text{et } q \geq 2.$$

Remarquons d'abord que $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$ est un relèvement de $\exp 2i\pi q(u^{k+1})/(1+\lambda u^k) \cdot d/du$, via l'application ramifiée $u = \pi(x) = x^q$. Soit \mathcal{U} le recouvrement canonique de \mathbb{C}_u (en $2k$

⁽⁸⁾ Il y a deux abus dans l'emploi que nous faisons ici du terme « espace d'orbites » : (1) Les points d'attache correspondent tous à l'orbite 0, et devraient donc être identifiés; de plus, leurs voisinages dans le chapelet ne sont pas les images des voisinages de 0 dans \mathbb{C} . (2) Seul le chapelet limite (sur les ouverts de recollement) peut être défini clairement comme espace d'orbites.

secteurs ouverts) relatif à ce difféomorphisme, et posons $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$, de sorte que U_i est constitué de q secteurs disjoints, échangés transitivement par σ et ses itérés.

Soit m un entier tel que $mp = 1 \pmod{q}$, et considérons la fonction

$$H(x) = x^{-m} \cdot u^{(-\lambda + mq)/q^2} \cdot \exp(1/q^2 k u^k),$$

comme définie, sur chaque « multisecteur » \tilde{U}_i , par le choix d'une détermination du logarithme de $u = x^q$ sur U_i . Nous affirmons que deux points de \tilde{U}_i appartiennent à la même orbite de $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$ si et seulement si H y prend la même valeur. Pour cela :

(1) On montre que H est une intégrale première de $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$ sur \tilde{U}_i . En effet, on a $H \circ (\sigma^{-1}) = e^{2i\pi/q} \cdot H$ par définition de m . D'autre part, sur toute composante connexe de \tilde{U}_i il est licite d'écrire $H(x) = x^{-\lambda/q} \cdot \exp(1/q^2 k x^{qk})$; cette fonction est une intégrale première de $g_{qk, \lambda}^q$ et l'on a $H \circ g_{qk, \lambda} = e^{2i\pi/q} \cdot H$. Finalement $H \circ (\sigma^{-1}) = H \circ g_{qk, \lambda}$ sur \tilde{U}_i .

(2) On remarque que $H^q = u^{-\lambda/q^2} \cdot \exp(1/qk u^k)$ est une intégrale première du difféomorphisme de \mathbb{C}_u écrit au début, et que $u \in U_i$ étant fixé, H prend q valeurs distinctes sur $\pi^{-1}(u) \subset \tilde{U}_i$. Ceci signifie que H sépare les orbites de $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$ dans \tilde{U}_i .

La fonction H identifie l'espace des orbites de $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$ sur \tilde{U}_i à une sphère de Riemann, et l'espace des orbites de ce difféomorphisme sur un voisinage de 0 au chapelet

(car H est multipliée par $e^{-2i\pi(\lambda - mq)/q}$ quand on augmente l'argument de u de 2π); comme dans les cas précédents, on fait l'abus consistant à ne pas identifier les points d'attache, qui représentent tous l'orbite 0.

Ceci dit, il est facile de vérifier que toute 1-cochaîne (voir 9) invariante par $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$ est déterminée, via l'intégrale première H précédente, par un élément $\varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$, et que le difféomorphisme analytique associé a pour espace d'orbites $\mathcal{F}_{k, (\lambda - mq)/q^2, \varphi}$.

Comme dans les cas précédents, on vérifie que deux difféomorphismes résonnants, formellement conjugués à $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$, sont analytiquement conjugués modulo F si et seulement si leur chapelets d'orbites sont isomorphes.

Finalement, les difféomorphismes résonnants d'invariants formels p/q , k , λ sont caractérisés, à conjugaison analytique près, par leurs variétés d'orbites.

CHAPITRE II

CLASSIFICATION ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES RÉSONNANTES

1. Définitions et rappels

1.1. DÉFINITION

Nous considérons ici les germes, en $0 \in \mathbb{C}^2$, d'équations différentielles holomorphes :

$$(1) \quad \omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0.$$

Deux équations $\omega=0$ et $\omega'=0$ seront dites analytiquement (resp. formellement) isomorphes s'il existe un germe de difféomorphisme analytique (resp. formel) f de \mathbb{C}^2 en 0 tel que ⁽⁹⁾

$$\omega' \wedge f^*(\omega) = 0.$$

Cette condition exprime essentiellement que les feuilletages locaux \mathcal{F}_ω et $\mathcal{F}_{\omega'}$ définis par ces équations sont isomorphes. Les formes différentielles considérées sont donc toujours définies à multiplication près par une unité (i.e. un germe de fonction analytique non nul en 0).

L'équation $\omega=0$ est dite *résonnante* si

- (i) L'origine est un point singulier de ω ($A=B=0$ en 0).
- (ii) La partie linéaire de ω en 0 (1-jet de ω) se réduit, dans un système de coordonnées convenables, à la forme

$$x dy + \xi y dx \quad \text{où } \xi = p/q \text{ est un nombre rationnel } \geq 0.$$

Le cas $\xi=0$ a déjà été traité en détail dans Martinet-Ramis [22]. Nous nous intéressons ici au cas $\xi>0$. Noter qu'alors le point singulier 0 de ω est nécessairement isolé. Nous nous proposons de donner la classification des équations résonnantes, à isomorphisme près, pour chaque rationnel ξ .

1.2. VARIÉTÉS INVARIANTES ET HOLONOMIES

Soit une équation (1) de partie linéaire $x dy + \xi y dx$, où aucun des nombres ξ et $1/\xi$ n'est un entier négatif (l'équation (1) n'est donc pas ici supposée résonnante). On sait dans ce cas qu'il existe toujours (Poincaré [25], Dulac [8]) un système de coordonnées locales analytiques à l'origine de \mathbb{C}^2 telles que (1) y prenne la forme

$$(2) \quad \omega = x dy + \xi y \cdot a(x, y) dx = 0 \quad \text{où } a(0, 0) = 1.$$

Cette expression s'interprète géométriquement : le feuilletage \mathcal{F}_ω (non singulier sur un voisinage épointé de 0 dans \mathbb{C}^2) admet deux feuilles ($\{x=0\}$ et $\{y=0\}$) dont la fermeture est une variété lisse en 0. Il est aisé de voir que si ni ξ , ni $1/\xi$ n'est entier négatif, il ne peut y avoir d'autre feuille de \mathcal{F}_ω ayant la même propriété; c'est en particulier le cas pour les équations résonnantes que nous considérons. Ces deux feuilles sont appelées *variétés invariantes* de l'équation $\omega=0$ (ou séparatrices).

Nous allons nous intéresser aux *difféomorphismes d'holonomie* de ces deux variétés invariantes. Étant donnée une équation (2), le difféomorphisme d'holonomie de la feuille $\{y=0\}$ (par exemple) est défini ainsi : on considère dans cette feuille un lacet d'indice 1 par rapport au point singulier 0, par exemple $x = \rho e^{i\theta}$, où $\rho>0$ petit est fixé et θ varie de 0 à 2π .

⁽⁹⁾ Si $\xi \neq 1$ on sait (Cerveau-Mattei [7]) que l'équivalence analytique des équations $\omega=0$ et $\omega'=0$ implique l'équivalence analytique des formes ω et ω' .

On relève ce lacet à partir du point (ρ, y_0) ($y_0 \in \mathbb{C}$ voisin de 0) dans la feuille passant par ce point; l'extrémité du chemin relevé est $(\rho, h(y_0))$ où h est le difféomorphisme d'holonomie. Ce difféomorphisme est un élément du groupe F (cf. chapitre I) défini à conjugaison analytique près.

Il est aisé de voir que le difféomorphisme d'holonomie de $\{y=0\}$ pour l'équation (2) a comme partie linéaire $y \mapsto e^{-2i\pi\xi} \cdot y$; celui de $\{x=0\}$ a pour partie linéaire $x \mapsto e^{-2i\pi/\xi} \cdot x$.

Si deux équations différentielles (1) sont analytiquement isomorphes par un difféomorphisme local f , et si le nombre ξ (nécessairement commun aux deux équations) n'est pas rationnel négatif, alors f transporte les variétés invariantes de l'une sur celles de l'autre, et conjugue les holonomies respectives.

Finalement, à toute équation (1), avec $\xi \notin \mathbb{Q}^-$, se trouve associé canoniquement un couple de classes de conjugaison dans le groupe F (de parties linéaires $e^{-2i\pi\xi}$ et $e^{-2i\pi/\xi}$), et ce couple ne dépend que de la classe d'isomorphisme de l'équation. Aux équations résonnantes correspondent des classes de conjugaison de difféomorphismes résonnants.

Nous allons voir (§ 2) qu'à des difféomorphismes d'holonomie conjugués correspondent des équations isomorphes, et qu'en fait *un seul* des difféomorphismes d'holonomie caractérise l'équation différentielle.

Nous verrons ensuite, et c'est la partie non triviale de notre argument, que pour tout $\xi = p/q$ rationnel, et tout difféomorphisme résonnant g de partie linéaire $e^{2i\pi p/q}$, il existe une équation résonnante admettant g comme holonomie d'une de ses variétés invariantes.

Nous aurons ainsi montré que la classification analytique des équations résonnantes ($\xi = p/q > 0$) est équivalente à celle des difféomorphismes résonnants de partie linéaire $e^{2i\pi p/q}$. Rappelons qu'il n'en était pas de même si $\xi = 0$ [22].

2. L'holonomie caractérise l'équation différentielle

Soient deux équations différentielles analytiques $\omega=0$ et $\omega'=0$ de la forme (2) avec $\xi > 0$. Nous allons établir la

PROPOSITION 2.1. — *Si les difféomorphismes d'holonomie h_ω et $h_{\omega'}$ de la feuille $\{y=0\}$ sont analytiquement conjugués, alors les équations différentielles $\omega=0$ et $\omega'=0$ sont isomorphes.*

Ce résultat est peut-être connu des spécialistes, et n'est pas difficile. Faute de référence précise, nous en donnons une démonstration qui nous a été communiquée par R. Moussu; nous l'en remercions (voir aussi Elizarov-Il'yashenko [33]).

Elle utilise un résultat préliminaire (Dulac [32], Camacho-Kuiper-Palis [5], Mattei-Moussu [23]), qui est un léger raffinement du théorème d'existence des variétés invariantes; toute équation de la forme (2) s'écrit, dans un système de coordonnées analytiques convenables

$$(3) \quad \omega = x dy + \xi y(1 + xyb(x, y)) dx = 0.$$

Le point essentiel est maintenant une estimation relative à « l'holonomie radiale » de l'équation (3). Fixons une telle équation, que nous supposons définie au voisinage du polydisque fermé $D \times D$, où D est le disque de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{C} . Soit

$$x \in D^* = D - \{0\}, \quad \text{et} \quad \xi = x/|x| \in \partial D = S^1.$$

Considérons le *chemin radial* γ d'origine x et d'extrémité $\zeta (t \mapsto (1-t)x + t\zeta, t \in [0, 1])$. Soit $y \in D$; on relève le chemin γ sur la feuille de (3) passant par (x, y) . Si $|y|$ est assez petit, le relevé $\tilde{\gamma}$ a pour extrémité $(\zeta, \varphi_x(y))$ et $\varphi_x : (C, 0) \rightarrow (C, 0)$ est un difféomorphisme local analytique.

LEMME 2.2. — *Il existe des constantes r, C_1, C_2 positives non nulles telles que φ_x est défini, pour tout $x \in D^*$, sur le disque $\Delta \subset D$ de centre 0 et de rayon r , et pour tout $y \in \Delta$*

$$C_1 |x|^\xi \cdot |y| \leq |\varphi_x(y)| \leq C_2 |x|^\xi \cdot |y|.$$

Voyons d'abord comment ce lemme permet d'achever la démonstration de la proposition. Soient donc ω et ω' deux formes différentielles vérifiant les hypothèses. On peut les supposer de la forme (3), et telles que les holonomies h_ω et $h_{\omega'}$, calculées sur la droite $x=1$, coïncident. Soit, pour tout $x \in D^*$, δ_x le chemin tracé dans la feuille $\{y=0\}$, joignant x à 1 en suivant d'abord le chemin radial $[x, \zeta]$ ($\zeta = x/|x|$) puis l'arc de cercle $(\zeta, 1)$ (parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique naturel par exemple). Pour $y \in \mathbb{C}$ de module assez petit, relevons δ_x à partir de (x, y) dans la feuille de \mathcal{F}_ω passant (x, y) ; le relevé $\tilde{\delta}_x$ a pour extrémité $(1, y_1)$; \mathcal{F}_ω relevons ensuite $\tilde{\delta}_x^{-1}$ sur la feuille de $\mathcal{F}_{\omega'}$ passant par $(1, y_1)$; le chemin obtenu a pour extrémité (si $|y_1|$ est assez petit) un point $(x, \Phi_x(y))$. On définit ainsi un germe de difféomorphisme analytique Φ le long de $D^* \times \{0\}$ qui transforme \mathcal{F}_ω en $\mathcal{F}_{\omega'}$ par construction. Le lemme 2.2 (appliqué aux deux équations) permet de s'assurer, de manière évidente, qu'il existe deux disques Δ et Δ' de centre 0 dans \mathbb{C} tels que Φ est défini sur $D^* \times \Delta$ et a ses images dans $D^* \times \Delta'$. Ainsi Φ , étant borné sur $D^* \times \Delta$, se prolonge en une application analytique définie sur $D \times \Delta$. Il est trivial de voir que ce prolongement est bien un difféomorphisme de $D \times \Delta$ sur son image, qui conjugue les équations différentielles. ■

2.3. PREUVE DU LEMME 2.2

On fait dans (3) le changement de variables $x = t\zeta$ et $y = |x_0|^\xi t^{-\xi} z$ où $x_0 \in D^*$ est fixé, $\zeta = x_0/|x_0|$, $t \in [|x_0|, 1]$ et $z \in \mathbb{C}$. On obtient l'équation

$$(4) \quad \frac{dz}{dt} + \zeta |x_0|^\xi t^{-\xi} z^2 b(t\zeta, |x_0|^\xi t^{-\xi} z) = 0.$$

On a alors $\varphi_{x_0}(y) = |x_0|^\xi z(1)$ où z est la solution de (4) telle que $z(|x_0|) = y$.

