

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. PICHAUD

G -homologie et (\mathfrak{g}, K) -homologie dans la catégorie des G -modules différentiables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 16, n° 2 (1983), p. 219-236

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_2_219_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

G-HOMOLOGIE ET (\mathfrak{g}, K) -HOMOLOGIE DANS LA CATÉGORIE DES G-MODULES DIFFÉRENTIABLES

PAR J. PICHAUD

Introduction

L'objet de ce travail est d'obtenir un théorème type « théorème de Van Est en cohomologie » pour l'homologie d'un groupe de Lie réel G et celle de son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Pour cela, on se place dans la catégorie \underline{C}_G^∞ des G -modules différentiables, dans laquelle l'homologie est définie sans ambiguïté. En effet, si E est un espace localement convexe complet, U une représentation continue de G dans E , et si E_G (resp. \underline{E}_G) désigne le quotient de E par le sous-espace (resp. le sous-espace fermé) engendré par les $U_g \cdot a - a$ lorsque g décrit G et a décrit E , on peut *a priori* envisager deux théories de l'homologie continue, l'une relative aux foncteurs dérivés à gauche du foncteur $E \mapsto E_G$ l'autre relative aux foncteurs dérivés à gauche du foncteur $E \mapsto \underline{E}_G$. Cependant, si P est un objet relativement projectif de la catégorie \underline{C}_G^∞ , on a $P_G = \underline{P}_G$ ceci étant une conséquence facile du théorème de [2] (§ 2), lequel exprime ce résultat lorsque P est l'espace $C_c^\infty(G, E)$ muni de la représentation régulière droite (ou gauche). Il en résulte que dans la catégorie \underline{C}_G^∞ , les foncteurs $E \mapsto E_G$ et $E \mapsto \underline{E}_G$ ont même foncteurs dérivés à gauche et qu'il n'y a qu'une théorie de l'homologie différentiable.

Dans les deux premières parties on suppose donc que E est un objet de \underline{C}_G^∞ . Ces deux parties sont consacrées à l'étude du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ des formes différentielles à support compact sur G/K et à valeurs dans E , où K est un sous-groupe compact de G et $n = \dim G/K$. En effet lorsque G a un nombre fini de composantes connexes et lorsque K est un sous-groupe compact maximal, le complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ muni de la différentielle extérieure est une résolution forte relativement projective de E , et dans ce cas l'homologie de $\Omega_c^{n-*}(G, E)_G$ est $H_*(G, E)$.

En supposant seulement que G est un groupe de Lie et K un sous-groupe compact on explicite, au paragraphe 1, un isomorphisme topologique du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ avec

le complexe $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ où Δ est le module de G . On en déduit que lorsque G a un nombre fini de composantes connexes et lorsque K est un sous-groupe compact maximal, $H_*(G, E)$ est topologiquement isomorphe à $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$.

Au paragraphe 2, on construit, en supposant d'abord K connexe, un isomorphisme du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ sur le complexe $\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E$ qui sert à définir l'homologie de \mathfrak{g}

relative à \mathfrak{f} . Il en résulte un isomorphisme de $\text{Hom}_t(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E$, qui conduit à un isomorphisme de Poincaré entre $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ et $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E)$. On étudie ensuite le cas où K n'est pas connexe et on obtient, lorsque G a un nombre fini de composantes connexes et lorsque K est un compact maximal, un isomorphisme de type Van Est entre $H_*(G, E)$ et $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E)^{K/K^0}$ où K^0 est la composante connexe de e dans K et où l'action de K/K^0 provient de la représentation $k \mapsto \det \text{Ad } k^{-1} \cdot \Lambda^* \text{Ad } k \otimes U_k$.

L'interprétation de $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E)^{K/K^0}$ en termes de (\mathfrak{g}, K) -homologie fait l'objet du paragraphe 3. En effet, en ce qui concerne l'isomorphisme de Poincaré au niveau des algèbres de Lie et pour des G -modules non intégrables la catégorie adéquate est celle des (\mathfrak{g}, K) -modules dans laquelle on définit la (\mathfrak{g}, K) -homologie.

Alors l'isomorphisme de Poincaré exprime que l'espace $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ est isomorphe avec $H_*(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)$ où \mathbb{R}_ε désigne l'espace \mathbb{R} muni de la structure de (\mathfrak{g}, K) -module pour laquelle l'action de \mathfrak{g} est triviale et celle de K est donnée par la représentation $\varepsilon : k \mapsto \det \text{Ad } k$.

En conclusion, on obtient, si G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, un isomorphisme de Van Est entre $H_*(G, E)$ et $H_*(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)$.

0. Notations

G est un groupe de Lie réel, K un sous-groupe compact, d'algèbres de Lie respectives \mathfrak{g} et \mathfrak{k} .

$n = \dim G/K$.

Si $0 \leq q \leq n$ et si F est un espace localement convexe complet, $\Omega_c^q(G/K, F)$ est l'espace des q -formes différentielles sur G/K à support compact, à valeurs dans F , muni de la topologie limite inductive naturelle.

Si α_1 (resp. α_2) est une q_1 -forme (resp. q_2 -forme) à valeurs dans F_1 (resp. F_2), $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ est une $(q_1 + q_2)$ -forme à valeurs dans le produit tensoriel projectif complété $F_1 \hat{\otimes} F_2$ et l'application $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \alpha_1 \wedge \alpha_2$ est continue de $\Omega^{q_1}(G/K, F_1) \times \Omega^{q_2}(G/K, F_2)$ dans $\Omega^{q_1+q_2}(G/K, F_1 \hat{\otimes} F_2)$. E désigne un G -module réel différentiable, localement convexe complet; U est l'action de G dans E , et E_G (resp. \underline{E}_G) est le quotient de E par le sous-espace (resp. le sous-espace fermé) engendré par les $U_g \cdot a - a$ lorsque g décrit G et a décrit E .

Si $g \in G$, on note L_g l'application $x \mapsto gx$ de G dans G , et R_g l'application $x \mapsto xg$ de G dans G .

L_g désigne l'application $\dot{x} \mapsto (gx)'$ de G/K dans G/K . ω est la forme de Maurer-Cartan à gauche de G , i. e. $\forall g \in G, \omega(g) = D_g L_{g^{-1}}$. $C_c^\infty(G, E)$ est l'espace des fonctions C^∞ de G dans E , à support compact, muni de la topologie limite inductive usuelle.

Si X est un élément de \mathfrak{g} , on note \tilde{X} le champ invariant à gauche associé à X ; alors si φ est un élément de $C^\infty(G, E) \neq \tilde{X}$ φ est la fonction

$$g \mapsto \frac{d}{dt} \varphi(g \exp tX) |_{t=0}.$$

On note dg une mesure de Haar à gauche sur G et dk la mesure de Haar normalisée de K .