D'autre part, le coefficient de z^2 dans (4) est majoré en module par $B = \sup_{D \times D} |b|$ sur le produit $[|x_0|, 1] \times D$. Un argument élémentaire montre alors que

$$C_1 |z(|x_0|)| \leq |z(1)| \leq C_2 |z(|x_0|)|,$$

pour des constantes convenables $C_1, C_2 > 0$ et $|z(1)| \leq r$, $r > 0$ assez petit (indépendant de x_0). ■

3. Les formes normales d'équations différentielles résonnantes

Nous abordons maintenant le processus qui permettra de réaliser tout difféomorphisme résonnant comme holonomie d'une équation différentielle résonnante.

Les plus simples des équations résonnantes sont évidemment les équations linéaires

$$pydx + qxdy = 0 \quad (\xi = p/q).$$

Elles admettent les intégrales premières $x^p y^q$; les feuilles autres que les variétés invariantes sont homéomorphes au « cylindre » $S^1 \times \mathbb{R}$ et sont, par les projections sur les axes, des revêtements à p ou q feuillets de ceux-ci. Les holonomies sont des rotations périodiques.

Considérons maintenant les équations suivantes

$$\omega_{k,\lambda} = (1 + \lambda u^k)(y dx + x dy) - u^k y dx = (1 + (\lambda - 1)u^k)y dx + (1 + \lambda u^k)x dy = 0$$

($k \geq 1$ est un entier, $\lambda \in \mathbb{C}$, et $u = xy$) qui sont résonnantes, avec $\xi = 1$.

Nous définirons plus généralement

$$\omega_{p/q, k, \lambda} = p(1 + (\lambda - 1)u^k)y dx + q(1 + \lambda u^k)x dy = 0,$$

où $(p, q) = 1$, et $u = x^p y^q$; c'est une équation résonnante, avec $\xi = p/q$.

Remarquons que $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$ est l'image réciproque de $\omega_{k, \lambda} = 0$ par l'application ramifiée $\rho : (x, y) \rightarrow (\zeta = x^p, \eta = y^q)$.

Nous allons décrire les feuilletages définis par ces équations, ainsi que les holonomies des variétés invariantes. Nous utiliserons pour cela systématiquement les notations suivantes.

Nous désignerons toujours par $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ($i = 0, \dots, 2k-1$) le recouvrement du plan complexe \mathbb{C}_u formé des $2k$ secteurs ouverts d'ouverture $2\pi/k$, ayant pour bissectrices les demi-droites définies par $u^k \in i \cdot \mathbb{R}$ (cf. I. 8); la valeur de l'entier $k \geq 1$ sera toujours fixée par le contexte.

Nous noterons $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}_u$ la fibration singulière $\pi(x, y) = x^p \cdot y^q = u$; la valeur des entiers p et q (premiers entre eux) sera toujours fixée par le contexte. On posera enfin $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{C}^2$, où $U_i \in \mathcal{U}$.

Étudions d'abord le cas des formes $\omega_{k, \lambda}$. Elles admettent pour *facteur intégrant holomorphe* (voir Cerveau-Mattei [7]) le monôme xyu^k , c'est-à-dire que la forme méromorphe

$$\frac{\omega_{k, \lambda}}{xyu^k} = \frac{1 + \lambda u^k}{u^{k+1}} - \frac{dx}{x}$$

est *fermée*; il suit que $\omega_{k, \lambda}$ admet l'intégrale première

$$H = H_{k, \lambda} = xu^{-\lambda} \exp(1/ku^k) \quad (u = \pi(x, y) = xy),$$

Cette fonction est bien définie, sur chaque domaine $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$, par le choix de la détermination principale du logarithme de u . Le feuilletage $\omega_{k, \lambda} = 0$ restreint à \tilde{U}_i est caractérisé par H , qui sépare les feuilles; cette fonction identifie l'espace des feuilles dans \tilde{U}_i .

(avec des conventions et abus analogues au cas des difféomorphismes) à la sphère de Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ (0 et ∞ correspondant toujours à la réunion des variétés invariantes). Tout ceci permet de considérer l'espace des feuilles de cette équation dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ comme le *chapelet* $\mathcal{F}_{k, \lambda, \text{Id}}$. D'autre part, les holonomies de $y=0$ et $x=0$ sont caractérisées, sur les transversales $x=1$ et $y=1$, par les intégrales premières $y^{-\lambda} \exp(1/ky^k)$ et $x^{-\lambda+1} \exp(1/kx^k)$ (restrictions de $H_{k, \lambda}$); ce sont donc les formes normales $g_{k, \lambda}$ et $g_{k, \lambda-1}$ respectivement.

Le cas de $\omega_{p/q, k, \lambda}$ est un peu plus compliqué, si $p/q \neq 1$. L'astuce consiste ici à introduire deux entiers m et n tels que

$$mp - nq = 1$$

(m et n sont donc définis modulo un multiple commun de q et p) et à écrire

$$\omega_{p/q, k, \lambda} = (1 + (\lambda - mp)u^k)(py dx + qx dy) + pqu^k(ny dx + mx dy) \quad (u = \pi(x, y) = x^p y^q)$$

d'où

$$\frac{\omega_{p/q, k, \lambda}}{pqxyu^k} = \frac{1 + (\lambda - mp)u^k}{pqu^{k+1}} du + n \frac{dx}{x} + m \frac{dy}{y}.$$

Il apparaît ainsi, avec le facteur intégrant $pqxyu^k$, l'intégrale première

$$H_{p/q, k, \lambda} = x^{-n} y^{-m} u^{-(\lambda - mp)/pq} \exp(1/pqu^k).$$

Cette intégrale est bien définie sur les domaines $\tilde{U}_i \subset \mathbb{C}^2$, toujours par le choix de la détermination principale de $\log u$, et ne dépend pas du choix de m et n .

L'important est de remarquer que

$$H_{p/q, k, \lambda} = H_{k, \lambda} \circ \rho \quad \text{où} \quad H_{k, \lambda} = \zeta u^{-\lambda} \exp(1/ku^k) \quad \text{et} \quad \rho(x, y) = (\zeta = x^p, \eta = y^q).$$

Comme $H_{p/q, k, \lambda}$ prend des valeurs distinctes sur les points d'une même fibre de ρ , on déduit de l'étude antérieure que cette fonction *sépare les feuilles* de $\omega_{p/q, k, \lambda}$ sur \tilde{U}_i , et identifie donc l'espace des feuilles à une sphère; finalement, l'espace des feuilles de $\omega_{p/q, k, \lambda}$ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ est identifié par $H_{p/q, k, \lambda}$ au chapelet $\mathcal{F}_{k, (\lambda - mp)/pq, \text{Id}}$ (l'intégrale première est multipliée par $\exp - 2i\pi(\lambda - mp)/pq$ quand on augmente l'argument de u de 2π). Les restrictions de cette intégrale première aux transversales $x=1$ et $y=1$ montrent enfin que les holonomies des variétés invariantes $y=0$ et $x=0$ sont respectivement

$$e^{-2i\pi p/q} \circ g_{qk, \lambda/q/p} \quad \text{et} \quad e^{-2i\pi q/p} \circ g_{pk, (\lambda-1)p/q} \quad (\text{voir I.10.3}).$$

Finalement, toutes les formes normales (formelles) des difféomorphismes résonnants sont associées à des équations résonnantes simples. C'est pourquoi nous appellerons les équations précédentes *formes normales* d'équations résonnantes. En fait, il est classique que toute équation résonnante (analytique ou formelle) est *formellement* isomorphe à l'un

des modèles précédents (pour une démonstration conceptuelle et rapide, voir Brjuno [3] ou Martinet [21]). Mais nous n'utiliserons pas cette remarque ici.

Les feuilletages précédents sont tous transverses (en dehors des deux variétés invariantes) à la fibration singulière π définie par la partie linéaire de la forme considérée.

La « déviation » par rapport à cette fibration a la nature d'une « singularité essentielle », représentée par le terme exponentiel de l'intégrale première. Ce sont ces remarques, qu'on rapprochera de l'étude du cas résonnant « dégénéré » ([22], chapitre II), qui nous ont amenés à adapter le scénario conçu dans notre article précédent, la *projection* $(x, y) \mapsto x$ étant remplacée ici par la *fibration singulière* π .

Remarque 3.1. — Dans le cas $p=q=1$, les formes normales précédentes ($\omega_{k,\lambda}=0$) sont liées très simplement aux *formes normales* des équations résonnantes *dégénérées* ([22])

$$\bar{\omega}_{k,\lambda} = u^{k+1} dx - (1 + \lambda u^k) x du = 0 \quad (\text{plan des } u, x).$$

On vérifie en effet trivialement que $\omega_{k,\lambda}$ est (à un facteur près) image réciproque de $\bar{\omega}_{k,\lambda}$ par l'éclatement de Hopf ρ ($u=xy$, $x=x$).

Remarquons que l'image par ρ d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2(x, y)$ est un « cône » ($|x| < \varepsilon$, $|u| < \varepsilon|x|$, $\varepsilon > 0$ petit) ayant pour « axe » la variété invariante $\{u=0\}$ de $\bar{\omega}_{k,\lambda}$. L'application ρ induit un isomorphisme de la transversale $\{x=1\}$ à $\{y=0\}$ sur la transversale $\{x=1\}$ à $\{u=0\}$, et conjugue les holonomies des feuilles $\{y=0\}$ (pour $\omega_{k,\lambda}$) et $\{u=0\}$ (pour $\bar{\omega}_{k,\lambda}$).

A l'application ρ correspond une application ρ_* de l'espace des feuilles $\mathcal{F}(\omega_{k,\lambda})$ dans l'espace des feuilles $\mathcal{F}(\bar{\omega}_{k,\lambda})$. Si le premier espace a une structure assez simple (c'est le chapelet $\mathcal{F}_{k,\lambda,\text{id}}$), il n'en est malheureusement pas toujours de même pour le second. Nous nous contenterons ici de quelques indications, pour $k=1$.

L'équation $\bar{\omega}_{1,\lambda}=0$ a pour intégrale première $\bar{H} = xu^{-\lambda} e^{1/u}$. On désigne toujours par $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ le recouvrement d'un voisinage de 0 dans \mathbb{C}_u par deux secteurs de bissectrices $i.\mathbb{R}^-$ et $i.\mathbb{R}^+$. La fonction \bar{H} identifie encore l'espace des feuilles de $\bar{\omega}_{1,\lambda}$ sur $U_i \times \mathbb{C}$ à une sphère $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$. Le recollement des deux sphères décrivant $\mathcal{F}(\bar{\omega}_{1,\lambda})$ n'a cependant plus la même nature que dans les cas précédents : la fonction \bar{H} applique $U_+ \times D$ sur S^2 , quels que soient les rayons du secteur $U_+ \subset \{\operatorname{Re} u > 0\}$ et du disque $D \subset \mathbb{C}_x$ (centré en 0). On est donc amené à considérer $\mathcal{F}(\bar{\omega}_{1,\lambda})$ comme le *quotient d'une sphère de Riemann* ($S^2; 0, \infty$) par le germe d'automorphisme en 0 $\sigma_{-\lambda} : z \mapsto e^{-2i\pi\lambda} \cdot z$.

Si λ n'est pas réel, le quotient par $\sigma_{-\lambda}$ d'un disque ouvert épointé de centre 0 dans \mathbb{C} s'identifie à une courbe elliptique (tore $T^2 = S^1 \times S^1$); on peut dans ce cas imaginer $\mathcal{F}(\bar{\omega}_{1,\lambda})$ comme la variété analytique complexe non séparée obtenue en formant un petit « ourlet torique » à partir d'un voisinage épointé de 0 dans S^2 (la structure complexe du tore étant déterminée par $\lambda \bmod \mathbb{Z}$).

Si λ est réel rationnel ($\lambda = m/n$), le quotient par $\sigma_{-\lambda}$ d'un voisinage de 0 est un « cône » d'angle au sommet $2\pi/n$, et l'on voit encore assez bien la structure de $\mathcal{F}(\bar{\omega}_{1,\lambda})$. Si λ est irrationnel, on a un quotient « pathologique ».

4. Intermède cohomologique

Ce qui suit est une variante du résultat principal du chapitre I de [22].