Enfin Δ est le module de G , autrement dit on a, pour toute fonction continue à support compact f , l'égalité

$$\int f(gx) dg = \Delta(x^{-1}) \int f(g) dg.$$

1. Étude du complexe des formes différentielles à support compact dans G/K

Dans toute la suite l'espace $\Omega_c^q(G/K, E)$ est muni de la structure de G -module suivante :

$$\forall g \in G, \forall \alpha \in \Omega_c^q(G/K, E), \quad g \cdot \alpha = U_g \circ (\tilde{L}_{g^{-1}})^*(\alpha),$$

autrement dit

$$\forall \dot{x} \in G/K, (g \cdot \alpha)(\dot{x}) = U_g \circ \alpha(g^{-1} \dot{x}) \circ \Lambda^q D_x \tilde{L}_{g^{-1}}.$$

Si p désigne l'application canonique de G sur G/K , p^* identifie $\Omega_c^q(G/K, E)$ à un sous-espace de $\Omega_c^q(G, E)$, à savoir

$$\{\beta \in \Omega_c^q(G, E) \mid \forall k \in K, R_k^*(\beta) = \beta, \quad \forall X \in \mathfrak{k}, i_X(\beta) = 0\}.$$

Or $\Omega_c^q(G, E)$ est topologiquement isomorphe au G -module $\text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}, C_c^\infty(G, E))$, l'action de G étant triviale sur $\Lambda^q \mathfrak{g}$ et donnée sur $C_c^\infty(G, E)$ par :

$$\forall g \in G, \forall \varphi \in C_c^\infty(G, E), \quad g \cdot \varphi = U_g \circ \varphi(g^{-1}).$$

Les isomorphismes sont les suivants :

(a)
$$\Omega_c^q(G, E) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}, C_c^\infty(G, E)),$$

$$\alpha \mapsto f_\alpha,$$

où

$$f_\alpha(X_1 \wedge \dots \wedge X_q)(g) = \langle \alpha(g), (\tilde{X}_1(g), \dots, \tilde{X}_q(g)) \rangle;$$

(b)
$$\text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}, C_c^\infty(G, E)) \rightarrow \Omega_c^q(G, E),$$

$$f \mapsto \alpha_f,$$

où, pour tous champs différentiables Y_1, \dots, Y_q sur G , on a

$$\langle \alpha_f(g), (Y_1(g), \dots, Y_q(g)) \rangle = f(\Lambda^q D_g L_{g^{-1}}(Y_1(g) \wedge \dots \wedge Y_q(g)))(g).$$

En ce qui concerne $\Omega_c^q(G/K, E)$, il est alors topologiquement isomorphe au G -module $\text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))$, K opérant dans $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ par la puissance extérieure q -ième de l'action adjointe et dans $C_c^\infty(G, E)$ par la représentation régulière droite.

De façon précise, on a les isomorphismes suivants :

$$(a) \quad \Omega_c^q(G/K, E) \rightarrow \text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)),$$

$$\alpha \mapsto f_\alpha,$$

où

$$f_\alpha(\tilde{X}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{X}_q)(g) = \langle \alpha(\tilde{g}), \Lambda^q D_g p(\tilde{X}_1(g) \wedge \dots \wedge \tilde{X}_q(g)) \rangle,$$

X_i étant un représentant quelconque de \tilde{X}_i dans \mathfrak{g} .

$$(b) \quad \text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)) \rightarrow \Omega_c^q(G/K, E)$$

$$f \mapsto \alpha_f$$

avec, si Y_1, \dots, Y_q sont des champs C^∞ sur G/K ,

$$\langle \alpha_f(\tilde{g}), (Y_1(\tilde{g}), \dots, Y_q(\tilde{g})) \rangle = f(\Lambda^q D_{\tilde{g}} L_{\tilde{g}^{-1}}(Y_1(\tilde{g}) \wedge \dots \wedge Y_q(\tilde{g}))) (\tilde{g}),$$

\tilde{g} étant un représentant quelconque de \tilde{g} ;

La dimension de G/K étant n , on note $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ le complexe

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(G/K, E) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(G/K, E) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_c^n(G/K, E) \xrightarrow{\lambda} E \rightarrow 0,$$

où d est la différentielle extérieure et λ l'intégrale.

L'intérêt de ce complexe tient au fait que si G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ est une résolution forte relativement projective de E dans la catégorie \underline{C}_G^∞ des G -modules différentiables. En effet, dans ce cas il existe un difféomorphisme ψ de G/K sur \mathbb{R}^n et le complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ est l'image par ψ^* du complexe $\Omega_c^{n-*}(\mathbb{R}^n, E)$ lequel d'après [2] est une résolution forte de E . Le fait que les $\Omega_c^q(G/K, E)$ soient des objets relativement projectifs dans \underline{C}_G^∞ se démontre comme dans [1] pour $C_c(G, E)$: si on a un diagramme

$$\begin{array}{c} \Omega_c^q(G/K, E) \\ \downarrow f \\ U \xrightleftharpoons[\pi]{\pi} V \end{array}$$

où π est une G -surjection forte, s une application linéaire continue telle que $\pi \circ s = \text{Id}_V$, et f un G -morphisme, on définit un G -morphisme \tilde{f} de $\Omega_c^q(G/K, E)$ dans U , tel que $\pi \circ \tilde{f} = f$, en posant

$$\tilde{f}(\alpha) = \int g \cdot s \cdot g^{-1} \cdot f(\alpha_g) dg,$$

où $\alpha_g = \alpha \cdot \theta(\cdot^{-1}g)$, θ étant une fonction de $C_c^\infty(K \setminus G)$ [donc s'identifiant à une fonction de $C_c^\infty(G)$ invariante par l'action à gauche de K] d'intégrale 1 pour la mesure dg .

PROPOSITION 1. — *Le complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ est topologiquement isomorphe au complexe $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-*}\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, muni de la différentielle usuelle, lequel donne la (\mathfrak{g}, K) -cohomologie du G -module $E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}$.*

Démonstration. — Par transport, la différentielle d du complexe $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)$ devient

$$d : \text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)) \rightarrow \text{Hom}_K(\Lambda^{q+1} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)),$$

avec

$$(df)(\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1})(g) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} (\hat{X}_i f)(\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1})(g) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f(\overbrace{[\hat{X}_i, \hat{X}_j]}^{\wedge}) \wedge \hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1})(g).$$

Pour déterminer $\text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G$ on utilisera le lemme suivant :

LEMME. — *Si F est un K -module différentiable l'application $a \mapsto \int U_k \cdot a \, dk$ de F dans F^K définit, par passage au quotient, un isomorphisme de F_K avec F^K .*

En effet, si $\int U_k \cdot a \, dk = 0$, la fonction $k \mapsto U_k \cdot a$ qui est C^∞ est de la forme

$$\sum_{i=1}^p (\varphi_i(\cdot k_i) - \varphi_i(\cdot)) \text{ où } \varphi_i \in C^\infty(K, F) \text{ (cf. [2], § 2, p. 5),}$$

donc $\forall k \in K$,

$$a = \sum_{i=1}^p (U_{k^{-1}} \cdot \varphi_i(kk_i) - U_{k^{-1}} \cdot \varphi_i(k)) = \sum_{i=1}^p (U_{k_i} \cdot U_{(kk_i)^{-1}} \cdot \varphi_i(kk_i) - U_{k^{-1}} \cdot \varphi_i(k)) = \sum_{i=1}^p (U_{k_i} \cdot a_i - a_i),$$

où

$$a_i = \int U_{k^{-1}} \cdot \varphi_i(k) \, dk.$$

Remarque. — Lorsque F est seulement un G -module continu on obtient, grâce au théorème des bipolaires, un isomorphisme du séparé \underline{F}_K de F_K avec F^K .