4.1. DÉFINITIONS.

Soit $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $\pi(x, y) = x^p y^q$, où p et q sont deux entiers positifs premiers entre eux et fixés. On désigne par D_π le groupe formé des difféomorphismes locaux analytiques ϕ à l'origine de \mathbb{C}^2 tels que $\pi \circ \phi = \pi$ (i.e. laissant invariante la fibration singulière π). Ces difféomorphismes s'écrivent commodément sous la forme suivante :

$$x' = x \cdot e^{qf}, \quad y' = y \cdot e^{-pf} \quad \text{où } f \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

Plaçons-nous maintenant sur le produit $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$, où les coordonnées seront notées $u \in \mathbb{C}$ et $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Nous désignons par \mathcal{D}_π le groupe des « déploiements de l'identité de \mathbb{C}^2 » à valeurs dans D_π , c'est-à-dire des difféomorphismes analytiques locaux de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0)$ de la forme :

$$(u, x, y) \mapsto (u, x' = x \cdot e^{qf}, y' = y \cdot e^{-pf}).$$

où f est cette fois un germe de fonction analytique des trois variables u, x, y , telle que $f(0, x, y) = 0$.

Par analogie avec I. 5, introduisons le *faisceau d'anneaux* \mathcal{B} sur S^1 (cercle unité de la droite des u) défini ainsi; pour tout $\alpha \in S^1$, un élément de \mathcal{B}_α est le germe en $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ d'une fonction $f : V \times \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ (où $V = V_\alpha(R, \theta) \subset \mathbb{C}$ est un secteur fermé de bissectrice $\alpha \cdot \mathbb{R}^+$, d'ouverture 2θ et de rayon R ; $\Delta \subset \mathbb{C}^2$ est un polydisque fermé de centre 0) qui est analytique sur l'intérieur de $V \times \Delta$, et \mathcal{C}^∞ au sens de Whitney sur le fermé $V \times \Delta$. Le *jet infini* d'une telle fonction le long de $\{0\} \times \mathbb{C}^2$ s'interprète alors de façon naturelle comme une série formelle en u

$$\hat{f} = \sum_{n \geq 0} f_n(x, y) u^n,$$

dont les coefficients f_n sont *analytiques* sur un *même* polydisque de \mathbb{C}^2 centré en 0 (le domaine de convergence des coefficients dépend évidemment de la série considérée). Nous désignerons par $\hat{\mathcal{B}}$ l'anneau formé de ces séries.

Le théorème de Borel-Ritt avec paramètres (voir [22], chapitre I, théorème 1.1.7) permet de représenter chaque élément de $\hat{\mathcal{B}}$ par une section de \mathcal{B} sur tout secteur. On appellera *plates* les sections f de \mathcal{B} dont le jet infini \hat{f} est nul.

On définit maintenant le faisceau de groupes \mathcal{D}_π sur S^1 dont la fibre en $\alpha \in S^1$ est constituée des transformations

$$(u, x, y) \mapsto (u, x' = x \cdot e^{qf}, y' = y \cdot e^{-pf}),$$

où $f \in \mathcal{B}_\alpha$ et $f(0, x, y) = 0$; on désignera par $\mathcal{D}_\pi^\infty \subset \mathcal{D}_\pi$ le sous-faisceau défini par la condition supplémentaire que f soit *plate*; ce faisceau est donc formé des difféomorphismes au-dessus d'un secteur de \mathbb{C} , laissant π invariante, et infiniment tangents à l'identité le long de $\{0\} \times \mathbb{C}^2$.

Soit maintenant $\mathcal{U} = \{U_i\} \ i=1, \dots, n$, un (bon) recouvrement de S^1 .

THÉORÈME 4.2. — *L'application cobord de Čech $\partial : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi) \rightarrow Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi^\infty)$ est surjective.*

Cet énoncé est analogue au théorème 5.2 du chapitre I. Rappelons que l'espace $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi)$ est l'ensemble des 0-cochaînes $\{\varphi_i\}$ telles que $\hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}_j$ pour tous i, j .

Preuve. — Elle consiste pour l'essentiel à reprendre celle du théorème 2.3.1 de [22]. On associe au 1-cocycle $\psi = \{\psi_{i, i+1}\} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi^\infty)$ le germe de variété analytique complexe $M = M_\psi$ de dimension 3 obtenu en recollant les produits $(U_i, 0) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ par les applications de transition $\psi_{i, i+1}$; le fait qu'on obtienne ainsi un germe de variété analytique complexe est un cas particulier des résultats de [22] (I.2.2).

Les deux fonctions $(u, x, y) \mapsto u$ et $\pi : (u, x, y) \mapsto x^p y^q$ étant *invariantes* par les applications de transition, définissent des fonctions que nous désignons par les mêmes noms

$$u : (M, 0) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \pi : (M, 0) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ces fonctions sont *holomorphes* par définition de la structure complexe de M .

Le point important est maintenant que π s'écrit *formellement* $\pi = \hat{X}^p \hat{Y}^q$ où (u, \hat{X}, \hat{Y}) est un système de coordonnées formelles à l'origine de M . On en déduit que $\pi = X^p Y^q$ où (u, X, Y) est un système de coordonnées locales analytiques de M en 0; ceci résulte immédiatement, par exemple, du théorème des fonctions implicites de M. Artin [2]; un argument plus élémentaire consiste à utiliser les résultats généraux sur les complétés des algèbres analytiques (*voir* par exemple C. Houzel [13], théorème 3).

De telles coordonnées étant choisies, on montre comme dans [22], I.2.3.1 que, en composant les coordonnées X, Y par les injections canoniques $(U_i, 0) \times (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow M$, on obtient des sections $\varphi_i = (X_i, Y_i)$ de \mathcal{D}_π sur U_i telles que $\partial\varphi = \psi$. ■

Remarque 4.3. — Désignons par $\hat{\mathcal{D}}_\pi$ le groupe des transformations (formelles) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ en 0, de la forme : $(u, x, y) \mapsto (u, x' = x \cdot e^{qf}, y' = y \cdot e^{-pf})$ où $f \in \hat{\mathcal{B}}$.

L'application naturelle $J : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi) \rightarrow \hat{\mathcal{D}}_\pi$ qui à chaque cochaîne associe le jet infini de ses termes le long de $\{0\} \times \mathbb{C}^2$ est surjective (Borel-Ritt). Comme en I.2, il est aisé de voir que les deux surjections J et ∂ induisent une *bijection canonique* de $\mathcal{D}_\pi \setminus \hat{\mathcal{D}}_\pi$ sur $H^1(S^1; \mathcal{D}_\pi^\infty)$.

Remarque 4.4. — Si le 1-cocycle $\psi \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi^\infty)$ est Gevrey d'ordre s (resp. k -sommable où $s = 1 + 1/k$) les résultats de [22], I.4 et I.5 montrent immédiatement que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi)$ telle que $\partial\varphi = \psi$, le jet infini $J\varphi = \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{D}}_\pi$ est Gevrey d'ordre s (resp. k -sommable).

4.5. Conséquences

Désignons par \hat{B} le sous-anneau de $\mathbb{C}[[x, y]]$ des séries formelles

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{m, n \geq 0} a_{m, n} x^m y^n,$$

telles que les séries

$$A_n = \sum_{m \geq 0} a_{m,n} x^m \quad \text{et} \quad B_m = \sum_{n \geq 0} a_{m,n} y^n,$$

convergent sur un même disque de rayon strictement positif, indépendant de m et $n \in \mathbb{N}$ (mais dépendant de \hat{f}).

On a $\hat{B} = \mathbb{C}\{x\}[[y]] \cap \mathbb{C}\{y\}[[x]]$, et \hat{B} s'identifie clairement au noyau de l'application surjective⁽¹⁰⁾

$$\mathbb{C}\{x\}[[y]] \oplus \mathbb{C}\{y\}[[x]] \rightarrow \mathbb{C}[[x, y]],$$

$$(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi - \psi.$$

Chaque élément \hat{f} de \hat{B} définit un champ Taylorien formellement holomorphe, au sens de Łojasiewicz [17] sur le germe d'ensemble analytique $(E, 0)$ (où $E = \{x=0\} \cup \{y=0\}$). En effet écrire \hat{f} sous la forme $\sum_{n \geq 0} A_n(x) y^n$ revient à l'interpréter comme champ Taylorien le long de l'axe des x au voisinage de $(0, 0)$; de même l'écriture $\sum_{m \geq 0} B_m(y) x^m$ fournit un champ Taylorien le long de l'axe des y , et les deux champs coïncident à l'origine. Inversement tout champ Taylorien formellement holomorphe le long d'un voisinage de $(0, 0)$ dans E est défini par un élément de \hat{B} .

On vérifie sans difficulté que \hat{B} s'identifie au complété formel de $\mathbb{C}\{x, y\}$ le long de E .

Munissant \mathbb{C}^2 de la fibration singulière $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi(x, y) = x^p y^q$ (où p et q sont des entiers strictement positifs premiers entre eux), introduite précédemment, on peut donner une autre interprétation de \hat{B} . On note $\rho : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'application $\rho(x, y) = (\pi(x, y), x, y)$, et on pose

$$\hat{B}_\pi = \rho^* \mathbb{C}\{x, y\}[[u]] \quad (\text{où } (u, x, y) \in \mathbb{C}^3).$$

L'espace vectoriel topologique F étant du type Fréchet, ou DFN, on a défini dans [22], les espaces de séries formelles Gevrey d'ordre $s > 0$: $F[[u]]_s$, et de séries formelles k -sommables : $F\{u\}_s$ ($k = 1/(s-1)$). L'espace $\mathbb{C}\{x, y\}$ étant muni de sa topologie DFN naturelle, on pose, pour $s > 1$

$$\hat{B}_{\pi,s} = \rho^* \mathbb{C}\{x, y\}[[u]]_s \quad \text{et} \quad B_{\pi,s} = \rho^* \mathbb{C}\{x, y\}\{u\}_s.$$

On vérifie facilement que $\hat{B}_\pi = \hat{B}$ est indépendant du choix de π , tandis que $\hat{B}_{\pi,s}$ et $B_{\pi,s}$ en dépendent. (L'ordre de Gevrey au sens classique [18] de $\hat{f} \in \hat{B}_{\pi,s}$ en (x, y) est $(s+p+q-1)/(p+q)$.) On dira que $\hat{f} \in \hat{B}_{\pi,s}$ (resp. $\hat{f} \in B_{\pi,s}$) est une série formelle (s, p, q) -Gevrey [resp. (k, pq) -sommable]. (La notion de resommabilité à plusieurs variables reste peu claire. Celle que nous venons d'introduire est adaptée aux applications que nous développerons plus loin.)

Désignons par $\hat{D}_\pi \supset D_\pi$ le groupe des difféomorphismes (formels) de \mathbb{C}^n en 0 de la forme :

$$(x, y) \rightarrow (x \cdot e^{qf}, y \cdot e^{-pf}) \quad \text{où } \hat{f} \in \hat{B} = \hat{B}_\pi.$$

⁽¹⁰⁾ Dans la notation $\mathbb{C}\{x\}[[y]]$, $\mathbb{C}\{x\}$ est pris avec sa topologie DFN (comme dans [22]).

Les éléments de \hat{D}_π se conçoivent comme les *difféomorphismes analytiques du voisinage infinitésimal* (d'ordre infini) de $(E, 0)$ dans \mathbb{C}^2 *préservant la fibration* π .

Introduisons maintenant le faisceau d'anneaux B_π sur S^1 défini comme suit; pour chaque $\alpha \in S^1$, un élément de la fibre $B_{\pi, \alpha}$ est le germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ d'une fonction f

$$\tilde{U} \cap \Delta \rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{où } \tilde{U} = \pi^{-1}(U) \quad \text{et} \quad U = U(R, \theta) \subset \mathbb{C})$$

est un secteur fermé de bissectrice $\alpha \cdot \mathbb{R}^+$, d'ouverture 2θ et de rayon R ; Δ est un polydisque fermé de centre 0 dans \mathbb{C}^2 , d'intérieur non vide) qui est analytique à l'intérieur de $\tilde{U} \cap \Delta$, et \mathcal{C}^∞ au sens de Whitney sur le fermé $\tilde{U} \cap \Delta$. Le jet infini d'une telle fonction le long de $E \cap \Delta$ est un élément $\hat{f} \in B_\pi$.

Désignons par D_π le faisceau de groupes sur S^1 dont la fibre en $\alpha \in S^1$ est constituée des transformations $(x, y) \rightarrow (x \cdot e^{af}, y \cdot e^{-af})$, où $f \in B_{\pi, \alpha}$, et enfin par $D_\pi^\infty \subset D_\pi$ le sous-faisceau des transformations infiniment tangentes à l'identité le long de $(E, 0)$, c'est-à-dire telles que $f \in B_{\pi, \alpha}$ soit *plate* sur $(E, 0)$ ($\hat{f} = 0$).

Nous allons déduire du théorème 4.2 le :

COROLLAIRE 4.6. — Soit \mathcal{U} un (bon) recouvrement ouvert de S^1 . L'application cobord de Cech $\partial : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; D_\pi) \rightarrow Z^1(\mathcal{U}; D_\pi^\infty)$ est surjective.

Preuve. — Ce résultat est essentiellement la *restriction* du théorème 4.2 à la surface $\Sigma \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ graphe de la fonction $u = \pi(x, y) = x^p y^q$, identifiée à \mathbb{C}^2 par le choix des coordonnées x, y .