Suite de la démonstration de la proposition 1 :

Alors $\text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G$ est isomorphe à $(\text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)))_K)_G$ lequel est égal à $(\text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)))_G)_K$ car les actions de G et de K commutent. Mais $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ étant de dimension finie, $\text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G$ est $\text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G$.

On obtient finalement :

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, G_c^\infty(G, E))_G = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E)_G).$$

D'autre part, si on note $\overline{C}_c^\infty(G, E)$ l'espace $C_c^\infty(G, E)$ muni de la représentation régulière gauche, l'application $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ de $C_c^\infty(G, E)$ dans $\overline{C}_c^\infty(G, E)$ définie par $\forall g \in G, \overline{\varphi}(g) = U_{g^{-1}} \cdot \varphi(g)$, est un G -isomorphisme topologique, et on sait que $\overline{C}_c^\infty(G, E)_G$ s'identifie topologiquement à E par l'application classe de $\varphi \mapsto \int \varphi(g) dg$ (cf. [2], 4.3). Il en résulte que $C_c^\infty(G, E)_G$ est isomorphe à E par l'application Classe de $\varphi \mapsto \int U_{g^{-1}} \cdot \varphi(g) dg$.

La structure de \mathbb{K} -module de $C_c^\infty(G, E)_G$ devient sur E la restriction de U à \mathbb{K} , puisque

$$\int U_{g^{-1}} \cdot \varphi(gk) dg = U_k \cdot \int U_{g^{-1}} \cdot \varphi(g) dg.$$

Il reste enfin à calculer la différentielle ∂ du complexe

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))_G \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E).$$

Pour $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C_c^\infty(G, E))$, $\int U_{g^{-1}} \cdot (df)(\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1})(g) dg$ est égal à

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \int U_{g^{-1}} \cdot (\hat{X}_i f(\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1}))(g) dg \\ & + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \int U_{g^{-1}} \cdot f(\overline{[\hat{X}_i, \hat{X}_j]} \wedge \hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1})(g) dg. \end{aligned}$$

Or, si $\varphi \in C_c^\infty(G, E)$ et si $X \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} \int U_{g^{-1}} \cdot (\tilde{X} \varphi)(g) dg &= \int U_{g^{-1}} \cdot \frac{d}{dt} \varphi(g \exp tX) \Big|_{t=0} dg = \frac{d}{dt} \left(\int U_{g^{-1}} \cdot \varphi(g \exp tX) dg \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int \Delta^{-1}(\exp tX) U(\exp tX) U_{g^{-1}} \cdot \varphi(g) dg \right) \Big|_{t=0} = (U \Delta^{-1})(X) \cdot \int U_{g^{-1}} \cdot \varphi(g) dg \\ &= (U(X) - \Delta(X)) \int U_{g^{-1}} \cdot \varphi(g) dg. \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de $\partial : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^{q+1} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E)$,

$$\begin{aligned} (\partial l)(\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1}) &= \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} (U(X_i) - \Delta(X_i)) \cdot l(\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} l(\overline{[\hat{X}_i, \hat{X}_j]} \wedge \hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1}). \end{aligned}$$

On obtient la différentielle usuelle, à condition de munir E de la structure de G-module définie par la représentation $U \Delta^{-1}$, d'où le résultat annoncé.

COROLLAIRE. — Si G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, les espaces $H_*(G, E)$ et $H^{n-*}(g, K, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sont topologiquement isomorphes.

Remarque. — D'après le théorème de Van Est en cohomologie, $H^*(g, K, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ est isomorphe à $H^*(G, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$. On retrouve ainsi l'isomorphisme de Poincaré de $H_*(G, E)$ avec $H^{n-*}(G, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ lequel a été établi dans [2] sans passer par l'intermédiaire de la (g, K)-cohomologie.

2. Comparaison de $H_*(G, E)$ et de $H_*(g, \mathfrak{k}, E)$

Rappelons (cf. [5], n° 2.9.1) que $H_*(g, \mathfrak{k}, E)$ est l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow \Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E \xrightarrow{\delta} E/\mathfrak{k}E \rightarrow 0,$$

où

$$\delta_q : \Lambda^{q+1} \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E \rightarrow \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E,$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta_q(\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1} \otimes a) &= \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} (\hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1}) \otimes X_i a \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} ([\hat{X}_i, \hat{X}_j] \wedge \hat{X}_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge \hat{X}_{q+1}) \otimes a. \end{aligned}$$

Si l'on fait opérer K sur $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E$ en associant à chaque $k \in K$ l'automorphisme $\Lambda^q \text{Ad} k \otimes U_k$, on a $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E = (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_{K^0}$ où K^0 est la composante connexe de e dans K.

2.A. CONSTRUCTION D'UN MORPHISME DE $\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G$ DANS $(\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K$ LORSQUE K EST CONNEXE. — Pour décrire ce morphisme on va être amené à utiliser une autre structure de G-module sur $\Omega_c^q(G, E)$, à savoir celle où l'action de G est l'action « régulière gauche » définie par :

$$\forall g \in G, \quad \forall \alpha \in \Omega_c^q(G, E), \quad g \cdot \alpha = (L_{g^{-1}})^*(\alpha).$$

Lorsqu'il sera muni de cette structure, $\Omega_c^q(G, E)$ sera noté $\bar{\Omega}_c^q(G, E)$. Il est immédiat que l'application $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ de $\Omega_c^q(G, E)$ dans $\bar{\Omega}_c^q(G, E)$ définie par $\forall g \in G, \alpha(g) = U_{g^{-1}} \cdot \alpha(g)$, est un G-isomorphisme topologique.

Par cet isomorphisme le complexe $\Omega_c^{n-*}(G, E)$, muni de d , devient le complexe $\overline{\Omega}_c^{n-*}(G, E)$ muni de la différentielle \overline{d} définie de la façon suivante : si $\beta \in \overline{\Omega}_c^q(G, E)$ et si (X_1, \dots, X_{q+1}) sont des champs de vecteurs C^∞ sur G , on a

$$\langle \overline{d}\beta, (X_1, \dots, X_{q+1}) \rangle = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \langle \omega, X_i \rangle \cdot \langle \beta, (X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{q+1}) \rangle \\ + \langle d\beta, (X_1, \dots, X_{q+1}) \rangle,$$

où ω est la forme de Maurer-Cartan (à gauche) de G .

Soit maintenant $\alpha \in \Omega_c^{n-q}(G/K, E)$.

On pose $\beta = \overline{p^* \alpha}$; β est donc un élément de $\overline{\Omega}_c^{n-q}(G, E)$.

Notons $\overline{\omega}$ l'élément de $\Omega^1(G, \mathfrak{g}/\mathfrak{f})$ défini par $\forall g \in G, \overline{\omega}(g) = D_e p \circ \omega(g)$. La forme $\overline{\omega}$ est G -invariante à gauche et a les propriétés suivantes :

- (i) $\forall X \in \mathfrak{g}, i_X(\overline{\omega}) = D_e p(X) = \dot{X}$,
- (ii) $\forall k \in K, (R_k)^*(\overline{\omega}) = \text{Ad } k^{-1} \circ \overline{\omega}$,
- (iii) $d\overline{\omega} = -D_e p \circ [\omega, \omega] = -[\overline{\omega}, \overline{\omega}]$.

Alors la forme $\gamma = \overline{\omega}^{\wedge q} \wedge \beta$ est un élément de $\overline{\Omega}_c^n(G, \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)$, et en composant avec l'application canonique π de $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)$ sur $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K$ on obtient un élément de $\overline{\Omega}_c^n(G, (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K)$.

LEMME. — La forme $\pi \circ \gamma$ s'identifie à un élément de $\Omega_c^n(G/K, (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K)$.

En effet si $k \in K$, on a :

$$(R_k)^*(\pi \circ \gamma)(g) = (\pi \circ \gamma)(gk) \circ \Lambda^n D_g R_k \\ = \pi \circ (\overline{\omega}^{\wedge q}(gk) \wedge U_{k^{-1}} U_{g^{-1}} p^* \alpha(gk)) \circ \Lambda^n D_g R_k \\ = \pi \circ (\Lambda^q \text{Ad } k^{-1} \otimes U_{k^{-1}}) \circ (\overline{\omega}^{\wedge q}(g) \wedge U_{g^{-1}} p^* \alpha(g)) = \pi \circ \gamma(g).$$

D'autre part $\forall X \in \mathfrak{f}, i_X(\gamma) = 0$ car $i_X(\overline{\omega}) = 0$ et $i_X(p^* \alpha) = 0$.

Considérons alors l'application :

$$\Sigma_q : \Omega_c^{n-q}(G/K, E) \rightarrow (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K, \\ \alpha \mapsto \int \pi \circ \gamma.$$

Comme l'application $\alpha \mapsto \pi \circ \gamma$ est un G -morphisme de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)$ dans $\overline{\Omega}_c^n(G, (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K)$ et comme l'intégrale est invariante à gauche, Σ_q permet de définir une application S_q de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ dans $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K$.

Remarque. — K étant supposé connexe, $\overline{\omega}^{\wedge n}$ s'identifie à un élément de $\Omega_c^n(G/K, \Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{f})$ puisque

$$\forall k \in K, (R_k)^*(\overline{\omega}^{\wedge n}) = \Lambda^n \text{Ad } k^{-1} \circ \overline{\omega}^{\wedge n} = \det \text{Ad } k^{-1} \circ \overline{\omega}^{\wedge n} = \overline{\omega}^{\wedge n},$$

car $\det \text{Ad } k^{-1} = 1$.

Ainsi, à condition d'identifier $\Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ à \mathbb{R} , on peut considérer $\bar{\omega}^{\wedge n}$ comme une forme volume sur G/K . Autrement dit, on peut choisir une base $(\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_n)$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ (que l'on aura fixée dans la suite) telle que, toute n -forme α sur G/K à valeurs dans un espace localement convexe complet F s'écrivant

$$\alpha = \varphi \cdot \frac{\bar{\omega}^{\wedge n}}{\dot{e}_1 \wedge \dots \wedge \dot{e}_n},$$

où $\varphi \in C^\infty(G/K, F)$, on ait si α est intégrable

$$\int \alpha = n! \int \varphi(g) dg = \int \langle f_\alpha, (\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_n) \rangle (g) dg.$$

Si $(\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_n)$ est une autre base, on a :

$$\int \langle f_\alpha, (\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_n) \rangle (g) dg = \det_{(e_i)}(f_j) \cdot \int \alpha.$$

On peut alors expliciter S_q de la façon suivante :

$$\forall \alpha \in \Omega_c^{n-q}(G/K, E),$$

$$S_q(\alpha) = \prod_{\tau} (\sum_{\tau} \varepsilon_{\tau} \cdot \dot{e}_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(q)} \otimes \int U_g^{-1} \cdot \langle f_\alpha, (\dot{e}_{\tau(q+1)}, \dots, \dot{e}_{\tau(n)}) \rangle (g) dg),$$

où τ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ telles que

$$\tau(q+1) < \dots < \tau(n).$$

En utilisant l'isomorphisme de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ avec $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ décrit au paragraphe 1, on obtient l'application

$$\varphi_q : \text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) \rightarrow (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \otimes E)_K,$$

où $\varphi_q(l) = \prod_{\tau} (\sum_{\tau} \varepsilon_{\tau} \cdot \dot{e}_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(q)} \otimes l(\dot{e}_{\tau(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(n)}))$,

avec $\tau(q+1) < \dots < \tau(n)$.

On va maintenant établir que, à un coefficient près, S_q (ou φ_q) est un morphisme de complexes. De façon précise :

PROPOSITION 2. — On a $\delta \circ S_q = (-1)^{q-1} q S_{q-1} \circ d$ (resp. $\delta \circ \varphi_q = (-1)^{q-1} q \varphi_{q-1} \circ \partial$).

Notons T l'ensemble des permutations τ de $\{1, \dots, n\}$ telles que $\tau(q+1) < \dots < \tau(n)$ et R l'ensemble des permutations ρ de $\{1, \dots, n\}$ telles que $\rho(q) < \dots < \rho(n)$.

On a, pour $l \in \text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, $\delta \circ \varphi_q(l) = \pi(A + A')$,

avec

$$A = \sum_{\tau \in T} \varepsilon_{\tau} \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \dot{e}_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\tau(i)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(q)} \otimes e_{\tau(i)} \cdot l(\dot{e}_{\tau(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(q)})$$

et

$$A' = \sum_{\tau \in T} \varepsilon_{\tau} \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \overbrace{[e_{\tau(i)}, e_{\tau(j)}]} \wedge \dot{e}_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\tau(i)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\tau(j)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(q)} \\ \otimes l(\dot{e}_{\tau(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(q)}),$$

où $\forall i, e_i$ est un représentant de \dot{e}_i dans \mathfrak{g} .

D'autre part $\varphi_{q-1} \circ \partial(l) = \pi(B + C + D)$ avec :

$$B = \sum_{\rho \in R} \varepsilon_{\rho} \dot{e}_{\rho(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(q-1)} \otimes \sum_{j=q}^n (-1)^{j-q} e_{\rho(j)} \cdot l(\dot{e}_{\rho(q)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\rho(j)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(n)}),$$

$$C = - \sum_{\rho \in R} \varepsilon_{\rho} \dot{e}_{\rho(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(q-1)} \\ \otimes \sum_{j=q}^n (-1)^{j-q} \Delta(e_{\rho(j)}) l(\dot{e}_{\rho(q)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\rho(j)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(n)}),$$

$$D = \sum_{\rho \in R} \varepsilon_{\rho} \dot{e}_{\rho(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(q-1)} \\ \otimes \sum_{q \leq i < j} (-1)^{i+j} l(\overbrace{[e_{\rho(i)}, e_{\rho(j)}]} \wedge \dot{e}_{\rho(q)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\rho(i)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\rho(j)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(n)}).$$

(a) Égalité de A et de $(-1)^{q-1} q B$.