Soit donc $\{\psi_{i, i+1}\} \in Z^1(\mathcal{U}; D_\pi^\infty)$, où $\psi_{i, i+1}$ est défini par une fonction $f_{i, i+1}$ section de B_π sur $U_{i, i+1}$, *plate* le long de $(E, 0)$. Cette fonction s'interprète comme une fonction définie sur un voisinage de 0 dans $\Sigma \cap (U_{i, i+1} \times \mathbb{C}^2)$. D'après le lemme 4.7 établi ci-dessous, elle se prolonge à un voisinage de 0 dans $U_{i, i+1} \times \mathbb{C}^2$ en une fonction $\tilde{f}_{i, i+1}$ *section plate* du faisceau \mathcal{B} sur $U_{i, i+1}$ (considéré ici comme germe de secteur de \mathbb{C} , et non comme ouvert de S^1). Les fonctions $\tilde{f}_{i, i+1}$ définissent un 1-cocycle $\{\tilde{\psi}_{i, i+1}\} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi^\infty)$, et le théorème 4.2 fournit une 0-cochaîne $\{\tilde{\varphi}_i\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi)$ telle que $\partial \tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$. Par définition la transformation $\tilde{\varphi}_i$ laisse $\Sigma \cap (U_i \times \mathbb{C}^2)$ invariant, et induit donc un germe de difféomorphisme φ_i de $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{C}^2 \approx \Sigma$. Il est immédiat de vérifier que φ_i est bien une section de D_π sur U_i . ■

LEMME 4.7. — Soit f une section plate de B_π sur U , considérée comme définie sur un voisinage de 0 dans $\Sigma \cap (U \times \mathbb{C})$. Alors f admet un prolongement \tilde{f} *section plate* de \mathcal{B} sur U .

Preuve. — Soit $\bar{V} \subset U$ un sous-secteur fermé; la fonction f est définie, pour $u \in \bar{V}$ et $\|u\|$ assez petit, sur l'ensemble $\Omega_u = \Sigma_u \cap \Omega = \{(x, y)/\pi(x, y) = u\} \cap \Omega$, où Ω est un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^2 . La *platitudo* signifie que $\|f_u(x, y)\| = 0(\|u\|^n)$ pour tout n . Considérons alors dans \mathbb{C}^2 des coordonnées (ξ, η) telles que la fonction soit *régulière* en η (par exemple $x = \xi + \eta, y = \eta$). Pour tout $u \neq 0$ et ξ assez petits, l'équation $\pi(\xi, \eta) = u$ admet r racines distinctes ($r = p + q$ si $u = x^p y^q$) η_1, \dots, η_r telles que les points $(\xi, \eta_1), \dots, (\xi, \eta_r)$ soient dans Ω . Définissons alors $\tilde{f}_u(\xi, \eta)$ comme le polynôme de degré $r-1$ en tel que $f_u(\xi, \eta_i) = \tilde{f}_u(\xi, \eta_i)$ (interpolation de Lagrange). Les propriétés élémentaires de

l'interpolation permettent de montrer que la fonction \tilde{f} ainsi définie satisfait à toutes les conditions requises.

Le lecteur constatera que pour les applications aux équations différentielles traitées plus loin le lemme 4.7 est en fait inutile : le prolongement cherché étant donné par le choix d'une *intégrale première*.

Remarque 4.8. — La version *sommable* du théorème 4.2 (voir remarque 4.4) a un analogue dans le présent contexte : la restriction à la sous-variété Σ des 1-cocycles *k-sommables* définit les 1-cocycles (k, p, q) -sommables; ils sont les cobords d'éléments (k, p, q) -sommables de \hat{D}_π , c'est-à-dire de la forme $(x, y) \mapsto (x' = x \cdot e^{q\hat{f}}, y' = y \cdot e^{-p\hat{f}})$ où $\hat{f} \in B_{\pi, s}$ ($s = 1 + 1/k$; voir 4.5).

Il reste à mentionner que nous ferons aussi usage, dans la suite, des applications « cobord abélien » :

$$\partial_{ab} : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{B}) \rightarrow Z_{ab}^1(\mathcal{U}; \mathcal{B}^\infty) \quad \text{et} \quad \partial_{ab} : \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; B_\pi) \rightarrow Z_{ab}^1(\mathcal{U}; B_\pi^\wedge),$$

définies par $\partial_{ab}\{f_i\} = \{f_{ij} = f_i - f_j\}$. Ces applications sont également *surjectives* (voir [22], théorème 3.2.1, p. 82), et induisent des surjections entre cochaînes sommables et cocycles sommables.

5. Synthèse des équations différentielles résonnantes

Considérons d'abord, pour simplifier l'exposé, l'équation

$$\omega = \omega_{1, \lambda} = (1 + \lambda u) du - uy dx = 0 \quad (u = xy = \pi(x, y)),$$

son intégrale première $H = H_{1, \lambda} = xu^{-\lambda} \exp 1/u$, et son espace de feuilles $\mathcal{F}_{1, \lambda, \text{Id}}$. Les notations sont celles des paragraphes 3 et 4.

La première remarque importante est que H (resp. $1/H$) est une section *plate* du faisceau B_π sur $U_{1, 0} = U_-$ (resp. sur $U_{0, 1} = U_+$).

Soit maintenant $\varphi = (\varphi_0, \varphi_\infty) \in \text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$, définissant la variété $\mathcal{F}_{1, \lambda, \varphi}$. Par analogie avec ce que nous avons fait pour les difféomorphismes, nous allons construire une équation holomorphe admettant $\mathcal{F}_{1, \lambda, \varphi}$ comme espace de feuilles. Pour cela, on commence par associer à φ le 1-cocycle $F \in Z^1(\mathcal{U}; D_\pi^\infty)$ défini par

$$H \circ F_- = \varphi_0 \circ H \quad \text{et} \quad H \circ F_+ = \varphi_\infty \circ H \quad (\text{résumé en } H \circ F = \varphi \circ H).$$

Ces définitions sont consistantes. — En effet, si l'on pose, comme en I.6

$$\varphi_0(z) = ze^{\gamma_0(z)} \quad \text{et} \quad \varphi_\infty(z) = ze^{\gamma_\infty(1/z)},$$

où z est une coordonnée sur $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ et γ_0, γ_∞ sont des germes de fonctions holomorphes nuls en 0, on obtient

$$F_- \begin{cases} x' = x \exp \gamma_0(H) \\ y' = y \exp -\gamma_0(H) \end{cases}, \quad F_+ \begin{cases} x' = x \exp \gamma_\infty(1/H) \\ y' = y \exp -\gamma_\infty(1/H) \end{cases}.$$

qui sont bien des sections de D_π^∞ sur U_- et U_+ . ■

Les difféomorphismes F_- et F_+ s'interprètent d'ailleurs très simplement : ils réalisent, sur \tilde{U}_- et \tilde{U}_+ dans \mathbb{C}^2 , les *permutations de feuilles* définies par φ_0 et φ_∞ , en préservant la fibration π .

PROPOSITION 5.1. — On a

$F^* \omega = e^s \cdot \omega$ où $s = (s_-, s_+) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi)$ est le 1-cocycle plat défini par :

$$e^{s_-} = 1 + H \circ \gamma'_0(H) \quad \text{et} \quad e^{s_+} = 1 + H^{-1} \circ \gamma'_\infty(H^{-1}).$$

Preuve. — On écrit $\omega = u^2 dH/H$, et en remarquant que F préserve u il vient

$$F^* \omega = u^2 F^* \frac{dH}{H} = u^2 \frac{d\varphi(H)}{\varphi(H)},$$

d'où le résultat. ■

Remarque 5.2. — Les transformations précédentes sont les seules sections locales de \mathbf{D}_π qui laissent invariant le feuilletage $\omega = 0$, si on leur impose la restriction d'induire l'identité sur $E = \pi^{-1}(0)$. En particulier, il n'existe aucun germe de section de \mathbf{D}_π^∞ aux points $\pm i \in S^1$ préservant ce feuilletage. Tout ceci se voit comme en I.6.

Remarquons encore que les cocycles $F \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{D}_\pi^\infty)$ et $s \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi^\infty)$ sont (1.1.1)-sommables, au sens de 4.8.

THÉORÈME 5.3. — Soit $N \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{D}_\pi)$ telle que $\partial N = F$, et soit $\hat{N} \in \hat{\mathbf{D}}_\pi$ le difféomorphisme formel associé. Alors :

(i) La forme $(\hat{N}^{-1})^* \omega$ est semi-holomorphe, et l'on a plus précisément : $e^{\hat{l}} \circ (\hat{N}^{-1})^* \omega = \omega(\varphi)$ où $\hat{l} \in \hat{\mathbf{B}}$ est telle que $\partial_{ab} \hat{l} = s \circ N^{-1}$, et $\omega(\varphi)$ est une forme holomorphe.

(ii) La forme $\omega(\varphi)$ admet $u^2 \cdot e^{\hat{l}}$ comme facteur intégrant, c'est-à-dire que $\omega(\varphi)/u^2 \cdot e^{\hat{l}}$ est une forme fermée.

(iii) L'espace des feuilles de l'équation $\omega(\varphi) = 0$ est la variété $\mathcal{F}_{1, \lambda, \varphi}$ et les holonomies de ses variétés invariantes sont $g_{1, \lambda}(\varphi)$ et $g_{1, \lambda-1}(\varphi)$.

Preuve. — (i) Considérons les formes différentielles $\alpha_i = (N_i^{-1})^* \omega$, $i = 0, 1$, et $\hat{\alpha} = (\hat{N}^{-1})^* \omega$. Les coefficients de α_i sont des sections de \mathbf{B}_π sur U_i , et $\hat{\alpha}$ est le jet infini de α_i le long de $E = \pi^{-1}(0)$.

Les égalités $F_- = N_1^{-1} \circ N_0$ et $F_+ = N_0^{-1} \circ N_1$ donnent alors, compte tenu de 5.2

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{s_-} \circ N_0^{-1} \alpha_0 \quad \text{sur } U_-, \\ \alpha_0 &= e^{s_+} \circ N_1^{-1} \alpha_1 \quad \text{sur } U_+. \end{aligned}$$

Les fonctions $s_- \circ N_0^{-1}$ et $s_+ \circ N_1^{-1}$ sont encore des sections plates de \mathbf{B}_π sur U_- et U_+ ; elles définissent donc un 1-cocycle $s \circ N^{-1} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi^\infty)$; soit :

$$1 = (1_0, 1_1) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi) \quad \text{telle que} \quad \partial_{ab} 1 = s \circ N^{-1};$$

on a par construction

$$e^{l_0} \circ \alpha_0 = e^{l_1} \circ \alpha_1 \quad \text{sur } U_- \quad \text{et} \quad U_+.$$

Il en résulte que $e^{\hat{l}} \circ (\hat{N}^{-1})^* \omega$ est bien holomorphe, où \hat{l} est le jet infini de la cochaîne \hat{l} le long de $E = \pi^{-1}(0)$.

(ii) Est alors évident, en remarquant que

$$\omega(\varphi)/u^2 e^{\hat{l}} = (\hat{N}^{-1})^* \frac{\omega}{u^2} \quad (\hat{N} \text{ laisse } u \text{ invariant})$$

et que ω/u^2 est fermée.

(iii) Le fait que l'espace des feuilles de $\omega(\varphi)$ est $\mathcal{F}_{1, \lambda, \varphi}$ est évident par construction. Les holonomies des variétés invariantes de $\omega(\varphi)$ sont *formellement conjuguées* à celles de ω , car \hat{N} est un difféomorphisme du *voisinage infinitésimal* de $E = \pi^{-1}(0)$ (induisant l'identité sur E) qui conjugue les équations $\omega = 0$ et $\omega(\varphi) = 0$. Les espaces d'orbites des difféomorphismes d'holonomie étant toujours identiques à l'espace des feuilles de la forme considérée⁽¹¹⁾, les résultats du chapitre I complètent la démonstration. ■

5.4. CAS GÉNÉRAL

Nous considérons maintenant l'équation

$$\omega = \omega_{p/q, k, \lambda} = p(1 + (\lambda - 1)u^k) y dx + q(1 + \lambda u^k) x dy = 0 \quad (u = \pi(x, y) = x^p y^q),$$

son intégrale première

$$H = H_{p/q, k, \lambda} = x^{-n} y^{-m} u^{-(\lambda - mp)/pq} \exp(1/pqku^k) \quad (mp - nq = 1)$$

et son espace de feuilles $\mathcal{F}_{k, (\lambda - mp)/pq, \text{Id}}$.

Les fonctions H et $1/H$ définissent alternativement des *sections plates* du faisceau \mathbf{B}_π sur les secteurs

$$U_{i, -} = U_{2i-1} \cap U_{2i} \quad \text{et} \quad U_{i, +} = U_{2i} \cap U_{2i+1},$$

relatifs au recouvrement canonique \mathcal{U} de \mathbb{C}_u (en $2k$ secteurs).