Pour $\tau \in T$ et $i \in \{1, \dots, q\}$, on pose

$$A_{\tau, i} = \varepsilon_{\tau} (-1)^{i+1} \dot{e}_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\tau(i)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(q)} \otimes e_{\tau(i)} \cdot l(\dot{e}_{\tau(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\tau(n)}),$$

et, pour $\rho \in R$ et $j \in \{q, \dots, n\}$

$$B_{\rho, j} = \varepsilon_{\rho} \dot{e}_{\rho(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(q-1)} \otimes e_{\rho(j)} \cdot l(\dot{e}_{\rho(q)} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{\rho(j)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\rho(n)}).$$

A tout triplet (ρ, j, i) où $\rho \in R, j \in \{q, \dots, n\}$ et $i \in \{1, \dots, q\}$ on associe la permutation suivante, notée $\tau(\rho, j, i)$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & q & \dots & j & j+1 & \dots & n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \rho(1) & \dots & \rho(j) & \rho(i) & \dots & \rho(q-1) & \dots & \rho(j-1) & \rho(j+1) & \dots & \rho(n) \end{array}$$

autrement dit on amène $\rho(j)$ à la place « i », ce qui est le résultat de $(j-i)$ transpositions.

On a donc $\varepsilon_{\tau(\rho, j, i)} = (-1)^{j-i} \varepsilon_{\rho}$. De plus $A_{\tau(\rho, j, i), i} = (-1)^{j+1} B_{\rho, j}$.

LEMME. — L'application $(\rho, j, i) \mapsto (\tau(\rho, j, i), i)$ de $R \times \{q, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}$ dans $T \times \{1, \dots, q\}$ est une bijection.

Comme $\text{card } T = n!/(n-q)!$ et $\text{card } R = n!/(n-q+1)!$, les deux ensembles considérés ont même cardinal et il suffit d'établir que cette application est injective.

Supposons donc que l'on ait $\tau(\rho_1, j_1, i) = \tau(\rho_2, j_2, i)$. Alors ρ_1 et ρ_2 coïncident sur l'ensemble $\{1, \dots, q-1\}$, mais comme on doit avoir $\rho_1(q) < \dots < \rho_1(n)$ et $\rho_2(q) < \dots < \rho_2(n)$ on a nécessairement $\rho_1 = \rho_2$. Enfin de $\rho_1(j_1) = \rho_2(j_2)$ on déduit que $j_1 = j_2$.

Il en résulte que

$$\sum_{\rho, j, i} A_{\tau(\rho, j, i), i} = \sum_{\tau, i} A_{\tau, i} = A.$$

Or

$$\sum_{\rho, j, i} A_{\tau(\rho, j, i), i} = \sum_{\rho, j, i} (-1)^{j+1} B_{\rho, j} = (-1)^{j+1} q \sum_{\rho, j} B_{\rho, j} = (-1)^{q-1} q B.$$

(b) Égalité de $\pi(A')$ et de $(-1)^{q-1} q \pi(C+D)$.

Si α est un élément de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)$ dont la classe dans $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ correspond à l par l'isomorphisme de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ sur $\text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, on a $\pi(C+D) = \int \pi_0(\bar{\omega}^{\wedge(q-1)} \wedge d\beta)$ où $\beta = \overline{p^* \alpha}$.

Le terme $\bar{\omega}^{\wedge(q-1)} \wedge d\beta$ apparaît dans $d(\bar{\omega}^{\wedge(q-1)} \wedge \beta)$ qui s'écrit

$$(q-1) d\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}^{\wedge(q-2)} \wedge \beta + (-1)^{q-1} \bar{\omega}^{\wedge(q-1)} \wedge d\beta.$$

Comme $\pi_0 d(\bar{\omega}^{\wedge(q-1)} \wedge \beta) = d(\pi_0(\bar{\omega}^{\wedge(q-1)} \wedge \beta))$ est une forme d'intégrale nulle sur G/K , l'intégrale de $\pi_0(\bar{\omega}^{\wedge(q-1)} \wedge d\beta)$ est aussi celle de la forme $(-1)^q (q-1) \pi_0(d\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}^{\wedge(q-2)} \wedge \beta)$.

Comme $d\omega = -[\dot{\omega}, \omega]$, on a

$$(-1)^q (q-1) \pi_0(d\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}^{\wedge(q-2)} \wedge \beta) = (-1)^{q-1} (q-1) [\dot{\omega}, \omega] \wedge \bar{\omega}^{\wedge(q-2)} \wedge \beta.$$

Par suite

$$\begin{aligned} (-1)^{q-1} q \pi(C+D) &= q(q-1) \int \pi_0([\dot{\omega}, \omega] \wedge \bar{\omega}^{\wedge(q-2)} \wedge \beta) \\ &= q! \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \sum_{i < j < q} (-1)^{i+j} [\dot{e}_{\sigma(i)}, \dot{e}_{\sigma(j)}] \wedge \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(i)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(j)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \\ &\quad \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

où σ décrit l'ensemble S des permutations de $\{1, \dots, n\}$ telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(q) \quad \text{et} \quad \sigma(q+1) < \dots < \sigma(n).$$

On obtient donc que $(-1)^{q-1} \pi(C+D) = q \pi(A')$.

Remarque. — On peut naturellement démontrer cette dernière égalité de façon combinatoire comme au a), mais l'interprétation de $\pi(C + D)$ en terme d'intégrale de forme différentielle et l'utilisation du théorème de Stokes donne une démonstration plus rapide et plus éclairante.

COROLLAIRE. — En posant $\bar{S}_q = (-1)^{[q/2]} S_q / q!$ [resp. $\bar{\varphi}_q = (-1)^{[q/2]} \varphi_q / q!$] on a $\delta \circ \bar{S}_q = \bar{S}_{q-1} \circ d$ (resp. $\delta \circ \bar{\varphi}_q = \bar{\varphi}_{q-1} \circ \partial$).

Remarque. — On peut alors exprimer $\bar{\varphi}_q$ de la façon suivante :

$$\bar{\varphi}_q(l) = (-1)^{[q/2]} \pi \left(\sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}) \right).$$

Il est intéressant de remarquer que l'élément

$$\sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)})$$

est K-invariant; en effet pour évaluer

$$\sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \text{Ad}k \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes U_k l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}).$$

on remplace la base (\dot{e}_i) par la base $(\text{Ad}k^{-1} \dot{e}_i)$ et on obtient

$$\det \text{Ad}k \cdot \sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}).$$

Mais K étant connexe on a $\det \text{Ad}k = 1$.

PROPOSITION 3. — K étant supposé connexe, \bar{S}_q (resp. $\bar{\varphi}_q$) est un isomorphisme topologique de $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ [resp. $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$] sur $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K$.