Étant alors donné $\varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$, on lui associe, comme dans l'étude précédente, un 1-cocycle $F \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi^\infty)$ dont les éléments *préservent* le feuilletage $\omega = 0$ sur le domaine \tilde{U} correspondant. Si l'on pose

$$F \begin{cases} x' = x e^{qf} \\ y' = y e^{-pf} \end{cases} \quad \text{où } f \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi^\infty),$$

le cocycle f est défini par les mêmes formules que dans le cas particulier déjà traité. Mais on obtient ensuite

$$F^* \omega = e^{(q-p)f} \circ e^s \omega,$$

où $s \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi^\infty)$ est défini par les mêmes formules qu'en 5.1. Le cas $p/q \neq 1$ se distingue donc du cas $p/q = 1$ (i. e. $p = q = 1$).

⁽¹¹⁾ Si τ est un germe de transversale à la séparatrice (en un point distinct de l'origine et suffisamment voisin de celle-ci), le saturé du germe τ par le feuilletage \mathcal{F}_ω est un germe de voisinage de 0 privé de la trace de l'autre séparatrice (cf. démonstration du lemme 2.2).

THÉOREME 5.5. — (i) Si $\partial\hat{N}=F(\hat{N}\in\hat{D}_n)$, la forme $e^{\hat{f}}(\hat{N}^{-1})^*\omega=\omega(\varphi)$ est holomorphe, où $\hat{f}\in\hat{B}$ est telle que $\partial_{ab}\hat{f}=((q-p)f+s)\circ N^{-1}$.

(ii) La série formelle $pqxy^k e^{\hat{f}}$, où $\hat{f}\in\hat{B}$ est telle que $\partial_{ab}\hat{f}=s\circ N^{-1}$, est un facteur intégrant de $\omega(\varphi)$.

(iii) L'équation $\omega(\varphi)=0$ a pour espace de feuilles le chapelet $\mathcal{F}_{k,(\lambda-mp)/pq,\varphi}$ et ses difféomorphismes d'holonomie sont les difféomorphismes formellement conjugués à

$$e^{-2i\pi p/q}\circ g_{qk,\lambda/pq}, \quad e^{-2i\pi q/p}\circ g_{pk,(\lambda-1)/pq}$$

et de même classe caractéristique φ .

La démonstration est la même que celle du théorème 5.3.

5.6. CONCLUSION. — Au terme de cette étude, il est donc établi que *tout difféomorphisme résonnant est l'holonomie d'une équation différentielle résonnante, et que la classification des équations équivaut à celle des difféomorphismes*.

La relation entre les difféomorphismes d'holonomie des deux variétés invariantes d'une même équation est aussi élucidée par la discussion précédente.

Faisons encore une remarque générale sur la classification formelle des équations.

Soit $\omega=0$ une équation résonnante analytique. Si elle est formellement isomorphe à sa partie linéaire, il est bien connu (voir par exemple Brjuno [3]) qu'elle lui est analytiquement isomorphe. Sinon, elle est, d'après les résultats précédents, formellement isomorphe à l'une des équations $\omega_{p/q,k,\lambda}=0$. Il est facile d'autre part de vérifier que ces équations sont toutes formellement distinctes. On en déduit qu'elles classifient les équations résonnantes du point de vue formel (avec les formes linéaires $py\,dx+qx\,dy$). On notera en particulier que deux équations résonnantes formellement isomorphes ont des holonomies formellement conjuguées. Ces derniers résultats, ici conséquences du théorème 5.5, sont en fait de nature élémentaire et « bien connus ».

Par contre, nous allons voir que la méthode employée dans notre « synthèse » fournit quelques renseignements plus précis, et peut-être dignes d'intérêt, sur la structure des équations résonnantes.

6. Quelques propriétés générales des équations analytiques résonnantes

THÉOREME 6.1. — Soit $\omega=p(1+a)y\,dx+qx\,dy=0$ ($a\in\mathbb{C}\setminus\{x,y\}$ nulle en 0) une équation analytique résonnante. Alors, ou bien ω est analytiquement isomorphe à sa partie linéaire, ou bien il existe un système de coordonnées analytiques dans lequel

$$(1) \quad \omega=p(1+u^k b(x,y))y\,dx+qx\,dy=0,$$

où $b\in\mathbb{C}\setminus\{x,y\}$ est une unité, $u=x^p y^q$ et k est un entier ≥ 1 .

Ce résultat est établi par Dulac ([32], p. 74-77), en utilisant une méthode élémentaire de séries majorantes. Dulac démontre d'ailleurs un théorème plus précis : quel que soit l'entier positif n , il existe des coordonnées analytiques pour lesquelles on a, dans (1)

$$b(x,y)=P(u)+x^r y^s c(x,y),$$

où P est un polynôme de degré n , et $r > pn$, $s > qn$.

Le théorème 6.1 est aussi conséquence immédiate des résultats de 5 : si ω est non linéarisable, elle est isomorphe à une (et une seule) des équations $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$, et celles-ci sont évidemment, par construction, de la forme (1). (Remarquer que l'entier k (invariant formel) est déterminé par un jet d'ordre fini de ω en 0.)

Il s'interprète géométriquement ainsi : *tout feuilletage analytique résonnant est transverse, en dehors de ses variétés invariantes, à une fibration analytique π dont le type topologique est défini par la partie linéaire du feuilletage.*

De même que dans ([22], I.2.2.3, p. 99), on peut montrer que toutes les « fibrations transverses » à une équation donnée $\omega = 0$ sont *équivalentes*, c'est-à-dire qu'elles s'échangent par un difféomorphisme analytique local de \mathbb{C}^2 qui laisse invariante chaque feuille de ω .

On est alors conduit naturellement à considérer le problème suivant :

Les entiers p, q étant fixés, classifier les équations (1) modulo le groupe D_π des difféomorphismes locaux de \mathbb{C}^2 laissant π invariante (ou, un peu plus généralement, modulo le groupe D'_π des difféomorphismes compatibles avec π , c'est-à-dire relèvements d'un difféomorphisme local de \mathbb{C}_u). On a des problèmes analogues avec les groupes de difféomorphismes *formels* \hat{D}_π et \hat{D}'_π .

La classification modulo \hat{D}'_π conduit aux formes normales $\omega_{p/q, k, \lambda}$ déjà vues. Il y a mieux : on a le même résultat avec le groupe $\overline{D}'_\pi \subset \hat{D}'_\pi$ constitué par les difféomorphismes formels qui relèvent un difféomorphisme local *analytique* de \mathbb{C}_u .

La classification modulo \hat{D}_π conduit à des formes normales polynomiales comportant k invariants formels (au lieu du seul λ précédent). De plus, le groupe \hat{D}_π opère *simplement* sur l'ensemble des équations (1).

Nous ne démontrerons pas ces assertions, qui n'offrent pas de difficulté (voir [34]).

Pour l'intelligence de la suite, il est utile de garder en mémoire le fait suivant :

Étant donnée une équation analytique (1), on peut toujours, quitte à modifier u par un difféomorphisme analytique de \mathbb{C}_u , supposer que cette équation est isomorphe à $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$ par un unique élément de \hat{D}_π , que nous nommerons transformation normalisante de ω .

Remarque. — Les équations résonnantes

$$(1) \quad \omega_{p/q, k, \lambda}(\varphi) = p(1 + u^k b(x, y)) y dx + qx dy = 0$$

synthétisées au paragraphe 5, avec $\varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$ donné, ont la propriété plus « globale » suivante : la fonction analytique b est *définie et holomorphe* sur un voisinage ouvert de $E = \{xy = 0\}$ (effilé éventuellement à l'infini).

Ceci tient au fait que le cocycle $F \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{D}_\pi^\infty)$ associé à φ est défini le long de tout l'ensemble E , et le corollaire 4.6 peut être appliqué sur des domaines arbitrairement grands.

Il en résulte le fait suivant. Soit $T : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de difféomorphisme analytique résonnant; il existe une équation différentielle holomorphe $\omega = 0$ sur un voisinage de $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2$ telle que :

- (i) ω admet pour seul point singulier $(0, 0)$;

- (ii) $\mathbb{C} \times \{0\}$ est une feuille de l'équation;
- (iii) L'holonomie de $\mathbb{C} \times \{0\}$, calculée sur la transversale $\{x=1\}$, est égale à T.

Pour le démontrer, on considère l'équation (1) construite avec les invariants $p/q, k, \lambda$ et φ de T. Soit T' l'holonomie de cette équation, calculée sur la transversale $\{x=1\}$; par construction, T' est analytiquement conjuguée à T, par un germe de difféomorphisme $y \mapsto y' = h(y)$. On applique alors à (1) le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (x, h(y))$, et l'on obtient l'équation cherchée.

Cette construction est à rapprocher des remarques de Arnold ([1], chap. 5, H, p. 192-193).

6.2. Sommabilité des transformations normalisantes et des facteurs intégrants

Revenons à la synthèse faite en 5.4 et 5.5. Étant donné $\varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$, nous lui avons canoniquement associé des cocycles $F \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{D}_\pi^\infty)$, f et $s \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi^\infty)$, puis des séries formelles $\hat{N} : (x, y) \mapsto (x \cdot e^{q\hat{g}}, y \cdot e^{-p\hat{g}})$, \hat{f} et \hat{s} ; ces trois séries (\hat{g} , \hat{f} et \hat{s}) sont des éléments de l'anneau \hat{B} (cf. 4.5). Nous affirmons qu'elles sont (k, p, q) -sommables.

Pour le voir, on considère l'intégrale première $H = x^{-n} \cdot y^{-m} \cdot u^{-(\lambda - mp)/pq} e^{1/pqku^k}$ comme définissant (en utilisant alternativement H et $1/H$) un élément de $Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{B}^\infty)$, en la traitant comme une fonction \bar{H} des trois variables indépendantes u, x, y . Ce cocycle est k -sommable, car \bar{H} (ou $1/\bar{H}$) est à décroissance exponentielle sur des secteurs d'ouverture π/k (cf. [22], p. 89-91).

Grace à φ , on définit alors un cocycle $\bar{F} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi^\infty)$ qui induit F par l'homomorphisme canonique $\mathcal{D}_\pi^\infty \rightarrow \mathcal{D}_\pi^\infty$. Le cocycle \bar{F} est lui-même k -sommable, et de la forme $(u, x, y) \mapsto (u, x \cdot e^{q\bar{f}}, y \cdot e^{-p\bar{f}})$ où $\bar{f} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{B}^\infty)$ est k -sommable et donne f par restriction de \mathcal{B} à \mathbf{B}_π . On définit de même un cocycle k -sommable $\bar{s} \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{B}^\infty)$ dont la restriction à \mathbf{B}_π est s .

On applique ensuite à \bar{F} le théorème 4.2, pour obtenir une 0-cochaine $\bar{N} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{D}_\pi)$ et son jet infini $\hat{\bar{N}} \in \hat{\mathcal{D}}_\pi$, qui induisent respectivement N et \hat{N} ; en posant $\bar{N}(u, x, y) = (u, x \cdot e^{q\bar{g}}, y \cdot e^{-p\bar{g}})$, la série \bar{g} est donc k -sommable, et sa restriction \hat{g} est bien (k, p, q) -sommable. Le cocycle $((q-p)\bar{f} + \bar{s}) \circ \bar{N}^{-1}$ est aussi k -sommable; on en déduit, par un argument évident analogue au précédent, la (k, p, q) -sommabilité de \hat{f} et de \hat{s} .

Finalement, dans l'égalité $\omega(\varphi) = e^{\hat{f}} \cdot (\hat{N}^{-1})^* \omega$ du théorème 5.5, les séries \hat{g} (définissant \hat{N}) et \hat{f} sont éléments de l'anneau $\mathbb{C}\{x, y\}\{x^p y^q\}_s$ ($s = 1 + 1/k$). Il en est de même du facteur intégrant $pqx y u^k e^{\hat{f}}$ de $\omega(\varphi)$. Remarquons ici que $\omega(\varphi)$ admet un unique facteur intégrant, à une constante multiplicative près; en effet, le rapport de deux facteurs intégrants (formels) d'une forme différentielle est une intégrale première méromorphe (formelle) de cette forme, donc, pour $\omega_{p/q, k, \lambda}$ comme pour $\omega_{p/q, k, \lambda}$, une constante.

Du point de vue de l'analyse des formes différentielles résonnantes, nous pouvons reformuler les observations précédentes dans le

THÉORÈME 6.2.1. — Soit $\omega = p(1 + u^k a) y dx + q x dy = 0$ ($a \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est une unité) une équation analytique résonnante, formellement isomorphe modulo $\hat{\mathbf{D}}_\pi$ à $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$.

- (1) L'unique transformation $\hat{N} \in \hat{D}_\pi$ normalisant ω est (k, p, q) -sommable.
- (2) On a $\omega = e^{\hat{I}} \cdot (\hat{N}^{-1})^* \omega_{p/q, k, \lambda}$ où \hat{I} est une série (k, p, q) -sommable.
- (3) Le facteur intégrant formel de ω s'écrit $pqxyu^k e^{\hat{I}}$ où \hat{I} est une série (k, p, q) -sommable.

De ce théorème on déduit immédiatement la qk -sommabilité (resp. pk -sommabilité) des transformations normalisant les holonomies des deux variétés invariantes de ω .

D'où le :

THÉORÈME 6.2.2. — Soit g un difféomorphisme analytique résonnant de partie linéaire $\sigma = e^{2i\pi p/q}$, formellement conjugué à $\sigma \circ g_{qk, \lambda}$. Alors le difféomorphisme de conjugaison est qk -sommable.