On va construire une application ψ_q de $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K$ dans $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ continue, telle que $\bar{\varphi}_q \circ \psi_q = \text{Id}$ et $\psi_q \circ \bar{\varphi}_q = \text{Id}$.

On utilise d'abord l'isomorphisme de $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K$ avec $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)^K$, autrement dit on remplace la classe de $\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a$ dans $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_K$ par :

$$\int \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_q \otimes U_k \cdot a \, dk.$$

On définit alors l'application $\psi_q(\pi(\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a))$ ainsi :

$$\dot{X}_1 \wedge \dots \wedge \dot{X}_{n-q} \in \Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f},$$

on associe

$$(-1)^{[q/2]} \int \frac{\text{Ad}k \cdot \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_q \wedge \dot{X}_1 \wedge \dots \wedge \dot{X}_{n-q}}{e_1 \wedge \dots \wedge e_n} U_k \cdot a \, dk.$$

On vérifie facilement que cette application appartient à $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$.
Calculons $\bar{\varphi}_q \circ \psi_q$.

On a :

$$\bar{\varphi}_q \circ \psi_q(\pi(\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)) = \pi \left(\sum_{\sigma \in S} \varepsilon_{\sigma} \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \right. \\ \left. \otimes \int \frac{\text{Ad}k \cdot \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_q \wedge \dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}}{\dot{e}_1 \wedge \dots \wedge \dot{e}_n} U_k \cdot a dk \right).$$

Dans la base $(\dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)})_{\sigma \in S}$ de $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ on a :

$$\text{Ad}k \cdot \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_q = \sum_{\sigma \in S} \lambda_{\sigma}(k) \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)}.$$

Alors

$$\text{Ad}k \cdot \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_q \wedge \dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)} = \lambda_{\sigma}(k) \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)} \\ = \varepsilon_{\sigma} \cdot \lambda_{\sigma}(k) \dot{e}_1 \wedge \dots \wedge \dot{e}_n.$$

D'où

$$\bar{\varphi}_q \circ \psi_q(\pi(\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)) = \pi \left(\sum_{\sigma \in S} \int \lambda_{\sigma}(k) \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes U_k a dk \right) \\ = \pi \left(\int \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \cdot \dot{Y}_q \otimes U_k a dk \right) = \pi(\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a).$$

Évaluons maintenant $\psi_q \circ \bar{\varphi}_q$.

Soit $l \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$. Si $\sigma \in S$, on note L_{σ} l'élément

$$(\dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)})).$$

Alors

$$\bar{\varphi}_q(l) = (-1)^{[q/2]} \pi \sum_{\sigma \in S} \varepsilon_{\sigma} L_{\sigma}.$$

Lorsque σ décrit S , les $\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}$ constituent une base de $\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}$, et on a pour $\sigma' \in S$:

$$L_{\sigma} \wedge (\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)}) \\ = \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \wedge \dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)} \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}) \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma' \neq \sigma, \\ \varepsilon_{\sigma} (\dot{e}_1 \wedge \dots \wedge \dot{e}_n) \otimes l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)}) & \text{si } \sigma' = \sigma. \end{cases}$$

Comme $\sum_{\sigma \in S} \varepsilon_{\sigma} L_{\sigma}$ est un élément K-invariant de $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E$, on a pour $\sigma' \in S$:

$$\Psi_q \circ \bar{\varphi}_q(l)(\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)}) = \sum_{\sigma \in S} \varepsilon_{\sigma} \frac{L_{\sigma} \wedge (\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)})}{e_1 \wedge \dots \wedge e_n} = l(\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)}).$$

Il en résulte que $\Psi_q \circ \bar{\varphi}_q(l)$ et l , qui coïncident sur la base $(\dot{e}_{\sigma'(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma'(n)})_{\sigma \in S}$ de $\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}$, sont égales.

Remarque 1. — L'application T_q réciproque de \bar{S}_q est définie ainsi : à un élément de $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_{\mathbb{K}}$ de la forme $\pi(\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)$ on associe la classe dans $\Omega_c^{n-q}(G/K, E)_G$ de la forme A définie pour tout $g \in G$ par

$$A(g) = \xi(g) \int (i_{Y_1} \dots i_{Y_q}(\bar{\omega}^{\wedge n})(gk) \circ \Lambda^{n-q} D_g R_k) \otimes U_{gk} \cdot a \, dk,$$

où ξ est un élément de $C_c^{\infty}(G)$ d'intégrale 1.

Remarque 2. — La proposition 3 conduit à un isomorphisme de Poincaré entre $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ et $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E)$.

Pour $\mathbb{K} = \{e\}$ cet isomorphisme était signalé dans [4] (p. 288, exercice 15). Deux autres isomorphismes (ou « dualités ») de Poincaré ont déjà été démontrés :

(i) l'isomorphisme de $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathbb{R})$ et de $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathbb{R})$ pour \mathfrak{g} unimodulaire, \mathfrak{h} réductive dans \mathfrak{g} et $n = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (cf. [6]);

(ii) l'isomorphisme, pour \mathfrak{g} unimodulaire, \mathfrak{h} réductive dans \mathfrak{g} et $n = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}^*(E, F)$ et du dual de $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}^{n-*}(E, F)$, si E et F sont deux $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ -modules admissibles dont l'un est de dimension finie (cf. [3], 1.2.9). L'isomorphisme de $\text{Hom}_l(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E$ que l'on a obtenu a pu être établi parce que toute classe de $\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E$ contient un unique élément \mathfrak{f} -invariant. Ceci explique que pour les $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ -modules on suppose \mathfrak{h} réductive dans \mathfrak{g} , car dans ce cas toute classe dans $\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \otimes E$ est représentée par un élément \mathfrak{h} -invariant.

On peut alors étendre (i) au cas où \mathfrak{g} n'est pas unimodulaire, mais en supposant toujours \mathfrak{h} unimodulaire et réductive dans \mathfrak{g} et obtenir ainsi un isomorphisme de $H^{n-*}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, E)$ pour tout $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ -module E .

Remarque 3. — Lorsque $\mathbb{K} = \{e\}$ on peut décrire le noyau de l'application $S_q : \Omega_c^{n-q}(G, E) \rightarrow \Lambda^q \mathfrak{g} \otimes E$; c'est l'ensemble des formes α du type $f \wedge \omega^{\wedge(n-q)}$ où f est une fonction appartenant à $C_c^{\infty}(G, \Lambda^q \mathfrak{g} \otimes E)$ d'intégrale nulle.

2.B. CAS OÙ \mathbb{K} EST NON CONNEXE. — D'après ce qui précède l'application $\bar{\varphi}_q$ est un isomorphisme topologique de $\text{Hom}_{\mathbb{K}^0}(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_{\mathbb{K}^0}$.

L'espace $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ est $\text{Hom}_{K^0}(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})^{K/K^0}$ où l'action de K/K^0 est donnée par :

$$\forall l \in \text{Hom}_{K^0}(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) \quad \forall \dot{k} \in K/K^0, \quad \dot{k}.l = U_k \circ l \circ \Lambda^{n-q} \text{Ad}k^{-1},$$

k étant un représentant quelconque de \dot{k} .

On a :

$$\bar{\varphi}_q(\dot{k}.l) = (-1)^{l(q/2)} \pi \left(\sum_{\sigma \in S} \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes U_k l(\text{Ad}k^{-1} \dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \text{Ad}k^{-1} \dot{e}_{\sigma(n)}) \right).$$

En remplaçant la base $(\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_n)$ par la base $(\text{Ad}k \dot{e}_1, \dots, \text{Ad}k \dot{e}_n)$, on obtient que $\bar{\varphi}_q(\dot{k}.l)$ est égal à

$$(-1)^{l(q/2)} \pi(\text{Ad}k \dot{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \dot{e}_{\sigma(q)} \otimes U_k l(\dot{e}_{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge \dot{e}_{\sigma(n)})) \cdot \det \text{Ad}k^{-1},$$

c'est-à-dire à $\det \text{Ad}k^{-1} \cdot (\Lambda^q \text{Ad}k \otimes U_k) \bar{\varphi}_q(l)$.

Donc $\bar{\varphi}_q$ est un K/K^0 -morphisme pour l'action suivante de K/K^0 dans $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)_{K^0}$:

$$\dot{k} \pi(\dot{X}_1 \wedge \dots \wedge \dot{X}_q \otimes a) = \det \text{Ad}k^{-1} \cdot \pi(\text{Ad}k \dot{X}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad}k \dot{X}_q \otimes U_k a),$$

où k est un représentant de \dot{k} .

Il en résulte que $\bar{\varphi}_q$ induit un isomorphisme de $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)^{K/K^0}$.

On a obtenu :

PROPOSITION 4. — Si K est un sous-groupe compact de G , K^0 la composante connexe de e dans K et n la dimension de G/K , les complexes

$$\Omega_c^{n-*}(G/K, E)_G, \quad \text{Hom}_K(\Lambda^{n-*} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) \quad \text{et} \quad (\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)^{K/K^0},$$

sont topologiquement isomorphes, l'action d'un élément \dot{k} de K/K^0 sur $(\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E)^{K/K^0}$ étant $\det \text{Ad}k^{-1} \cdot \Lambda^* \text{Ad}k \otimes U_k$, où k est un représentant quelconque de \dot{k} .

COROLLAIRE 1. — Si G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, les espaces $H_*(G, E)$ et $H_*(\mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E)^{K/K^0}$ sont topologiquement isomorphes.

Nous verrons au paragraphe suivant que $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E)^{K/K^0}$ s'interprète comme étant la (\mathfrak{g}, K) -homologie de G à coefficients dans le (\mathfrak{g}, K) -module $E \otimes \mathbb{R}_e$ où \mathbb{R}_e est \mathbb{R} muni de la structure de (\mathfrak{g}, K) -module pour laquelle l'action de \mathfrak{g} est triviale et celle de K est donnée par la représentation $\varepsilon : k \mapsto \det \text{Ad}k$.

COROLLAIRE 2. — « Isomorphisme de Poincaré » pour l'algèbre de Lie. Si K est un sous-groupe compact de G et si $n = \dim G/K$, on a un isomorphisme topologique de $H_*(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, E)^{K/K^0}$ sur $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$.

3. Isomorphisme de Poincaré dans la catégorie des (\mathfrak{g}, K) -modules

Rappelons qu'un (\mathfrak{g}, K) -module F est un espace vectoriel muni d'une représentation de \mathfrak{g} et d'une représentation de K vérifiant :

- (i) $\forall k \in K, \forall x \in \mathfrak{g}, \forall a \in F, (\text{Ad } k \cdot X)a = kXk^{-1}a$;
(ii) $\forall a \in F, K \cdot a$ engendre un sous-espace de dimension finie, la représentation de K dans cet espace est continue et

$$\forall Y \in \mathfrak{k}, \quad Y \cdot a = \frac{d}{dt}(\exp tY \cdot a)|_{t=0}.$$

On notera $\underline{C}_{\mathfrak{g}, K}$ la catégorie des (\mathfrak{g}, K) -modules.

Pour les définitions et propriétés de la (\mathfrak{g}, K) -cohomologie, on renvoie à [5], § 3.6. Nous utiliserons seulement que les $H^*(\mathfrak{g}, K, F)$ sont donnés par la cohomologie du complexe $\text{Hom}_K(\Lambda^* \mathfrak{g}/\mathfrak{k}, F)$.

Nous allons maintenant définir les espaces $H_*(\mathfrak{g}, K, F)$. Notons $F_{\mathfrak{g}}$ le quotient $F/\mathfrak{g}F$; $F_{\mathfrak{g}}$ est un K -module car $\mathfrak{g}F$ est stable par l'action de K : en effet, si $k \in K, X \in \mathfrak{g}$ et $a \in F$ on a

$$kXa = kXk^{-1} \cdot ka = (\text{Ad } k \cdot X)ka \quad \text{et} \quad kXa \text{ est donc un élément de } \mathfrak{g}F.$$

DÉFINITION. — On appelle $H_p(\mathfrak{g}, K, \cdot)$ les foncteurs dérivés à gauche du foncteur exact à droite $F \mapsto (F_{\mathfrak{g}})^K$.

Remarque. — Si F est un (\mathfrak{g}, K) -module, on peut considérer l'application $a \mapsto \int ka \, dk$ de F dans F^K , et on montre comme au paragraphe 1 qu'elle induit un isomorphisme (algébrique cette fois) de F^K sur $F_{\mathfrak{g}}^K$, d'où il résulte que les foncteurs $F \mapsto (F_{\mathfrak{g}})^K$ et $F \mapsto (F_{\mathfrak{g}})_K$ sont naturellement équivalents.

Pour $0 \leq q \leq n$, on note $I_q(F)$ l'espace $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \otimes F$ muni de la structure de (\mathfrak{g}, K) -module suivante :

si $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \dot{Y}_1 \in \mathfrak{g}, \dots, \dot{Y}_q \in \mathfrak{g}, a \in F, X \in \mathfrak{g}$ et $k \in K$

$$X(u \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a) = Xu \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a + u \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes Xa$$

et

$$k(u \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a) = \text{Ad } k u \otimes \text{Ad } k \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \text{Ad } k \dot{Y}_q \otimes ka.$$

LEMME. — Les (\mathfrak{g}, K) -modules $I_q(F)$ sont relativement projectifs dans la catégorie $\underline{C}_{\mathfrak{g}, K}$.

Pour établir ce résultat il est utile de calculer $u(1 \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)$ lorsque u est de la forme $X_p \dots X_1$ où les X_i appartiennent à \mathfrak{g} . Si I est le sous-ensemble $\{i_1, \dots, i_r\}$ de $\{1, \dots, p\}$ avec $i_1 > \dots > i_r$, on note u_I le produit $X_{i_1} \dots X_{i_r}$. Le complémentaire J de I dans $\{1, \dots, p\}$ étant $\{j_1, \dots, j_{p-r}\}$ où $j_1 < \dots < j_{p-r}$, on note u_J le produit $X_{j_1} \dots X_{j_{p-r}}$.