Ce dernier résultat a déjà été établi par Ecalle par une méthode différente (fonctions résurgentes) qui fournit d'ailleurs beaucoup plus de précisions sur le difféomorphisme de conjugaison ([9], [10]).

Nous allons terminer par une observation amusante relative aux *facteurs intégrants* des formes résonnantes, qui explique et généralise un résultat récent de Cerveau-Mattei [7].

PROPOSITION 6.2.3. — La connaissance du facteur intégrant formel ⁽¹²⁾ d'une équation résonnante (formellement isomorphe à $\omega_{p/q, k, \lambda}$) suffit à déterminer les invariants analytiques de cette équation.

Preuve. — Désignons par \hat{I} le facteur intégrant de la forme ω considérée. Il s'écrit $\hat{I} = pqxyu^k e^{\hat{I}}$ dans un système de coordonnées analytiques convenables, avec $u = x^p y^q$ [cf. théorème 5.5 (ii)]. De la troisième partie du théorème 6.2.1 il résulte que \hat{I} est (k, p, q) -sommable, et admet (voir [22], p. 90) une *somme canonique* $l = \{l_i\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi)$ (la fibration π est ici définie par u). On a donc, en reprenant les notations du théorème 5.5

$$(1) \quad \partial l = s \circ N^{-1},$$

où $N \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbf{D}_\pi)$ est la cochaîne normalisant ω , et $s \in Z^1(\mathcal{U}; \mathbf{B}_\pi^\infty)$.

L'équation (1) détermine les inconnues s et N . Supposons en effet que s, N et \bar{s}, \bar{N} en soient deux solutions. On aura $s \circ N^{-1} \circ \bar{N} = \bar{s}$; remarquons maintenant que s et \bar{s} sont, sur chaque secteur $U_i \cap U_{i+1}$, des *intégrales premières non triviales* de $\omega_{p/q, k, \lambda}$ (il suffit de se reporter à la proposition 5.1); on en déduit que, pour tout i , $N_i^{-1} \circ \bar{N}_i$ préserve le feuilletage $\omega_{p/q, k, \lambda} = 0$ sur un ouvert de \bar{U}_i , et donc sur \bar{U}_i tout entier par *prolongement analytique*. D'après la remarque 5.2 (étendue aux formes normales générales), ceci implique que $N_i = \bar{N}_i$. ■

Remarque. — La démonstration qui précède montre en particulier que si une forme résonnante, formellement isomorphe à $\omega_{p/q, k, \lambda}$, admet un facteur intégrant *holomorphe*, alors elle est *analytiquement* isomorphe à sa forme normale. C'est là le résultat de Cerveau-Mattei évoqué plus haut.

⁽¹²⁾ Dans des coordonnées analytiques bien entendu !

6.3. Comparaison avec le cas des équations résonnantes dégénérées

Nous poursuivons ici les considérations de la remarque 3.1.

Soit une équation analytique dégénérée

$$\bar{\omega} = u^{k+1} dx - (1 + a(u, x)) x du = 0 \quad (\text{où } a(0, 0) = 0).$$

Son image inverse par l'éclatement de Hopf $\rho(u=xy)$ définit un germe d'équation résonnante *non dégénérée*, de partie linéaire $x dy + y dx$. Si $\varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$ est l'invariant analytique de $\bar{\omega}$, on rappelle (cf. [22], p. 106) que les germes φ_∞^i sont définis par des translations de \mathbb{C} . Il est par ailleurs évident que φ est aussi l'invariant analytique de $\rho^* \bar{\omega}$.

Ceci montre qu'en général une équation analytique, formellement isomorphe à $\bar{\omega}_{k, \lambda}$, ne pourra pas être obtenue par éclatement de Hopf (et changement éventuel de coordonnées analytique) à partir d'une équation dégénérée (formellement isomorphe à $\bar{\omega}_{k, \lambda}$); une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que sa classe caractéristique φ ait la propriété : les germes φ_∞^i sont des translations.

Au passage, faisons une remarque sur l'espace des feuilles d'une équation dégénérée (nous considérons pour simplifier le cas où $k=1$)

$$\bar{\omega} = u^2 dx - (1 + a(u, x)) du = 0.$$

Supposons que $\bar{\omega}$ est formellement isomorphe à $\bar{\omega}_{1, \lambda}$ et a pour invariant analytique $\varphi \in \text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$; posons $\varphi_0 = \psi$ et $\varphi_\infty = \tau$ (translation de \mathbb{C}). Une étude analogue à celle de 3.1 montre que l'espace $\mathcal{F}(\bar{\omega})$ des feuilles se s'obtient ainsi :

(a) Si $\tau \neq \text{Id}$, soit $0' = \tau(0) \in S^2$. Alors $\mathcal{F}(\bar{\omega})$ est la variété non séparée à une dimension définie, en partant de S^2 , par l'identification d'un voisinage ouvert de $0'$ à un voisinage de 0 via l'application $\sigma_{-\lambda} \cdot \psi$.

(b) Si $\tau = \text{Id}$, $\mathcal{F}(\bar{\omega})$ est l'espace quotient de S^2 par le germe en 0 du difféomorphisme $\sigma_{-\lambda} \circ \psi$.

7. Équations algébriques et équations analytiques

Nous dirons qu'une équation $\omega=0$ est algébrique si elle peut s'écrire (à un facteur inversible près) $A dx + B dy = 0$, avec $A, B \in \mathbb{C}[x, y]$. Notre description des « espaces de modules » d'équations résonnantes et des considérations « du type de Baire » permettent de penser qu'il y a « assez peu » de germes d'équations résonnantes contenant une équation algébrique dans leur orbite analytique. La conjecture suivante (sur laquelle D. Cerveau a attiré notre attention) paraît donc raisonnable.

CONJECTURE. — *Il existe un germe d'équation analytique résonnante $\omega=0$ qui n'est analytiquement équivalent à aucun germe d'équation algébrique.*

CHAPITRE III

CLASSIFICATIONS TOPOLOGIQUE ET DIFFÉRENTIABLE
DES DIFFÉOMORPHISMES ET ÉQUATIONS RÉSONNANTS

1. Classification topologique

Nous donnons ici une autre démonstration des résultats de Camacho [4] et Camacho-Sad [6], concernant respectivement les difféomorphismes et équations résonnantes.

Deux difféomorphismes analytiques locaux de \mathbb{C} en 0 (resp. deux équations holomorphes à l'origine de \mathbb{C}^2) sont dits \mathcal{C}^0 -conjugués (resp. \mathcal{C}^0 -isomorphes) s'il existe un *homéomorphisme* local de \mathbb{C} (resp. \mathbb{C}^2) qui conjugue ces deux difféomorphismes (resp. transforme toute feuille d'une équation en une feuille de l'autre).

THÉORÈME 1.1. — *Deux difféomorphismes analytiques locaux résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ sont \mathcal{C}^0 -conjugués dès qu'ils le sont formellement.*

THÉORÈME 1.2. — *Soient deux germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ d'équations différentielles analytiques résonnantes, de partie linéaire $py dx + qx dy$ ($p, q \neq 0$). S'ils sont formellement isomorphes, ils sont \mathcal{C}^0 -isomorphes.*

Compte tenu des résultats du chapitre II, le théorème 1.1 se déduit facilement du second; nous en donnerons cependant une démonstration directe et très simple; celle du théorème 1.2 utilisera le même principe, mais comporte une difficulté technique supplémentaire.

Camacho et Sad ont aussi démontré que, parmi les invariants formels $p/q, k, \lambda$, seuls les deux premiers sont des invariants topologiques; ce point peut être vérifié directement sur les formes normales.

Le théorème 1.2 ci-dessus ne mentionne pas les équations résonnantes *dégénérées* (i. e. de partie linéaire $y dx$, cf. [22]). La méthode élaborée dans la suite devrait permettre l'étude de leur classification topologique, qui reste cependant non évidente.

2. Homéomorphismes entre chapelets de sphères

Les variétés (de feuilles ou d'orbites) $\mathcal{F}_{k, \lambda, \text{Id}}$ et $\mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi}$ sont homéomorphes (et même \mathcal{C}^∞ -difféomorphes).

Pour le montrer, reprenons les notations de I. 10, et soit $\varphi = (\varphi_0^i, \varphi_\infty^i) \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k$. Prolongeons chacun des germes φ_0^i (resp. φ_∞^i) en un difféomorphisme (réel \mathcal{C}^∞) *global* de S^2 à support dans un voisinage de 0 (resp. ∞) que l'on peut choisir aussi petit que l'on veut. On obtient ainsi un difféomorphisme global

$$\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_0^i, \bar{\varphi}_\infty^i) : \prod_{i=0}^{2k-1} S^2 \rightarrow \prod_{i=0}^{2k-1} S^2$$

(Π = somme disjointe). On vérifie alors aisément que $\bar{\Phi}$ induit par passage au quotient un difféomorphisme de $\mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi}$ sur $\mathcal{F}_{k, \lambda, \text{Id}}$.

Il est aussi facile de voir que $\mathcal{F}_{k, \lambda, \text{Id}}$ est difféomorphe à $\mathcal{F}_{k, 0, \text{Id}}$.

3. Démonstration du théorème 1.1

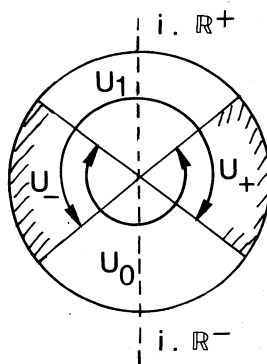
Nous nous contenterons de la donner dans le cas $p=q=1$ et $\lambda=0$.

Nous considérons donc, en reprenant les notations de I.6, le difféomorphisme $g_{1,0}(x) = x/(1 - 2i\pi x)$ et son intégrale première $H(x) = e^{1/x}$.

Soit $\varphi = (\varphi_0, \varphi_\infty) \in \text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$ et $g = g_{1,0}(\varphi)$ un difféomorphisme local formellement conjugué à $g_{1,0}$, de classe caractéristique φ .

Le choix de prolongements $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_\infty$ (comme en 2 ci-dessus) définit un difféomorphisme $\bar{\varphi}$ de l'espace des orbites $\mathcal{F}_{1,0,\varphi}$ de g sur l'espace des orbites $\mathcal{F}_{1,0,\text{Id}}$ de $g_{1,0}$. Nous allons voir que ce difféomorphisme se relève naturellement en un homéomorphisme local ψ de \mathbb{C} en 0, conjuguant g et $g_{1,0}$ (attention : ψ ne sera pas \mathcal{C}^1 à l'origine).

Pour cela, nous remplaçons d'abord le recouvrement canonique ouvert de I.6 par un recouvrement en deux secteurs fermés U_0 et U_1 de même rayon, de bissectrices $i \cdot \mathbb{R}^-$ et $i \cdot \mathbb{R}^+$,



d'ouvertures $< 2\pi$. Nous posons encore $U_0 \cap U_1 = U_- \cup U_+$. Le rayon est choisi assez petit pour que $\bar{\varphi}_0 \circ H$ et $\bar{\varphi}_\infty \circ H$ soient *holomorphes* sur les intérieurs de U_- et U_+ respectivement.

Le 1-cocycle défini par φ est donc maintenant représenté par des fonctions f_- et f_+ définies sur U_- et U_+ par les relations :

$$H \circ f_- = \bar{\varphi}_0 \circ H \quad \text{et} \quad H \circ f_+ = \bar{\varphi}_\infty \circ H.$$

Toujours d'après I.6, le difféomorphisme g peut être défini, sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, par deux égalités :

$$g = h_i \circ g_{1,0} \circ h_i^{-1} \quad (i=0, 1),$$

où h_i est une fonction définie sur U_i , \mathcal{C}^∞ et tangente à l'identité en 0, représentant une section du faisceau \mathbf{G} (transformation normalisant g sur U_i) vérifiant les relations

$$f_- = h_1^{-1} \circ h_0 \quad \text{sur } U_- \quad \text{et} \quad f_+ = h_0^{-1} \circ h_1 \quad \text{sur } U_+.$$

Le point clé consiste alors à utiliser $\bar{\varphi}_0$ et $\bar{\varphi}_\infty$ pour *prolonger* f_- et f_+ à U_0 et U_1 respectivement, en des fonctions f_0 et f_1 définies par

$$H \circ f_0 = \bar{\varphi}_0 \circ H \quad \text{et} \quad H \circ f_1 = \bar{\varphi}_\infty \circ H.$$

En posant

$$\varphi_0(z) = z \cdot \exp \bar{\gamma}_0(z) \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_\infty(z) = z \cdot \exp \bar{\gamma}_\infty(1/z)$$

(où $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_\infty$ sont des fonctions continues *bornées* sur \mathbb{C} , analytiques dans un voisinage de 0 et ∞ respectivement), on obtient

$$f_0(x) = \frac{x}{1 + x \cdot \bar{\gamma}_0(e^{1/x})}, \quad f_1(x) = \frac{x}{1 - x \bar{\gamma}_\infty(e^{-1/x})}.$$

Ces fonctions sont *continues* en 0, puisque $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_\infty$ sont bornées (mais elles ne sont pas \mathcal{C}^1 en 0, et $\bar{\gamma}_0(e^{1/x})$, $\bar{\gamma}_\infty(e^{-1/x})$ ne sont *pas* continues en 0; ce dernier point, qui n'est pas gênant ici, se révélera l'être quand nous étudierons le cas des équations différentielles). Par construction, elles définissent des *homéomorphismes* de U_0 et U_1 sur leurs images, et ces homéomorphismes *commutent* avec $g_{1,0}$; de plus $f_0 = \text{Id}$ sur U_+ et $f_1 = \text{Id}$ sur U_- .

On déduit de tout ceci que $h_0 \circ f_0^{-1}$ et $h_1 \circ f_1^{-1}$ sont définis sur des secteurs $U'_0 \subset U_0$ et $U'_1 \subset U_1$ recouvrant toujours un voisinage de 0, et *coïncident* sur $U'_0 \cap U'_1$; ils définissent donc un homéomorphisme local de \mathbb{C} conjuguant g et $g_{1,0}$. ■

4. Démonstration du théorème 1.2

On considère ici les feuilletages \mathcal{L} et \mathcal{L}_φ définis par les équations

$$\omega_{p/q, k, \lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_{p/q, k, \lambda}(\varphi) = 0 \quad \text{où } \varphi \in [\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)]^k.$$

Il s'agit de montrer l'existence d'un homéomorphisme local de \mathbb{C}^2 en 0 transformant \mathcal{L}_φ en \mathcal{L} . Comme dans le cas des difféomorphismes, cet homéomorphisme sera un *relèvement* $\bar{\psi}$ à \mathbb{C}^2 d'un homéomorphisme $\bar{\varphi} : \mathcal{F}_{k, \lambda, \varphi} \rightarrow \mathcal{F}_{k, \lambda, \text{Id}}$ (espaces des feuilles de \mathcal{L}_φ et \mathcal{L}).

Il y a une difficulté technique, due au fait que $\bar{\psi}$ ne peut pas préserver la fibration $\pi(x, y) = x^p y^q$: si $\bar{\psi}$ préserve π , elle n'est *pas* continue sur $E = \pi^{-1}(0) - \{0\}$ (cf. le comportement des fonctions $\bar{\gamma}_0(e^{1/x})$ et $\bar{\gamma}_\infty(e^{-1/x})$ dans le paragraphe précédent). Ainsi le théorème 1.2 qui, au vu du cas des difféomorphismes, paraissait *a priori* facile, nous a donné quelques tourments... La démonstration que nous proposons nous a malgré tout paru un peu plus simple que celle de Camacho et Sad, qui reste cependant plus élémentaire.

Le point principal consiste à mettre en évidence une famille assez grande d'homéomorphismes (essentiellement \mathcal{E}^0 ici) de domaines de la forme $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ (U = secteur de \mathbb{C}_u), qui préservent le feuilletage canonique \mathcal{L} . Nous traiterons ce point dans le cas particulier où $p = q = 1$ et $\lambda = 0$ (le cas général s'en déduit facilement).

LEMME 4.1. — Soit $\omega_{1,0} = du - u y dx = 0$, $u = \pi(x, y) = xy$, et $H = x \cdot e^{1/u}$ l'intégrale première de $\omega_{1,0}$. Soient U et U' deux secteurs fermés de \mathbb{C}_u de bissectrice $i \cdot \mathbb{R}^-$ (ou $i \cdot \mathbb{R}^+$) avec $\text{ouv}(U') < \text{ouv}(U) < 2\pi$. Soit enfin $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ un homéomorphisme global de $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$, analytique et tangent à l'identité en 0 et ∞ . Il existe un homéomorphisme $\psi : (\tilde{U}, E) \rightarrow (\tilde{U}', E)$ ($\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$, $E = \pi^{-1}(0)$) tel que :

- (i) $\psi|_E = \text{Id}$;
- (ii) $H \circ \psi = \varphi \circ H$;
- (iii) $\pi \circ \psi = \pi$ sur $\tilde{U} - \tilde{U}'$.

Montrons d'abord comment ce lemme permet d'achever la preuve du théorème 1.2, toujours dans le cas $p = q = 1$, $\lambda = 0$.

Soit donc $\varphi = (\varphi_0, \varphi_\infty) \in \text{Diff}_1(S^2; 0, \infty)$, et désignons par \mathcal{L}_φ le feuilletage défini par l'équation $\omega(\varphi) = \omega_{1,0}(\varphi) = 0$.

(1) On choisit deux secteurs fermés U_0 et U_1 , de bissectrices $i \cdot \mathbb{R}^-$ et $i \cdot \mathbb{R}^+$, recouvrant un voisinage de 0 dans \mathbb{C}_u (voir la figure du paragraphe 3 ci-dessus). Les résultats de II.5 fournissent des *difféomorphismes locaux*

$$N_i^{-1} : (\tilde{U}_i, E) \rightarrow (\tilde{U}_i, E) \quad \text{avec} \quad \pi \circ N_i^{-1} = \pi \quad (i=0, 1),$$

qui transforment \mathcal{L}_φ en \mathcal{L} sur \tilde{U}_i . On a de plus $N_1^{-1} \circ N_0 = F_-$ sur \tilde{U}_- (resp. $N_0^{-1} \circ N_1 = F_+$ sur \tilde{U}_+) où F_- et F_+ désignent les *relevés canoniques* (i.e. respectant π) de φ_0 et φ_∞ via H .

(2) Appliquons maintenant le lemme 4.1 à $U = U_0$, $U' = U_0 \setminus U_1$, $\varphi = \bar{\varphi}_0 =$ prolongement de φ_0 à S^2 . On obtient un homéomorphisme $\psi_0 : (\tilde{U}_0, E) \rightarrow (\tilde{U}_0, E)$ tel que $H \circ \psi_0 = \bar{\varphi}_0 \circ H$, et la propriété (iii) signifie que $\psi_0 = \text{Id}$ sur (\tilde{U}_+, E) et $\psi_0 = F_-$ sur (\tilde{U}_-, E) .

On construit de même un homéomorphisme $\psi_1 : (\tilde{U}_1, E) \rightarrow (\tilde{U}_1, E)$ tel que $H \circ \psi_1 = \bar{\varphi}_\infty \circ H$ avec $\psi_1 = \text{Id}$ sur (\tilde{U}_-, E) et $\psi_1 = F_+$ sur (\tilde{U}_+, E) .

(3) Réunissant les résultats de (1) et (2) on vérifie immédiatement que :

$$\psi_0 \circ N_0^{-1} = \psi_1 \circ N_1^{-1} \quad \text{sur} \quad (\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1, E).$$

On a ainsi défini un homéomorphisme local de (\mathbb{C}^2, E) qui transforme \mathcal{L}_φ en \mathcal{L} . ■

Indiquons maintenant rapidement comment on démontre le théorème 1.2 dans le cas général. On étend le lemme 4.1 au cas de $\omega_{1,\lambda}$ en remarquant que, pour tout secteur $U \subset \mathbb{C}_u$, $\omega_{1,\lambda}|_U$ est \mathcal{E}^1 -isomorphe à $\omega_{1,0}|_U$ par le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (x' = x, y' = y/(1 - u \log u))(u = xy)$. Le cas $p = q = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque, se démontre ensuite comme dans le cas précédent. On passe enfin au cas général en établissant de nouveau un lemme analogue à 4.1 pour les formes canoniques $\omega_{p/q, k, \lambda}$; il s'en déduit par la remarque, déjà faite en II.3, que $\omega_{p/q, k, \lambda}$ est l'image réciproque de $\omega_{1,\lambda}$ par une application ramifiée très simple. ■

Démonstration du lemme 4.1. — L'homéomorphisme φ , compte tenu des hypothèses faites, s'écrit $\varphi(z) = z \cdot e^{\gamma(z)}$, où $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une *fonction continue*, nulle en 0 et ∞ , donc *bornée* (elle est même holomorphe au voisinage de 0 et ∞ , mais ce fait n'a pas d'utilité ici).

Le relèvement canonique (i. e. préservant la fibration π) de φ à $\hat{U} - E$ s'écrit alors (cf. II. 5)

$$\begin{cases} x' = x \cdot e^{\gamma(H)} \\ y' = y \cdot e^{-\gamma(H)} \end{cases} \quad \text{où } H = x \cdot e^{1/u} = x \cdot e^{1/xy}.$$

Sa restriction à $\hat{U} - \hat{U}'$ est continue sur E , et y induit l'identité, car $e^{1/u}$ est infiniment petit ou infiniment grand lorsque $u \simeq 0$ dans ce domaine, et $\gamma(0) = \gamma(\infty) = 0$.

Il n'en est pas de même sur U' , où la *singularité essentielle* de $e^{1/u}$ se manifeste. On est donc amené à modifier le relèvement canonique de φ sur U' .

Considérons l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \pi \times H = \bar{H} : \hat{U} &\rightarrow \hat{U} \times \mathbb{C}, & \hat{U} &= U - \{0\}, \\ (x, y) &\mapsto (u = xy, z = H(x, y)). \end{aligned}$$

Il transforme le feuilletage \mathcal{L} en le feuilletage « trivial » $dz = 0$.

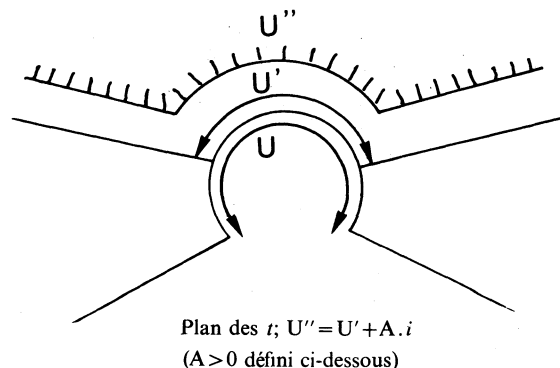
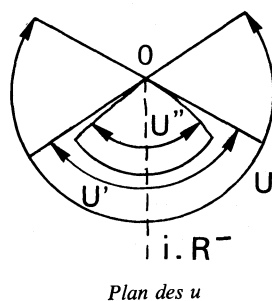
Soit maintenant

$$\begin{aligned} \psi_0 : \hat{U} \times \mathbb{C} &\rightarrow \hat{U} \times \mathbb{C}, \\ (u, z) &\mapsto (u' = u'(u, z), z' = \varphi(z)), \end{aligned}$$

un homéomorphisme local le long de $\{0\} \times \mathbb{C}$. Un calcul immédiat montre que $\psi = \bar{H}^{-1} \circ \psi_0 \circ \bar{H}$ s'écrit

$$(0) \quad \begin{cases} x' = x \cdot e^{1/u - 1/u' + \gamma(z)} \\ y' = y \cdot \frac{u'}{u} \cdot e^{1/u' - 1/u - \gamma(z)} \end{cases} \quad \text{où } u = xy, \quad z = H(x, y).$$

Nous allons définir une fonction $u' : \hat{U} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que ψ ait les propriétés (i) et (iii) du lemme 4.1 [la propriété (ii) est assurée par construction]. Il est commode ici de poser $t = 1/u$; on travaillera donc dans des secteurs (toujours notés U, U', \dots) de sommet ∞ dans \mathbb{C}_t .



Choisissons une fonction \mathcal{C}^∞ $l: \dot{U} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$\begin{aligned} l &= 0 \quad \text{sur } \dot{U} - \dot{U}'; \\ l &= 1 \quad \text{sur } \dot{U}' + i.A/2 \end{aligned}$$

et considérons, pour chaque $z \in \mathbb{C}$, le champ de vecteurs (\mathcal{C}^∞ réel) X_z défini sur U par

$$X_z(t) = l(t) \gamma(z) \frac{\partial}{\partial t};$$

posons enfin $t'(t, z)$ = image de t par le difféomorphisme exponentielle de X_z . Il est alors clair que :

- (1) $|t' - t| \leq |\gamma(z)|$ sur U ;
- (2) $t' = t$ sur $U' - U$;
- (3) $t' = t + \gamma(z)$ sur $U'' = U' + A.i$ dès que A a été choisi assez grand ($A \geq C \cdot \sup_C |\gamma|$)

où C est une constante dépendant uniquement de l'ouverture de U' .

Nous affirmons que l'homéomorphisme ψ correspondant a les propriétés (i) et (iii) du lemme :

(iii) le fait que $\pi \circ \psi = \pi$ sur $U - U'$ résulte immédiatement de (2);

(i) le fait que ψ se prolonge par continuité en l'identité de $E = \pi^{-1}(0)$ est conséquence des expressions (0) et des propriétés (1) et (3). Soit en effet (x, y) un point infiniment proche de E , et soit $z = H(x, y)$. Si $u = xy \in U''$ on a (cf. (3)) $1/u - 1/u' + \gamma(z) = 0$ et $u'/u \simeq 1$; (0) montre alors que $\psi(x, y)$ est infiniment proche de (x, y) . Si $u = xy \in U - U''$ alors $H(x, y)$ est infiniment petit ou infiniment grand; dans les deux cas $\gamma(z)$ est infiniment petit; (0) et (1) montrent encore que $\psi(x, y)$ est infiniment proche de (x, y) . ■

5. Classification différentiable

Nous considérons ici le problème de la conjugaison des difféomorphismes analytiques résonnants (respectivement de l'isomorphisme des équations analytiques résonnantes) relativement au groupe des difféomorphismes locaux de \mathbb{C} (resp. de \mathbb{C}^2) de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$ (du point de vue réel évidemment).

On a alors le curieux résultat suivant (déjà remarqué par Malgrange).