On établit alors facilement par récurrence sur p que :

$$u(1 \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a) = \sum_I (-1)^{p - \text{card } I} u_I \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes u_J a.$$

Supposons maintenant que l'on a un diagramme :

$$\begin{array}{c} I_q(F) \\ \downarrow h \\ A \xrightleftharpoons[s]{f} B \end{array}$$

où f, h sont des (\mathfrak{g}, K) -morphisms et s un K -morphisme tel que $f \circ s = \text{Id}_B$.

Nous allons construire un (\mathfrak{g}, K) -morphisme $\bar{h} : I_q(F) \rightarrow A$ tel que $f \circ \bar{h} = h$.

On définit $\bar{h}(u \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)$ lorsque u est de la forme $X_p X_1$ par :

$$\bar{h}(u \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a) = \sum_i (-1)^{p - \text{card} I} u_i \cdot s_i h(1 \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes u_i a).$$

On vérifie facilement que \bar{h} est nulle sur les éléments de la forme

$$-u X \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a + u \otimes \sum_i \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge [X, Y_i] \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a,$$

ensuite que \bar{h} est un (\mathfrak{g}, K) -morphisme et enfin que $f \circ \bar{h} = h$.

Remarque. — La démonstration précédente établit la « réciprocity de Frobenius » suivante :

si B est un (\mathfrak{g}, K) -module l'application

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(I_q(F), B) \rightarrow \text{Hom}_K(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F, B),$$

$$h \mapsto h',$$

où $h'(\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a) = h(1 \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_q \otimes a)$, est un isomorphisme.

D'après [5], § 2.9, la suite

$$0 \rightarrow I_n(\mathbb{R}) \rightarrow \dots \xrightarrow{d_q} I_q(\mathbb{R}) \rightarrow \dots \rightarrow I_0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\eta} \mathbb{R} \rightarrow 0,$$

où η est l'augmentation et

$$\begin{aligned} d_q(u \otimes \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \dot{Y}_{q+1}) &= \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} u Y_i \otimes (\dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_i \wedge \dots \wedge \dot{Y}_{q+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} u \otimes ([Y_i, Y_j] \wedge \dot{Y}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_i \wedge \dots \wedge \widehat{Y}_j \wedge \dots \wedge \dot{Y}_{q+1}), \end{aligned}$$

est une résolution forte relativement projective du (\mathfrak{g}, K) -module trivial \mathbb{R} . Alors la suite

$$0 \rightarrow I_n(F) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta_q} I_q(F) \rightarrow \dots \rightarrow I_0(F) \xrightarrow{\eta \otimes 1_F} F \rightarrow 0,$$

où $\delta_q = d_q \otimes \text{Id}_F$, est une résolution forte relativement projective de F dans $\underline{C}_{\mathfrak{g}, K}$.

Comme $I_q(F)_{\mathfrak{g}} = (\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} F$ s'identifie à $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} F$ (toujours d'après [5], § 2.9)

et comme $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} F = (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F)_{K^0}$ est isomorphe à $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F)^{K^0}$ on en déduit :

PROPOSITION 5. — Si F est un (\mathfrak{g}, K) -module et si V désigne l'action de K dans F , $H_*(\mathfrak{g}, K, F)$ est l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow (\Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F)^K \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} (\mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F)^K \rightarrow F^K \rightarrow 0,$$

où δ est définie comme au paragraphe 2 et où l'action de K dans $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F$ est $k \mapsto \Lambda^q \text{Ad } k \otimes V_k$.

Remarque. — On définit de façon évidente les bifoncteurs $\text{Tor}_*^{\mathfrak{g}, K}$ dans la catégorie $\underline{C}_{\mathfrak{g}, K}$. Le fait que les espaces $I_q(F)$ soient projectifs montre que $H_*(\mathfrak{g}, K, F) = \text{Tor}_*^{\mathfrak{g}, K}(\mathbb{R}, F)$ et aussi que, pour deux (\mathfrak{g}, K) -modules F_1 et F_2 , on a $\text{Tor}_*^{\mathfrak{g}, K}(F_1, F_2) = H_*(\mathfrak{g}, K, F_1 \otimes F_2)$.

D'après l'étude faite au paragraphe 2, l'application $\bar{\varphi}_q$ induit un isomorphisme de $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, F \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur le sous-espace de $\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F$ constitué des éléments K -invariants pour l'action suivante de K :

$$k \mapsto \det \text{Ad } k^{-1} \cdot \Lambda^q \text{Ad } k \otimes V_k.$$

Notons \mathbb{R}_ε l'espace \mathbb{R} muni de la structure de (\mathfrak{g}, K) -module pour laquelle l'action de \mathfrak{g} est triviale et celle de K est donnée par la représentation $\varepsilon : k \mapsto \det \text{Ad } k$ (ε est égale à 1 ou -1 sur chaque composante connexe de K). Alors $\bar{\varphi}_q$ est un isomorphisme de $\text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, F \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ sur $(\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes F \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)^K$ d'où la

PROPOSITION 6. — Si F est un (\mathfrak{g}, K) -module, on a un isomorphisme de Poincaré de $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, F \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$ avec $H_*(\mathfrak{g}, K, F \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)$.

Remarque. — Si E est un G -module différentiable, on définira sa (\mathfrak{g}, K) -homologie comme dans la proposition 5. Si $E_{(K)}$ désigne l'espace des vecteurs K -finis de E , $E_{(K)}$ est un (\mathfrak{g}, K) -module, on a $(E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})_{(K)} = E_{(K)} \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}$ et les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) &\simeq \text{Hom}_K(\Lambda^{n-q} \mathfrak{g}/\mathfrak{f}, E_{(K)} \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}}) \\ &\simeq (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)^K \simeq (\Lambda^q \mathfrak{g}/\mathfrak{f} \otimes E_{(K)} \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)^K, \end{aligned}$$

d'où il résulte que les espaces $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, $H^{n-*}(\mathfrak{g}, K, E_{(K)} \otimes \mathbb{R}_{\Delta^{-1}})$, $H_*(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)$ et $H_*(\mathfrak{g}, K, E_{(K)} \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)$ sont algébriquement isomorphes. Si, de plus, G a un nombre fini de composantes connexes et si K est un sous-groupe compact maximal, on obtient, en conclusion, un isomorphisme topologique entre $H_*(G, E)$ et $H_*(\mathfrak{g}, K, E \otimes \mathbb{R}_\varepsilon)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BLANC, *Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques* (Note C.R.A.S., t. 289, p. 161-163, 1979).
- [2] P. BLANC et D. WIGNER, *Homologie des représentations des groupes de Lie et dualité de Poincaré* (Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, 1980).
- [3] A. BOREL et N. WALLACH, *Seminar on the Cohomology of Discrete Subgroups of Semi-Simple Groups*, I.A.S., Princeton, 1977.
- [4] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [5] A. GUICHARDET, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Nathan/Cédic, 1980.
- [6] J. L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie* (Bull. Soc. Math. Fr., t. 78, p. 65-127, 1950).

Joëlle PICHAUD
Université de Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1982.)