THÉORÈME 5.1. — *Les invariants analytiques des difféomorphismes et équations résonnants sont des invariants \mathcal{C}^r pour $r \geq 1$.*

Ceci signifie que la conjugaison (ou l'isomorphisme) \mathcal{C}^1 entraîne, pour ces objets, la conjugaison ou l'isomorphisme analytique!

Il suffit évidemment de donner la démonstration pour les difféomorphismes; en effet, des feuilletages analytiques résonnants qui sont \mathcal{C}^1 -isomorphes ont nécessairement des holonomies \mathcal{C}^1 -conjuguées.

Nous allons nous borner à montrer que, si les difféomorphismes $g = g_{1,0}(\varphi)$ et $g' = g_{1,0}(\varphi')$ sont \mathcal{C}^1 -conjugués, alors ils le sont analytiquement (le cas général se traiterait de façon analogue).

Soit donc $g' = f \circ g \circ f^{-1}$ où f est un difféomorphisme local de classe \mathcal{C}^1 de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ en 0. On peut évidemment supposer que f est tangent à l'identité en 0. En reprenant les notations de I. 6, écrivons

$$g = h_i \circ g_{1,0} \circ h_i^{-1} \quad \text{et} \quad g' = h'_i \circ g_{1,0} \circ h'_i^{-1} \quad (i=0, 1),$$

où h et h' sont des éléments de $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathbb{G})$.

On en déduit que :

$$(h_i'^{-1} \circ f \circ h_i) \circ g_{1,0} \circ (h_i'^{-1} \circ f \circ h_i)^{-1} = g_{1,0} \quad \text{pour } i=0,1,$$

c'est-à-dire que $\bar{f}_i = h_i'^{-1} \circ f \circ h_i$ commute avec $g_{1,0}$ sur U_i ; le « difféomorphisme » \bar{f}_i s'interprète comme section sur U_i d'un faisceau défini de façon analogue à \mathcal{A} , en remplaçant les fonctions analytiques par des fonctions différentiables (toujours au sens de Whitney) sur les secteurs.

En utilisant la coordonnée $z = 1/x$ (comme en I. 6. 1) on voit que la matrice jacobienne $D\bar{f}_i$ de \bar{f}_i doit être *constante* sur les « demi-orbités » de $g_{1,0}$ contenues dans U_i . La jacobienne à l'infini devant être l'identité, on en déduit que $D\bar{f}_i = \text{Identité}$ en tout point. Il en résulte que \bar{f}_i doit être une translation, donc analytique, et f est alors elle-même analytique. ■

On a en fait ainsi établi un résultat un peu plus précis que le théorème 5. 1.

THÉOREME 5. 2. — *Soit f un difféomorphisme local de classe \mathcal{C}^1 (au sens réel) de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ en 0, conjuguant deux germes de difféomorphismes locaux analytiques résonnants à l'origine de \mathbb{C} , alors f est biholomorphe.*

6. Remarques sur le cas dégénéré

Nous nous proposons maintenant de revenir brièvement sur les « espaces de feuilles » des équations résonnantes dégénérées et les problèmes que pose la classification topologique de ces équations (cf. Martinet-Ramis [22], V. 4).

On désigne par T le groupe des *translations* de la sphère de Riemann S^2 (si $\tau \in T$, $\tau(\infty) = \infty$). Dans cette partie, on ne considérera que des symboles

$$(\lambda, \varphi) \quad (\lambda \in \mathbb{C}; \varphi \in (\text{Diff}_1(S^2; 0, \infty))^k : \varphi = ((\varphi_0^i, \varphi_\infty^i))_{i=0, \dots, k-1})$$

tels que $\varphi_\infty^i \in T$ ($i=0, \dots, k-1$). A un tel symbole on peut associer un espace topologique $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$ de la façon suivante :

On considère la somme directe $\coprod_{j=0, \dots, 2k-1} S_j^2$ et on *recolle* d'une part les sphères S_{2i+1}^2 et S_{2i}^2 ($i=0, \dots, k-1$) par la *translation* φ_∞^i (qu'il y a lieu de bien distinguer du

germe de translation à l'infini φ_∞^i qui servirait à construire $\mathcal{F}_{k,\lambda,\varphi}$) et, d'autre part les sphères S_{2i}^2 et S_{2i-1}^2 ($i=1, \dots, k-1$) par le germe φ_0^i , les sphères S_0^2 et S_{2k-1}^2 par le germe $\exp(-2i\pi\lambda) \circ \varphi_0^0$.

L'espace topologique $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$ n'est pas toujours muni naturellement d'une structure de variété analytique complexe non séparée. La notion d'isomorphisme analytique entre deux espaces du type $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$ garde toutefois un sens évident, et plus précisément il existe une action que nous n'explicitons pas du groupe $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$ sur les symboles du type considéré ici telle que les espaces correspondants soient « analytiquement isomorphes ».

Si aucune des translations φ_∞^i ($i=0, \dots, k-1$) n'est l'identité, l'espace $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$ est naturellement muni d'une structure de variété analytique complexe non séparée de dimension 1. Inversement si toutes ces translations sont égales à l'identité, on peut attacher à $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$ un invariant topologique (« holonomie centrale ») qui est la classe de conjugaison dans le groupe F du difféomorphisme $\exp(-2i\pi\lambda) \circ \varphi_0^0 \circ \varphi_0^1 \circ \dots \circ \varphi_0^{k-1}$. Il apparaît ainsi que la classification topologique des espaces $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$ est bien loin d'être triviale : elle contient en particulier (via « holonomie centrale ») la classification topologique des éléments de F , qui n'est pas complètement connue. Nous nous contenterons de deux exemples (avec $k=1$) qui précisent une remarque de [22], V,4, p. 138-139

PROPOSITION 6.1. — (i) Si $\tau \in T$, $\tau \neq \text{id.}$, pour tout $\psi \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0)$ les espaces $\mathfrak{G}_{1,0,(\psi,\tau)}$ et $\mathfrak{G}_{1,0,(\text{id.},\tau)}$ sont homéomorphes.

(ii) Si λ n'est pas réel, pour tout $\psi \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0)$, les espaces $\mathfrak{G}_{1,\lambda,(\psi,\text{id.})}$ et $\mathfrak{G}_{1,\lambda,\text{id.}}$ sont homéomorphes.

Pour prouver (i) on peut évidemment supposer que $\tau(x) = x - 1$. On prolonge alors le germe ψ en un homéomorphisme global $\bar{\psi}$ de la sphère S^2 égal à l'identité en dehors du disque de centre 0 et de rayon 1/2.

Par une variante globale de l'argument que nous avons utilisé pour établir le lemme I.6.1., on montre que τ et $\tau \circ \psi$ sont conjugués par un homéomorphisme global h_1 de la sphère S^2 : $\tau = h_1^{-1} \circ \tau \circ \bar{\psi} \circ h_1$. On pose ensuite $h_0 = \bar{\psi} \circ h_1$.

On a

$$\text{id.} = h_0^{-1} \circ \bar{\psi} \circ h_1 \quad \text{et} \quad \tau = h_1^{-1} \circ \tau \circ h_0,$$

d'où le résultat.

La conjugaison de $\exp(2i\pi\lambda)$ et $\exp(2i\pi\lambda) \circ \psi$ dans F permet d'établir (ii). ■

En utilisant les résultats de [22], on montre que $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$ est l'« espace des feuilles d'une équation résonnante dégénérée $\bar{\omega} = 0$, d'invariant analytique φ (que l'on peut identifier à un élément de $\mathbb{C}^k \times (\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0))^k$) formellement conjuguée à la forme normale $\bar{\omega}_{k,\lambda} = u^{k+1} dx - x(1 + \lambda u^k) du = 0$. Il y a ainsi une application naturelle de la classification topologique des germes d'équations différentielles résonnantes dégénérées sur celle des espaces $\mathfrak{G}_{k,\lambda,\varphi}$. Il paraît raisonnable de conjecturer que cette application est un isomorphisme (comme dans le cas non dégénéré). On devrait pouvoir le montrer en utilisant un argument voisin de celui que nous avons développé en 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Éditions MIR, Moscou, 1980.
- [2] M. ARTIN, *On the Solutions of Analytic Equations* (Inv. Math., vol. 5, 1968, p. 277-291).
- [3] A. D. BRJUNO, *Analytical Form of Differential Equations* (Trudy Moskov. Mat. Obsc., vol. 25, 1971, p. 120-262, Trans. Moscow Math. Soc., vol. 25, 1971, p. 131-288, 1972).
- [4] C. CAMACHO, *On the Local Structure of Conformal Mappings and Holomorphic Vector Fields in \mathbb{C}^2* (Astérisque, vol. 59-60, 1978, p. 83-94).
- [5] C. CAMACHO, N. H. KUIPER et J. PALIS, *The Topology of Holomorphic Flows with Singularity* (Publ. Math. I.H.E.S., vol. 48, 1978, p. 5-38).
- [6] C. CAMACHO et P. SAD, *Topological Classification and Bifurcations of Holomorphic Flows with Resonance in \mathbb{C}^2* (Invent. Math., 67, 1982, p. 447-472).
- [7] D. CERVEAU et J. F. MATTEI, *Formes intégrables holomorphes singulières* (Astérisque, vol. 97, 1982).
- [8] H. DULAC, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles* (Journal de l'École Polytechnique, vol. 2, n. 9, 1904, p. 1-125).
- [9] J. ECALLE, *Théorie itérative, Introduction à la théorie des invariants holomorphes* (J. Math. Pures et Appl., vol. 54, 1975, p. 183-258).
- [10] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes, I et II*, Publications Math. d'Orsay, preprint, 1981-1982.
- [11] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes III* (à paraître).
- [12] A. HAEFLIGER et G. REEB, *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan* (Ens. Math., 1957, p. 107-125).
- [13] C. HOUZEL, *Géométrie analytique locale, IV* (Séminaire Henri-Cartan, 13^e année, 1960/1961, n° 21, W. A. Benjamin, 1967).
- [14] H. HUKUHARA, T. KIMURA et M^{me} T. MATUDA, *Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe* (Publ. Math. Soc. of Japan, 1961).
- [15] Yu. S. IL'YASHENKO, *Singular Points and Limit Cycles of Differential Equations in the Real and Complex Plane* (Acad. Nauk U.S.S.R., 1982, preprint).
- [16] T. KIMURA, *On the Iteration of Analytic Functions* (Funk. Ekvacioj, 14-3, 1971, p. 197-238).
- [17] S. ŁOJASIEWICZ, *Whitney Fields and the Malgrange-Mather Preparation Theorem* (Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I, LN 192, Springer, 1971, p. 106-115).
- [18] J. L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, t. 3, Dunod, Paris.
- [19] B. MALGRANGE, *Travaux d'Ecalles et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques* (Séminaire N. Bourbaki, Exposé, 582, novembre 1981).
- [20] L. M. MARKHASHOV, *Analytic Equivalence of Second Order Systems for Arbitrary Resonance* (Prikl. Mat. Meh., vol. 36, n° 6, 1972, 103061042; J. Appl. Math. Mech., vol. 36, n° 6, 1972, p. 969-980).
- [21] J. MARTINET, *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brjuno)* (Séminaire N. Bourbaki, Exposé 564, novembre 1980, LN 901, Springer, 1981, p. 55-70).
- [22] J. MARTINET et J. P. RAMIS, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre* (Publ. Math. I.H.E.S., vol. 55, 1982, p. 63-164).
- [23] J. F. MATTEI et R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières* (Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, vol. 13, 1980, p. 469-523).
- [24] A. NEWLANDER et L. NIRENBERG, *Complex Coordinates in Almost Complex Manifolds* (Ann. Math., vol. 65, n° 3, 1957, p. 391-404).
- [25] H. POINCARÉ, *Note sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (Journal de l'École Polytechnique, 45^e cahier, 1878, p. 13-26).
- [26] J.-P. RAMIS, *Les séries k-sommables et leurs applications* (LN in Ph., 126, Springer, 1980).
- [27] C. L. SIEGEL et J. K. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971.
- [28] A. A. SHERBAKOV, *Germes of Maps, Analytically not Equivalent with Their Formal Normal Form* (Funkts. An. i Ego Prikl., vol. 16, n° 2, 1982; Funkt. An. and its Appl., vol. 16, n° 2, 1982).

- [29] F. TAKENS, *Normal Forms for Certain Singularities of Vector Fields* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 23, n° 2, 1973, p. 163-195).
- [30] S. M. VORONIN, *Analytic Classification of Germs of Conformal Mappings $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with Identity Linear Part* (*Funkts. An. i Ego Pril.*, vol. 15, n° 1, 1981; *Funct. An. and its Appl.*, vol. 15, n° 1, 1981).
- [31] W. WASOW, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Interscience Publishers, 1965.
- [32] H. DULAC, *Sur les cycles limites* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 51, 1923, p. 45-188).
- [33] P. M. ELIZAROV et Yu. S. IL'YASHENKO, *Remarks on the Orbital Analytic Classification of Germs of Vector Fields* (*Mat. Sb.*, vol. 121, (163), 1983, p. 111-126, en russe).
- [34] J. MARTINET et J. P. RAMIS, *Équations différentielles analytiques réelles résonnantes* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 5 janvier 1983, révisé le 19 mars 1983.)

J. MARTINET et J.-P. RAMIS,
Département de Mathématiques,
Université de Strasbourg;
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.